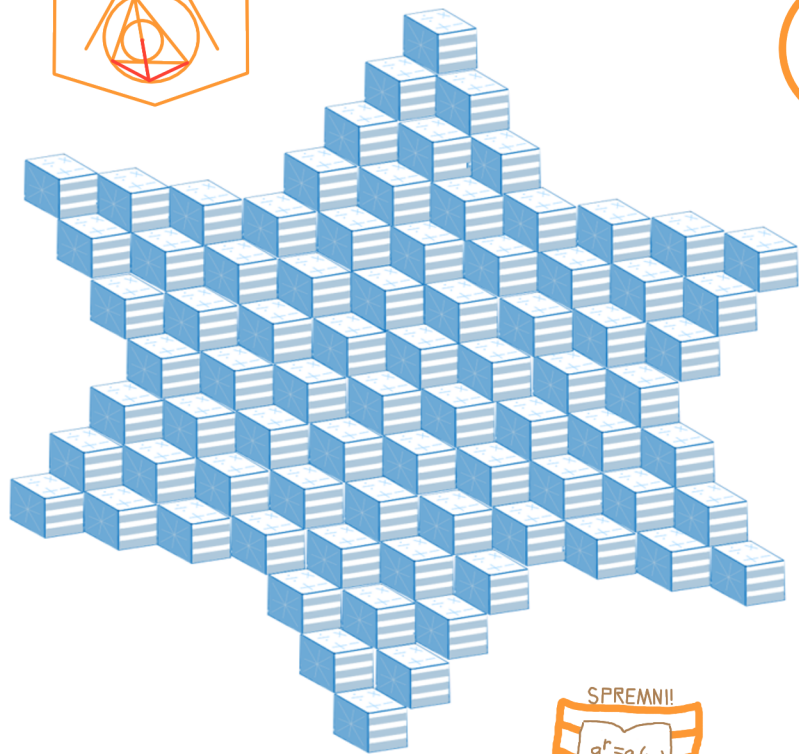
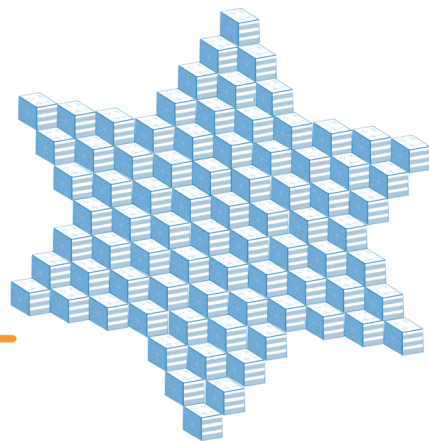
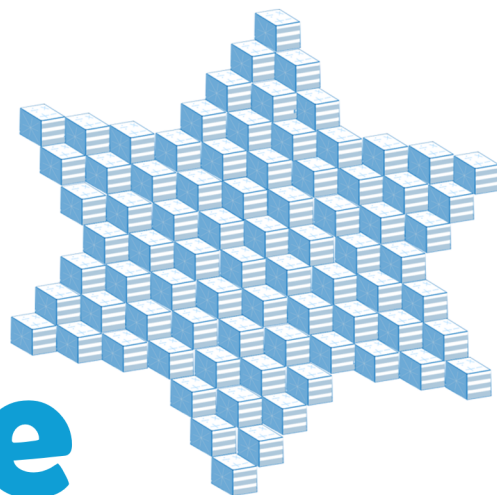


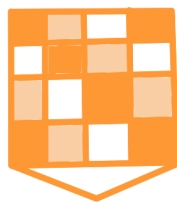
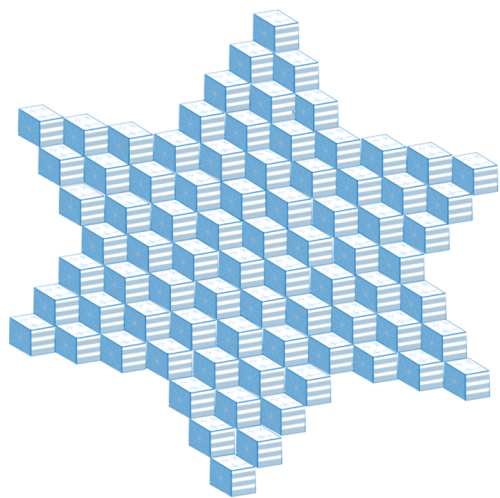
# Zimska



# škola



# matematike



# 2026.

# Sadržaj Knjige predavanja

## 1 Predgovor

## 2 Uvod

|       |                               |       |
|-------|-------------------------------|-------|
| 2.1   | O udruzi                      | ..... |
| 2.2   | Povijest kampova              | ..... |
| 2.3   | Lokacija i vrijeme održavanja | ..... |
| 2.4   | Aktivnosti na kampu           | ..... |
| 2.4.1 | Natjecanje kuća               | ..... |
| 2.5   | O predavanjima                | ..... |
| 2.6   | Projekti                      | ..... |
| 2.7   | Popis mentora                 | ..... |
| 2.8   | Ovaj kamp - u slikama         | ..... |

## I Zadaci s predavanja

### 3 Zadaci za prvu grupu

|     |                                             |       |
|-----|---------------------------------------------|-------|
| 3.1 | G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost | ..... |
| 3.2 | C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje             | ..... |
| 3.3 | A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije         | ..... |
| 3.4 | N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost            | ..... |
| 3.5 | X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet           | ..... |

### 4 Zadaci za drugu grupu

|     |                                             |       |
|-----|---------------------------------------------|-------|
| 4.1 | G2: Matej Vojvodić - Catcher in the $\pi$   | ..... |
| 4.2 | C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja    | ..... |
| 4.3 | A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje        | ..... |
| 4.4 | N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe | ..... |
| 4.5 | X2: Dario Vuksan - Indukcija                | ..... |

### 5 Zadaci za treću grupu

|     |                                                   |       |
|-----|---------------------------------------------------|-------|
| 5.1 | G3: Lana Milani - Potencija točke                 | ..... |
| 5.2 | C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara             | ..... |
| 5.3 | A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednačbe      | ..... |
| 5.4 | N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem | ..... |
| 5.5 | X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija     | ..... |

### 6 Zadaci za četvrtu grupu

|     |                                              |       |
|-----|----------------------------------------------|-------|
| 6.1 | G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri            | ..... |
| 6.2 | C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom | ..... |
| 6.3 | N4: Lana Milani - TB polinomi                | ..... |
| 6.4 | X4: Karlo Jokoš - Local ideja                | ..... |



## II Hintovi s predavanja

### 7 Hintovi za prvu grupu

- 7.1 G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost . . . . .
- 7.2 C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje . . . . .
- 7.3 A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije . . . . .
- 7.4 N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost . . . . .
- 7.5 X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet . . . . .

### 8 Hintovi za drugu grupu

- 8.1 G2: Matej Vojvodić - Catcher in the  $\pi$  . . . . .
- 8.2 C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja . . . . .
- 8.3 A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje . . . . .
- 8.4 N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe . . . . .
- 8.5 X2: Dario Vuksan - Indukcija . . . . .

### 9 Hintovi za treću grupu

- 9.1 G3: Lana Milani - Potencija točke . . . . .
- 9.2 C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara . . . . .
- 9.3 A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednačbe . . . . .
- 9.4 N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem . . . . .
- 9.5 X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija . . . . .

### 10 Hintovi za četvrtu grupu

- 10.1 G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri . . . . .
- 10.2 C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom . . . . .
- 10.3 N4: Lana Milani - TB polinomi . . . . .
- 10.4 X4: Karlo Jokoš - Local ideja . . . . .

## III Rješenja s predavanja

### 11 Rješenja za prvu grupu

- 11.1 G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost . . . . .
- 11.2 C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje . . . . .
- 11.3 A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije . . . . .
- 11.4 N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost . . . . .
- 11.5 X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet . . . . .

### 12 Rješenja za drugu grupu

- 12.1 G2: Matej Vojvodić - Catcher in the  $\pi$  . . . . .
- 12.2 C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja . . . . .
- 12.3 A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje . . . . .
- 12.4 N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe . . . . .
- 12.5 X2: Dario Vuksan - Indukcija . . . . .

### 13 Rješenja za treću grupu

- 13.1 G3: Lana Milani - Potencija točke . . . . .
- 13.2 C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara . . . . .
- 13.3 A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednačbe . . . . .
- 13.4 N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem . . . . .
- 13.5 X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija . . . . .

## 14 Rješenja za četvrtu grupu

- 14.1 G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri . . . . .
- 14.2 C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom . . . . .
- 14.3 N4: Lana Milani - TB polinomi . . . . .
- 14.4 X4: Karlo Jokoš - Local ideja . . . . .

## IV Ostalo

### 15 Projekti

- 15.1 P1: Svi možete riješiti P6, ali ne i P7, Emanuel Bajamić i Lana Milani . . . . .
- 15.2 P2: Vuku se linije, Matej Vojvodić i Marija Dora Marodi . . . . .
- 15.3 P3: Validan dokaz, Martin Vrbovčan i Dario Vuksan . . . . .
- 15.4 P4: Pa nije nuklearna fizika, Lara Jana Pačak . . . . .
- 15.5 P5: Riglob, Karlo Jokoš i Zvonko Andrijević . . . . .

### 16 Natjecanja

- 16.1 ELMO . . . . .

### 17 Završne riječi i zahvale

### 18 Kontakt

## 1. Predgovor

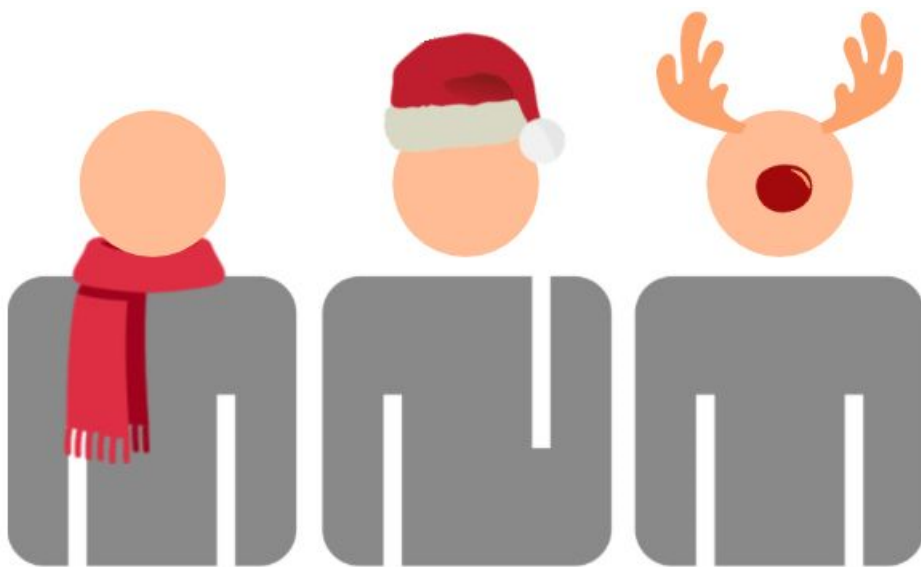
U ovoj knjizi moguće je pronaći (*skoro*) sva predavanja koja su se održala na Zimskoj školi matematike 2026. godine, zajedno s hintovima i rješenjima.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bismo zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na našu email adresu.

mentori Udruge,  
10. veljače 2026.



## 2. Uvod

### 2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.

Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".



Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga



Slika 2.2: Jedno od prvih predavanja subotom

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema, no s vremenom se djelovanje udruge proširila i na druge aktivnosti poput zimskih škola, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama i sajmovima...

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, a članovi Udruge dolaze iz desetak različitih srednjih škola, iz svih dijelova Hrvatske. Važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerenje u organiziranje važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija godišnjeg matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" - koje se već desetak godina održava širom svijeta, a ovogodišnje izdanje održano je u 50 država!

## 2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti sve svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te vjerujemo da kampovi svake godine postaju sve bolji. Godine iskustva starijih mentora, entuzijazam mladih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Nakon nekoliko godina uspješne organizacije Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Od tada se Zimska škola uglavnom održavala u Ogulinu, te je ovo bila osma Zimska škola u Ogulinu! Zimska je škola jako slična Ljetnom kampu, iako manja, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta.

Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce "MatKo" kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa u kojoj projekti zauzimaju i jutro i popodne svakog dana. Osim toga, Matematička konferencija stvara jedinstvene prilike za učenike koji su zainteresirani za matematiku izvan školskih i natjecateljskih okvira, te im omogućava prezentaciju samostalnog rada kao i na *prvim* konferencijama. Nažalost, Konferenciju ne planiramo održati ove godine, ali se nadamo njenom ponovnom održavanju u ljetu 2027.

Jedan od ciljeva svih kampova je povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampovima se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.



## 2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

Kao i mnogih prethodnih godina, Zimska škola matematike 2026. održala se u Ogulinu. Gotovo svi sudionici bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin, a predavanja i projekti su se održavala u Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin.



Slika 2.3: Učenički dom Ogulin <sup>1</sup>



Slika 2.4: OŠ Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin <sup>2</sup>

Kao i inače, Zimska škola je ove godine bila održana tijekom Zimskih praznika nastavne godine kako učenici (a ni mentori) ne bi gubili nastavu. Termin je kao i inače odabran odmah prije početka natjecanja u nadi kako će učenicima predavanja održana na kampu pomoći na školskoj, županijskoj, državnoj i višim razinama natjecanja!

## 2.4. Aktivnosti na kampu

Kao i inače, glavne su aktivnosti na kampu bile predavanja i cjelotjedni projekti. Učenici su slušali detaljno predavanja koja obrađuju određene teme natjecateljske matematike. Bilo je pet natjecateljskih predavanja za učenike tijekom tjedna, po jedno predavanje za svako standardno polje matematike te za kraj predavanje koje ukomponira više različitih polja. Projekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz primijenjenu matematiku u stvarnom životu, daljnju natjecateljsku matematiku, povezanost s drugim znanostima, a čak i fakultetsku matematiku.

Nakon večere svaki dan odvijale su se raznovrsne aktivnosti, kao što su pub kviz, kahoot, Estimation, te Powerpoint karaoke. Osim toga, za učenike je pripremljena radionica o mentalnom zdravlju, emocijama, anksioznosti i perfekcionizmu. Učenici su se također okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", dok su ozbiljniji natjecatelji sudjelovali na još jednom izdanju ELMO-a.

Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi sudionici imali su slobodno vrijeme tijekom kojeg se mogu družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, bela, Coup, Exploding kittens, kockice ...

### 2.4.1. Natjecanje kuća

Ove godine smo ponovo organizirali "Natjecanje kuća", u koju su svrhu učenici bili podijeljeni u četiri (otprilike) jednakobrojne kuće *Algebra*, *Kombinatorika*, *Geometrija* i *Teorija brojeva* koje su otprilike odgovarale njihovom omiljenom području, a svaku kuću vodio je par mentora.

Učenici su preko raznih zadataka koji su uključivali gradnju snjegovića, pravljenje plakata, pravljenje promotivnog videa i još pregršt različitih načina zarađivali bodove za svoju kuću.

<sup>1</sup>Izvor fotografije: [Web stranica Učeničkog doma Novi Zagreb](#)

<sup>2</sup>Izvor fotografije: [Web stranice ogulin.eu](#)

## Pobjednici natjecanja su učenici kuće *ALGEBRA*



Slika 2.5: Pobjednička kuća "Algebra" na svečanom zatvaranju

Odmah iza njih našla se kuća *Teorija brojeva*, a treće mjesto osvojila je kuća *Geometrija*.

### 2.5. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u četiri skupine ovisno o njihovom uzrastu i predznanju. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

### 2.6. Projekti

Projekti su cjelotjedna predavanja koja su dnevno trajala tri sata i detaljno su obrađivala odabranu temu. Ovdje su učenici imali priliku čuti više o temama koje ih zanimaju, bila to primjena matematike u stvarnom životu, napredovanje u nekim težim olimpijskim temama ili proučavanje ostalih područja znanosti. Popis i opise projekata možete pronaći kasnije u knjizi.

### 2.7. Popis mentora

Matej Vojvodić  
Emanuel Bajamić  
Dario Vuksan

Martin Vrbovčan  
Lana Milani  
Lara Jana Pačak

Zvonko Andrijević  
Marija Dora Marodi  
Karlo Jokoš



## 2.8. Ovaj kamp - u slikama



Slika 2.6: Jutarnja predavanja



Slika 2.9: Pravljenje timskih grbova



Slika 2.7: Powerpoint karaoke



Slika 2.10: Natjecanje reli



Slika 2.8: Pobjednici ELMO-a



Slika 2.11: Pobjednici relija





Slika 2.12: Popularno-znanstveno predavanje Borna Vukorepa



-Slika 2.14: Popularno-znanstveno predavanje - Pačak



Slika 2.13: Pobjednici kviza



Slika 2.15: Pobjednici Estimathona



Slika 2.16: Zajednička slika Zimske škole matematike 2026.

## **I. Zadaci s predavanja**

## 3. Zadaci za prvu grupu

### 3.1. G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Uvod

Trokut je najmanji kruti sistem u ravni: ako ga sastavimo od tri štapa, ne možemo ga deformirati bez da nešto pukne. No, često smo dovedeni u situaciju da kroz zadatke, neki praktičan problem ili dokazivanje neke teoreme trebamo da ih istinski razumijemo i manipuliramo trokutima. Za to nam koriste alati zvani: **sukladnost** i **sličnost**, sa kojima ćemo se danas pozabaviti.

Zamislite Sunce koje baca sjene zgrada, zrake svjetla koje prolaze kroz leću ili putanje lasera. Svi ovi fenomeni, na ovaj ili onaj način skrivaju trokute, skrivaju odnose stranica i kutova.

Na samom početku, mali disclaimer, ja sam fizičar po "struci" (*pls matematičari no hejt*), tako da ću većinski potruditi se da kroz primjere vidite kako nama ovi matematičarski koncepti služe u fizičarskim problemima i mukama.

#### Sukladnost

Najprije, hajmo definirati šta je to sukladnost!

##### Definicija 3.1.1

Za trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$  kažemo da su **sukladni** ako su im sukladne sve tri stranice i sva tri kuta, tj. ako vrijedi  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  i  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  te  $\angle CBA = \angle C'B'A'$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$  i  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ . Oznaka:  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

Ili pak laički rečeno :D

*Dva trokuta su sukladna ako ih možemo dovesti u položaj u kojem se potpuno podudaraju!*

## Teoremi o sukladnosti trokuta

### Teorem 3.1.2: Teoremi o sukladnosti trokuta

- Dva su trokuta sukladna ako i samo ako su im sukladne sve tri stranice. (**S-S-S teorem**)
- Dva su trokuta sukladna ako i samo ako su im sukladne dvije stranice i kut između njih. (**S-K-S teorem**)
- Dva su trokuta sukladna ako i samo ako su im sukladni jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu. (**K-S-K teorem**)
- Dva su trokuta sukladna ako i samo ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot većoj stranici. (**S-S-K teorem**)

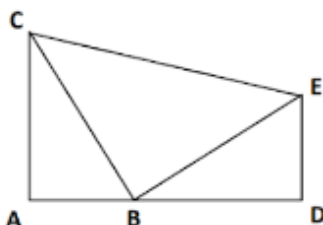
Iako neki ovi teoremi nisu "na prvu" teško shvatljivi, učenici se vrlo često zabune koristeći ih. Napomenimo zato da je vrlo bitno kod teorema o sukladnosti da su sukladni **odgovarajući** kutevi i **odgovarajuće** stranice što će biti ilustrirano i na sljedećim zadacima.

Istinska moć ovih teorema leži u tome da bez ikakvih mjerenja, već uz nekoliko ključnih informacija je dovoljno da kažemo da su dva trokuta sukladna.

### Korolar 3.1.3: Poveznica sa fizikom :)

Sukladni trokuti ilustriraju princip krutosti: oblik i veličina su fiksni, a položaj se može mijenjati.

**Primjer 1.** Na dužini  $\overline{AD}$  odabrana je točka B tako da su trokuti ABC i BDE pravokutni, a trokut CBE jednakokratan pravokutan (kao na slici 3.1). Pokaži da su trokuti ABC i BDE sukladni.



Slika 3.1: Slika uz primjer 1

**Rješenje 1.** U ovakvim je zadacima najbolje ispisati sve podatke koje nam zadatak nudi, a kako se traži sukladnost vrlo je vjerojatno da ćemo se trebati pozvati na neki od gore navedenih teorema. Dakle, budući da je  $\triangle CBE$  jednakokratan, vrijedi  $|BC| = |BE|$ , a kako je taj trokut ujedno i pravokutan, slijedi da je  $\angle EBC = 90^\circ$ .

$\triangle ABC$  i  $\triangle BDE$  su pravokutni iz čega očito slijedi  $\angle BAC = \angle EDB = 90^\circ$ . Iz ovih okomitosti možemo dobiti još nekoliko sukladnih kutova. Naime,  $\angle ACB = \angle DBE$  jer su to kutovi iste vrste (sigurni smo da su oba šiljasta jer su u pravokutnome trokutu) s okomitim kracima. Iz istog razloga slijedi da je  $\angle CBA = \angle BED$ .

Sada možemo primijetiti da iz  $|BC| = |BE|$ ,  $\angle ACB = \angle DBE$  te  $\angle CBA = \angle BED$  prema K-S-K teoremu slijedi tražena sukladnost.  $\square$



# Sličnost

Mimikrija je sposobnost nekih vrsta biljaka i životinja, da se izgledom prilagode okolini radi zaštite od prirodnih neprijatelja. Međutim, u matematici sličnost ne znači da su dva lika "gotovo ista", već da su "istog oblika".



Slika 3.2: Kraljevski leptir podsjeća na Vicekraljevskog leptira

## Definicija 3.1.4: Sličnost trokuta

Za trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$  kažemo da su **slični** ako su im odgovarajući kutovi sukladni te odgovarajuće stranice proporcionalne, i to tako da je omjer duljina svih triju parova stranica jednak, tj.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} =: k.$$

Zajednički omjer njihovih stranica  $k$  zovemo **koeficijent sličnosti**.

Ili pak, ponovno laički rečeno: *Dva su trokuta slična ako se jedan od njih može homotetijom preslikati u trokut sukladan drugome.*

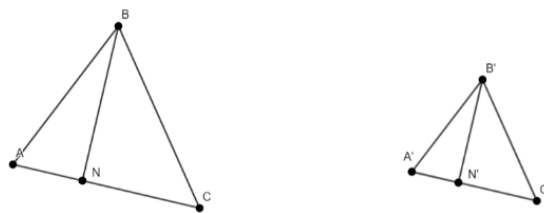
## Teorem 3.1.5: Teoremi o sličnosti trokuta

- Dva su trokuta slična ako i samo ako su im sukladna dva kuta. (**K-K teorem**)
- Dva su trokuta slična ako i samo ako im je jedan kut sukladan, a stranice uz taj kut proporcionalne. (**S-K-S teorem**)
- Dva su trokuta slična ako i samo ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne (**S-S-S teorem**)
- Dva su trokuta slična ako i samo ako su im dvije stranice proporcionalne i kutovi nasuprot većim stranicama sukladni. (**S-S-K teorem**).

## Teorem 3.1.6

Visine sličnih trokuta su proporcionalne te je njihov omjer jednak upravo koeficijentu sličnosti.

**Dokaz.** Neka su trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$  kao na skici 3.3 te točke  $N$  i  $N'$  nožišta visina iz vrhova  $B$ , odnosno  $B'$ . Želimo pokazati da je omjer visina označenih s  $\overline{BN}$  i  $\overline{B'N'}$  jednak koeficijentu sličnosti trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$  kojeg označimo s  $k$ . Po pretpostavci zadatka, ova su dva trokuta slična, dakle vrijedi  $\angle CAB = \angle C'A'B'$ .



Slika 3.3: Skica uz dokaz

Kako su  $\overline{BN}$  i  $\overline{B'N'}$  redom visine trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$ , znamo da je  $\angle CNB = \angle C'N'B'$  (pravi kut). Prema K-K poučku možemo zaključiti da su  $\triangle CNB$  i  $\triangle C'N'B'$  slični iz čega slijedi  $\frac{|BN|}{|B'N'|} = \frac{|CB|}{|C'B'|} = k$ . Time je tvrdnja dokazana.  $\square$

U dosta zadataka se koristi i sljedeći teorem.

### Teorem 3.1.7

Visina jednakokračnog trokuta iz nekog vrha prolazi polovištem nasuprotne stranice.

## Zadaci za samostalni rad

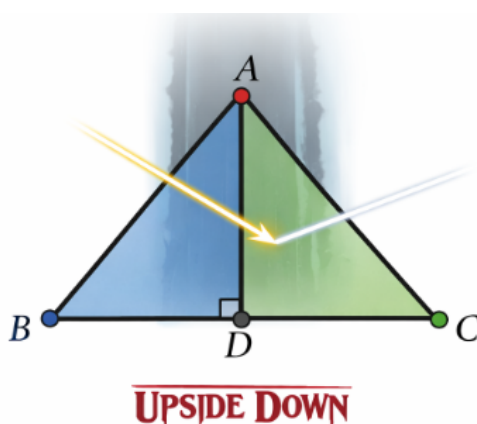
Sada ćemo koristeći sve dosad navedeno znanje objasniti primjenu sukladnosti i sličnosti na još nekim primjerima. U zadacima s natjecanja često se i neki dosta složeni zadaci mogu riješiti gotovo isključivo koristeći sukladnost i sličnost trokuta, ili se bar može doći jako blizu rješenju. Zbog toga je bitno na ovakvim primjerima dobro izježebati pojmove i rezultate vezane za sukladnost i sličnost, koliko god oni bili možda naizgled jednostavni.

1. Zadan je jednakokračan trokut  $\triangle ABC$ . Neka je  $P$  polovište stranice  $\overline{AB}$  te  $N$  nožište okomice iz  $P$  na  $\overline{AC}$ . Dokažite  $\triangle PBC \sim \triangle ANP$ .
2. Neka je  $ABCD$  paralelogram, a točke  $M$  i  $N$ , redom, polovišta stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{CD}$ . Dužine  $\overline{AM}$  i  $\overline{AN}$  sijeku dijagonalu  $\overline{BD}$  u točkama  $P$  i  $Q$ , redom. Dokažite  $\triangle ABQ \sim \triangle DQN$ .
3. Dokažite da, ako točka leži na simetrali kuta, onda je jednako udaljena od njegovih krakova.
4. Dokažite da ako su tetive  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  kružnice  $k$  sukladne, slijedi da su središnji kutovi nad tim tetivama jednaki.
5. Nad katetom  $\overline{AC}$  i hipotenuzom  $\overline{AB}$  pravokutnog trokuta  $\triangle ABC$  konstruirani su kvadrati  $ACFG$  i  $ADEB$ . Dokaži da je  $|CD| = |BG|$ .
6. Nad stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  šiljastokutnog trokuta  $ABC$  s vanjske strane konstruirani su kvadrati  $ABLK$  i  $ACMN$ . Dokaži da vrijedi  $|KN| = 2|AP|$ , gdje je  $P$  polovište dužine  $\overline{BC}$ .
7. Visina i težišnica trokuta  $\triangle ABC$  iz vrha  $A$  dijeli kut  $\angle BAC$  na tri jednaka dijela. Odredi sve kuteve trokuta.

**8. Jedan Stranger Things inspirisan: Portal u Upside Down-u.** U stvarnom svijetu portal je u obliku trokuta  $\triangle ABC$ . Točka  $D$  je nožište visine iz vrha  $A$  na stranicu  $BC$ .

U tzv. *Upside Down* svijetu isti se portal pojavljuje kao trokut  $\triangle A'B'C'$  koji je sličan trokutu  $\triangle ABC$  s koeficijentom sličnosti  $k > 1$ .

- Dokažite da su trokuti  $\triangle ABD$  i  $\triangle ADC$  sukladni ako i samo ako vrijedi  $AB = AC$ .
- Bez pretpostavke  $AB = AC$ , dokažite da su trokuti  $\triangle ABD$  i  $\triangle ADC$  slični.
- Neka su duljine stranica trokuta  $\triangle ABC$  jednake  $|AB| = 6$ ,  $|AC| = 8$  i  $|BC| = 10$ . Izračunajte duljine  $|AD|$ ,  $|BD|$  i  $|DC|$ .
- Ako je  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$  s koeficijentom sličnosti  $k = 1.5$ , odredite duljinu visine iz vrha  $A'$  u trokutu  $\triangle A'B'C'$ .
- Objasnite zašto se zakon refleksije svjetlosti na stranici  $BC$  ne mijenja pri prijelazu iz stvarnog svijeta u Upside Down.



Slika 3.4: Jedan "grafički-umjetnički" prikaz zadatka

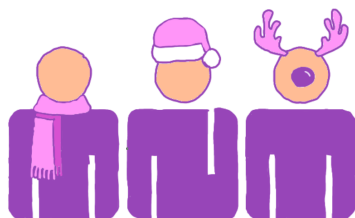
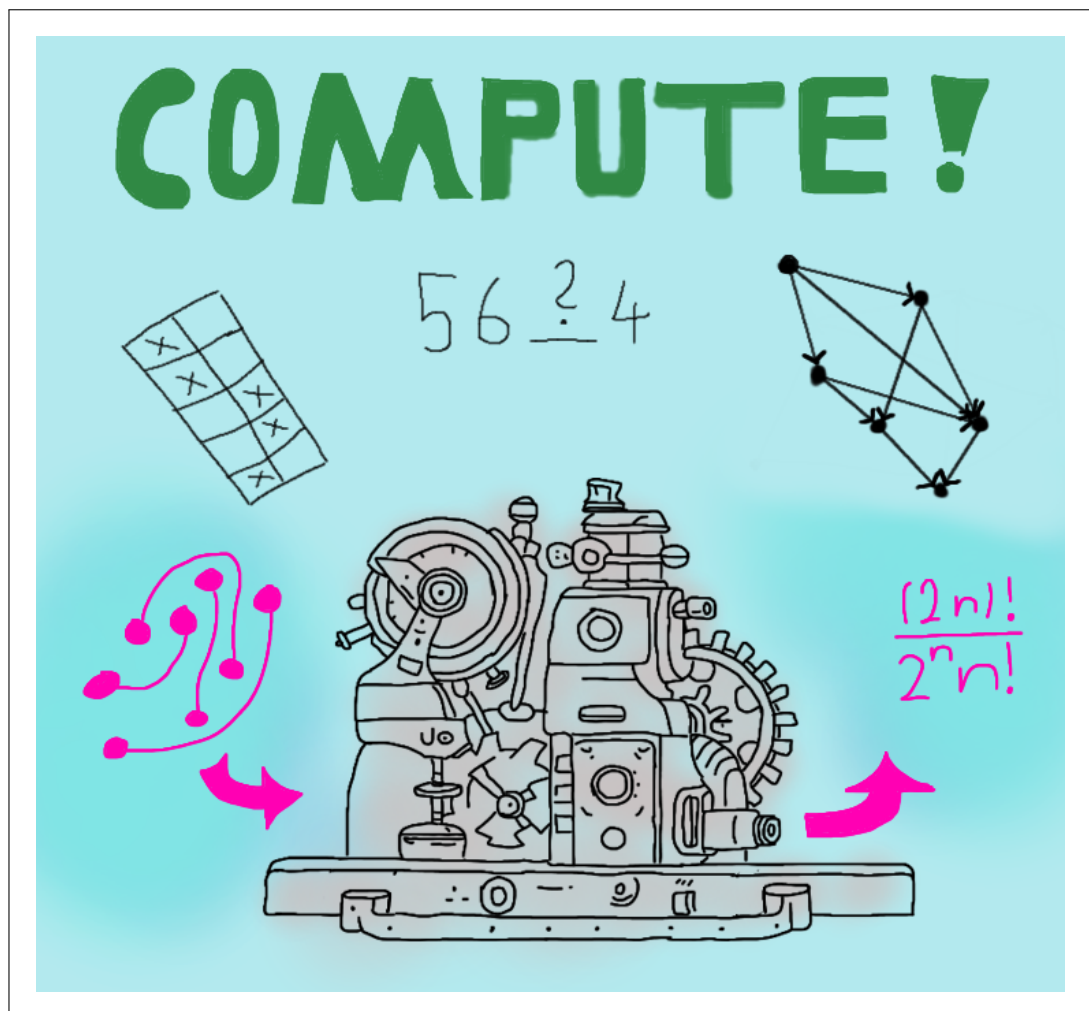
**9. Pokažite Bonerov poučak:** Neka je  $ABC$  takav da je  $\beta = 2\alpha$ . Ako je  $a$  duljina stranice nasuprot kuta  $\alpha$ ,  $b$  duljina stranice nasuprot kuta  $\beta$  te  $c$  duljina treće stranice, tada vrijedi  $b^2 = a^2 + ac$ .

## 3.2. C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje

Predavanje

Hintovi

Rješenja



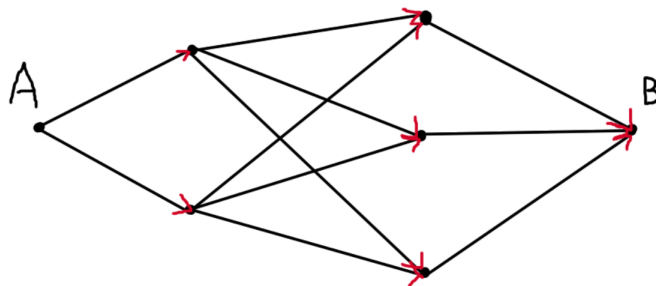
Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"  
Ogulin, 8.1.2026.



## As easy as 1,2,3...

Baš kao što naslov predavanja upućuje, danas ćemo se baviti prebrojavanjem, odnosno zanimat će nas koliko objekata zadovoljava svojstva koja nam zadatak kaže. Iako je prebrojavanje stvar koju radimo u našem svakodnevnom životu, zadatci iz prebrojavanja na matematičkim natjecanjima često trebaju mnogo kreativnosti i pametnog razmišljanja (a to je ono što ih čini zabavnima!) Budući da je koncept prebrojavanja intuitivno jasan, krenit ćemo odmah s jednim primjerom.

**Primjer 1.** Na koliko načina možemo doći iz točke  $A$  u točku  $B$  prateći smjerove strijelica.

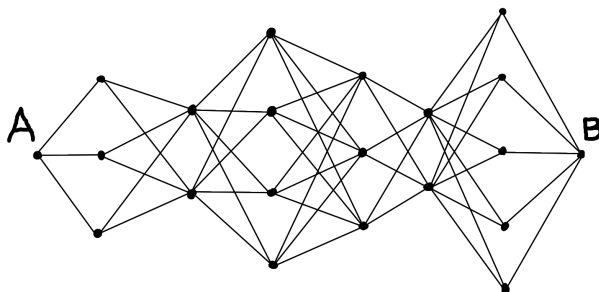


**Rješenje 1.** Ovo je zapravo vrlo jednostavno samo 'na prste prebrojat', ali čemu mi to malo više matematički argumentirati da pokušao uočiti zakonitost. Dakle, krećemo iz  $A$  i želimo doći do  $B$ . Dobro, pogledajmo prvo pomicanje. Možemo otići ili gore ili dolje. Ako bismo otišli gore, u sljedećem pomaku desno bismo onda mogli otići opet gore, u sredinu, ili pak dolje. Neovisno o tome što tu odaberemo, sve nas vodi u  $B$ . Okej, a da smo otišli na samom početku kad smo krenuli iz  $A$  prema dolje, opet bismo u sljedećem koraku mogli krenuti gore, u sredinu, ili dolje te bi sve opet vodilo u  $B$ .

Jasno, ovakvim prebrojavanjem vidimo da je odgovor 6, ali jesmo li to mogli nekako 'matematički' zaključiti? Pri kretanju iz  $A$  imali smo dvije opcije, dva smjera koja smo mogli pratiti te nakon odabira kojom strijelicom ćemo ići na početku, opet smo mogli birati jednu od tri strijelice koje ćemo pratiti. Dakle, broj putova mora biti  $2 \cdot 3$ , odnosno 6.  $\square$

Pogledajmo sada jedan sličan primjer koji izgleda znatno teže, ali rješavanje prošlog primjera nam zapravo odmah rješava i sljedeći.

**Primjer 2.** Na koliko načina možemo doći iz točke  $A$  u točku  $B$  ako se smijemo kretati samo desno?



**Rješenje 2.** Koristimo apsolutno istu matematičku strategiju koju smo koristili i u prvom primjeru. Iz prve točke možemo otići u tri različite točke. Iz svake od tih triju točaka možemo otići u 2 točke. Iz svake od tih dvaju točaka možemo otići u 4 različite točke. Iz svake od tih četiriju točaka možemo otići u tri različite točke. Iz svake od tih točaka možemo otići u različite točke te iz tih dvaju točaka možemo otići u pet različitih točaka. Konačno, iz svake od tih točaka odlazimo u  $B$ .

Dakle, vidimo da iz točke  $A$  do točke  $B$  možemo doći na

$$3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 720$$

načina. □

Iako se čini kao da smo sada promatrali jedan jako uzak dio prebrojavanja, generalna ideja ovakvog tipa prebrojavanja je iznimno primjenjiva u mnogo slučajeva.

**Primjer 3.** Koliko četveroznamenastih brojeva djeljivih s 5 ima prvu znamenku parnu, drugu znamenku neparnu te treću znamenku djeljivu s 3.

**Rješenje 3.** Iako se čini kao da smo bombardirani s uvjetima koje je nemoguće povezati, to zapravo nije slučaj. Analizirajmo brojeve koje možemo dobiti, znamenku po znamenku. Prije ove analize, osvrnimo se samo na činjenicu da naš broj mora biti djeljiv s 5. Svi ostali nam uvjeti govore, ova znamenka mora biti ovakva ili onakva, ovo sam govori nešto o potpunom broju. Međutim, znamo da je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka ili 5 ili 0.

- Na mjestu prve znamenke može biti jedan od sljedećih brojeva:

$$\{2, 4, 6, 8\}$$

Ne može biti 0 (koji je paran) jer onda ne bismo imali četveroznamenasti broj

- Na mjestu druge znamenke može biti jedan od sljedećih brojeva:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- Na mjestu treće znamenke može biti jedan od sljedećih brojeva:

$$\{3, 6, 9\}$$

- Na mjestu posljednje znamenke može biti jedan od sljedećih brojeva:

$$\{0, 5\}$$

jer broj koji je djeljiv s 5 mora završavati ili s 0 ili s 5.

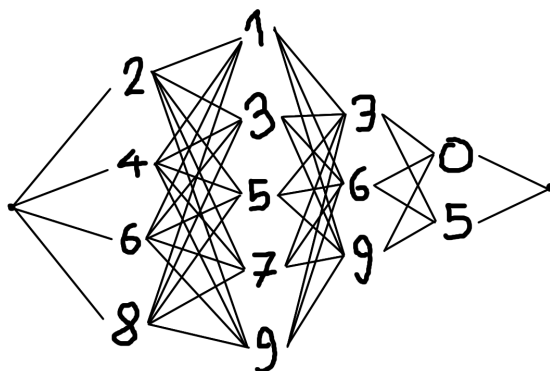
Dakle, za prvu znamenku imamo 4 opcije, za drugu 5, treću 3 te četvrtu 2 opcije. Dakle, možemo napraviti

$$4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. □

### Napomena

Fun fact, ovo gornje prebrojavanje možemo prikazati čak i preko grafova koje smo imali u primjeru 1 i 2. Nadam se da pomaže u vizualizaciji samog prebrojavanja što radimo.



Za kraj ćemo još samo proći kroz primjer u kojemu je prvo potrebno prvo malo proanalizirati o kakvoj je konfiguraciji riječ, a nakon krenit s prebrojavanjem (koje se ispostavlja da nije toliko teško).

**Primjer 4.** Na koliko načina možemo podijeliti brojeve od 1 do 14 u 7 parova, pri čemu je veći broj barem 2 puta veći od manjeg broja?

**Rješenje 4.** Primijetimo da, ako je najmanji broj u nekom paru barem 8, tada veći broj mora biti barem  $8 \cdot 2 = 16$ , što je nemoguće. To znači da najmanji broj u svakom paru mora biti između 1 i 7. Budući da u nizu postoji točno 7 parova, slijedi da manji brojevi moraju biti upravo brojevi od 1 do 7.

Broj 7 mora biti u paru s 14. Broj 6 tada ima dvije mogućnosti, biti u paru s 12 ili 13. Sada broj 5 ima tri mogućnosti, budući da je točno jedan od četiri broja  $\{10, 11, 12, 13\}$  već odabran. Nastavljajući na ovaj način, postoje 4 moguće opcije za broj 4, 3 za broj 3, 2 za broj 2 i 1 za posljednji broj 1. Sveukupno, traženi odgovor je

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144.$$

□

## Postoje i čudnije stvari od ovih zadataka.

“We gonna do this, or are we gonna keep  
chit-chatting like this is your mommy’s  
book club?”

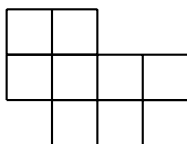
Erica Sinclair, *Stranger Things*

## Dustin’s side of the story

### Uvod.

Dustin je kao i svakoga dana, otišao spavati u 11 navečer. Međutim, ovog jutra se nije probudio u svojem krevetu, već u prostoriji sličnoj njegovoj sobi, ali bila je mračna. Dustinu odmah je bilo jasno da se nalazi u *Upside downu*. Odmah je pokušao pobjeći i zato je prišao vratima.

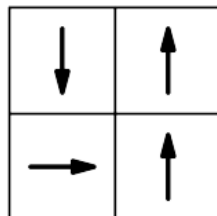
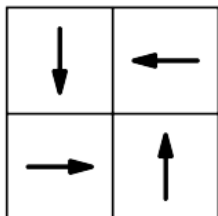
1. Na vratima je bio lokot koji je na sebi imao 4 znamenke za upisati (od 0 do 9). Koliko ukupno kombinacija Dustin u najgorem slučaju mora isprobati kako bi otvorio lokot?
2. Odmah nakon otvaranja vrata, Dustin je izašao iz sobe i počeo vikati 'SSTEVEEEE!' točno tim slovima. Budući da je Dustin znatiželjno dijete, zapitao se koliko različitih riječi može sastaviti koristeći slova od "SSTEVEEEE". Do kojeg će odgovora doći Dustin?
3. Bilo kako bilo, Dustin je morao pobjeći, i to brzo. Međutim, Dustinov OCD je kick innao kad je vidio da njegove najdraže knjige matematike nisu raspoređene u njegovom najdražem poretku. Dustin ima 8 knjiga od kojih jedne 3 knjige jednostavno moraju biti jedne do druge. Na koliko ih načina ukupno Dustin može posložiti?
4. Nakon što je izašao iz kuće, pred njim je stajalo 5 demagorgona (od kojih svakog razlikujemo) i 5 demadogova (od kojih svakog razlikujemo). Na koliko se načina demagorgoni i demadogovi mogu rasproediti u red pred Dustina tako da svaki demagorgon stoji samo pored demadogova.
5. Dustina, međutim, nisu zanimali ni demagorgoni, ni demadogovi, već kako pobjeći van. Shvatio je da se nalazi na gornjem lijevom kutu kvadratne mreže koja je prikazano ispod i da bi mu bilo ključno za bijeg prebrojati koliko ukupno pravokutnih ploča na kojoj se nalazi ima.



6. Dustin je bio dobro upoznat s Upside Downom, stoga ne čudi što je dosta brzo stigao do portala u normalan svijet. Međutim u pokušaju izlaska, pred njega se stvorio Vecna, najsnažniji zlikovac čitavog Stranger Thingsa. Kako Dustin nema moći, morao ga je pobijediti svojim intelektom te je zbog toga izazvao Vecnu u math battle. Vecna je prihvatio i rekao Dustinu da će ga pustiti na slobodu ako riješi sljedećih pet zadataka: Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?
7. Koliko ima peteroznamenastih brojeva u sustavu 11 koji imaju barem jednu znamenku 5?
8. Na koliko dijelova  $n$  pravaca u općem položaju (svaka dva pravca se međusobno sijeku i nijedna tri pravca se ne sijeku u istoj točki) dijeli čitavi Upside Down koji ako pretpostavimo da je Upside Down beskonačna ravnina?
9. Neka je  $n \geq 2$  prirodan broj. Ploči dimenzija  $n \times n$  odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti  $n$  topova tako da nikoja dva ne budu u istom retku ili stupcu?
10. demagorgona čini tim za napadanje Zemlje. Svaki dan troje demagorgona prolazi kroz portal i napada Zemlju. Ako je portal otvoren  $k$  dana, a svaki par demagorgona Zemlju napadaju točno jednom, odredite  $k$ .
11. Konačno, Dustin je pobijedio Vecnu svojim matematičkim sposobnostima i otišao kroz portal u svoj svijet. Prije samog odlaska, Dustin je Vecni odlučio dati dašak mudrosti, a to je odgovor na sljedeće pitanje: Na koliko načina možemo podijeliti brojeve od 1 do  $2n$  u  $n$  parova?

## Toto, I've a feeling that we're not in Kansas anymore

1. Na koliko različitih načina možemo u potpunosti popločiti pravokutnu ploču dimenzija  $2 \times n$  korištenjem domina dimenzija  $2 \times 1$ , pri čemu se domine smiju postavljati i okomito i vodoravno, bez preklapanja i bez praznih mjesta?
2. Geoff nacrtava pravokutnu mrežu dimenzija  $3 \times 4$  kvadrata. Zatim, unutar svakog kvadrata, nacrtava strelicu koja pokazuje prema gore, desno, dolje ili lijevo. Nazovimo kvadrat „pokazanim“ ako strelica u susjednom kvadratu pokazuje prema njemu. Koliko postoji načina da Geoff nacrtava strelice tako da svaki kvadrat bude pokazanim?  
(Na primjer, svaki kvadrat je pokazanim u mreži dimenzija  $2 \times 2$  s lijeve strane, dok gornji lijevi kvadrat nije pokazanim u mreži dimenzija  $2 \times 2$  s desne strane.)



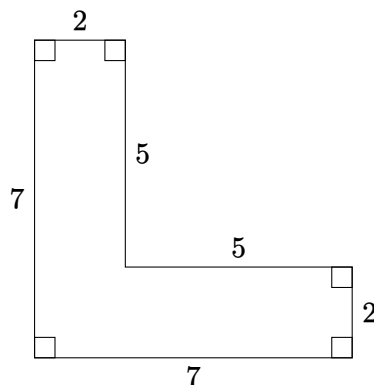
3. Svako polje ploče dimenzija  $m \times n$  ispunjeno je nekim nenegativnim cijelim brojem. Dva broja u ispunjenju nazivaju se susjednima ako njihova polja dijele zajedničku stranicu. (Primijetite da dva broja u poljima koja dijele samo kut nisu susjedni). Ispunjanje se naziva vrtom ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta:



(i) Razlika između bilo koja dva susjedna broja je ili 0 ili 1. (ii) Ako je neki broj manji ili jednak svim svojim susjednim brojevima, tada je jednak 0.

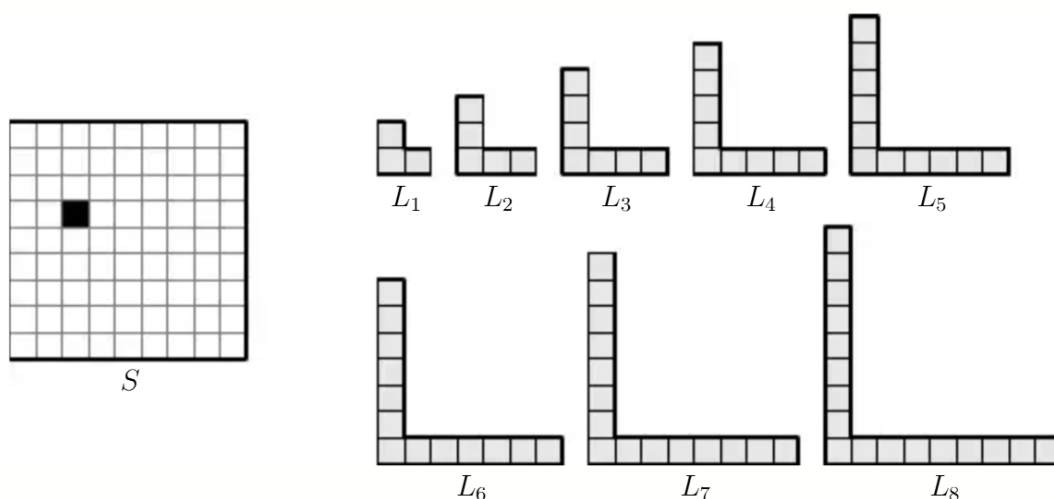
Odredite broj različitih vrtova u ovisnosti o  $m$  i  $n$ .

4. L-oblikovana regija formira se spajanjem dvaju pravokutnika dimenzija 2 puta 5 uz susjedne stranice kvadrata dimenzija 2 puta 2, kao što je prikazano ispod.



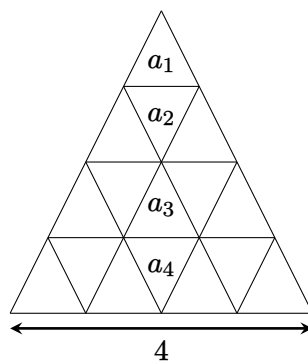
Dobiveni oblik ima površinu od 24 kvadratna jedinica. Koliko postoji načina da se ovaj oblik poploča domino pločicama dimenzija 2 puta 1 (od kojih svaka može biti postavljena vodoravno ili okomito)?

5. Na lijevoj slici ispod, kvadrat u četvrtom redu i trećem stupcu  $9 \times 9$  matrice je obrisani i tako smo dobili krnju ploču s 80 kvadratića. Za svaki  $n = 1, \dots, 8$  stavljamo po jedan  $L_n$  koja se sastoji od  $2n + 1$  kvadratića kao što je prikazano ispod. Izračunaj broj načina za popuniti krnji

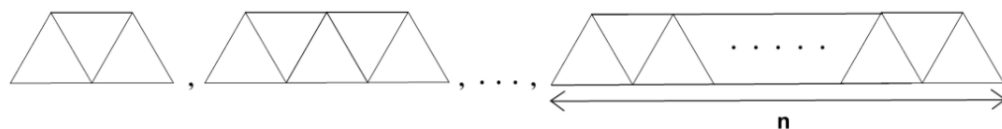


kvadrat koristeći tih osam  $L$  figura, svaku točno jednom.

6. Podijelimo jednakostraničan trokut na manje, sukladne jednakostranične trokute (ilustracija). Kažemo da trokut ima dimenziju  $n$  ako se na vanjskoj strani velikog jednakostraničnog trokuta nalazi  $n$  trokuta ( $n=4$  ispod)



Označimo male jednakostranične trokute kroz koje prolazi jedna od visina velikog jednakostraničnog trokuta s  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (primjer na ilustraciji iznad). Neka  $f(i)$  bude broj načina za popločiti veliki jednakostranični trokut koristeći točno jedan od



pri čemu je polje  $a_i$  izbačeno.

- Ako je  $n$  paran, odredi  $f(2) + f(4) + \dots + f(n)$
- Ako je  $n$  neparan, dokaži  $f(1) + f(3) + \dots + f(n) \geq 2^{n-2}$

## 3.3. A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Faktorizacijski klasici

Napisat ćemo listu poznatih faktorizacija.

- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$  za neparne  $n$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$
- $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Posebno, ako imamo  $x + y + z = 0$ , tada mora vrijediti  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ , a ovo je vrlo često korisno!

- $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-2}a_{n-1})$
- $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$  pri čemu  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Posljednja faktorizacija ovdje je posebno napomenuta jer ju je jako lagano ne primijetiti. Za mini zadatak prije nego što nastavimo dalje, faktoriziraj sljedeće izraze:

1.  $a^8 + 4$
2.  $x^6 + 6x^2y + 8y^3 - 1$

Kratki slatki primjer.

**Primjer 1.** Riješi sljedeću jednadžbu preko realnih brojeva

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$$

### Simetrični polinomi

Definirajmo prvo što je to simetrični polinom.

#### Definicija

Simetrični polinom  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je polinom u kojem vrijedi jednakost  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(c_1, c_2, \dots, c_n)$  pri čemu je  $c_1, c_2, \dots, c_n$  permutacija skupa  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Orpimjerimo ovu čudnu definiciju. Neka vrijedi

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Teorem kaže da je ovo simetričan polinom ako vrijedi

$$P(x, y, z) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(z, y, x)$$

što je ovdje trivijalno točno, ali za svaki slučaj ćemo pokazati da vrijedi barem jedna jednakost od navedenih;

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = z^3 + y^3 + x^3 - 3zyx = P(z, y, x)$$

## Propozicija

Simetrični polinom može se prikazati kao umnožak simetričnih faktora

Lijepa stvar koju dobivamo od simetričnosti polinoma je što možemo očekivati i simetričan faktore. Naprimjer, sigurno nećemo očekivati da  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  ima faktor  $(x + y + 2z)$  (bez da ima i faktore  $(x + 2y + z)$  i  $(2x + y + z)$ ) jer izraz  $x + y + 2z$  nije simetričan.

Pravimo se sada kao da još ne znamo koja je faktorizacija izraza  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ , pokušajmo ju dokučiti preko simetričnih polinoma. Stupanj izraza jest 3 (eksponent kod nepoznanice), dakle kada bismo ga rastavili na faktore, faktori bi morali imati stupanj ili 1 ili 2. Pretpostavimo da ima stupanj 1. Jedini simetrični polinom koji nam pada na pamet je polinom  $x + y + z$ . Ako doista vrijedi

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)Q(x, y, z)$$

za neki polinom  $Q$ , onda ako bismo si za provjeru djeljivosti uzeli takve  $x, y, z$  da vrijedi  $x + y + z = 0$ , morali bismo dobiti  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ . Uzmimo, naprimjer,  $x = 3, y = -2, z = -1$ . Tada je  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 27 - 8 - 1 - 18 = 0$ . Dakle  $x + y + z$  je jako vjerojatno faktor. Nadalje, za  $Q(x, y, z)$  znamo da mora imati formu  $\lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_2(xy + yz + zx)$  (jer stupanj mora biti 2 i mora biti simetričan, znači mora biti kombinacija od  $x^2 + y^2 + z^2$  i  $xy + yz + zx$ ). Dakle, imamo

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(\lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_2(xy + yz + zx))$$

Sada ispitivanjem nekoliko partikularnih točaka možemo dobiti vrijednosti od  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Naprimjer, uvrštavanjem  $x = a, y = 0, z = 0$  dobivamo  $\lambda_1 = 1$

**Primjer 2.** Faktoriziraj  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$

**Rješenje 1.** Izraz je očigledno simetričan, dakle mora imat simetrične faktore. Bubamo da ima faktor  $a + b + c$ . Pri uvrštavanju  $a = 3, b = -2, c = -1$  dobivamo  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = -3 + 8 - 5 = 0$ , dakle  $a + b + c$  je jako vjerojatno faktor od  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$ . Odnosno

$$a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = (a + b + c)Q(a, b, c)$$

Znatiželjnim uvrštavanjem stavimo  $a = b$  i vidimo da  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$  postaje 0, dakle,  $a - b$  dijeli  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$ , no kako je riječ o simetričnom polinomu, odmah znamo da ga dijele i  $b - c$  i  $c - a$ . Kako je  $(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$  stupnja 4 kao i  $a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$ , imamo:

$$a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3 = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

□

## Riješeni primjeri

**Primjer 3.** Za realne brojeve  $a, b, c$ , koji nisu jednaki nuli, vrijedi  $a + b + c = 0$ . Koliko je

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

**Rješenje 2.** Okej,  $a + b + c = 0$  nam po četvrtoj točki faktorizacijskih klasika daje

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Još ne znamo je li ovo nužno korisna činjenica, ali pokušajmo ovo nekako primijetniti na naš izraz.

Neka  $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = x$ , tada, množenjem s  $abc$  (što smijemo jer niti jedan od  $a, b, c$  nije 0) dobivamo

$$a^3 + b^3 + c^3 = xabc$$

Ali mi znamo da je  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ , prema tome imamo da je  $x = 3$ , odnosno

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3$$

□

**Primjer 4.** Za realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$ , različite od nule, vrijedi

$$a^2 + a = b^2, \quad b^2 + b = c^2, \quad c^2 + c = a^2.$$

Dokaži da je

$$(a - b)(b - c)(c - a) = 1.$$

**Rješenje 3.** Nama su zadani nekakvi izrazi s kvadratima i želimo pokazati da umnožak nekakvih razlika daje 1. Ovo nas svakako treba asociirati na razliku kvadrata, stoga odlučujemo to nekako provući.

Primijetimo

$$a^2 + a = b^2 \iff b^2 - a^2 = a \iff (b - a)(b + a) = a \iff b - a = \frac{a}{b + a}$$

Slično dobivamo i

$$c - b = \frac{b}{c + b}, \quad a - c = \frac{c}{a + c}$$

Ako bismo sada sve izmnožili dobili bismo

$$(b - a)(c - b)(a - c) = \frac{abc}{(a + c)(c + b)(b + a)}$$

Ali nemamo razlog zašto bi ovo bilo jednako 1 (odnosno  $-1$ ), međutim, bilo bi jako cool kad bi nam se u množenju nekako sve pokratilo. Naprimjer, da smo umjesto

$$c - b = \frac{b}{c + b}$$

imali nešto poput

$$c - b = \frac{b + a}{c + b}$$

Odnosno  $a - c = \frac{c+b}{a+c}$  umjesto  $a - c = \frac{c}{a+c}$  i  $b - a = \frac{a+c}{b+a}$  umjesto  $b - a = \frac{a}{b+a}$ . U tom slučaju bismo imali

$$(b - a)(c - b)(a - c) = \frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{(a + c)(c + b)(b + a)} = 1$$

Odnosno zadatak bi bio gotov. Možemo li si možda takvo nešto sriktati? Probajmo.

Zbrojimo jednadžbe  $a^2 + a = b^2$  i  $b^2 + b = c^2$ , dobivamo

$$a^2 + a + b = c^2 \iff a + b = (c - a)(c + a) \iff \frac{a + b}{c + a} = c - a$$

Bingo. Slično dobivamo

$$b - c = \frac{c + a}{b + c}, \quad a - b = \frac{b + c}{a + b}$$

Sada doista

$$(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a + b)(c + a)(b + c)}{(c + a)(b + c)(a + b)} = 1$$

A to smo i trebali pokazati.

□



# Zadaci

## In front of the hill

I hate all of this.

---

Hopper - Stranger Things

1. Zapišite izraz

$$\left[27^{-2m+3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-2m}\right]^{-2} : 81^{1+m} - 6 \cdot 81^{-3},$$

gdje je  $m$  cijeli broj, u obliku potencije s pozitivnim eksponentom.

2. Izračunajte

$$(\sqrt{43} + \sqrt{47})^{-2} \cdot (43^{-1} + 47^{-1}) + \frac{2}{(\sqrt{43} + \sqrt{47})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{43}} + \frac{1}{\sqrt{47}}\right)$$

3. Izračunaj

$$\sqrt{2} + \left(\frac{3}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} - 1\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

4. Faktoriziraj  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

5. Riješi jednadžbu u  $\mathbb{R}$ .

$$2x^2 + 2y^2 = 2x + 2y - 1$$

## Jogging up that hill

He's a sorcerer. A real life honest-to-God sorcerer

---

Mike - Stranger Things

1. Riješi u realnim brojevima:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$$

2. Pronađi sve realne  $x$  za koje

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

3. Neka  $x, y, z$  budu različiti realni brojevi. Dokaži da

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0$$

4. Odredi sve uređene parove cijelih brojeva  $(m, n)$  za koje  $mn \geq 0$  i

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$$

# RUNNING UP THAT HILL

I was looking for answers in somebody else.  
But, I had all the answers.  
I just needed to stop being so g\*dd\*mn  
scared.

---

Will Byres - Stranger Things

1. Riješi sustav jednačbi

$$(3x + y)(x + 3y)\sqrt{xy} = 14$$

$$(x + y)(x^2 + 14xy + y^2) = 36$$

2. Pokaži da za neparne cijele  $n \geq 5$

$$\binom{n}{0}5^{n-1} - \binom{n}{1}5^{n-2} + \binom{n}{2}5^{n-3} - \dots + \binom{n}{n-1}$$

nije prost broj.

3. Faktoriziraj  $5^{1985} - 1$  u produkt triju brojeva od kojih je svaki veći od  $5^{100}$

4. Dana su 2 segmenta duljine  $a$  i  $b$ , konstruiraj uz pomoć ravnala i šestara segment duljine  $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$

## 3.4. N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Djeljivost

#### Definicija 3.4.1

Kažemo da broj  $a \in \mathbb{Z}$  **dijeli** broj  $b \in \mathbb{Z}$  ako postoji cijeli broj  $k$  takav da vrijedi  $b = k \cdot a$ . Nadalje, kažemo da je  $a$  **djeljitelj** od  $b$ , a da je  $b$  **višekratnik** od  $a$ . To pišemo:

$$a \mid b$$

Ideje u predavanju: brojevi kao vreće faktora. Notacije  $\mid$ , gcd, lcm.

Vrlo jednostavna ali korisna tvrdnja: primjenom apsolutne vrijednosti na  $b = k \cdot a$  i uz  $k \geq 1$  dobivamo  $|a| \leq |b|$ .

Ovaj znak  $\mid$  možemo koristiti kao vlastitu "algebru", slično kao kongruencije. Postoje određena pravila koja vrijede.

#### Teorem 3.4.2

Neka  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ , tada vrijedi

- Uvijek vrijedi  $x \mid x$
- Uvijek vrijedi  $1 \mid x$  i  $x \mid 0$
- Ako  $x \mid y$  i  $y \mid z$ , onda  $x \mid z$
- Ako  $z \mid x$  i  $z \mid y$ , onda  $z \mid ax + by$  za bilo koje  $a, b \in \mathbb{Z}$
- Ako  $x \mid y$  i  $y \mid x$ , onda  $x = \pm y$
- Ako  $x \mid y$  onda  $x \mid yz$

#### Dokaz četvrte točke

Ako nam vrijedi  $z \mid x$  i  $z \mid y$ , to znači da postoje  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  takvi da

$$x = z \cdot k_1$$

$$y = z \cdot k_2$$

Sada za bilo koje  $a, b \in \mathbb{Z}$  imamo:

$$ax + by = a \cdot (z \cdot k_1) + b \cdot (z \cdot k_2) = z \cdot (a \cdot k_1 + b \cdot k_2)$$

Neka  $k = a \cdot k_1 + b \cdot k_2$ . Budući da je  $k \in \mathbb{Z}$  (jer je  $\mathbb{Z}$  zatvoren na množenje i zbrajanje), imamo

$$ax + by = z \cdot k$$

Dakle,  $z \mid (ax + by)$ .

**Primjer 1.** Pokaži da ako je  $n > 1$  prirodan broj  $\mathbb{N}$ , da ona ne možemo imati

$$n \mid 2n^2 + 3n + 1$$

**Rješenje 1.** Pretpostavimo da ipak postoji neki  $n > 1$  takav da  $n \mid 2n^2 + 3n + 1$ . Pri dokazu iskoristit ćemo četvrtu točku iz prošlog teorema (ona se uglavnom koristi u zadacima). Naime, znamo da  $n \mid -2n^2$  i  $n \mid 2n^2 + 3n + 1$ , dakle

$$n \mid 2n^2 + 3n + 1 + (-2n^2) \implies n \mid 3n + 1$$

Nadalje, znamo da  $n \mid -3n$  i  $n \mid 3n + 1$  (ovo je zaključak koji smo izvukli u tvrdnji iznad), dakle imamo

$$n \mid (3n + 1) + (-3n) \implies n \mid 1$$

Ali ni jedan broj osim 1 (i -1) ne dijeli 1. Prema tome, došli smo na kontradikciju da takav broj postoji. Dakle, tvrdnja je dokazana.  $\square$

## Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik

### Propozicija 3.4.3

Neka

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{i} \quad m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

Tada  $n \mid m$  ako i samo ako  $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_k \leq \beta_k$ .

### Lema 3.4.4

Euklidova lema Neka je  $p$  prost broj i  $p \mid ab$ . Dokaži da  $p \mid a$  ili  $p \mid b$  (ili oboje istovremeno)

### Propozicija 3.4.5

Zapišimo

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{i} \quad m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

Tada

$$\gcd(n, m) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$$

te

$$\text{lcm}(n, m) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$$

### Lema 3.4.6

Za bilo koje  $m, n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\gcd(m, n) \cdot \text{lcm}(m, n) = m \cdot n$$

### Definicija 3.4.7

Za dva broja  $m$  i  $n$  kažemo da su **relativno prosta** ako vrijedi  $\gcd(m, n) = 1$

**Primjer 2.** Dokaži da ako je  $\gcd(a, b) = 1$  da je onda i  $\gcd(a - b, b) = 1$

**Rješenje 2.** Pretpostavimo da  $\gcd(a, b) = 1$  i  $\gcd(a - b, b) = d > 1$ . iz definicije najvećeg zajedničkog djelitelja onda mora vrijediti:

$$d \mid a - b \quad \text{i} \quad d \mid b$$

Korištenjem četvrte točke iz Teorema 3 na gornje dvije djeljivosti dobivamo

$$d \mid a$$

Konkretno, imamo  $d \mid a$  i  $d \mid b$ , a  $\gcd(a, b) = 1$ . To onda mora značiti da je  $d = 1$ , odnosno  $\gcd(a - b, b) = 1$  (zašto?)  $\square$

Za kraj ćemo povezati naše GCD i LCM s djeljivošću koju smo radili prije u obliku sljedeće **iznimno** korisne leme.

#### Lema 3.4.8

Neka su  $a, b, c$  prirodni brojevi. Tada vrijede sljedeća dva svojstva.

- Ako  $c \mid a$  i  $c \mid b$ , onda  $c \mid \gcd(a, b)$
- Ako  $a \mid c$ , i  $b \mid c$ , onda  $\text{lcm}(a, b) \mid c$

## Euklidov algoritam

Efikasna tehnika za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju brojeva. Koristan i za baratanje gcd.

#### Teorem 3.4.9: Euklidov algoritam

Neka  $m, n \in \mathbb{N}$  te neka  $m > n$ , tada

$$\gcd(m, n) = \gcd(m - kn, n) \quad \text{za } k \in \mathbb{N} \text{ i } m - kn \geq 0$$

Euklidov algoritam nastaje smanjivanjem brojeva unutar gcd-a dok ne dođemo do  $\gcd(a, 0)$  u kojem slučaju zaključujemo  $\gcd(m, n) = a$

Odredimo  $\gcd(370, 100)$  bez faktoriziranja.

$$\begin{aligned} \gcd(370, 100) &= \gcd(370 - 3 \cdot 100, 100) = \gcd(70, 100) = \gcd(70, 100 - 1 \cdot 70) = \gcd(70, 30) \\ &= \gcd(70 - 2 \cdot 30, 30) = \gcd(10, 30) = \gcd(10, 30 - 3 \cdot 10) = \gcd(10, 0) = 10 \end{aligned}$$

#### Napomena 3.4.10

Ako se primjenom Euklidovom algoritma pronađemo u poziciji  $\gcd(a, b)$  pri čemu je  $b$  (ili  $a$ , skroz nebitno koji od te dvojice) negativan, onda se možemo ponovno prebaciti na pozitivne ovako:

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, -b)$$

Odnosno, na primjeru, imamo

$$\gcd(4, -2) = \gcd(4, 2) = 2$$

# Ostatci pri dijeljenju

## Lema 3.4.11

neka je  $n$  prirodan broj.

- $n^2$  može davati samo ostatke 0 i 1 pri dijeljenju s 3
- $n^2$  može davati samo ostatke 0 i 1 pri dijeljenju s 4
- $n^3$  može davati samo ostatke 0, 1 i 8 pri dijeljenju s 9
- $n^3$  može davati samo ostatke 0, 1 i 6 pri dijeljenju sa 7

**Primjer 3.** Riješi danu jednadžbu u skupu cijelih brojeva

$$4k^2 + 4k + 1 = 8n + 3$$

**Rješenje 3.** Na lijevoj strani jednadžbe imamo očiglednu faktorizaciju. Nakon faktoriziranja dobivamo:

$$(2k + 1)^2 = 8n + 3$$

Na lijevoj strani jednadžbe imamo kvadrat, a za njega znamo da daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 4. Međutim, na drugoj strani jednadžbe imamo izraz koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Dakle, dana jednadžba nikad neće imati rješenje u skupu cijelih brojeva.  $\square$

## Riješeni primjeri zadataka

**Primjer 4.** Neka  $x, y$  budu cijeli brojevi. Dokaži da ako je  $2x + 3y$  djeljiv sa 17, da je onda i  $9x + 5y$  djeljiv sa 17

**Rješenje 4.** Pretpostavimo da  $17 \mid 2x + 3y$ .

$$17 \mid 13 \cdot (2x + 3y) \implies 17 \mid 26x + 39y \implies 17 \mid 9x + 5y + 17(x + 2y)$$

Kako  $17 \mid 17(x + 2y)$  i  $17 \mid 9x + 5y + 17(x + 2y)$ , možemo zaključiti i da  $17 \mid 9x + 5y$ , a to smo htjeli i dokazati.  $\square$

**Primjer 5.** Neka  $m$  i  $n$  budu prirodni brojevi takvi da

$$\gcd(m, n) + \text{lcm}(m, n) = m + n$$

Pokaži da je jedan od brojeva  $m$  i  $n$  višekratnik drugoga.

**Rješenje 5.** Ako nećemo raspisivati  $n$  i  $m$  kao umnoške prostih potencija (što tu i nema baš smisla jer nam je u ovom zadatku riječ o sumama), postoji otprilike samo jedna jednadžba koju možemo iskoristiti, a ona je naravno

$$\gcd(m, n) \cdot \text{lcm}(m, n) = mn$$

Neka  $\gcd(m, n) = d$ , tada naša jednadžba postaje

$$d + \frac{mn}{d} = m + n \implies mn + d^2 = d(m + n) \implies (m - d)(n - d) = 0$$

Odnosno mora vrijediti  $m = d$  ili  $n = d$ . Kako  $d \mid m$  i  $d \mid n$ , u svakom će slučaju jedan broj biti višekratnik drugoga, a to smo trebali i pokazati.  $\square$



**Primjer 6.** Nađite sve prirodne brojeve  $n$  za koje su brojevi  $3n - 4$ ,  $4n - 5$  i  $5n - 3$  prosti.

**Rješenje 6.** Za početak, primijetimo da postoji samo jedan prost broj koji je paran i on je jednak 2, dakle svi ostali su neparni. Promotrimo  $3n - 4$  i  $5n - 3$ . Ako bismo uvrstili paran  $n$ , onda je  $3n - 4$  parno, a kako mora imati prostu vrijednost, možemo zaključiti kako mora vrijediti  $3n - 4 = 2$ , tj.  $n = 2$ . Vidimo da je ovo doista jedno rješenje u kojem su sva tri izraza prosti brojevi.

S druge strane, kad bi  $n$  bio neparan, tada bi  $5n - 3$  bio paran, a budući da mora biti prost, onda bi moralo vrijediti  $5n - 3 = 2$ , odnosno  $n = 1$ . Međutim, uvrštavanjem  $n = 1$  u  $3n - 4$  dobivamo negativan broj, dakle,  $n = 1$  nije jedno od rješenja.

Prema tome, jedini  $n$  za koji su sva tri dana izraza prosta je  $n = 2$ .

□

### Napomena 3.4.12

Ovo je najstereotipičniji primjer zadatka s prostim brojevima. Ideja u ovakvim zadacima je nekako podijeliti zadatak na manje slučajeve, bilo to preko parnosti, ostataka pri dijeljenju s 3 ili nekom sličnom forom prikladnom za zadatak.

**Primjer 7.** Neka  $n, p > 1$  budu prirodni brojevi i  $p$  prost. Dano je da  $n \mid p - 1$  i  $p \mid n^3 - 1$ . Dokaži da je  $4p - 3$  kvadrat nekog broja.

**Rješenje 7.** U ovom zadatku imamo tvrdnju koja je jako **generalna** i nema nekog pretjeranog smisla zašto bi bila istinita. Međutim, nama su zadani uvjeti koji zadovoljavaju ovaj kalup:

$$\text{nešto } s \mid n \mid \text{nešto } s \mid p \quad \text{nešto } s \mid p \mid \text{nešto } s \mid n$$

Dakle, ideja ograničavanja  $n$ -a i  $p$ -a bi mogla biti iznimno korisna jer bismo možda mogli postići nešto slično kao točki 5 iz teorema 3. Trenutačno, budući da nemamo baš neko otvorenje za zadatak, probavamo bilo što standardno. (i raspisujemo sve)

Imamo  $n \mid p - 1$ , iz uvjeta za djeljivost ovo nam daje dvije informacije:

$$p \geq n + 1, \quad p = nk + 1$$

za prirodan  $k$ .

Nadalje, iz  $p \mid (n - 1)(n^2 + n + 1)$  imamo da  $p \mid n - 1$  ili  $p \mid n^2 + n + 1$  (tvrdnja zadatka 2). Međutim, nije moguće da  $p \mid n - 1$  (jer  $p \geq n + 1$ ), dakle imamo

$$p \mid n^2 + n + 1$$

iz čega slijedi  $p \leq n^2 + n + 1$ . Primijetimo sada da vrijedi

$$nk + 1 \mid n^2 + n + 1 \mid kn^2 + kn + k \implies nk + 1 \mid kn^2 + kn + k - n \cdot (nk + 1) = nk + k - n$$

Dakle  $nk + 1 \leq nk + k - n \implies n + 1 \leq k$ . Motivirani idejom s jednakostima i znajući da je  $p = nk + 1$  primijetimo

$$n + 1 \leq k \implies n(n + 1) \leq nk \implies n(n + 1) + 1 \leq nk + 1 = p$$

Odnosno

$$n^2 + n + 1 \leq p$$

Ali, smo prije dokazali da vrijedi  $n^2 + n + 1 \geq p$ ! To nam onda znači da vrijedi  $n^2 + n + 1 = p$ , tj.  $4n^2 + 4n + 1 = 4p - 3$ , ali se  $4n^2 + 4n + 1$  faktorizira u  $(2n + 1)^2$ , i upravo to rješava naš zadatak!

□

### Napomena 3.4.13

Ovaj gornji primjer je jedan dobrano zahtjevan zadatak. Nemojte se osjećati obeshrabreno ako vam je bilo izazovno pratiti rješenje.

## Zadaci!

### Baratanje simbolima

1. Odredi  $\gcd(120, 500)$  koristeći Euklidov algoritam.
2. Dokaži da su  $21n + 4$  i  $14n + 3$  relativno prosti za bilo koji prirodan broj  $n$ .
3. Pokaži da  $\gcd(4n + 3, 2n) = 1$  ili  $\gcd(4n + 3, 2n) = 3$ .
4. Dokaži da  $\gcd(a, a + 1) = 1$  za prirodni  $a$ .
5. Dokaži da  $\gcd(a, b) = a$  ako i samo ako  $a \mid b$ .
6. Ako je  $p$  prost, dokaži da  $\gcd(a, p) = 1$  ili  $\gcd(a, p) = p$ .
7. Neka su  $a, b, d$  prirodni brojevi. Tada vrijedi  $\gcd(d \cdot a, d \cdot b) = d \cdot \gcd(a, b)$ .

### Više natjecateljski

8. Odredi sve proste brojeve  $p$  i  $q$  takve da vrijedi  $3p^2q + 2pq^2 = 483$ .
9. Odrediti sve proste brojeve  $p$  takve da su  $p + 10$  i  $p + 14$  također prosti brojevi.
10. Broj 2024 daje ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 (uključujući i 2024) koji daju ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24?
11. Odredi sve proste brojeve  $p$  takve da su  $p + 2$  i  $p^2 + 2p - 8$  također prosti brojevi.
12. Dokažite da za prost  $p > 5$  vrijedi  $360 \mid p^4 - 5p^2 + 4$ .
13. Počni s nekim nizom prirodnih brojeva. U jednom koraku možeš uzeti bilo koja dva broja  $a, b$  i zamijeniti ih s  $M(a, b)$  i  $V(a, b)$ . Dokaži da će se nakon nekog vremena brojevi prestati mijenjati.
14. Produkt tri prosta broja jednak je pet puta njihovom zbroju. Odredi ta tri prosta broja.
15. Pozitivan cijeli broj  $n$  pri dijeljenju s 3 daje ostatak  $a$ , pri dijeljenju s 5 daje ostatak  $b$ , a pri dijeljenju s 7 daje ostatak  $c$ . Odredi ostatak pri dijeljenju broja  $n$  sa 105 ako je  $4a + 3b + 2c = 30$ .
16. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:
  - $a + b + c = 2023$ ,
  - Broj  $b$  ima sve iste znamenke,
  - $a < b < c$ ,
  - $\text{NZD}(a, c) = 130$ .
17. Ako se pozitivnom cijelom broju prva znamenka pomakne s prvog mjesta na zadnje, dobiveni će broj biti tri puta veći od polaznog. Odredi najmanji takav broj.

18. Za proste  $p, q > 3$  dokažite da vrijedi  $24|p^2 - q^2$ .

19. Nađite sve parove  $(p, q)$  prostih brojeva takvih da vrijedi

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

20. Pokaži da  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  nema cjelobrojna rješenja osim  $(0, 0, 0)$ .

21. Pokažite da  $15x^2 - 7y^2 = 9$  nema cjelobrojnih rješenja.

22. Dokazati da između proizvoljna tri cijela broja uvijek možemo odabrati dva, nazovimo ih  $a$  i  $b$ , tako da je izraz  $a^4b^2 - a^2b^4$  djeljiv sa 20.

23. Odredi sve nenegativne parove cijelih brojeva  $(x, y)$  za koje je

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

24. Neka su  $a, b, c$  prirodni brojevi takvi da je  $a + b = ab - bc$  i  $c + 1$  je kvadrat prostog broja. Dokazati da je barem jedan od brojeva  $ab$  ili  $a + b$  potpun kvadrat.

25. Nađite sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  takve da vrijedi

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$

26. Dat je prost broj  $p$ . U jednoj grupi tinejdžera, neki koriste samo Instagram, neki koriste samo TikTok, a neki koriste i Instagram i TikTok. Poznato je da barem jedna osoba koristi obje društvene mreže. Broj onih koji koriste samo TikTok tačno je  $p + 1$  puta veći od broja onih koji koriste samo Instagram. Također, kvadrat ukupnog broja korisnika Instagrama jednak je ukupnom broju korisnika TikToka. Odrediti sve mogućnosti za broj tinejdžera koji koriste obje društvene mreže.

## 3.5. X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Ideja Dirichletova principa

Dirichletov princip jedan je od najjednostavnijih kombinatornih pravila, ali često je vrlo koristan alat u rješavanju matematičkih zadataka raznih težina. Ime je dobio po njemačkom matematičaru J. P. G. Lejeuneu Dirichletu koji je ga formalizirao i često ga koristio u svom radu u područjima teorije brojeva i matematičke analize. Inače je poznat i kao princip zečeva i kaveza ili princip golubinjaka (eng. *pigeonhole principle*).

U najjednostavnijem obliku, mogli bismo ga izreći na sljedeći način:

#### **Teorem 3.5.1: Dirichletov princip**

Ako  $n + 1$  kuglicu rasporedimo u  $n$  kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dvije kuglice.

**Dokaz.** Tvrdnju dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, to jest da se u svakoj kutiji nalazi jedna ili nijedna kuglica. Tada bi kuglica bilo najviše  $n$ , što je kontradikcija.  $\square$

Iako se čini da je Dirichletov princip očit i da je dokaz koji smo dali nepotreban i suvišan, važno je sve tvrdnje koje koristimo precizno izraziti i dokazati. Uz to, ponekad se u zadatku čini da je rješenje jednostavno očito i može biti teško smisliti argument za takve tvrdnje. Dirichletov princip je često koristan alat u takvim situacijama, a dani dokaz dobra ilustracija načina dokazivanja "očitih" tvrdnji. Dirichletov princip možemo i ovako formulirati:

#### **Teorem 3.5.2: Dirichletov princip**

Ako  $nk + 1$  kuglicu stavimo u  $n$  kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem  $k + 1$  kuglica.

Pokušajte sada ovo sami dokazati, koristeći ideju iz prijašnjeg dokaza.

### Kombica bombica

Mnogi zadatci iz područja kombinatorike se rješavaju pomoću Dirichletova principa. Pokazat ćemo par primjera.

**Primjer 1.** Neku školu pohađa 930 učenika. Pokažimo da među njima postoje bar dva učenika koja imaju iste inicijale.

**Rješenje 1.** U hrvatskoj abecedi imamo 30 slova. Inicijali se sastoje od prvog slova imena i prvog slova prezimena. To znači da ukupno imamo  $30 \cdot 30 = 900$  mogućih kombinacija inicijala. Naših učenika je 930 što je više od 900 pa po Dirichletu sigurno postoje dva s istim inicijalima.  $\square$

Sljedeći primjer je absolute classic!

**Primjer 2.** Pokažite da u skupini od šest ljudi postoje ili tri međusobna poznanika, ili postoji trojka ljudi od kojih se nikada dva ne poznaju.

**Rješenje 2.** Označit ćemo ljude s  $A, B, C, D, E, F$ . Zgodno bi nam bilo nekako označiti različite tipove poznanstva između dvoje ljudi pa ćemo upravo zato ako se nekih dvoje ljudi poznaje označiti tu dužinu plavom bojom, a ako se ne poznaju označit ćemo tu dužinu crvenom bojom. Odmah vidimo da

je zapravo ekvivalent zadatka naći jednobojni trokut. Super!, imamo neku ideju u kojem smjeru ići. Sada vidimo da nam je teško pratiti sve veze između svih ljudi jer nemamo nekakvu strukturu. Zbog toga ćemo si pojednostaviti stvari i "fiksirati" jednu osobu. Neka je to osoba  $A$ . Fiksirati ovdje znači da ćemo se zasad samo fokusirati na veze koje tvori osoba  $A$ . Po Dirichletu znamo da ona sigurno ima neka tri poznanstva koja su istog tipa i neka to budu prijateljstva iliti plavo obojane dužine prema ljudima  $C, D, F$ . Sada vidimo da ako se ikoje dvoje od to troje poznaje, onda smo gotovi jer imamo plavobojni trokut. S druge strane, ako se nitko od njih ne poznaje međusobno, onda smo isto gotovi jer imamo crvenobojni trokut! Ovime smo pokazali da u svakom slučaju možemo naći jednobojni trokut ili drugim riječima riješili smo zadatak.  $\square$

Kod kombinatornih zadataka koji koriste Dirichletov princip postoje razne strategije kako to shvatiti i iskoristiti. Kad riješite nekoliko zadataka ovakvog tipa dobit ćete intuiciju kada zadatak od vas zahtijeva Dirichleta. Kada to shvatite jako je bitno gledati **BROJEVE** koji su dani u zadatku. Zašto su baš oni dani, Bili tvrdnja vrijedila da je dan manji ili veći broj i slično. Na ovaj način dublje istražujete zadatak i otkrivате gdje su glavne točke u kojima bi se mogao iskoristiti Dirichlet.

Osim toga nakon što budete izrješavali više ovakvih zadataka vidjet ćete neke poznate **STRUKTURE** tj. konfiguracije koje su vrlo slične. Ako prepoznate neku konfiguraciju, onda znate što trebate proučavati kako biste mogli iskoristiti Dirichleta.

Najbitnije je uvijek nekako staviti neke brojeve na papir. Naći nešto što možete proučavati, a da toga ima toliko puno da neka dva objekta moraju biti u istom skupu.

## Svima nama draga teorija brojeva

Dirichletov princip se itekako može iskoristiti i u teoriji brojeva. Pogledajmo par primjera:

**Primjer 3.** Zadano je 15 prirodnih brojeva. Dokažimo da se među njima mogu odabrati dva broja čija je razlika djeljiva s 14.

**Rješenje 3.** Pokušajmo nekako povezati ovih 15 brojeva s brojem 14. Zanimljivo nam je što je 15 za jedan veće od 14 pa nas to potiče da nađemo 14 nekih skupova u koje možemo staviti bilo koji prirodan broj jer onda ćemo po Dirichletu sigurno imati dva broja u istom skupu što nam je korisno. Tu nam na pamet pada ideja da gledamo ostatke pri dijeljenju s 14. Oni su  $0, 1, \dots, 13$  i njih je uistinu 14. I sada vidimo da moraju onda postojati neka dva broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju s 14, ali onda je njihova razlika sigurno djeljiva s 14.  $\square$

**Primjer 4.** Pokažimo da postoji potencija broja 3 čije su zadnje četiri znamenke 0001

**Rješenje 4.** Što zapravo znači da neki broj završava znamenkama 0001? Pa to znači da daje ostatak 1 pri dijeljenju s  $10000 = 10^4$ . Pa se zapravo pitamo postoji li potencija broja 3 takva da je

$$3^n = 10^4 k + 1$$

ili drugim riječima postoji li  $n$  takav da  $10^4$  dijeli  $3^n - 1$ . Idemo onda gledati ostatke koje daju brojevi oblika pri dijeljenju s  $10^4$ . Uzmimo  $10^4 + 1$  prvih takvih brojeva:  $3, 3^2, \dots, 3^{10^4+1}$ . Slično prijašnjem zadatku znamo da neka dva moraju davati isti ostatak pri dijeljenju s  $10^4$  pa znamo da je njihova razlika djeljiva s  $10^4$ . Drugim riječima postoje  $n$  i  $m$  takvi da

$$3^{m+n} - 3^m = 3^m(3^n - 1) = 10000k.$$

Ovdje dolazi jedan jako bitan trenutak gdje primjećujemo da s obzirom na to da je  $\text{nz}(10, 3) = 1$  ova potencija od 3 nema nikakav utjecaj na djeljivost s  $10^4$ . Iz toga slijedi da  $10^4$  mora dijeliti  $3^n - 1$  čime smo riješili zadatak.  $\square$

U zadatcima iz teorije brojeva koji koriste Dirichlet često je korisno uzeti dovoljno nekih zbrojeva, razlika ili brojeva pa reći da neka dva moraju biti u istom skupu jer je tih objekata više od skupova. Često na raspolaganju imamo i beskonačno objekata kao naprimjer u prijašnjem zadatku.

Da je umjesto  $10^4$  bio bilo koji  $n$  koji je relativno prost s 3, nebitno koliko je on velik uvijek bismo našli neku potenciju  $m$  tako da  $n|3^m - 1$  jer potencija broja 3 imamo beskonačno mnogo. Zato je korisno staviti gledati na taj način i uvijek si uzeti ili na neki način stvoriti dovoljno objekata (brojeva, suma, razlika, potencija, ...).

## Vrijeme je za crtanje

Ne biste vjerovali, ali Dirichleta ima i u geometriji. Pogledajmo par primjera:  
Još jedan absolute classic!

**Primjer 5.** Neka su  $P_1, P_2, \dots, P_5$  točke u unutrašnjosti kvadrata duljine stranice 1. Pokažite da postoje neke dvije točke čija je udaljenost sigurno ne veća od  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Rješenje 5.** Točke su nam skroz nasumično postavljene i postavlja se pitanje kako odrediti udaljenosti ili pokazati da mora postojati neke dvije koje su "dovoljno blizu". Želimo nekako primijeniti Dirichleta i vidimo da imamo  $4 + 1 = 5$  točaka. Ako bismo nekako mogli podijeliti kvadrat na četiri dijela tako da možda znamo najveću udaljenost u svakom dijelu, znamo onda da će u nekom dijelu biti sigurno barem dvije točke pa ćemo možda biti gotovi. Podijelimo kvadrat kao prozor, tako što spojimo polovišta stranica. Na ovaj način smo dobili 4 manja kvadrata u kojima znamo da je najveća udaljenost od jednog vrha originalnog kvadrata do sjecišta spojnica plovišta originalnog kvadrata. Ta udaljenost upravo iznosi  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  i znamo da se u nekom tom manjem kvadratu nalaze barem dvije točke čime je zadatak dovršen!  $\square$

**Primjer 6.** U jednakostranični trokut stranice duljine  $2cm$  smještene su 33 točke. Dokažite da postoje tri točke koje se mogu prekriti krugom polumjera  $r = 0.3cm$

**Rješenje 6.** Opet moramo primijetiti važnost danih brojeva i podijeliti naš originalni lik na sukladne manje likove. Vidimo da je  $33 = 16 \cdot 2 + 1$ . Znači, znamo da ako trokut podijelimo na 16 manjih trokuta, postojat će neki manji trokut u kojem su definitivno barem tri točke. Podijelimo ga na 16 sukladnih trokuta stranice duljine  $a = 0.5cm$ . Sada, ako možemo pokazati da naš kruga ima veći polumjer od opisane kružnice malih trokuta bit ćemo gotovi. Znamo da je polumjer opisan kružnice trokuta jednak  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  iliti u našem slučaju  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{\frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{9}{108}} < \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}.$$

Čime smo završili zadatak.  $\square$

## Kombica bombica

1. Postoji li u razredu od 30 učenika, barem 3 učenika koji su rođeni u istom mjesecu? Koji može biti najmanji broj učenika da ovaj uvjet bude zadovoljen?
2. Osnovna škola u Ogulinu ima 30 razrednih odjela i 1000 učenika. Pokažite da u toj školi postoji odjel koji ima barem 34 učenika.
3. Na otvorenju zimskog kampa iz matematike okupilo se društvo od 40 učenika koji vole matematiku. Kad su došli na kamp pogledali su zid sa slikama drugih učenika i izbrojili koliko drugih učenika poznaju. Ako su poznanstva uzajamna pokažite da postoje dva učenika koji poznaju isti broj osoba.
4. Sedamnaest učenika dopisuje se svaki sa svakim. U svojim porukama pišu o tri teme: filmovi, knjige i glazba. Svaki par učenika piše o točno jednoj temi. Pokažite da postoji trojka učenika koji međusobno pišu o istoj temi.



5. Osamnaest mentora bilo je na sastanku za novim okruglim stolom te je čak svatko imao ispred sebe karticu sa svojim imenom. Tijekom sastanka uzmu pauzu kako bi otišli popiti vodu. Nakon nekoliko čaša vode vrata se oni nazad i sjednu za stol uopće ne obraćajući pažnju na kartice. Odmah su vidjeli da apsolutno nitko ne sjedi za svojim mjestom. S obzirom da im se nije dalo premještati odlučili su okretati stol. Može li se stol okretanjem dovesti u poziciju tako da barem dva mentora imaju ispred sebe odgovarajuće kartice?
6. Kolo sreće je podijeljeno na 36 isječaka. U njih su nekim redom upisani brojevi od 1 do 36. Dokažite da postoje tri susjedna isječka takva da je zbroj u njih upisanih brojeva najmanje 56.

## Svima draga teorija brojeva

7. Odabrano je  $n + 1$  prirodnih brojeva. Dokažite da postoje dva broja čija je razlika djeljiva s  $n$ .
8. Dokažite da među bilo kojih 2021 prirodnih brojeva od kojih nijedan nije djeljiv s 2021 postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2021.
9. Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_{50}, a_{51}$  različiti prirodni brojevi manji od 100. Pokažite da se među njima mogu naći tri broja tako da je jedan od njih jednak zbroju druga dva.
10. Dokažite da postoji prirodni broj  $n$  takav da je  $7^n - 1$  djeljiv s 2025.

## Vrijeme je za crtanje

11. U kvadratu stranice duljine 3 cm označeno je 10 točaka. Dokažite da barem dvije točke možemo pokriti kvadratom čija je stranica duljine 1 cm.
12. Na ljetnom kampu matematike nastao je veliki problem s komarcima. Na jednom prozoru u obliku kvadrata stranice duljine  $1m$  nalazio se 51 komarac. Kako bi im pomogao u rješavanju problema, dom im je dao jednu okruglu metlicu polumjera  $\frac{1}{7}m$ . Učenici su se pitali mogu li jednim udarcem metle ubiti u isto vrijeme barem neka tri komarca.
13. U laboratoriju obliku kocke brida duljine  $3m$ , iz razbijenog je terarija pobjeglo 136 leptira. Pokažite da se u svakom trenutku sferom polumjera  $0.9m$  može obuhvatiti barem 6 leptira.
14. Dano je 9 pravaca sa svojstvom da svaki od njih dijeli kvadrat na dva četverokuta čije s površine odnose u omjeru 2 : 3. Dokažite da najmanje 3 od tih 9 pravaca prolaze jednom točkom.

## Bučkuriš svega i svačega

15. Na jako bitan sastanak mentora kampa došlo je 18 ljudi. Pokažite da u toj grupi sigurno možemo naći četiri tako da se svi međusobno poznaju, ili četiri tako da se nitko međusobno ne poznaje.
16. Na matematičkom natjecanju bio je 361 sudionik iz šest država. U svakoj skupini sudionika od njih sedam postoji barem dvoje koji imaju jednak broj godina. Na natjecanju se stvorila debata koji sladoled je bolji: vanilija ili čokolada. Svaki sudionik preferira jedno od dvoje. Pokažite da je moguće naći grupu od 6 učenika koji su iz iste države, imaju jednak broj godina i vole isti tip sladoleda.
17. Dokaži da svakom nizu cijelih brojeva  $a_1, \dots, a_n$  postoji nekoliko uzastopnih članova čiji zbroj je djeljiv s  $n$ .

- 18.** Učenik tijekom godine rješava matematičke zadatke. Svakog dana riješi barem jedan zadatak, ali da mu ne bude previše, svaki tjedan riješi najviše 12 zadataka. Dokažite da postoji nekoliko uzastopnih dana u godini tijekom kojih će učenik riješiti točno 20 zadataka (godina ima 365 dana).
- 19.** U skupu prvih 100 prirodnih brojeva odabran je 51 različit broj. Dokažite da se među odabranim rojevima moraju naći dva broja čija razlika iznosi 2.
- 20.** Neka je  $n$  prirodni broj koji nije djeljiv s 2 ili 5. Dokažite da postoji višekratnik broja  $n$  oblika  $111\dots11$ .
- 21.** Nekoliko krugova (više od 4) ukupne duljine (opsega) 10 nalazi se unutar kvadrata duljine stranice 1. Dokažite da postoji pravac koji siječe barem četiri kruga.
- 22.** Dano je 20 prirodnih brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_{20}$  tako da vrijedi

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{20}.$$

Dokažite da među razlikama  $a_j - a_k$  ( $j > k$ ) postoje barem četiri koje su međusobno jednake.

- 23.** U ravnini je dano 6 točaka tako da nikada tri ne pripadaju istom pravcu. Dokažite da postoji trokut čiji su vrhovi neke tri od tih šest točaka i čiji jedan kut nije manji od  $120^\circ$ .

## 4. Zadaci za drugu grupu

### 4.1. G2: Matej Vojvodić - Catcher in the $\pi$

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Uvod

*“ Geometrija jest utakmica koju treba igrati po usvojenim pravilima.”*

U ovom predavanju na opće oduševljenje publike i predavača će se svi uključeni okušati u hvatanju kuteva (o uspješnosti pokušaja govorit će tko preživi). Kako se radi o opasnom i nepredvidljivom putovanju, valja se najprije upoznati s najbitnijim činjenicama koje treba uvijek imati na umu:

- Vršni kutovi su jednaki, kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni.
- Dijeljenjem kuta pravcem na manje kutove, zbroj dobivenih kuteva mora biti jednak početnom kutu. Poseban primjer ovoga je da su sukuti suplementarni.
- Poučci o sukladnosti: SSS, SKS, KSK, SSK.
- Poučci o sličnosti: KK, SKS, SSS.
- Ukoliko pravac (tangenta) dira kružnicu, tada je okomit na radijus u točki dodira.
- Zbroj kuteva u konveksnom  $n$ -terokutu je  $180^\circ \cdot (n - 2)$ .
- Neka je četverokut  $ABCD$  upisan u kružnicu sa središtem u točki  $O$ .
  - $2|\angle ABC| = |\angle AOC|$  (središnji kut dvostruko je veći od obodnog kuta)
  - $|\angle ACB| = |\angle ADB|$  (obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki)
  - $|\angle ABC| = 180^\circ - |\angle ADC|$  (obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni)
- Tetivni četverokut je svaki četverokut  $ABCD$  kojem se može opisati kružnica. Svaki od sljedećih uvjeta je dovoljan da se pokaže da je četverokut tetivan i ukoliko pokažete bilo koji, smijete koristiti sve ostale:
  - $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
  - $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$
  - $\angle ABD = \angle DCA$
  - $\angle ADB = \angle BCA$
  - $\angle BAC = \angle CDB$
  - $\angle CAD = \angle DBC$

## Motivacijski zadaci

*“Čitav taj aranžman namijenjen je ljudima koji su, u ovo ili ono doba svog života, tražili nešto što im njihova skica nije mogla pružiti. Ili su mislili da im ona ne može to pružiti. I tako su digli ruke od traženja. Odustali su prije nego što su ustvari uopće i počeli.”*

1. Pokaži da je vanjski kut trokuta jednak zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta.
2. Pokaži da se točka nalazi na simetrali dužine ako i samo ako je jednako udaljena od krajeva dužine.
3. Pokaži da se točka nalazi na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova kuta.
4. Zadana je kružnica, točka  $T$  izvan nje i iz  $T$  dvije tangente na kružnicu. Dokažite da su dirališta jednako udaljena od  $T$ .
5. Dokaži da se simetrale sve četiri stranice četverokuta sijeku u jednoj točki ako i samo ako je tetivan.
6. Neka su  $O$  središte opisane kružnice i  $H$  ortocentar  $\triangle ABC$ . Pokaži da je  $\angle BAH = \angle CAO$ .
7. Pokaži da je četverokut palalelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.
8. Pokaži da težište dijeli težišnice u omjeru 2:1 od kuta prema polovištu nasuprotne stranice.
9. Zadana je kružnica  $k$ . Pravci  $p_1$  i  $p_2$  prolaze kroz točku  $P \notin k$  koji sječu kružnicu  $k$  redom u točkama  $A$  i  $B$  odnosno  $C$  i  $D$ . Nađi sve parove sličnih trokuta kojima je jedan vrh  $P$ .
10. Neka se simetrale susjednih kutova (bilo kakvog) konveksnog četverokuta  $ABCD$  sijeku redom u točkama  $E, F, G$  i  $H$ . Dokažite da je četverokut  $EFGH$  tetivan.

## Leme, lemice i teoremi

*“Ako čovjek nešto čini previše dobro, onda se, nakon određenog vremena, ako ne pazi na to, počinje time razmetati.”*

11. Neka je  $k$  kružnica,  $A, B$  točke na  $k$  i  $t$  tangenta na  $k$  u točki  $A$ . Dokaži da je kut između tetive  $\overline{AB}$  i tangente  $t$  jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.  
*(teorem o kutu između tangente i tetive)*
12. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na polovištu luka opisane kružnice tog trokuta pridruženog toj stranici.
13. Zadan je trokut  $\triangle ABC$  kojem je  $H$  ortocentar.
  - a) Pokaži da točka  $H_1$  osnosimetrična točki  $H$  preko  $BC$  (tj.  $HH_1$  je okomit na  $BC$ , te je  $BC$  simetrala  $\overline{HH_1}$ ) leži na opisanoj kružnici trokuta  $\triangle ABC$ .
  - b) Pokaži da točka  $H_2$  centralno simetrična točki  $H$  preko polovišta  $\overline{BC}$  (tj. polovište  $\overline{BC}$  je polovište  $\overline{HH_2}$ ) također leži na opisanoj kružnici trokuta  $\triangle ABC$ .
  - c) Pokaži da  $\overline{AH_2}$  promjer opisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ .

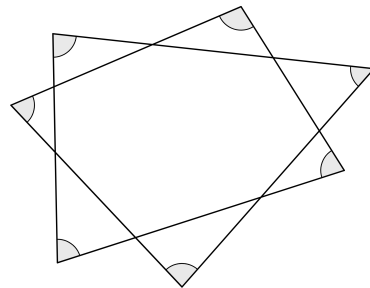
*(refleksije ortocentra)*

14. Neka je  $I$  središte upisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ . Pravac  $AI$  ponovo siječe opisanu kružnicu trokuta  $\triangle ABC$  u točki  $L$ . Neka je  $I_A$  točka centralno simetrična točki  $I$  preko  $L$ :
- pokaži da je  $L$  središte kružnice na kojoj leže točke  $B, C, I$  i  $I_A$ .
  - pokaži da je  $I_A$  središte  $A$ -pripisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ . *Napomena: središte  $A$ -pripisane kružnice je po konstrukciji sjecište simetrala vanjskih kuteva vrhova  $B$  i  $C$*   
(lema o trozupcu)
15. Neka je dan proizvoljan trokut  $\triangle ABC$ . Neka su  $A', B'$  i  $C'$  polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}$  i  $\overline{AB}$ . Neka su  $D, E$  i  $F$  redom nožišta visina iz točaka  $A, B$  i  $C$ , te neka je  $H$  njegov ortocentar. Neka su točke  $X, Y$ , i  $Z$  redom polovišta dužina  $\overline{HA}, \overline{HB}$  i  $\overline{HC}$ . Pokaži da točke  $A', B', C', D, E, F, X, Y, Z$  leže na istoj kružnici. (kružnica 9 točaka)

## Zadaci za svakoga

"You are on your own, kid, you always have been.  
You can face this."  
RIP Karlo Jokoš.

16. Sedam točaka spojeno je dužinama kao na slici desno. Odredite zbroj svih sedam označenih kutova.



17. Zadan je četverokut  $ABCD$  kojem se dijagonale sijeku pod pravim kutem. Ukoliko su kutevi  $\angle BAC = 40^\circ$ ,  $\angle ACD = 50^\circ$  i  $\angle ADB = 30^\circ$ , odredi kuteve  $\angle ADC$  i  $\angle CBA$ .
18. Neka je  $ABC$  šiljastokutni jednakokrani trokut s osnovicom  $\overline{AB}$  i neka je  $H$  ortocentar tog trokuta. Neka je  $H'$  točka simetrična točki  $H$  u odnosu na pravac  $AB$ . Odredi mjeru kuta  $\angle H'AC$ .
19. Dvije kružnice sijeku se u točkama  $P$  i  $Q$ . Ako dva pravca koja prolaze kroz točku  $Q$  sijeku prvu kružnicu u točkama  $A$  i  $B$ , a drugu kružnicu u točkama  $C$  i  $D$ , dokaži da su trokuti  $PAB$  i  $PCD$  slični.
20. Neka su  $\omega_1$  i  $\omega_2$  dvije kružnice koje se sijeku u točkama  $A$  i  $B$ . Zajednička tangenta kružnica  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , koja je bliža točki  $A$ , dodiruje  $\omega_1$  u  $P$  i  $\omega_2$  u  $Q$ . Tangenta na  $\omega_1$  u točki  $A$  siječe  $\omega_2$  u točki  $C$  različitoj od  $A$ , a produžetak dužine  $AP$  siječe  $QC$  u točki  $D$ . Neka je  $E$  središte opisane kružnice trokuta  $ABD$ . Pravci  $AD$  i  $QE$  sijeku se u  $F$ . Dokažite da  $F$  leži na kružnici nad promjerom  $PQ$ .
21. Neka je  $ABC$  s nožištima visina iz  $A, B, C$  redom  $D, E, F$ . Jedna od točaka presjeka kružnice  $ABC$  i  $EF$  je  $P$ . Pravci  $BP$  i  $DF$  sijeku se u  $Q$ . Dokaži  $AP = AQ$ .

## 4.2. C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja

Predavanje

Hintovi

Rješenja

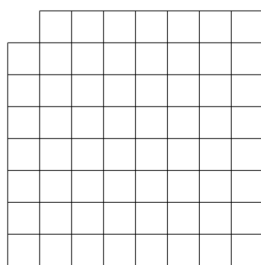
### Uvod

Na ovom predavanju nećemo uvoditi puno novih definicija, već ćemo pokušati izgraditi intuiciju za rješavanje kombinatornih zadataka s pločama. Proći ćemo razne tehnike i trikove za rješavanje zadataka s bojanjima/popločavanjima i objasniti zašto smo baš to bojanje ili popločavanje odabrali za neki zadatak.

#### Napomena 4.2.1

Vrlo često u zadacima vam ne kažu direktno da dokažete da se nešto može nekako popločati, već vam kažu da sami dođete do zaključka koje od toga vrijedi pa da to i dokažete. Ukoliko dokazujete da se nešto može popločati na neki način **potrebno je pronaći konstrukciju popločavanja**. Ponekad takvu konstrukciju možemo nacrtati, ako je ploča dovoljno malenih dimenzija, ili opisati kako bi izgledala, ako je ploča toliko velika da je nepraktično je nacrtati. U naprednijim zadacima možemo se koristiti i drugim tehnikama, poput matematičke indukcije, kako bismo konstruirali traženo popločavanje.

**Primjer 1.** Može li se ploča  $8 \times 8$  od koje su izrezana dva nasuprotna kutna polja popločati dominima (pravokutnim pločicama dimenzije  $1 \times 2$  ?



**Rješenje 1.** Ovdje koristimo najklasiničnije bojanje - šahovsko bojanje ploče. Primijetimo da smo izrezali polje iste boje (recimo da je to crna boja). Kada bi mogli popločati cijelu danu ploču sa dominama tada bi ukupni broj crnih i bijelih polja trebao biti jednak jer svaka domina pokriva jedno bijelo i jedno crno polje. Dana ploča ima 32 bijela polja, a 30 crnih polja pa takvo popločavanje nije moguće.  $\square$

U gornjem primjeru susreli smo se s jednostavnim bojanjem ploče koje nam brzo riješi zadatak. Naravno, šahovsko bojanje neće uvijek voditi do rješenja, no može biti odličan početak. Broj boja koji će bit koristan u određenom zadatku kao i način bojanja, naravno, moramo sami otkriti...

#### Napomena 4.2.2

Jedan vrlo bitan alat za rješavanje je i **matematička indukcija**, posebice u traženju konstrukcija. Naravno, indukciju možemo provoditi i samo po parnim brojevima, neparnim brojevima, potencijama broja 2 itd.

Još neke stvari na koje valja obratiti pozornost:

- Ako se u zadatku radi o  $n \times n$  ploči, korisno je proučiti što se događa na manjim pločama te potom naslutiti nešto o ploči dimenzija  $n \times n$ .



- Kada tražimo najmanji ili najveći broj za koji nešto vrijedi, koristan nam je Dirichletov princip i princip ekstrema.
- Kad želimo doći do kontradikcije, jako je korisno pronaći neku invarijantu na ploči. U tu svrhu je često korisno obojati ploču.

## Zadaci

1. Možemo li popločati  $10 \times 10$  kvadratnu ploču s  $1 \times 4$  pločicama?
2. Može li se šahovska ploča od koje je izrezano jedno kutno polje pokriti pravokutnim pločicama dimenzije  $1 \times 3$ ?
3. Je li moguće posložiti 53 cigla dimenzija  $1 \times 1 \times 4$  u kutiju dimenzija  $6 \times 6 \times 6$ ?
4. Antun i Karlo popločali su pravokutni pod pločicama dimenzija  $1 \times 4$  i  $2 \times 2$ . Na kraju posla Antun je slučajno razbio jednu pločicu. U zalihi im je ostala još samo jedna pločica, no suprotnog oblika. Mogu li Antun i Karlo ikako popraviti grešku i popločati pod preostalim pločicama?
5. Djeca na matematičkom kampu igraju igru na velikoj ploči dimenzija  $9 \times 9$  tako da na početku igre u svakom polju stoji jedan učenik. Kada Mislav vikne "SAD!" svaki učenik nasumično prelazi u neko od dijagonalnih susjeda svojeg polja (dijagonalni susjed je ono polje s kojim početno polje dijeli samo vrh). Nakon jednog poteza, koji je minimalni broj praznih polja?
6. Svaki od 9 kvadratića na ploči dimenzija  $3 \times 3$  treba obojati crvenom ili plavom bojom tako da se na ploči ne pojavljuje kvadrat dimenzija  $2 \times 2$  čitav obojan crvenom bojom. Na koliko načina možemo obojati danu ploču?
7. Jedan kut ploče dimenzija  $(2n+1) \times (2n+1)$  nedostaje. Odredi za koje sve brojeve  $n$  je moguće popločati danu ploču dominama  $1 \times 2$  tako da ih je točno pola u horizontalnoj poziciji.
8. (a) Dokažite da se ploča dimenzija  $4 \times 4$  može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.  
(b) Dokažite da gore navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija  $5 \times 5$ .
9. Dana je ploča dimenzija  $1000 \times 1000$ . Je li moguće obojati točno 125 polja te ploče tako da svako od obojanih polja ima neparan broj obojanih susjeda? Dva polja nazivamo susjedima ako imaju zajedničku stranicu.
10. Dokažite da ploču dimenzija  $2^n \times 2^n$  bez jednog kvadratića možemo popločati L-trominama.
11. U ravnini se nalazi  $n$  točaka i svaka je sa svakom spojena obojanom dužinom. Postoji  $n$  boja kojom su obojane dužine. Za sve 3 različite boje postoje 3 točke takve da one čine trokut obojan tim trima bojama. Može li  $n$  biti:  
(a) 6?  
(b) 7?
12. Polja ploče dimenzija  $N \times N$  obojana su u crno i bijelo tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različite boje i tako da je barem jedno polje u kutu ploče crne boje. U pojedinom koraku odabire se kvadrat dimenzija  $2 \times 2$  i sva četiri polja unutar tog kvadrata mijenjaju boju tako da bijela polja postaju crna, crna postaju siva, a siva postaju bijela.  
Odredi sve prirodne brojeve  $N > 1$  za koje je konačnim nizom opisanih koraka moguće postići da sva polja koja su na početku bila crna budu bijela i da sva polja koja su na početku bila bijela budu crna.

- 13.** Na nekim poljima ploče dimenzija  $2017 \times 2017$  nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak.

Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

- 14.** *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igrača ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh. Odredi najveći prirodni broj  $N$  za koji je na igraču ploču  $8 \times 8$  moguće postaviti  $N$  ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

## 4.3. A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Među često korištenim algebarskim manipulacijama pojavljuje se takozvana ideja teleskopiranja.

**Primjer 1.** Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

**Rješenje.** Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Sada je naša suma jednaka

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

**Primjer 2.** Neka je  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $n > 10$ . Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2 - 1}{2^2 + 3 \cdot 2 + 2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2 + 3 \cdot 3 + 2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3n + 2} = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2 + 3k + 2}.$$

**Rješenje.** Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k-1}{k+2}.$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2} \cdot \frac{3-1}{3+2} \cdot \frac{4-1}{4+2} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n+2}.$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od  $n$ , tako da ostaje

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

**Napomena.** Uvjet  $n > 10$  nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer za  $n = 3$  ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od  $n$ , pa treba zasebno argumentirati takav slučaj.

## Zadaci

1. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} + \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \sum_{k=2}^n \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}.$$

2. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$$

3. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 10$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{1 \cdot (1+3)} + \frac{6}{2 \cdot (2+3)} + \dots + \frac{6}{n \cdot (n+3)} = \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+3)}.$$

4. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

5. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \dots + \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{4k^2 - 1}.$$

6. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te  $x \in \mathbb{R}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k.$$

**Uputa.** Pomnoži i podijeli sumu s odgovarajućim izrazom.

7. Neka je  $n \in \mathbb{N}$  te  $x \in \mathbb{R}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k.$$

**Uputa.** Pomnoži i podijeli sumu s odgovarajućim izrazom.

8. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^n k \cdot k!.$$

**Napomena.** Za prirodan broj  $m$  definiramo  $m$  faktoriijela (u oznaci  $m!$ ) na sljedeći način:

$$0! = 1! = 1, \quad m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

9. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$(1^2 + 1 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 2 + 1) \cdot 2! + \dots + (n^2 + n + 1) \cdot n! = \sum_{k=1}^n (k^2 + k + 1)k!.$$

10. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

11. (**Državno 2007. 4. razred**) Niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je zadan rekursivno:

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{ako } n = 0, \\ 2 + a_0 a_1 \dots a_{n-1} & \text{ako } n \geq 1. \end{cases}$$

Odredi  $a_{2007}$ .

12. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{2}{2^4 + 2^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

13. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

14. Neka su  $(F_n)_{n \geq 0}$  Fibonaccijevi brojevi, odnosno

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1},$$

za svaki prirodan broj  $k$ . Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \dots + \frac{1}{F_{n-1} F_{n+1}} < 1.$$

15. Neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{(3-2)(3^2-2^2)} + \frac{6^2}{(3^2-2^2)(3^3-2^3)} + \dots + \frac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}.$$

16. **(IMC 2019.) (\*)** Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 100$ . Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{(3^3 + 3 \cdot 3)^2}{3^6 - 64} \cdot \frac{(4^3 + 3 \cdot 4)}{4^6 - 64} \cdot \dots \cdot \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64} = \prod_{k=3}^n \frac{(k^3 + 3k)^2}{k^6 - 64}.$$

## 4.4. N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### From zero to hero

U ovom uvodu ću pokušati pokazati razne trikove koji se koriste pri rješavanju diofantskih jednačbi. Tako da krenimo!

#### Parnost

**Primjer 1.** Neka je  $k$  parni broj. Jeli moguće napisati 1 kao zbroj recipročnih vrijednosti  $k$  neparnih prirodnih brojeva.

**Rješenje 1.** Što nam ovo zapravo znači? pokušajmo to prikazati nekom jednačbom. Vidimo da mora biti

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$$

Množenjem obje strane s  $n_1 n_2 \dots n_k$  dobivamo sljedeći oblik jednačbe:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = n_2 \cdot \dots \cdot n_k + \dots + n_1 \cdot \dots \cdot n_{k-1}.$$

Primijetimo da je na lijevoj strani neparni broj, a na desnoj strani je zbroj parno mnogo neparnih brojeva što rezultira parnim brojem. To nas dovodi do kontradikcije što znači da je naš željeni rezultat nemoguć.  $\square$

**Primjer 2.** Pronađite sve cijele brojeve  $n$  koji zadovoljavaju jednačbu:

$$2^{n-1} = n^2 - n + 1$$

**Rješenje 2.** Pokušajte sami. Pokušajte usporediti parnosti obje strane pri rješavanju.  $\square$

#### Faktorizacija

Ovdje ću napraviti pretpostavku da ste upoznati sa svima klasičnim faktorizacijama. Faktorizacije su jedno od najjačih alata na domaćim natjecanjima i jako jako velika količina zadataka se rješava pomoću njih. Pokažimo sad neke primjere gdje je faktorizacija korisna (oni neće uvijek uključivati faktoriziranje cijele jednačbe, nego često samo nekih dijelova te jednačbe):

**Primjer 3.** Nađi sve  $x, y \in \mathbb{Z}$  takve da:

$$x^2 + y^2 = x + y + 2.$$

**Rješenje 3.** Prebacimo sve nepoznanice na jednu stranu, ostalo ostavimo na drugoj strani. Dobivamo

$$x^2 - x + y^2 - y = 2$$

Ovdje nam dosta smeta to što ovaj član  $x^2 - x$  je vrlo blizu kvadrata, ali ipak nije. Ovdje postoji jedan jako zgodan trik. Naime kad god imamo članove oblika  $x^2 \pm x$  i želimo doći do kvadrata cijelu jednačbu moramo pomnožiti s 4. Pogledajmo što se onda dogodi, naša jednačba postane

$$4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 8$$

Još uvijek nismo zadovoljni jer nemamo kvadrate, ali sada nam samo nedostaje  $+1$  za svaki član pa ćemo upravo i njega dodati svakom članu tj. dodat ćemo  $2$  s obje strane jednadžbe. Nakon tog poteza i faktorizacije, naša jednadžba postaje

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 10$$

Vidimo da  $10$  sad moramo prikazati kao zbroj dva kvadrata što možemo napraviti na samo jedan način:  $1$  i  $9$ . Iz ovog slijedi

$$(2x - 1, 2y - 1) = \pm(3, 1), \pm(1, 3)$$

□

Ovdje je naglasak na tome da je ponekad za faktorizaciju potrebno pomnožiti obje strane s nekim brojem, najčešće  $4$  ili  $2$  (pokušajte ovo u primjeru za samostalnu vježbu). Sljedeći zadatak ćemo riješiti nečime što se zove **Simon's Favorite Factorizing Trick!** Pokažimo kako izgleda na praktičnom primjeru.

**Primjer 4.** Nađi  $x, y \in \mathbb{Z}$  takve da:

$$xy = x + y + 3$$

**Rješenje 4.** Prebacimo opet sve nepoznanice na jednu stranu. Dobivamo

$$xy - x - y = 3$$

Vidimo da imamo na lijevoj strani  $x(y - 1) - y$  što je tako blizu faktorizacije, ali samo nam fali taj  $+1$  da bismo to mogli napraviti. I mi ćemo zato upravo dodati  $+1$  i jednadžba postaje  $(x - 1)(y - 1) = 4$  što se podjelom na slučaje lako riješi. □

Gdje je tu bio **Simon's Favorite Factorizing Trick?** Naime, kada imamo jednadžbu oblika

$$xy + xa + yb = c$$

S obje strane joj možemo dodati  $ab$ . Tada ona postaje

$$xy + xa + yb + ab = c + ab$$

$$(x + b)(y + a) = ab + c$$

Uspješno smo faktorizirali ovu jednadžbu i znamo kako ju riješiti! Ovaj trik je vrlo korisno zapamtiti i znati primjenjivati.

Ali, postoji nešto još jače

#### **Teorem 4.4.1**

Ako imamo jednadžbu oblika

$$axy + bx + cy = d$$

Možemo ju faktorizirati u obliku

$$(ax + c)(ay + b) = ad + bc$$

$$a, b, c, d \neq 0$$

**Dokaz.** Pomnožimo obje strane s  $a$ , naša jednadžba tada postaje

$$a^2xy + abx + acy = ad$$

$$\implies ax(ay + b) + (ay)c = ad$$

Dodamo  $bc$  s obje strane i faktorizacijom dobivamo

$$(ax + c)(ay + b) = ad + bc$$

Preljepo jelda! □



Sljede primjeri za vježbu:

**Primjer 5.** Pronađite sve parove cijelih brojeva  $(a, b)$  koji zadovoljavaju jednadžbu

$$a^2 + b^2 = 3b + 5a - ab + 63.$$

**Rješenje 5.** Samostalno □

**Primjer 6.** Riješi sljedeću jednadžbu u cijelim brojevima:

$$2xy = 3x + 5y + 7$$

**Rješenje 6.** Samostalno □

Sljedeća stvar se često pojavljuje pri rješavanju diofantskih jednadžbi pa ću je tu navesti. Zapamtite ju jer je vrlo vrlo vrlo korisna!

#### Napomena 4.4.2: Euklidov algoritam

Neka  $m, n \in \mathbb{N}$  te neka  $m > n$ , tada

$$\gcd(m, n) = \gcd(m - kn, n) \quad \text{za } k \in \mathbb{N} \text{ i } m - kn \geq 0$$

Euklidov algoritam nastaje smanjivanjem brojeva unutar gcd-a dok ne dođemo do  $\gcd(a, 0)$  u kojem slučaju zaključujemo  $\gcd(m, n) = a$

## Nejednadžbe u jednadžbama

Dobro ste pročitali, u diofantskim jednadžbama je često korisno koristiti i nejednažbe. Idemo vidjeti kako! Jedan trik, koji mnogi učenici zaborave, ali vrlo je koristan jest **ograničavanje između kvadrata**. Pokažimo time što mislimo:

**Primjer 7.** Nađite prirodne brojeve  $(m, n)$  takve da

$$n^2 + n + 1 = m^2$$

**Rješenje 7.** Naime želimo da izraz na lijevoj strani bude kvadrat, ali vrlo lagano vidimo da  $n^2 + n + 1 > n^2$  i da je  $n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ . Drugim riječima

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$$

$$n^2 < m^2 < (n + 1)^2$$

što je očito nemoguće jer se između  $n^2$  i  $(n + 1)^2$  ne nalazi nijedan kvadrat. Znači početna jednadžba nema rješenja. □

Ova metoda koju smo sad iskoristili se zove smještanje između kvadrata. Nemojte ju zaboraviti! Kad ju primjenjujete ne morate nužno smjestiti izraz između neka dva uzastopna kvadrata, bitno je samo da ih smjestite između neka dva kvadrata koja su dovoljno blizu da vam onda ostane samo vrlo malo slučajeva za provjeriti.

Nejednakosti se ovdje mogu koristiti i u smislu veličine. Kada imamo jednadžbu u kojoj se čini da je jedna strana u većini slučajeva mnogo veća od druge strane, to nam može dati intuiciju da se može napraviti neka faktorizacija i problem svesti na male slučajeve. Evo što mislimo:

**Primjer 8.** Nađi sve parove  $(x, y)$  cijelih brojeva takve da

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

**Rješenje 8.** Primijetimo da na jednoj strani imamo kubove, a na drugoj kvadrate, ovo je ona intuicija o kojoj smo pričali. Ima nam smisla da za malo veće  $x, y$  ovo definitivno neće nikako vrijediti jer jedna strana raste brže o druge, osim možda u slučaju gdje su nepoznanice suprotnog predznaka pa se možda ponište, što će nam faktorizacija pomoći uočiti. Naime odmah vidimo  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$  Sada prebacivanjem svega na jednu stranu i izlučivanjem dobivamo

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy - x - y) = 0$$

Ako je  $y = -x$  onda ova jednadžba definitivno vrijedi pa su svi parovi  $(x, y) = (k, -k), k \in \mathbb{Z}$  oni koji zadovoljavaju ovu jednadžbu. U suprotnom možemo podijeliti s  $x + y$  i dobijemo

$$x^2 + y^2 - xy - x - y = 0$$

Ovu formu prepoznamo iz prijašnjeg poglavlja i primijenit ćemo trik gdje ćemo cijelu jednadžbu pomnožiti s 2 i dodati na kraju još neke konstante. Dobivamo

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2$$

Odavdje i još uz uvjet  $x + y \neq 0$  slijedi  $(x, y) = (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$  □

Ponekad nam je korisno ograničiti neku nepoznanicu jer onda imamo samo konačno slučajeva za provjeriti. Naprimjer:

**Primjer 9.** Riješi jednadžbu u prirodnim brojevima

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

**Rješenje 9.** S obzirom na to da nam je jednadžba simetrična možemo bez smanjena općenitosti pretpostaviti  $a \leq b \leq c$ . Ideja je pokazati da  $a$  ne može postati prevelik. Evo zašto: ako je  $a > 3$  iz toga slijedi  $b, c > 3$ , ali to onda znači

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

. Znači mora biti  $a \leq 3$ . Ovo je super jer sada nam samo ostaju tri slučaja za provjeriti!

- $a = 3$ : Onda je  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ . Opet istom logikom kao i prije dobijemo  $b \leq 3$  što onda ručnom provjerom daje jedino rješenje u ovom slučaju  $(a, b, c) = (3, 3, 3)$
- $a = 2$ : Onda je  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ . Sada dobijemo istom logikom kao i prije  $b \leq 4$ . Ručnom provjerom rješenja su:  $(a, b, c) = (2, 3, 6), (2, 4, 4)$
- $a = 1$  Ovaj slučaj očito nema rješenja.

Bitno je još ne zaboraviti da moramo napraviti permutacije rješenja koja smo dobili i gotovi smo! □

Pokušajte riješiti sljedeći primjer sami:

**Primjer 10.** Riješi sljedeću diofantsku jednadžbu u skupu prirodnih brojeva:

$$a + b + c = abc$$

**Rješenje 10.** Samostalno. □

## Modularna aritmetika

Možda i najkorisniji trik od svih. Modularna aritmetika jako često može vrlo pojednostaviti problem, ponekad ga čak i trivijalizirati. Jako često zna biti prvi korak u rješavanju problema jer nam može reći kakvog je oblika neki broj, naprimjer jeli paran, jeli djeljiv s 3 i tako dalje. Kada imamo  $x^2$  ili  $x^3$  u našoj jednadžbi jako korisno će biti zapamtiti koje ostatke daju kvadrati i kubovi modulo neki broj. Idemo nabrojati one najzanimljivije.

### **Teorem 4.4.3: Kvadratni i kubni ostatci**

1.  $a^2 \equiv \{0, 1\} \pmod{3}$
2.  $a^2 \equiv \{0, 1\} \pmod{4}$
3.  $(odd)^2 \equiv 1 \pmod{8}$  **JAKO KORISNO!**
4.  $a^2 \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{5}$
5.  $a^3 \equiv \{0, \pm 1\} \pmod{7}$
6.  $a^3 \equiv \{0, \pm 1\} \pmod{9}$
7.  $a^{p-1} \equiv \{0, 1\} \pmod{p}$

8.

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \{0, \pm 1\} \pmod{p}$$

Ovaj zadnja dva vrijede zbog Fermatova mala teorema i ostatak će biti 0 samo u slučaju kada je  $a$  višekratnik od  $p$ . Primijetimo još jednu bitnu stvar. Ako u jednadžbi imamo  $a^t$  i  $2t+1 = p$  je prost broj onda nam zadnja stavka našeg teorema govori da je korisno tu jednadžbu gledati modulo  $p$ . Imajte ovo pri umu pri rješavanju diofantskih jednadžbi kao i prijašnji teorem jer u skoro svakoj diofantskoj jednadžbi se koristi modularna aritmetika u barem nekom koraku.

### **Napomena 4.4.4**

U prvom poglavlju smo istraživali parnost i kako ona pomaže u diofantskim jednadžbama. Osvijestimo sada da je to zapravo ista stvar kao da smo promatrali jednadžbu  $\pmod{2}$ . Zbog jako čestog korištenja nikad nećemo reći pogledajmo jednadžbu  $\pmod{2}$ , nego gledajmo parnost, ali u suštini je to zapravo proučavanje ostatak pri dijeljenju s 2.

Idemo na primjere:

**Primjer 11 (Državno 2021. 4. razred).** Odredi sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  takve da je

$$2^a + 2021 = 3^b \cdot 25^c.$$

**Rješenje 11.** Ovo je klasični zadatak koji se potpuno ubija modularnom aritmetikom. Imamo potenciju broja 2, sjetite se da smo spomenuli da proučavanje  $\pmod{8}$  je općenito vrlo korisno, ali ovdje apsolutno ubija zadatak.

Evo zašto: ako je  $a \geq 3$  onda je

$$2^a + 2021 \equiv 0 + 5 \equiv 5 \pmod{8}.$$

S druge strane

$$3^b \cdot 25^c \equiv \{1, 3\} \pmod{8}.$$

Znači, naše dvije strane daju drugačije ostatke modulo 8 pa sigurno nisu jednake. To znači da je  $a \leq 2$ . Moramo samo ručno provjeriti dva slučaja i lagano vidimo da za  $a = 2$  imamo

$$4 + 2021 = 2025 = 3^2 \cdot 25^1$$

pa je jedino rješenje  $(a, b, c) = (2, 4, 1)$ . □

Idemo još jedan primjer

**Primjer 12.** Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$a^3 + (a+1)^3 + \dots + (a+6)^3 = b^4 + (b+1)^4$$

**Rješenje 12.** Ovdje je vrlo važno za primijetiti da na lijevoj strani imamo 7 uzastopnih brojeva što znači da oni sigurno ostvaruju svih 7 ostataka modulo 7. Znamo da nam je 7 i jako zgodan za kubove pa promotrimo obje strane jednadžbe modulo 7. Lijeva strana je jednaka

$$\begin{aligned} a^3 + (a+1)^3 + \dots + (a+6)^3 &\equiv 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \equiv \\ &\equiv 0 + 1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + (-1) \equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Sada slijedi malo naporniji dio jer ćemo morati proučiti ostatke desne strane modulo 7. Prvo primijetimo  $\{0^4, 1^4, \dots, 6^4\} \equiv \{0, 1, 2, 4, 4, 2, 1\} \pmod{7}$ . Sada vidimo

$$b^4 + (b+1)^4 \in \{0^4 + 1^4, \dots, 6^4 + 0^4\} \equiv \{1, 3, 6, 1, 3, 6, 1\} \pmod{7}.$$

Drugim riječima nije 0, znači naša početna jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. □

Jedan primjer za samostalnu vježbu:

**Primjer 13.** Neka su  $m, n, x \in \mathbb{N}$ . Nađi sva rješenja jednadžbe

$$3^m + 3^n + 1 = x^2$$

**Rješenje 13.** Samostalno. Sjetite se koji modulo smo rekli da je jako često jako koristan, pogotovo kod neparnih kvadrata. □

## Beskonačni spust

Sljedeća metoda je već dosta napredna, ali bi mi bilo žao da vam je nisam pokazao. Zove se metoda beskonačnog spusta i pomaže nam da pokažemo da neka jednadžba nema rješenja. Sljedeći primjer će jasnije ilustrirati što mislimo:

**Primjer 14.** Pokaži da je jedino nenegativno cjelobrojno rješenje jednadžbe

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

**Rješenje 14.** Pogledajmo поближе našu jednadžbu. Uvijek je dobra početna točka koristiti modularnu aritmetiku i djeljivosti krećući od one najjednostavnije – parnost. I stvarno vidimo da  $2|2y^3$ ,  $2|4z^3$  i  $2|0$ . Ovo nam govori da mora biti  $2|x^3$ . Pa zato možemo zapisati  $x = 2x'$ . Uvrštavajući ovo u našu jednadžbu i dijeleći s 2 dobivamo

$$y^3 + 2z^3 + 4x'^3 = 0$$

Čekaj malo, ali ovo je identična forma s kojom smo počeli! Znači prvo smo imali  $(x, y, z)$  i prešli smo u  $(y, z, x')$  koji je *manji* (objasnimo ćemo rigoroznije poslije što to znači) od naše početne trojke. Ovaj postupak možemo nastaviti dalje u beskonačnost, takozvano radeći **beskonačni spust**, ali dolazimo do problema. Naši brojevi moraju biti cijeli i  $\geq 0$  što znači da ne možemo ovo ponavljati beskonačno

mного puta jer imamo samo konačno mnogo *manjih* trojki od naše početne. Jedini način na koji bi ovo bilo moguće jest da stalno dobivamo iste trojke iliti drugim riječima da je početna trojka bila  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  čime je zadatak gotov.

Bitno je još za napomenuti da naš sleng da smo dobili *manju* trojku nije matematički korektan jer ne znamo ni kako uspoređivati trojke! Zato moramo naći neko specifično svojstvo trojke koje možemo reći da se stalno smanjuje, a to će biti njihova suma  $x + y + z$ . Očito je da se svakom transformacijom ovo smanjuje (osim ako je početna suma bila 0) i da se ne može beskonačno smanjivati kao što se kod nas to događa čime onda postizemo željenu kontradikciju.  $\square$

Uvod je gotov, idemo sad na zadatke! Ponovite si metode koje smo ovdje prošli i sretno!

## Zadaci za samostalni rad

1. Odredi sve parove  $(a, n)$  prirodnih brojeva tako da vrijedi

$$3a^2 + 2^n = a^4$$

2. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(m, n)$  za koje vrijedi

$$m(m-n)^2(m+n) = m^4 + mn^3 - 99n$$

3. Odredi sve trojke prostih brojeva čiji je zbroj kvadrata umanjen za 1 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

4. Odredi sve uređene trojke  $(m, n, p)$  gdje su  $m, n$  prirodni brojevi, a  $p$  prost za koje vrijedi

$$25^n + 2 \cdot 5^n = p^m + 8$$

5. Odredi sve uređene parove  $(m, n)$  prirodnih brojeva za koje postoji prost broj  $p$  tako da vrijedi

$$9^m + 3^m - 2 = 2p^n$$

6. Odredi sve prirodne brojeve  $m$  za koje je  $m! + 8$  potencija nekog prostog broja.

7. Odredi sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  za koje vrijedi

$$2^a \cdot 5^b - 1 = 11 \cdot 3^c.$$

8. Odredi sve parove cijelih brojeva  $(a, b)$  takve da je  $b \geq 0$  i

$$a^2 + 2ab + b! = 131$$

9. Odredi sve parove prostih brojeva  $(p, q)$  za koje je  $p^{q-1} + q^{p-1}$  kvadrat prirodnog broja

10. Odredi sve prirodne brojeve  $m$  za koje je  $2^m - 63$  kub nekog cijelog broja.

11. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(m, n)$  za koje postoje cijeli brojevi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  takvi da vrijedi

$$a + b + c = 0 \quad \text{i} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2^m \cdot 3^n.$$

12. Odredi sve prirodne brojeve  $m$  i  $n$  za koje je  $2^n + 5 \cdot 3^m$  kvadrat nekog prirodnog broja.

13. Postoje li prirodni brojevi takvi da je  $2022^k + 2022^m$  kvadrat nekog prirodnog broja?

14. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva  $(k, m)$  takvih da vrijedi

$$3m^2 - m + 21 = 3^{3k+1} - 2 \cdot 3^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+2}$$

15. Nađi sve trojke prirodnih brojeva  $(m, n, k)$  takve da vrijedi  $3^m + 7^n = k^2$

16. Nađi sve prirodne  $m$  i  $n$  takve da je  $5m^3 - n = 27n^4 - 2n^2$

17. Odredi sve parove  $(a, b)$  prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a^5 + a^4 = 7^b - 1$$

## Shortlist :)

1. Uzmimo prirodni broj  $n$ . Za taj  $n$  postoje 2005 uređenih parova koji zadovoljavaju

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

Pokaži da je  $n$  savršen kvadrat.

2. Neka su  $x, y$  prirodni brojevi takvi da je  $3x^2 + x = 4y^2 + y$ . Pokaži da je  $(x - y)$  savršen kvadrat

3. Nađi sve četvorke prirodnih brojeva  $(x, y, z, w)$  za koje je

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$$

4. Nađi sve pozitivne brojeve  $n, k_1, k_2, \dots, k_n$  takvi da

$$k_1 + \dots + k_n = 5n - 4$$

i

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1$$

5. Nađi najmanji prirodni broj  $n$  za koji postoji set  $n$  različitih prirodnih brojeva  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  takvih da

$$\left(1 - \frac{1}{s_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = \frac{51}{2010}$$

6. Nađi najmanji pozitivni cijeli broj  $t$  takav da postoje cijeli brojevi  $x_1, x_2, \dots, x_t$  za koje vrijedi

$$x_1^3 + \dots + x_t^3 = 2002^{2002}$$

7. Postoje li cijeli brojevi  $a, b$  takvi da su  $a^5b + 3$  i  $ab^5 + 3$  savršeni kubovi?

8. Odredi sve parove  $(x, y)$  cijelih brojeva takvih da

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

9. Koliko postoji nenegativnih rješenja  $(x, y, z)$  takvih da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

10. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(m, n)$  za koje vrijedi

$$2^m = 7n^2 + 1$$

## 4.5. X2: Dario Vuksan - Indukcija

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Uvod

Matematička indukcija je metoda za dokazivanje neke tvrdnje  $T_n$  za svaki prirodni broj  $n$ , drugim riječima, dokazivanje da vrijedi beskonačno mnogo tvrdnji  $T_1, T_2, T_3, \dots$ . To se radi tako da se prvo dokaže  $T_1$  (baza), zatim također pokaže da ako pretpostavimo tvrdnju za bilo koji dani slučaj, tada vrijedi i tvrdnja za idući slučaj (korak).

Jedan neformalan način za prikazati indukciju je sljedeći: dokažemo da se možemo penjati po beskonačno visokim ljestvama tako da dokažemo da se uopće možemo početi penjati (baza) te da se sa svake stepenice možemo popeti na iduću (korak).

Formalno, dokaz matematičkom indukcijom sastoji se od dva dijela. Prvi je baza indukcije i dokazuje tvrdnju za  $n = 1$  bez pretpostavljanja ičega što se tiče ostalih slučajeva. Drugi dio, korak indukcije, dokazuje da *ako* tvrdnja  $T_k$  vrijedi za **neki**  $k$ , *onda* vrijedi i  $T_{k+1}$ . Ova dva dijela zajedno utvrđuju da zadana tvrdnja doista vrijedi za svaki prirodni broj  $n$ . Baza nije uvijek nužno  $n = 1$ , može biti bilo koji prirodan broj  $N$  što znači da pokazujemo da tvrdnja vrijedi za svaki  $n \geq N$ . Isto tako, ne mora se nužno raditi o prirodnim brojevima, to mogu biti npr. točke u ravni, ali isti princip je i dalje primijenjiv kada svaku od  $n$  točaka označimo prirodnim brojevima od 1 do  $n$ .

#### Definicija 4.5.1

Neka je  $T_n$  tvrdnja za prirodni broj  $n$ . Kada dokažemo da vrijede:

- baza:  $T_1$

- korak:  $T_k \implies T_{k+1}$  (*ako* vrijedi za  $k$ , *onda* vrijedi i za  $k + 1$ )

tada smo principom matematičke indukcije dokazali  $T_n$  **za svaki**  $n \in \mathbb{N}$

#### Napomena

Za razliku od induktivnog zaključka u logici i filozofiji, koji na temelju velikog broja slučajeva rezultira tvrdnjom koja je istinita s velikom vjerojatnošću (npr. Primijetimo da su prvih 5 članova niza višekratnici broja 3: 3, 6, 9, 12, 15, stoga će šesti član niza biti 18), matematička je indukcija rigorozan i stoga matematički pravilan dokaz tvrdnje koju želimo dokazati.

Proučite rješenja idućih primjera jer je u njima detaljno opisan postupak primjene matematičke indukcije. Pri rješavanju zadataka nije potrebno ići toliko detaljno, jedino je bitno istaknuti kada se provjerava baza, kada se pokazuje korak i naglasiti da je u koraku indukcije tvrdnja pretpostavljena za *neki*  $k$ , ni slučajno za *svaki*.

### Riješeni primjeri

**Primjer 1.** Dokaži da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Rješenje 1.** Naša tvrdnja  $T_n$  je upravo ta zadana jednakost.

Prvo što moramo napraviti je obavezno provjeriti bazu indukcije. Provjerimo vrijedi li  $T_1$  za  $n = 1$ . Na lijevoj strani jednakosti je samo 1, a na desnoj strani je  $\frac{1 \cdot 2}{2}$  što je jednako 1 pa vidimo da baza zaista vrijedi.

Iduće na redu je dokazati korak indukcije. Sada pretpostavimo tvrdnju za *neki*, specifični  $k$ . To znači da uzmemo našu tvrdnju za  $n = k$  kao da vrijedi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

i pokažemo da vrijedi tvrdnja za  $n = k + 1$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Upitnik iznad znaka jednakosti stoji zato što trenutno ne znamo da ta jednakost vrijedi, to moramo dokazati. Ona je tako napisana da znamo što ciljamo, tj. kako izgleda ono do čega želimo doći. Jako bitno: NE SMIJEMO mijenjati obje strane te jednakosti, jer to je kao da pretpostavljamo da ona vrijedi. Moramo početi od jedne strane i doći do druge kako bismo dokazali da su jednake. Ipak, smijemo uvrstiti našu pretpostavku u izraz za zbroj prvih  $k$  članova koji se nalazi na lijevoj strani jednakosti koju ciljamo dokazati:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{\text{uvrstimo našu pretpostavku}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Dalje je jednostavno:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

i time smo završili korak indukcije. Uočite da smo ovaj postupak mogli na isti način primijeniti za bilo koji  $k$ , tj. odabir broja  $k$  za kojeg pretpostavljamo tvrdnju bio je proizvoljan i postupak dokaza tvrdnje  $T_{k+1}$  ne bi se razlikovao. Ovo nam formalno omogućuje da zaključimo da  $T_k \implies T_{k+1}$  vrijedi za svaki  $k$ , a dodatno, činjenica da  $T_1$  vrijedi (što smo posebno pokazali ili provjerili), znači da vrijedi  $T_2$ , a zato i  $T_3$ , ...  $\square$

### ⚠ Oprez 1

U pisanju rješenja obavezno je naglasiti da tvrdnju pretpostavljamo za neki  $k$ . Isto tako ne smijemo mijenjati (dodavati nešto na obje strane, kvadrirati, množiti ili dijeliti) jednakost zapisanu s  $\stackrel{?}{=}$ , ona služi samo zato da možemo vidjeti do kojeg izraza trebamo doći. Najčešće je cilj početi od jedne strane te jednakosti i algebarskim manipulacijama, između ostalog i korištenjem pretpostavke, doći do desne strane, premda je moguće početi i od same pretpostavke, primjerice dodavanjem  $k+1$  na obje strane u gornjem primjeru pa sređivanjem.

Osim jednakosti, kod indukcije može se javiti i dokazivanje nejednakosti. Pogledajmo još jedan primjer:

**Primjer 2.** Odredi  $N$  takav da za svaki  $n \geq N$  vrijedi  $2^n \geq n^2$ .

**Rješenje 2.** Lako se provjeri da vrijedi za  $n = 1$ . Pokušajmo provesti korak indukcije. Pretpostavimo da je  $2^k \geq k^2$  za neki  $k$ . Treba pokazati  $2^{k+1} \stackrel{?}{\geq} (k+1)^2$ .

Kada pomnožimo obje strane pretpostavljene nejednakosti s 2, dobijemo  $2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \geq 2k^2$ , pa moramo posebno provjeriti vezu između  $2k^2$  i  $(k+1)^2$ . Točnije, kako bismo uspješno proveli indukciju, želimo  $2k^2 \geq (k+1)^2$  i kombinirati to s pretpostavkom da ispadne  $2^{k+1} \geq (k+1)^2$ . Ali,  $2k^2 \geq (k+1)^2$  vrijedi za svaki  $k$  osim 2 (to se provjeri rješavanjem kvadratne nejednadžbe), stoga je  $k = 4$  najmanji  $k$  za koji vrijedi korak indukcije  $T_k \implies T_{k+1}$ .

Preostaje provjeriti novu bazu  $T_4$ :  $2^4 \geq 4^2$  vrijedi. Dakle,  $T_n$  vrijedi za  $n = 4$  i svaki veći od njega. Rješenje ovog zadatka je  $N = 4$ .

Pouka ovog primjera: ako zadatak ne navede bazu nego traži od nas da odredimo bazu, moguće je da će se pri rješavanju koraka indukcije pojaviti novo ograničenje na bazu. Naravno, poželjno je i ručno provjeriti prvih nekoliko malih primjera ako su jednostavni za izračunati, pa odatle naslutiti rješenje.  $\square$

Sretno u rješavanju!



# Zadaci iz algebre

1. Dokaži:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

2. Dokaži:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Dokaži:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. Dokaži  $n! > 2^n$  za sve  $n \geq 4$ .

5. Dokaži da  $13 \mid 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$  za svaki prirodni  $n$ .

6. Dokaži da  $37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$  za svaki prirodni  $n$ .

7. Niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadan je rekurzivnom formulom:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{5}{a_n + 4} \quad \text{za } n \geq 1$$

Dokaži da je niz omeđen odozdo s 0 i odozgo s 1.

8. Neka je

$$a_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots \sqrt{4}}}$$

pri čemu ima  $n$  korijenja. Dokaži da je  $a_n < 3$  za svaki  $n$ .

9. Fibonaccijevi brojevi  $F_n$  definirani su rekurzivno na sljedeći način:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  za svaki  $n \geq 2$ . Dokaži da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi

$$F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

10. Niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadan je rekurzivnom formulom:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

$$a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2} \quad \text{za } n \geq 3$$

Odredi formulu za opći član niza.

11. Neka je  $x$  realan broj takav da je  $x + \frac{1}{x}$  cijeli broj. Dokaži da je  $x^n + \frac{1}{x^n}$  cijeli broj za svaki nenegativni cijeli  $n$ .

12. Dokaži da ova nejednakost vrijedi za svaki prirodni  $n$ :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

13. Dokaži da za prirodne  $m, n$  vrijedi

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

14. Zadan je niz brojeva takav da je  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  te  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  za  $n \geq 4$ . Dokaži da je  $a_n < 2^n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ .

## Zadaci iz kombinatorike

15. Dokaži indukcijom da je na šahovskom turniru, na kojem sudjeluje  $n$  natjecatelja i igra svatko protiv svakog drugog, odigrano  $\frac{n(n-1)}{2}$  partija.
16. Dokaži indukcijom da je broj dijagonala pravilnog  $n$ -terokuta ( $n > 3$ ) jednak  $\frac{n(n-3)}{2}$
17. Neka je  $n$  prirodan broj. Dokaži da je  $2^n \times 2^n$  ploču s jednim uklonjenim poljem moguće popločati trominama u obliku slova L.
18. Na stolu su 2 neprazne kutije keksa. U jednom potezu treba pojesti sve kekse iz jedne kutije, pa nekoliko keksa iz druge kutije prebaciti u prvu tako da obje kutije ponovno budu neprazne. Igru igraju 2 igrača naizmjenice, a onaj koji ne može napraviti potez gubi. Dokaži da ako je u nekoj kutiji na početku paran broj keksa, tada prvi igrač ima pobjedničku strategiju.
19. U nekoj je državi svaki par gradova povezan točno jednom direktnom jednosmjernom cestom. Dokažite da postoji grad u koji je moguće doći iz svih ostalih gradova direktno ili preko najviše jednog grada.
20. U ravnini je nacrtano  $n$  kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokaži da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da su svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.
21. U jednoj su se skupini ljudi neki međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

## 5. Zadaci za treću grupu

### 5.1. G3: Lana Milani - Potencija točke

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Uvod

Na ovom predavanju bavit ćemo se potencijom točke s naglaskom na radikalne osi i radikalna središta kao metode za dokazivanje konkurentnosti pravaca. Na kraju ćemo spomenuti i što je to kružnica radijusa 0 i kako se može koristiti u zadacima.

Za početak ćemo definirati neke osnovne pojmove.

##### Definicija 5.1.1: Potencija točke

Neka je  $\omega$  kružnica i neka je  $P$  bilo koja točka u ravnini. Neka je  $l$  bilo koji pravac koji prolazi kroz  $P$  i siječe  $\omega$  u točkama  $A$  i  $B$ . Tada vrijedi da vrijednost izraza  $|PA| \cdot |PB|$  ne ovisi o odabiru pravca  $l$  te definiramo *potenciju točke  $P$  s obzirom na kružnicu  $\omega$*  kao

$$\text{Pow}(P, \omega) = |PA| \cdot |PB|$$

##### Definicija 5.1.2: Radikalna os

Neka su  $\omega$  i  $\Gamma$  dvije nekoniclične kružnice u ravnini. Tada vrijedi sljedeće:

Skup svih točaka  $P$  koje zadovoljavaju

$$\text{Pow}(P, \omega) = \text{Pow}(P, \Gamma)$$

jest *pravac* koji je *okomit* na spojnicu središta kružnica  $\omega$  i  $\Gamma$ .

Taj pravac nazivamo *radikalna os kružnica  $\omega$  i  $\Gamma$* .

Mala napomena: riječ *okomit* je s razlogom naglašena - ta je činjenica nerijetko lagani način da dokažete okomitost dvaju naizgled potpuno nepovezanih pravaca (ako pametno odaberete kružnice, jedan ispadne spojnicu centara, a drugi ispadne radikalna os i tvrdnja odmah slijedi).

##### Definicija 5.1.3: Radikalno središte

Neka su  $\omega, \Gamma$  i  $\Omega$  proizvoljne kružnice u ravnini, od kojih nikoje dvije nisu koniclične. Tada se radikalne osi parova  $(\omega, \Omega)$ ,  $(\Omega, \Gamma)$  te  $(\Gamma, \omega)$  sijeku u jednoj točki i tu točku nazivamo *radikalno središte kružnica  $\omega, \Omega$  i  $\Gamma$* .

Radikalno središte, naravno, ima jednaku potenciju točke na sve tri kružnice.

Ovdje dokaz nije pretežak pa ostavljamo čitatelju za vježbu (bonus 10 kuća bodova za onoga tko pokaže na ploči). Uočavamo onu prethodno najavljenju korisnu činjenicu: postojanje radikalnog centra nam daje "besplatnu" konkurentnost tri pravca.

## Zadaci

1. Neka je  $ABC$  trokut uz  $|AC| > |AB|$  i označimo njegovu opisanu kružnicu s  $\Omega$  i centar upisane kružnice s  $I$ . Neka njegova upisana kružnica dira stranice  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  u  $D$ ,  $E$ ,  $F$  redom. Neka su  $X$  i  $Y$  dvije točke na manjim lukovima  $DF$  i  $DE$  upisane kružnice, redom, tako da je  $\angle BXD = \angle DYC$ . Neka pravac  $XY$  siječe pravac  $BC$  u  $K$ . Neka je  $T$  točka na  $\Omega$  takva da je  $KT$  tangenta na  $\Omega$  i  $T$  je na istoj strani pravca  $BC$  kao  $A$ . Dokaži da se pravci  $TD$  i  $AI$  sijeku na  $\Omega$ .
2. Dan je šiljastokutni trokut  $ABC$  s centrom opisane kružnice  $O$  i ortocentrom  $H$ . Neka su  $E$  i  $F$  nožišta visina iz  $B$  i  $C$  na  $AC$  i  $AB$  redom, i neka je  $D$  drugo sjecište  $AH$  i  $(ABC)$ . Neka je  $I$  polovište  $AH$ .  $EI$  i  $BD$  se sijeku u  $M$ , a  $FI$  i  $CD$  se sijeku u  $N$ . Dokaži da je  $MN \perp OH$ .
3. Neka je  $H$  ortocentar šiljastokutnog trokuta  $ABC$ . Kružnica  $\Gamma_A$  ima centar u polovištu  $\overline{BC}$  i prolazi kroz  $H$ , te siječe stranicu  $\overline{BC}$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$ . Slično su definirane i točke  $B_1, B_2, C_1, C_2$ . Dokaži da su točke  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  konciklične.
4. Neka je  $O$  centar opisane kružnice trokutu  $ABC$ . Točke  $P$  i  $Q$  nalaze se na stranicama  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom. Neka su  $K, L, M$  polovišta od  $\overline{BP}, \overline{CQ}, \overline{PQ}$  redom, i neka je  $\Gamma$  kružnica opisana trokutu  $KLM$ . Pretpostavimo da je pravac  $PQ$  tangenta na  $\Gamma$ . Dokaži da je  $OP = OQ$ .
5. Neka su  $A, B, C, D$  točke na pravcu, u tom redoslijedu. Kružnice promjera  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$  sijeku se u  $X$  i  $Y$ . Pravac  $XY$  siječe  $\overline{BC}$  u  $Z$ . Neka je  $P \neq Z$  točka na pravcu  $XY$ . Pravac  $CP$  siječe kružnicu promjera  $\overline{AC}$  ponovno u  $M$ , i pravac  $BP$  siječe kružnicu promjera  $\overline{BD}$  ponovno u  $N$ . Dokaži da su pravci  $AM, DN, XY$  konkurentni.
6. Kružnica upisana trokutu  $ABC$  ima središte u  $I$  te dira stranice  $AB, BC, CA$  u točkama  $C_1, A_1, B_1$  redom. Okomica iz  $I$  na težišnicu iz  $C$  siječe  $A_1B_1$  u  $K$ . Dokaži da je  $CK \parallel AB$ .

## Bonus: kružnica radijusa 0

7. U šiljastokutnom trokutu  $ABC$  vrijedi  $\angle B > \angle C$ . Točka  $M$  je polovište  $\overline{BC}$  te su točke  $D$  i  $E$  nožišta visina iz  $C$  i  $B$  redom.  $K$  i  $L$  su polovišta  $\overline{ME}$  i  $\overline{MD}$  redom, i  $KL$  siječe paralelu kroz  $A$  s  $BC$  u  $T$ . Dokaži da je  $TA = TM$ .
8. Dan je trokut  $ABC$  s opsegom 4. Točke  $X$  i  $Y$  leže na polupravcima  $AB$  i  $AC$  redom, tako da vrijedi  $AX = AY = 1$ . Dužine  $\overline{BC}$  i  $\overline{XY}$  sijeku se u  $M$ . Dokaži da je opseg trokuta  $ABM$  ili opseg trokuta  $ACM$  jednak 2.
9. Upisana kružnica trokuta  $ABC$  dira stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  u točkama  $Z$  i  $Y$ , redom.  $BY$  i  $CZ$  se sijeku u  $G$ , a točke  $R$  i  $S$  su takve da su  $BCYR$  i  $BCSZ$  paralelogrami. Dokaži da je  $GR = GS$ .

## 5.2. C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Kratki uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se zadacima u kojima je zadana neka igra između 2 igrača. Pokušat ćemo odrediti koji igrač ima pobjedničku strategiju u toj igri ili dokazati neka druga svojstva te igre. Glavni alati kojima ćemo se služiti su iznenađujuće jednostavna, ali učinkovita **simetrija**, slijede **bojanja**, **sparivanja**, **indukcija** te vrlo važna **analiza pozicija**.

#### Definicija 5.2.1

U igri za 2 igrača kažemo da neki od ta 2 igrača ima **pobjedničku strategiju** ako postoji niz poteza kojima taj igrač može osigurati pobjedu, bez obzira na poteze drugog igrača.

Kažemo da je trenutno stanje u kojem se igra nalazi **pobjednička pozicija** ako igrač koji je upravo na redu ima pobjedničku strategiju, a **gubitnička pozicija** ako igrač koji *nije* trenutno na redu ima pobjedničku strategiju.

#### ⚠ Oprez

Imajmo na umu da, kako bismo dokazali da je neka strategija igrača A pobjednička, treba uzeti u obzir **sve** moguće poteze igrača B. Ako nađemo barem jedan način da igrač B pobjedi, strategija igrača A nije pobjednička. Međutim, nije ni strategija igrača B pobjednička jer potezi igrača A nisu generalizirani. To ne znači da se ne isplati pretpostaviti da je određena strategija pobjednička (čak i ako nije, možda se nađe nešto korisno u tom razmatranju).

Osim strategija za koje mislimo da bi mogle biti pobjedničke, isplati se promatrati **male primjere**. Najčešće neće biti korisno promatrati nasumične nizove poteza, kao ni promatrati određene strategije oba igrača odjednom.

Pogledajmo primjere!

**Primjer 1.** Mate i Matko imaju neograničenu zalihu identičnih kovanica. Naizmjenice postavljaju kovanice na kvadratni stol konačnih dimenzija, na način da se nikoje dvije kovanice ne preklapaju i svaka kovanica je u potpunosti na stolu (tj. ne viri sa stola). Igrač koji ne može postaviti kovanicu poštujući pravila je izgubio. Ako Mate igra prvi te pretpostavljajući da se barem jedna kovanica može staviti na stol, dokaži da Mate ima pobjedničku strategiju.

**Rješenje 1.** Ako Mate najprije stavi kovanicu u sredinu stola te svaki sljedeći put centralnosimetrično kovanici koju je Matko stavio na stol u svom posljednjem potezu s obzirom na središte stola, osigurao je da ima odgovor na svaki Matkov potez. Prema tome, ako Mate odigra ovakvom strategijom, Matko će nužno prvi ostati bez poteza i izgubiti.

□

**Primjer 2 (Šah s dva poteza).** Dva igrača igraju šah sa standardnim pravilima s jednom iznimkom: svaki igrač koji je na redu može odigrati 2 poteza umjesto jednog. Koji igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu?

**Rješenje 2.** Pretpostavimo da drugi igrač može uvijek pobijediti, tj. da prvi igrač gubi bez obzira na poteze drugog igrača. Prvi igrač tada gubi i ako kao svoja prva dva poteza pomakne skakača na

slobodno polje, te ga potom vrati natrag na početno polje. Sada je drugi igrač na redu, a kako je raspored figura isti kao i na početku, on je osuđen na poraz. No, tada istovremeno drugi igrač uvijek gubi i uvijek pobjeđuje, što očito ne može vrijediti. Dakle, drugi igrač nema pobjedničku strategiju, tj. prvi igrač može osigurati remi ili pobjedu, bez obzira na to kako će drugi igrač igrati. *Uočite da ovime nismo ništa rekli o samoj strategiji za prvog igrača, dokazali smo samo njezino postojanje.*  $\square$

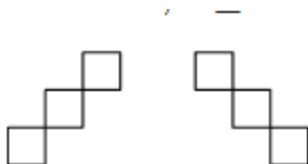
## Zadatci

1. Pred vama se nalazi čokolada dimenzija  $m \times n$ . Igrači naizmjenice lome čokoladu na dva pravokutna dijela tako da nijedan kvadratić ne bude razlomljen i onda pojedu jedan dio, a drugi daju protivniku. Kvadratić u donjem lijevom kutu je otrovan i igrač koji ga pojede ili nema izbora jer mu je to jedini potez, gubi igru. Koji igrač ima pobjedničku strategiju i kako ona glasi.
2. Dana je čokolada u obliku pravokutnika  $m \times n$ . Igrači naizmjenice biraju jedan kvadratić te pojedu njega i sve kvadratiće koji se nalaze iznad ili desno od njega. Kvadratić u donjem lijevom uglu je otrovan i igrač koji ga pojede gubi igru. Ima li itko pobjedničku strategiju i kako ona glasi.
3. Karlo i Patrik igraju sljedeću igru: naizmjenično zapisuju po jednu znamenku sve dok ne napišu šestoznamenkasti broj pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Karlo igra prvi. Karlo pobjeđuje ako je napisani šestoznamenkasti broj djeljiv s 2,3, ili 5., a u suprotnom pobjeđuje Patrik. Tko ima pobjedničku strategiju i kako ona glasi.
4. Dva igrača igraju križić-kružić na ploči  $9 \times 9$ . Za svaki red i za svaki stupac u kojem na kraju igre ima više križića nego kružića prvi igrač dobije jedan bod. Drugi igrač dobiva po jedan bod za svaki red i za svaki stupac u kojem ima više kružića nego križića. Koji će igrač imati više bodova?
5. Lana i Emanuel igraju naizmjenice igru na setu  $S$ .  $S$  prije prvog poteza sadrži sve prirodne brojeve manje od 50. U jednom potezu, igrač bira  $k \in S$  i miče sve njegove djelitelje iz  $S$ . Gubitnik je onaj koji ne može napraviti potez. Emanuel ide prvi, tko pobjeđuje i kako?
6. Matej i Karlo igraju sljedeću igru na šahovskoj ploči: najprije Karlo stavi figuru na proizvoljno polje. Zatim Matej i on naizmjenice vuku poteze tom figurom kao u šahu, ali ju ne smiju vratiti na već posjećeno polje. Tko pobjeđuje (ovisno o figuri)?  
Riješite zadatak za sve figure: pijun, dama, top, lovac, kralj, skakač.  
Komentar: *Uzmite da se pijun može kretati samo jedno polje naprijed prema unaprijed određenom smjeru, te ignorirajte ostala pravila šaha.*
7. Marija i Lara igraju igru na ploči dimenzija  $1 \times n$ . U potezu, igrač izabire prazno polje i u njega stavlja ili S ili O. Pobjednik je onaj koji dovrši riječ SOS u tri uzastopna polja ploče. Tko dobiva ako Marija ide prva?
8. Martin i Dario igraju sljedeću igru: Počevši s brojem  $1 \leq n \leq 1000$  izmjenjuju krugove kako bi izvršili sljedeće operacije: Martin(koji počinje) može ili podijeliti broj sa 2 ako je paran ili dodati 4(nebitno jeli broj paran ili neparan), a Dario može pomnožiti broj s 2 ako je neparan ili oduzeti 2(nebitno o parnosti). Martin pobjeđuje ako se dođe nekim potezom do 0 ili 1, a Dario pobjeđuje ako broj postane veći od 1000 ili ako prođe 50 krugova za oba igrača. Tko pobjeđuje i kako?
9. Iva i Teki igraju sljedeću igru: Imamo  $n$  bombona na stolu. Svaki igrač može uzeti bilo koji broj bombončića od 1 do  $k \geq 2$  s time da Iva počinje prva. Osoba koja uzme zadnji bombončić gubi. Tko pobjeđuje i kako?  $n$  i  $k$  su proizvoljni brojevi (da može biti  $k > n$ ).

10. Ana i Sergej igraju sljedeću igru: na  $n \times n$  šahovskoj ploči izmjenjuju se međusobno postavljajući u svakom potezu  $3 \times 1$  domine, ali tako da oni pokrivaju polja koja nisu dosad bila pokrivena nijednim drugim dominom. Prvi igrač koji ne može napraviti potez gubi. Tko ima pobjedničku strategiju?
11. Matea i Niko igraju sljedeću igru na  $6 \times 6$  ploči: Na njihovom potezu osoba bira neko prazno polje i u njega piše neki racionalni broj koji se još nije pojavio. Matea igra prva i igrači se izmjenjuju dok nisu sva polja popunjena. Kada su sva polja popunjena, u svakom redu nađemo najveći broj i obojimo ga crno. Ako Matea može doći iz gornjeg reda u donji red mičući se samo po susjednim crnim poljima (susjedna polja su ona koja dijele barem jedan **vrh**) onda ona pobjeđuje. U suprotnom, pobjeđuje Niko.
12. Broj 200 je na ploči. Hrvoje i Matej se izmjenjuju zamjenjujući broj  $n$  na ploči s  $n - 1$  ili  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Igrač koji napiše broj 1 pobjeđuje, tko pobjeđuje ako Hrvoje kreće prvi i kako?
13. Filip i Fran igraju sljedeću igru: neka je  $N$  neki fiksni pozitivni cijeli broj. Filip prvo napiše broj 1, a onda Fran napiše broj 2. Nakon toga ako je trenutni broj  $k$  igrač koji je na potezu može napisati ili  $k + 1$  ili  $2k$ , ali novi broj ne smije biti veći od  $N$ . Osoba koja napiše  $N$  pobjeđuje. Tko ima pobjedničku strategiju i kako?
14. Mihael i Mario igraju sljedeću igru: Za početak Mihael rasporedi brojeve  $1, 2, \dots, n$  u nekom poretku i onda Mario bira jedan od brojeva i stavlja na njega bombončić. Potez igrača se sastoji od toga da se uzme bombončić i stavi se na hrpu susjednu hrpi na koju je u prijašnjem potezu stavio prijašnji igrač pod uvjetom da se na hrpu pod brojem  $k$  može staviti najviše  $k$  bombončića. Igrač koji ne može napraviti potez gubi. Tko pobjeđuje i kako glasi pobjednička strategija?
15. Neka je  $n$  pozitivni cijeli broj. Jakov i Jan biraju prirodne brojeve  $k$  takve da je  $k \leq n$ . Pravila odabira su sljedeća:
- Igrač ne može ponovno odabrati broj koji je odabrao neki od dvojice igrača u bilo kojem prijašnjem krugu (znači svaki put biraju novi broj)
  - Igrač ne može odabrati broj koji je prethodnik ili sljedbenik nekog broja koji je taj igrač već prije odabrao (znači ovo pravilo je za svakog igrača posebno)
  - Igra je neriješeno ako su svi brojevi odabrani, u suprotnom, onaj igrač koji ne može odabrati broj je izgubio.

Ako Jakov igra prvi tko će pobijediti i kako?

16. Dana je ploča  $m \times n$ . Bruno i Lucijan igraju sljedeću igru: Igrač koji je na potezu mora obojati neko polje koje nije bilo prije obojano zelenom, plavom ili crvenom bojom. Bruno kreće prvi. Bruno pobjeđuje ako postoje tri dijagonalna polja (kao na slici dolje) koja su obojana trima različitim bojama. U suprotnom Lucijan pobjeđuje. Odredite pobjednike i strategije za sve  $m, n \geq 4$ .



17. Polja  $8 \times 8$  ploče su na početka sva bijela. Ana i Branko igraju igru. Prvo Ana oboja  $n$  polja ploče u crveno. Nakon toga, Branko odabire četiri reda i četiri stupca te ploče te ih sva polja unutar njih oboja u crno. Ana pobjeđuje ako na ploči ostane barem jedno crveno polje. Tko pobjeđuje?

- 18.** Neka je  $n$  neki pozitivni cijeli broj. Fran i Lucia igraju igru s  $n$  kartica označenih brojevima  $1, 2, \dots, n$ . Na početku, špil kartica je izmiješan. Igrači se izmjenjuju počevši s Franom. Svaki potez, igrač uzme karticu na vrhu špila i ako je broj na njoj  $k$  pogleda prvih  $k$  kartica s vrha i onda ih razmjesti na vrhu kako želi. Ako gornja kartica opet pokazuje taj isti broj  $k$ , onda je ta osoba izgubila. Inače, igra se nastavlja i sada je na redu drugi igrač. Tko pobjeđuje i kako?
- 19.** Na stolu su  $n$  kamenčića. Dva igrača naizmjenice odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić. Koji igrač sigurno može pobijediti?
- 20.** Na ploči na početku piše  $n$  uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je  $n$  veći od 10. Anica i Božica naizmjenice brišu po jedan broj s ploče, dok ne ostanu 2 broja na ploči. Anica pobjeđuje ako su ta 2 broja relativno prosta, u suprotnom pobjeđuje Božica. Za koje  $n$  Anica ima pobjedničku strategiju ako igra prva?



## 5.3. A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednadžbe

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Uvod

#### Funkcija. Osnovna svojstva funkcija.

Što je svrha postojanja?

Što je svrha našeg bivanja ovdje?

Što je naša funkcija na ovom svijetu?

Što je funkcija?

##### Definicija 5.3.1

**funkcija** 1. položaj u službi [*biti na funkciji*, *razg.* biti na (visoku) položaju]; djelatnost, djelovanje, uloga, zadatak 2. *biol.* specifičan rad organa i uopće rad organizma [fizičke, mentalne funkcije] 3. posebna svrha zbog koje tko ili nešto postoji ili djeluje [*biti u funkciji* služiti svojoj svrsi, namjeni; raditi, biti aktivan; *staviti u funkciju* pokrenuti što] 4. *mat.* preslikavanje s jednog skupa na drugi, kod kojeg je svakom elementu prvoga pridružen jedinstveni element drugoga skupa 5. *inform.* u nekim kompjuterskim jezicima izraz za rutinu, potprogram.

(izvor: [hjp.znanje.hr](http://hjp.znanje.hr))

No, je li ovo ispravna definicija?

##### Definicija 5.3.2: Funkcija

Neka su  $A$  i  $B$  skupovi. **Funkcija** je preslikavanje

$$f: A \rightarrow B$$

koje svakom elementu  $x \in A$  pridružuje *točno jedan* element  $f(x) \in B$ .

##### Definicija 5.3.3: Domena, kodomena i slika

Neka je  $f: A \rightarrow B$  funkcija.

- Skup  $A$  naziva se *domena* funkcije  $f$ .
- Skup  $B$  naziva se *kodomena* funkcije  $f$ .
- Skup

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

naziva se *slika* (ili vrijednosni skup) funkcije  $f$ .

**Primjer 1.** Je li sljedeće funkcija? Ako je, odredi domenu, kodomenu i sliku funkcije.

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
2.  $f(x) = \pm\sqrt{x}$
3.  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$
4.  $x^2 + y^2 = 1$
5.  $f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3$
6.  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}, \quad f(1) = a, f(2) = a, f(3) = b$
7.  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

#### Napomena 5.3.4

Nije funkcija ako:

1. postoji  $x$  bez slike
2. postoji  $x$  s više slika
3. domena ili kodomena nisu jasno definirane

#### Definicija 5.3.5: Injekcija

Funkcija  $f: A \rightarrow B$  je *injektivna* ako za sve  $x_1, x_2 \in A$  vrijedi:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

#### Definicija 5.3.6: Surjekcija

Funkcija  $f: A \rightarrow B$  je *surjektivna* ako za svaki  $y \in B$  postoji  $x \in A$  takav da vrijedi

$$f(x) = y.$$

#### Definicija 5.3.7: Bijekcija

Funkcija  $f: A \rightarrow B$  je *bijektivna* ako je injektivna i surjektivna.

## Funkcijske jednadžbe - tko, kaj, zakaj (i najbitnije, kako?)

Funkcijska jednadžba je problem u kojem treba pronaći sve funkcije koje zadovoljavaju zadani izraz(e). Rješavanje takvog problema obično ima dva koraka. Prvi je pronalazak skupa funkcija koje zadovoljavaju izraz. Drugi je korak mnogo lakši i svodi se na fizičku provjeru koje od tih funkcija stvarno zadovoljavaju jednadžbu.

#### Napomena 5.3.8

Treća algebarska zapovijed - spomeni se da svetkuješ dan Gospodnji i da provjeravaš zadovoljavaju li tvoje funkcije početni uvjet na kraju zadatka! (Sretna Sveta tri kralja usput!)

Pri suočavanju sa sljedećim teškim bitkama, kako bi ubili zmaja:

1. Probajte shvatiti/pogoditi o kojoj se funkciji radi, uvrstite  $f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = -x$  i slično u jednačbe i provjerite radi li.
2. Drugi korak je da elementarno promijenite funkciju, ako je potrebno, skaliranje ili pomakom u neku točku. Npr.  $g(x) = f(x) - f(0)$
3. Najčešći korak je uvrštavanjem vrijednosti. Primjetite da vam u formulaciji zadatka nešto vrijedi za sve  $x$  (ili čak sve parove  $(x, y)$ ) - iskoristite svoju slobodu da pobijete nepoželjne, potencijalno ružne izraze i pojednostavite uvjet - odnosno želite da vam se što više stvari pokradi i zato uvrštavate u funkcije  $0, 1, -1, (x, -x)$  i slično.
4. Budite na oprezu jer postoji mogućnost da dokažete neko važno ranije spomenuto svojstvo.
5. I naravno, kod funkcija nad prebrojivim skupovima  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$  možda indukcija radi.

Prijedimo sad na par primjera.

**Primjer 2 (Cauchyeva funkcijska jednačba).** Nađite sve  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  takve da vrijedi.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

**Rješenje 1.** Prvo probajmo pogoditi rješenje. Uvrstimo  $f(x) = kx + l$  i dobivamo  $k(x + y) + l = kx + ky + 2l$ . Dakle,  $l = 0$ , a  $k$  može biti bilo što. Uvrstimo  $(0, 0) \rightarrow (x, y)$  i dobivamo:  $f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$ . Stavimo da je  $f(1) = k$ . Onda je  $f(2) = f(1 + 1) = 2f(1) = 2k$ . Indukcijom možemo dalje pokazati  $f(n) = nk, n \in \mathbb{N}$ . Ako uzmemo sada  $n \in \mathbb{N}$ , te negativni  $-n$  dobivamo  $0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$  pa je  $f(n) = -f(-n)$ . Sada još kao zadnji korak, neka je  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ . Onda  $q(f(\frac{p}{q})) = f(p) = kp \implies f(\frac{p}{q}) = \frac{kp}{q}$ .  $\square$

**Primjer 3 (Jensenova funkcijske jednačba).** Nađite sve  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  takve da vrijedi  $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})$ .

**Rješenje 2 (Rješenje).** Provjerim se lako utvrdi da svi polinomi prvog stupnja zadovoljavaju jednačbu. Sada napravimo transformaciju  $g(x) = f(x) - f(0)$ . Dakle  $g(0) = 0$ . Također, dobije se  $g(x) + g(y) = 2g(\frac{x+y}{2})$ . Uvrštavanjem  $(0, t)$  dobivamo  $g(t) = 2g(\frac{t}{2})$ . To znači da je  $g(x) + g(y) = g(x + y) \implies g(x) = kx$ . Dobili smo Cauchyevu jednačbu.  $\square$

## Zadaci za samostalni rad

### Lakši zadaci

1. Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da vrijedi  $f(xy) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Pronađi sve takve funkcije.
2. Nađite sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je:  $f(x + y) + f(x - y) = x^2 + y^2$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .
3. Nađite sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je:

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za sve realne brojeve  $x$  i  $y$  vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2$$

## Umjereni zadaci

5. Nađite sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je:

$$2f(1-x) + 1 = xf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

6. Dokažite da postoji beskonačno mnogo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju  $f(0) = 0$  i takvih da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $f(x+1) = f(x) + 1$ .

7. Nađite sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je

$$f(x + f(x + y^2) + y) = f(2x - y) + 3y \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

uz uvjet da je  $f$  injektivan.

8. Ako je  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strogo rastuća surjekcija, dokažite da je  $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

9. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f(f(x)) + f(y) = 2y + f(x - y).$$

## ovaj je meni dao smisao :)

10. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takve da za sve  $x, y \in \mathbb{Z}$  vrijedi

$$f(xy + f(y)) = f(x)f(y) + y.$$

## 5.4. N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Uvod i primjeri

Za ovu temu potrebno je osnovno predznanje o modularnoj aritmetici, tj. kongruencijama. Ako se nikad nisi susreo/la s tim nazivom, preporučam da pogledaš [ovo predavanje](#) da se upoznaš s kongruencijama, pročitaš svojstva i proučiš nekoliko primjera jednostavnih zadataka.

Na početku ćemo kratkom intuitivnom opservacijom napraviti uvod u mali Fermatov teorem i pokazati njegovu primjenu na nekoliko malih primjera. Zatim ćemo uvesti pojam Eulerove funkcije i na kraju Eulerov teorem koji je ustvari generalizacija malog Fermatovog teorema.

#### Napomena

Zapis  $a \equiv b \pmod{n}$ , koji uključuje znak  $\equiv$  i zagrade oko mod, podrazumijeva kongruenciju modulo  $n$  i takva se relacija razlikuje od jednakosti. Pored toga, zapis  $a \bmod b$  predstavlja binarnu operaciju čiji je rezultat ostatak pri dijeljenju  $a$  brojem  $b$ , odnosno jedinstveni nenegativni cijeli broj  $r$  ( $0 \leq r < b$ ) za koji vrijedi  $r \equiv a \pmod{b}$ . Čitatelji upoznati s programiranjem prepoznat će  $a \bmod b$  kao operaciju koja je u mnogim programskim jezicima definirana znakom `%`. Broj  $n$  kojim radimo modulo operacije u literaturi se naziva *modulus*, stoga ću ga tako nazivati i u ovom predavanju.

### Order i Mali Fermatov teorem (modulo prost broj)

Kada potenciramo cijele brojeve modulo  $n$ , postoji konačno mnogo mogućih rezultata, načelno zato što postoji konačno mnogo ostataka modulo  $n$ , oni su od 0 do  $n - 1$ . To znači da kad višestruko množimo istim brojem  $a$ , niz ostataka će se eventualno ponavljati, tj. napraviti će *ciklus*. Zadržimo se za sada na prostim modulima. Na primjer, modulo 7:

$$3^0 \equiv 1$$

$$3^1 \equiv 3$$

$$3^2 \equiv 9 \equiv 2$$

$$3^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6$$

$$3^4 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 4$$

$$3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5$$

$$3^6 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1$$

Uočimo da nije potrebno pisati dalje od ovoga, za  $a = 3$  sigurno će ići 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, ... svaki idući član je član prije njega pomnožen s 3 (mod  $p$ ).

Ostatci se ciklički vraćaju na 1 na šestoj potenciji. Ovo nije slučajnost: kada je modulus  $p$  prost broj (u našem primjeru  $p = 7$ ), a broj kojeg množimo relativno prost s njim, nikada nećemo pogoditi nulu, jer ne možemo množenjem dva broja relativno prost s  $p$  dobiti broj koji je djeljiv s  $p$ . U igri su samo ostaci 1, 2, ...,  $p - 1$  - ima ih točno  $p - 1$ , a ponavljano množenje istim brojem (kao što je u primjeru prikazano s 3) samo se "prebacujemo" s jednog ostatka na drugi. Nakon  $p - 1$  množenja, tj. u potencijama od prve do  $p - 1$ ., očekivano je da ćemo proći najviše  $p - 1$  ostataka (nekad svih  $p - 1$ , a nekad podskup njih!), a 1 će se pojaviti na kraju upravo zato što je i  $a^0 \equiv 1$  na početku niza. Ponavljano množenje fiksnim  $a$  stvara konačan niz ostataka koji se eventualno ponavljaju, kažemo da čine *ciklus*, a 1 je na početku ciklusa.

Nakon ovog, nadajmo se intuitivnog uvoda možemo započeti s formalnim uvodom.

Neka je  $S = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  skup ostataka modulo  $p$  bez nule i  $T : S \rightarrow S$  funkcija zadana pravilom pridruživanja  $T(x) = ax \pmod{p}$  za neki fiksni  $a$  za koji je  $\gcd(a, p) = 1$  (ili ekvivalentno  $p \nmid a$ ). Takav  $a$  biramo zato što onda postoji njegov inverz, odnosno  $b$  za koji je  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ . Stoga je funkcija  $T^{-1}(x) = bx \pmod{p}$  inverzna funkciji  $T$ . Doista,  $T^{-1}(T(x)) = bax \equiv x \pmod{p}$ . Dakle,  $T$  je bijekcija sa skupa  $S$  u  $S$  i ta funkcija načelno permutira ostatke. Započnimo s nekim ostatkom  $x$  i promotrimo sljedeći niz:

$$x, T(x) = ax, T^2(x) = a^2x, T^3(x) = a^3x, \dots \quad T^n(x) = \underbrace{T(T(\dots T(x)))}_{n \text{ puta}}$$

Već smo potvrdili da svaki član niza ovisi samo o prethodnom, tj. moramo znati samo  $i-1$ . član kako bismo izračunali  $i$ -ti. Imamo samo konačno mnogo ostataka pa u ovakvom nizu eventualno moramo doći do nekog ostatka koji smo već prošli, od tada nadalje vrijednosti se periodički ponavljaju. Posebno je zanimljiv niz za  $x = 1$ :

$$1, a, a^2, a^3, \dots$$

U tom se nizu očito nalazi ostatak 1. Duljina jednog ciklusa je najmanji prirodan broj  $r$  za koji je  $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ . Takav  $r$  nazivamo *redom* broja  $a$ . Osim na prvom mjestu, 1 se nalazi i na  $r+1$ . mjestu kao prvi član niza koji se ponavlja. Raspišimo članove niza:

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{r-1}, a^r, a^{r+1}, a^{r+2}, \dots, a^{2r-1}, a^{2r}, a^{2r+1}, \dots$$

Iskoristimo činjenicu da je  $a^r \equiv 1 \pmod{p}$  pa možemo istaknuti cikluse:

$$\underbrace{1, a, a^2, a^3, \dots, a^{r-1}}_{\text{prvi ciklus}}, \underbrace{a^r, a^r \cdot a^1, a^r \cdot a^2, \dots, a^r \cdot a^{r-1}}_{\text{drugi ciklus}}, a^{2r}, a^{2r+1}, \dots$$

#### Definicija 5.4.1: Red (order)

Red broja  $a$  modulo  $p$  je najmanji prirodni broj  $r$  takav da je  $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ . Pišemo  $r = \text{ord}_p a$  i čitamo *red* ili *order od a modulo p*.

Osvrnimo se na ranije prikazan primjer u kojem je  $a = 3$  i  $p = 7$ . Počevši od  $x = 1$ , računamo potencije  $3^1, 3^2, \dots, 3^6$  uzastopnim množenjem s 3, odnosno uzastopnom primjenom funkcije  $T$ . Prvi put kad se vratimo na 1 je nakon šest množenja, stoga je red  $r$  broja 3 upravo 6. Ciklus ostataka u tom nizu je duljine 6:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

i u njemu se nalaze svi ostaci od 1 do 6 točno jedanput. Stoga, prvih  $p-1$  (ili općenitije bilo kojih  $p-1$  uzastopnih) potencija broja 3 modulo  $p = 7$  čine permutaciju skupa ostataka.

#### Teorem 5.4.2: Mali Fermatov teorem

Neka je  $a$  cijeli broj, a  $p$  prost broj. Ako su  $a$  i  $p$  relativno prosti, tj.  $\gcd(a, p) = 1$ , onda je  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Dokaz.** U dokazu je ključna činjenica da skupovi brojeva  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$  i  $\{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$  imaju iste ostatke modulo  $p$

Promotrimo prvih  $p-1$  višekratnika broja  $a$ :  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ . Pokažimo prvo da su svi oni različiti modulo  $p$ . Naime, pretpostavimo da su neka dva ista:  $ia \equiv ja \pmod{p}$  za neke  $i, j$  ( $1 \leq i, j \leq p-1$ ). Ta kongruencija ekvivalentna je  $a(i-j) \equiv 0 \pmod{p}$ . Budući da vrijedi  $\gcd(a, p) = 1$ , jedino je moguće da  $p$  dijeli  $i-j$ , odnosno  $i-j = kp$  za neki  $k$ . Ali,  $i$  i  $j$  nalaze se između 1 i  $p-1$ , zato  $i-j$  ne može biti nijedan višekratnik broja  $p$  osim nule, stoga je  $i = j$ .

Dobili smo da  $p-1$  brojeva  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$  daje različite ostatke modulo  $p$ , a dodatno nijedan od tih ostataka nije nula, zaključimo da su ti ostaci upravo  $1, 2, 3, \dots, p-1$  u nekom poretku.

Sada možemo zapisati ovu kongruenciju:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

Vrijedi  $\gcd(p, (p-1)!) = 1$ , dakle, postoji inverz broja  $(p-1)!$  modulo  $p$  pa ga možemo skratiti.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

□

### Propozicija 5.4.3

Za prost broj  $p$  i bilo koji cijeli broj  $a$ , uključujući i višekratnike od  $p$ , vrijedi  $a^p \equiv a \pmod{p}$

Međutim, nije nužno da se svi ostatci od 1 do  $p-1$  nalaze u istom ciklusu. Moguće je da primjena  $T$  na  $1, 2, \dots, p-1$  podijeli te ostatke u disjunktne skupove. Primjerice,  $a = 2$  i  $p = 7$ . Promotrimo kako  $T$  djeluje na svaki ostatak:

$$\begin{aligned} T(1) &= 2, & T(2) &= 4, & T(3) &= 6 \\ T(4) &= 1, & T(5) &= 3, & T(6) &= 5 \end{aligned}$$

Dva ciklusa koja imamo su  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  i  $3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ . Potencije broja  $a$  (ovdje 2) nalaze se, očekivano, u onom ciklusu u kojem je 1. Duljina oba ciklusa je 3, tj.  $\text{ord}_7(2) = 3$ . Dokažimo bitnu činjenicu koja povezuje order i modulo:

### Lema 5.4.4

Order broja  $a$  modulo  $p$  je uvijek djelitelj  $p-1$ .

**Dokaz.** Neka je  $r = \text{ord}_p a$  **najmanji** prirodni broj sa svojstvom  $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ . Mali Fermatov teorem nam već nalaže  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , zato takav  $r$  sigurno postoji. Prema osnovnom teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni  $q, s$  takvi da je

$$p-1 = qr + s, \quad 0 \leq s < r$$

Sada imamo

$$a^{p-1} = a^{qr+s} = (a^r)^q \cdot a^s \equiv 1^q \cdot a^s \equiv a^s \pmod{p}$$

Ali,  $a^{p-1} \equiv 1$ , stoga je  $a^s \equiv 1 \pmod{p}$ . Zbog minimalnosti  $r$ , jedino je moguće  $s = 0$ . Dakle,  $r \mid p-1$ . □

### ⚠ Oprez 2

Ne vrijedi obrat malog Fermatovog teorema! Ako su  $a$  i  $n$  relativno prosti takvi da je  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ , iz toga ne slijedi da je  $n$  prost broj. Na primjer, uzmimo  $a = 7$  i  $n = 25$ . Vrijedi  $\gcd(7, 25) = 1$  i  $7^{24} \equiv 1 \pmod{25}$  (ovo zahtijeva malo računanja), ali  $25 = 5 \cdot 5$  je složen broj.

### Korolar: (Fun fact)

S druge strane, ako imamo broj  $x$  koji ne znamo je li prost ili složen, te odaberemo neki  $a$  njemu relativno prost, računanjem  $a^{x-1}$  modulo  $x$ , ako rezultat nije 1, zaključili smo da  $x$  nije prost broj iako ne znamo ništa o njegovim faktorima! Broj  $a$  u tom slučaju nazivamo svjedokom da je  $x$  složen. Ovo se naziva *test prostosti* i specifično ovaj je u praksi vrlo slab, neki brojevi (npr. 1729) daju 1 za sve kandidate  $a$ .

**Primjer 1.** Izračunaj  $3^{33}$  modulo 7. (Odredi ostatak pri dijeljenju broja  $3^{33}$  sa 7.)

**Rješenje 1.** Budući da je 7 prost broj i  $\gcd(3, 7) = 1$ , mali Fermatov teorem govori  $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ . Eksponent 33 možemo zapisati kao  $5 \cdot 6 + 3$  pa imamo:

$$3^{33} = 3^{5 \cdot 6 + 3} = 3^{5 \cdot 6} \cdot 3^3 = (3^6)^5 \cdot 3^3 \equiv 1^5 \cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 6 \pmod{7}$$

□

**Primjer 2.** Odredi sve proste brojeve  $p$  takve da je  $29^p + 1$  djeljiv s  $p$ .

**Rješenje 2.** Ideja rješenja: Iskoristimo mali Fermatov teorem za  $a = 29$

Tvrđnja zadatka zapisana kao kongruencija glasi  $29^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Prema malom Fermatovom teoremu (Propozicija 1.2) imamo  $29^p \equiv 29 \pmod{p}$ .

Kombiniranjem te dvije kongruencije dobivamo  $30 \equiv 0 \pmod{p}$  iz čega slijedi da je  $p$  djelitelj broja 30.

Provjerom potvrdimo da brojevi  $p = 2, 3, 5$  doista zadovoljavaju traženu tvrdnju.

□

## Eulerov teorem (modulo složen broj)

Vratimo se na diskusiju s početka predavanja. Analizirali smo što se događa kad računamo potencije modulo neki prosti broj. Što ako modulus  $n$  nije prost? Tada će, jasno, biti manje od  $n - 1$  brojeva u skupu ostataka. Promatrat ćemo samo potencije brojeva koji su relativno prosti s  $n$ . Pogledajmo potencije broja 2 modulo 9:

$$2^0 \equiv 1$$

$$2^1 \equiv 2$$

$$2^2 \equiv 4$$

$$2^3 \equiv 8$$

$$2^4 \equiv 16 \equiv 7$$

$$2^5 \equiv 14 \equiv 5$$

$$2^6 \equiv 10 \equiv 1$$

i to je kraj ciklusa, odavde će se ostaci samo ponavljati.

Da bismo olakšali analizu, definirajmo Eulerovu funkciju:

### Definicija 5.4.5: Eulerova funkcija

Eulerova funkcija je funkcija  $\varphi(n)$  (čita se *fi* od *n*) koja svakom prirodnom broju  $n > 1$  pridružuje broj relativno prostih brojeva s  $n$  koji su manji od  $n$ . Posebno je definirano  $\varphi(1) = 1$ .

Na primjer:  $\varphi(12) = 4$ , od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11, samo su 1, 5, 7 i 11 relativno prosti s 12.

Za složene brojeve  $n$ , broj različitih ostataka dok ne dođemo do kraja ciklusa općenito je jednak vrijednosti  $\varphi(n)$ . Iz potpunog skupa ostataka  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  jednostavno smo izbacili sve one koji nisu relativno prosti s  $n$ , što uključuje i nulu. Ako počnemo od nekog broja koji je relativno prost s  $n$  i množimo ga relativno prostim brojem, logički se može zaključiti da nikada nećemo dotaknuti broj koji nije relativno prost s  $n$ . Sve koji nisu relativno prosti smo maknuli iz skupa  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$  i preostalo nam je  $\varphi(n)$  brojeva.

Navedimo neka korisna svojstva Eulerove funkcije:



### Lema 5.4.6

Za prost broj  $p$  vrijedi

$$\varphi(p) = p - 1$$

Doista,  $p$  je relativno prost sa svakim brojem od 1 do  $p - 1$ .

### Lema 5.4.7

Za potenciju prostog broja  $p$  vrijedi

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

Dokaz klasičnim prebrojavanjem: iz skupa  $\{1, 2, 3, \dots, p^k - 1, p^k\}$  izbacimo sve višekratnike broja  $p$ , točnije prvih  $p^{k-1}$  višekratnika:  $p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1} \cdot p$  pa su preostali samo brojevi relativno prosti s  $p$ , a tako i s  $p^k$ .

### Lema 5.4.8

Ako je rastav broja  $n$  na proste faktore  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ , tada je

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

**Dokaz.** Ova lema može se dokazati kombinatornim prebrojavanjem i načelom uključivanja i isključivanja. Neka su  $p_1, p_2, \dots, p_r$  svi prosti djelitelji od  $n$ . Želimo odrediti koliko ima brojeva u skupu  $\{1, 2, \dots, n\}$  koji su relativno prosti s  $n$ , odnosno koji nisu djeljivi nijednim od prostih brojeva  $p_1, \dots, p_r$ .

Brojevi koji su djeljivi jednim prostim brojem  $p_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) su  $p_i, 2p_i, 3p_i, \dots$ , a budući da  $p_i$  dijeli  $n$ , ima točno  $\frac{n}{p_i}$  takvih brojeva.

Prebrojimo brojeve koji su djeljivi s dva prosta broja. Za  $i \neq j$ , brojevi djeljivi i s  $p_i$  i s  $p_j$  su upravo oni djeljivi s  $p_i p_j$ , a takvih ima  $\frac{n}{p_i p_j}$ .

Dalje nastavimo istom argumentacijom za tri, četiri, ..., sve do  $r$  prostih brojeva: brojevi djeljivi s  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$  su višekratnici broja  $p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$ , a njih ima  $\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$ .

Konačno, primjenom načela uključivanja i isključivanja slijedi da je broj prirodnih brojeva od 1 do  $n$  koji nisu djeljivi nijednim  $p_i$  jednak

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \left( \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_r} \right) \\ &\quad + \left( \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots \right) \\ &\quad - \left( \text{suma } \frac{n}{\text{tri različita prosta djelitelja}} \right) \\ &\quad + \dots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} \end{aligned}$$

Izlučivanjem  $n$  i faktoriziranjem pribrojnika slijedi formula, a taj postupak ću izostaviti zbog duljine. □

### Korolar 5.4.9

Eulerova funkcija je multiplikativna za relativno proste brojeve  $m, n$ :

$$\gcd(m, n) = 1 \implies \varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

Korolar se može lako dokazati koristeći Leme 1.7 i 1.8, a dokaz je ostavljen kao vježba čitatelju.

**Primjer 3.** Odredi  $\varphi(300)$

**Rješenje 3.** Faktoriziramo  $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ . Izračunamo

$$\varphi(300) = 300 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 80$$

□

#### Teorem 5.4.10: Eulerov teorem

Ako su  $a$  i  $n$  relativno prosti brojevi, tada vrijedi  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

**Dokaz.** Ideja dokaza: analogija s malim Fermatovim teoremom, samo što promatramo reducirani skup ostataka  $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$

Neka su  $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}$  svi brojevi manji od  $n$  i relativno prosti s  $n$ . Primjerice, za  $n = 12$ , to su 1, 5, 7, 11.

Kao i u dokazu malog Fermata, množenje svakog broja nekim brojem  $a$  ( $\gcd(a, n) = 1$ ) modulo  $n$  samo će permutirati te brojeve, tj. tvrdimo da su brojevi

$$ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(n)}$$

također svi različiti modulo  $n$  i svaki je relativno prost s  $n$ .

Dokaz da su različiti: ako je  $ar_i \equiv ar_j \pmod{n}$ , tada je  $a(r_i - r_j) \equiv 0 \pmod{n}$ . Budući da je  $\gcd(a, n) = 1$ , slijedi  $r_i \equiv r_j \pmod{n}$ , pa  $i = j$ .

Dokaz da su relativno prosti: vrijedi  $\gcd(a, n) = 1$  i  $\gcd(r_i, n) = 1$ , stoga je sigurno i  $\gcd(ar_i, n) = 1$ , jer nije moguće da množenjem dva broja relativno prosti s  $n$  dobijemo umnožak koji nije relativno prost s  $n$ .

Dakle, skup  $\{ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(n)}\}$  je isti skup kao i  $\{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}\}$  kada elemente promatramo modulo  $n$ . Nastavljamo kao i u dokazu MFT:

$$(ar_1) \cdot (ar_2) \cdot \dots \cdot (ar_{\varphi(n)}) \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

Lijeva strana je  $a^{\varphi(n)} \cdot (r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)})$ , a kako su svi  $r_i$  relativno prosti s  $n$ , tako je i njihov umnožak, dakle inverz postoji, pa možemo skratiti s obje strane da dobijemo

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

što je trebalo dokazati.

□

Lema 1.4 vrijedi stoga i za složene  $n$ , tj. order od  $a$  modulo  $n$  je djeliteľ broja  $\varphi(n)$ , a dokaz je analogan.

Za pojednostavljivanje velikih potencija korisna je sljedeća lema čiji je dokaz ostavljen kao zadatak.

#### Lema 5.4.11

Za relativno proste  $a$  i  $n$  vrijedi  $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(n)} \pmod{n}$

**Primjer 4.** Dokaži da  $51 \mid 10^{32n+9} - 7$  za svaki prirodni  $n$ .

**Rješenje 4.** Moramo pokazati da je  $10^{32n+9} \equiv 7 \pmod{51}$ .

Imamo  $\varphi(51) = 32$  i  $\gcd(10, 51) = 1$  pa je po Eulerovom teoremu  $10^{32} \equiv 1 \pmod{51}$ , a potenciranjem te kongruencije slijedi  $10^{32n} \equiv 1 \pmod{51} \iff 10^{32n+9} \equiv 10^9 \pmod{51}$ .

Preostaje pokazati da je  $10^9 \equiv 7 \pmod{51}$ . Počevši od  $10^2 = 100 \equiv -2 \iff 10^8 \equiv 16 \pmod{51}$ , stoga je  $10^9 \equiv 160 = 3 \cdot 51 + 7 \equiv 7 \pmod{51}$ .

□

**Primjer 5.** Odredi zadnje dvije znamenke broja  $3^{3^{3^3}}$ .

**Rješenje 5.** Koristimo Lemu 1.11.

Zadnje dvije znamenke znači odredimo kongruenciju modulo 100.

$$3^{3^{3^3}} \equiv 3^{\left(3^{3^3} \bmod \varphi(100)\right)} \pmod{100}$$

Imamo  $\varphi(100) = 40$  i sada nas zanima  $3^{3^3} \equiv ? \pmod{40}$

Imamo  $\varphi(40) = 16$  pa je  $3^{3^3} \equiv 3^{3^3 \bmod 16} \equiv 3^{11} \equiv 27 \pmod{40}$  - to lagano izračunamo koristeći činjenicu da je  $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{40}$ . Dobili smo da je  $3^{3^3} \equiv 27 \pmod{40}$  i vraćanjem u prvu kongruenciju slijedi:

$$3^{3^{3^3}} \equiv 3^{\left(3^{3^3} \bmod \varphi(100)\right)} \equiv 3^{27} \pmod{100}$$

Računanje  $3^{27}$  modulo 100 je jednostavno, ali dugačko, zato ćemo ga izostaviti u ovom rješenju. Tražene dvije znamenke su 87.  $\square$

Evo nešto što će biti korisno u nekim zadacima:

#### Propozicija 5.4.12

Neka su  $m$  i  $n$  relativno prosti brojevi i  $a, b$  takvi da vrijedi:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Tada vrijedi  $a \equiv b \pmod{mn}$ .

Dokaz je intuitivan:  $m$  i  $n$  oba dijele  $a - b$ , a relativno su prosti, pa slijedi  $mn \mid a - b$ .

Sretno u rješavanju!

## Zadaci

1. Izračunaj  $128^{131}$  modulo 17.
2. Odredi posljednje tri znamenke broja  $3^{1999}$ .
3. Odredi posljednje dvije znamenke broja  $7^{7^{100}}$ .
4. Odredi  $2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + \dots + 9^{90} \pmod{7}$ .
5. Pretpostavimo da  $14 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_{2025}$ . Dokaži da tada  $14 \mid a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_{2025}^7$ .
6. Dokaži lemu: za relativno proste  $a$  i  $n$  vrijedi  $a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(n)} \pmod{n}$
7. Odredi
$$3!^{4!^{5!^{6!}}} \pmod{11}$$
8. Odredi sve proste brojeve  $p$  takve da  $p \mid 4^p + 5^p$
9. Neka je  $p > 7$  prost broj. Dokaži da  $p \mid \underbrace{11 \dots 1}_{p-1}$
10. a) Neka je  $1 < m \leq n$ . Provjeri da  $\varphi(m) \mid n!$   
b) Dokaži da za svaki paran broj  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1$
11. Odredi sve proste brojeve  $p$  takve da  $p^2 \mid 5^{p^2} + 1$ .

**12.** Neka su  $p$  i  $q$  različiti prosti brojevi. Dokaži da vrijedi

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

**13.** Dokaži da za cijeli  $x$  broj  $x^2 + 1$  nema djelitelja oblika  $4k + 3$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ).

**14.** Dokaži da za svaki prost broj  $p$  postoji beskonačno mnogo brojeva oblika  $2^n - n$  koji su djeljivi s  $p$ .

- 15.**
- a) Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje je  $\varphi(n) = \frac{n}{2}$
  - b) Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje je  $\varphi(n) = \frac{n}{3}$
  - c) Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje je  $\varphi(n) = \frac{n}{6}$

**16.** Dokaži da ne postoji  $n > 1$  takav da  $n \mid 2^n - 1$

**17.** Dokaži da  $221 \mid n^{n^{n^{n}}} - n^{n^n}$  za svaki  $n \geq 3$ .

**18.** Zadani su prirodni brojevi  $m, n$  i  $e$  uz uvjet  $m < n$  i  $n = pq$  je umnožak dva prosta broja. Broj  $d$  je inverz broja  $e$  modulo  $\varphi(n)$ , tj. vrijedi  $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ . Neka je  $c \equiv m^e \pmod{n}$ . Dokaži da je  $m \equiv c^d \pmod{n}$ .

## 5.5. X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Kratki uvod

Kombinatorna geometrija je područje koje se, kao što je iz samog naziva jasno, bavi kombinatornim problemima povezanim s geometrijskim objektima. Kao takva traži znanja i vještine i iz geometrije i iz kombinatorike, koja su većinom nešto drukčija od onih koje inače susrećemo. Stoga zadatci, iako često jednostavno sročeni, obično predstavljaju poseban izazov. Zato na početku navodimo nekoliko osnovnih principa rješavanja:

- Dirichletov princip
- Princip ekstrema
- Indukcija
- Invarijante i monovarijante
- Konveksna ljuska

#### Definicija 5.5.1: Konveksna ljuska

Za skup točaka u ravnini  $S$  kažemo da je *konveksan* ako za svake dvije točke  $A, B \in S$  vrijedi da je dužina  $\overline{AB}$  u potpunosti sadržana u  $S$ .

Ako je  $S$  skup točaka u ravnini, definiramo njegovu *konveksnu ljusku* kao presjek svih konveksnih skupova koji sadrže  $S$ .

Pojam konveksne ljuske je izuzetno značajan jer njegovim korištenjem u zadacima dobivamo raznolike informacije o međusobnom položaju tih točaka. O tome nam govori i sljedeći teorem:

#### Teorem 5.5.2: Konveksna ljuska

- konveksna ljuska skupa  $S$  je ustvari najmanji konveksni skup koji sadrži  $S$ ,
- konveksna ljuska skupa  $S$  je mnogokut s vrhovima iz  $S$ ,
- specijalno, u slučaju da je  $S$  konačan skup točaka, njegova konveksna ljuska je mnogokut čiji su vrhovi sve točke iz  $S$ ,
- sve točke skupa  $S$  sadržane su u njegovoj konveksnoj ljusci (mogu biti i na njezinom rubu).

Što se tiče zgodnih geometrijskih činjenica, ističem:

- razne formule za opseg i površinu
- nejednakost trokuta  $a < b + c$

#### Teorem 5.5.3: Središnji i obodni kut

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom. Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni. Obodni kutovi nad lukovima iste duljine su jednaki.

## Princip ekstrema

Princip ekstrema jedna je vrsta antibiotika širokog spektra za zadatke iz svih područja (najčešće naravno kombinatorike, nerijetko teorije brojeva ili algebre, a ponekad i geometrije - googleajte moving points method), pa ćemo se tako i njom poslužiti za kombinatornu geometriju.

Dokaz uvijek počinje famoznim riječima "Neka je *nešto* minimalno (maksimalno)". I onda se naravno pokaže da može bolje - iz minimuma izvući još manje, iz maksimuma još više (kao što mi iz vas najboljih na ovim pripremama pokušavamo dobiti još više ☺).

U kombinatornoj geometriji to će najčešće biti točka najbliža pravcu, trokut najveće površine, konfiguracija najkraće sume duljina dužina... I onda samo treba pokazati ili da za tu konfiguraciju vrijedi uvjet zadatka (ako dokazujemo direktno) ili da može bolje (ako dokazujemo suprotno).

### Napomena 5.5.4: Princip ekstrema

Traženje minimuma/maksimuma ima smisla samo na konačnim skupovima realnih brojeva. Ukoliko postoji beskonačni skup realnih brojeva, tada brojevi često "teže" u beskonačnost (ili minus beskonačnost), a čak ako su i ograničeni, ne moraju imati minimum/maksimum (već tada imaju nešto što se zove infimum/supremum). Infimum je najveći broj koji je manji od svih brojeva u skupu (npr. 0 za  $1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ), a supremum je najmanji broj koji je veći od svih brojeva u skupu.

Najbitniji dio prošle napomene je naravno da svi konačni skupovi **moraju** imati minimum i maksimum, pa je često najlakše pokazati da je skup beskonačan tako da pokažemo da uvijek možemo smanjiti minimum ili povećati maksimum.

## Demistificiranje neprekidnosti

Za početak, hajdmo ju još više mistificirati nego što ste mislili da će biti slučaj. Eto jedna predivna definicija izvučena iz skripte za Matematičku analizu (stranica 71.)

### Teorem 5.5.5: Cauchyjeva definicija

Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval,  $c \in I$  i funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcija  $f$  je neprekidna u točki  $c$  ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Ovo je zapravo "epsilon-delta" definicija koju ste vjerojatno čuli (a na IMO-u 2022. primjenili skoro svi članovi hrvatskog tima). Razbijmo ju malo: "Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval,  $c \in I$  i funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ " - ovdje je važno razumjeti što je otvoreni interval - najobičniji interval u kojem granice nisu uključene, tj.  $\langle a, b \rangle$ . U principu, zahtjev ovdje je sličan napomeni kod principa ekstrema; da koju god točku iz  $I$  uzmemo, imamo nešto i lijevo i desno od nje (tj. da nije ni minimum ni maksimum). Ostatak prve rečenice ide lagano: neka je  $c$  točka koju ćemo gledat, u kojoj je definirana funkcija (tj. ne samo u njoj nego i oko nje) i koja nije na rubu.

Slijedi jedna kratka vježba čitanja matematičkih simbola s razumijevanjem:

- $\forall \varepsilon > 0$  - za sve epsilone veće od 0. Aha, ovo ćemo obično čitati kao "za neki jako mali epsilon".
- $\exists \delta > 0$  - postoji delta veći od nula. Delta će nam zapravo biti "koliko veliku okolinu mogu uzeti da vrijedi", tj. koliko malu okolinu trebam gledati da bi dobio ono što trebam.
- $\forall x \in I$  - logičan zahtjev, a to je da ćemo tvrdnju provjeravati na  $x$  za koje je definiran  $f(x)$ .
- $(|x - c| < \delta) \implies (|f(x) - f(c)| < \varepsilon)$  - ako je  $x$  dovoljno blizu  $c$ , tada je i  $f(x)$  dovoljno blizu  $f(c)$ .

Dakle, sve skupa stavljeno: "koliko god se želimo približiti  $f(c)$ , to možemo napraviti tako da se približimo sa  $x$  ka  $c$ ". Zato je i formalna definicija dana prije ovog teorema kao "funkcija je neprekidna ako  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ".

Zašto nam je ovaj koncept koristan (inače u zadacima s natjecanja; a posebno u kombinatornoj geometriji) je zapravo svojevrsni obrat. Naime, za većinu elementarnih funkcija (ili preslikavanja koja ćete trebati) se lako pokaže da su neprekidna; pa zato uvijek postoji nešto u okolini tog rješenja (npr. uvijek možemo uzeti malo manji broj koji je i dalje veći od 0, uvijek možemo malo napuhati trokut da dobijemo dobru površinu...)

## Neki riješeni primjeri

**Primjer 1.** Unutar kvadrata stranice duljine 1 nalaze se pet točaka. Pokaži da je udaljenost neke dvije manja od  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Rješenje 1.** Primijetimo da navedeni kvadrat možemo podijeliti na četiri manja kvadrata. Po dirichletovom pristupu, u nekom od tih manjih kvadrata se nalaze dvije točke. Dakle, kako se unutar kvadrata stranice  $\frac{1}{2}$  nalaze dvije točke, najudaljenije što mogu biti je na suprotnim krajevima dijagonale, tj. udaljene za  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  što je i trebalo pokazati.  $\square$

**Primjer 2.** Neka je  $S$  skup točaka takav da je svaka točka polovište dužine koja spaja neke druge dvije točke. Dokažite da je  $S$  beskonačan.

**Rješenje 2.** Pretpostavimo suprotno, tj. neka je  $S$  konačan. Tada postoji konačno mnogo dužina koje možemo povući među tim točkama, pa sigurno među tim dužinama postoji ona koja je najdulja. Označimo tu dužinu s  $\overline{AB}$ . Prema uvjetu zadatka,  $B$  je polovište neke od dužina; označimo tu dužinu s  $\overline{CD}$ . (Uočimo da točke  $A, B, C$  i  $D$  nisu kolinearne, jer bi onda točka  $B$  bila između točke  $A$  i npr.  $C$ , pa bi bilo  $|AC| > |AB|$ .) Sada je  $\angle CBA + \angle DBA = 180^\circ$ , pa jedan od njih mora biti pravi ili tupi; uzmimo  $\angle CBA \geq 90^\circ$ . Tada je taj kut sigurno najveći u  $\triangle ABC$ , pa se nasuprot njemu nalazi i najduža stranica tog trokuta, što je dužina  $\overline{AC}$ . No, sastavni dio tog trokuta je i dužina  $\overline{AB}$ , pa smo dobili  $|AC| > |AB|$ , što je kontradikcija. Dakle, skup  $S$  je beskonačan (npr. jedan takav skup je krug).  $\square$

**Primjer 3.** U ravnini je povučeno konačno mnogo pravaca tako da nikoja tri pravca ne prolaze kroz istu točku. Dokaži da je povezana područja ravnine određena tim pravcima moguće obojati u dvije boje tako da nikoja dva susjedna područja nemaju istu boju.

**Rješenje 3.** Ako je samo jedan pravac, onda lagano možemo obojati dva dijela ravnine tako da vrijedi to što treba. Radimo indukciju dodavanjem pravaca:

Recimo da imamo bojanje koje radi za  $n$  pravaca. Dodajmo još jedan, te na njemu označimo  $A$  i  $B$ . Mijenjamo bojanje na sljedeći način: točka  $X$  treba promijeniti boju ako i samo ako su  $A$ ,  $B$  i  $X$  u matematički pozitivnom smjeru. (drugim riječima, promijenimo boju jednoj strani ravnine tog pravca, a drugu ostavimo dobru). Navedeno bojanje očito radi jer nije promijenilo uvjet na stare regije, a nove je popravilo.  $\square$

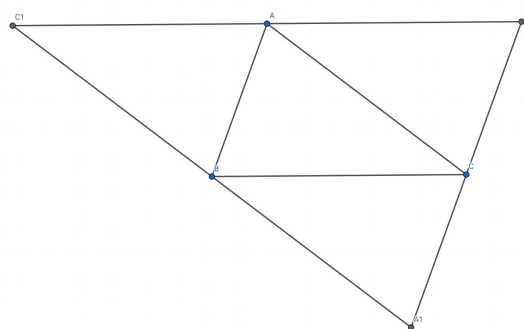
**Primjer 4.** Imamo tri točke u koordinatnom sustavu, smještene na  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  i  $(0,1)$ . U jednom potezu, možemo odabrati točke  $A$  i  $M$  (među tri koje imamo), i premjestiti točku  $A$  u  $A'$  tako da je  $M$  polovište dužine  $AA'$ . Možemo li nekom točkom doći do  $(1,1)$ ?

**Rješenje 4.** Neka su  $(x,y)$  koordinate točke  $A$ , a  $(z,q)$  točke  $M$ . Može se pokazati da će koordinate točke  $A'$  biti  $(2z-x, 2q-y)$ , pa će  $2z-x$  imati istu parnost kao i  $x$ , a  $2q-y$  će imati istu parnost kao i  $y$ . Dakle, naša transformacija je invarijantna na koordinate modulo 2. Budući da nismo imali par koordinata (neparan, neparan), ne možemo ih dobiti, pa ne možemo doći do  $(1,1)$ .  $\square$

**Primjer 5.** Dan je neki konačan skup točaka (s najmanje tri točke) u ravnini takav da svaki trokut kojem su vrhovi točke iz skupa ima površinu manju od 1. Dokažite da skup možemo pokriti trokutom površine manje od 4.

**Rješenje 5.** Budući da postoji konačan broj točaka, one mogu formirati konačan broj trokuta - pa odaberimo najveći među njima. Neka to bude trokut  $ABC$ .

Neka konstruiramo veći trokut  $A_1B_1C_1$  tako da su  $A, B, C$  središta stranica. Ostatak je samo dovršavanje dokaza da je taj trokut ono što tražimo. Nije teško dokazati da su 4 trokuta sukladna, stoga imaju površinu manju od 4.



Također nije teško dokazati da sve točke iz skupa moraju biti obuhvaćene s  $A_1B_1C_1$ : na primjer, ne može postojati točka  $A'$  iznad  $B_1C_1$  jer bi trokut  $A'BC$  imao veću površinu od  $ABC$ .  $\square$

**Primjer 6.** Dano je  $2n+1$  točaka u ravnini tako da nikoje tri nisu kolinearne, a nikoje četiri nisu konciklične. Dokaži da postoji pravac kroz neku točku tako da je točno  $n$  preostalih točaka s jedne (odnosno druge) strane pravca.

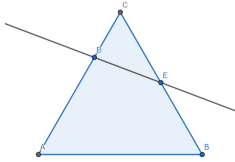
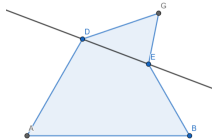
**Rješenje 6.** Uzmimo dvije točke čija dužina pripada rubu konveksne ljuske promatranih točaka. Fiksirajmo jednu, neka se zove  $X$ , a ova druga  $A$ . Tada postoji i točka  $B$  tako da  $\overline{XB}$  također pripada rubu konveksne ljuske. Rotacijom pravca  $AX$  do  $BX$  ćemo sigurno pokupiti sve točke skupa, i to jednu po jednu jer nikoje tri ne smiju biti na istom pravcu. Zato zbog neprekidnosti se lako može primijetiti da kako smo prošli svaki mogući broj točaka sa svake strane, pa je moguće na navedeni način napraviti bilo koju particiju točaka (pa i specijalno  $n$  sa svake strane).  $\square$

## Zadaci za samostalni rad

### Repetitio est mater studiorum

1. Dano je  $2n+3$  točaka u ravnini tako da nikoje tri nisu kolinearne, a nikoje četiri nisu konciklične. Dokaži da postoji kružnica kroz neke tri dane točke takva da je unutar nje točno  $n$  preostalih točaka.



2. Zadano je konačno mnogo crnih i bijelih točaka u ravnini. Na segmentu između svake dvije istobojne točke nalazi se točka suprotne boje. Dokaži da su sve te točke na istom pravcu.
  3. Na kružnici polumjera 1 nekoliko tetiva je nacrtano. Ako svaki promjer siječe najviše  $k$  tetiva, dokaži da je duljina svih tetiva manja od  $k\pi$ .
  4. Dokažite da svaki konveksni poliedar ima barem dvije strane s jednakim brojem vrhova.
  5. Matej ima lik izrezan od papira. U jednom potezu, škarama može napraviti jedan rez bilo gdje, zatim okrenuti jedan od dobivenih likova, i zalijepiti ga gdje je bio odrezan. Je li moguće iz jednakostraničnog trokuta doći do kvadrata u konačno mnogo poteza?
- 

6. U ravnini se nalazi  $n$  plavih i  $n$  crvenih točaka, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Pokažite da između njih možemo povući  $n$  dužina (koje spajaju raznobojne točke) tako da iz svake točke izlazi točno jedna dužina i da se nikoje dvije dužine ne sijeku.
  7. Dokaži da za svaki konveksan mnogokut postoji pravac koji mu dijeli i površinu i opseg na dva jednaka dijela.
  8. U ravnini se nalaze dva konveksna mnogokuta  $A$  i  $B$  takva da se  $A$  nalazi u potpunosti unutar područja ravnine zatvorenog stranicama  $B$ . Dokaži da  $A$  ima manji opseg od  $B$ .

## Combinatio nova

9. U ravnini se nalazi  $n$  plavih i  $n$  crvenih točaka, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Pokažite da između njih možemo povući barem dva *balansirajuća* pravca. Kažemo da je pravac *balansirajuć* ukoliko se s iste strane pravca nalazi jednak broj crvenih i plavih točaka te pravac prolazi kroz točke različitih boja.
10. Svaki *triangulirani* graf sa  $n$  vrhova ima točno  $3n - 3 - k$  bridova, gdje je "vanjski" lik ima točno  $k$  stranica.
11. U svakom skupu od  $n \geq 2$  točaka u ravnini se maksimalna udaljenost pojavljuje u najviše  $n$  parova.
12. (Buffonov eksperiment s iglom) Ako nasumično bacimo iglu duljine  $l$  na pod popločan dugim daskama širine  $d > l$ , tada je šansa da igla padne preko dvije daske je  $p = \frac{2}{\pi} \frac{l}{d}$ .  
*Hint: Što ako bi umjesto igle bacili kružnicu promjera  $l$ ?*

## Grandescunt aucta labore

13. (Sylvester-Gallai teorem) Dano je  $n \geq 2$  točaka u ravnini takvih da nisu sve kolinearne. Dokaži da postoji par točaka koje leže na pravcu na kojem ne leži nijedna od preostalih zadanih točaka.
14. (Sylvester-Gallai teorem - dualna verzija) Dan je skup od  $n \geq 2$  pravaca takav da ne prolaze svi kroz jednu točku te nisu svi paralelni. Dokaži da postoji točka kroz koju prolaze samo 2 od zadanih pravaca.
15. Neka je dano  $n$  točaka u ravnini tako da ne leže sve na istom pravcu. Tada postoji barem  $n$  pravaca na kojim leže barem dvije točke iz skupa; te je točno  $n$  pravaca ako i samo ako sve točke osim jedne leže na istom pravcu.
16. (Hellyjev teorem) Neka je  $\mathcal{C}$  konačna familija konveksnih skupova u  $\mathbb{R}$ . Ako proizvoljnih  $d + 1$  skupova iz  $\mathcal{C}$  imaju neprazan presijek, tada svi skupovi iz  $\mathcal{C}$  imaju neprazan presijek.

## Aquila non capit muscas

17. (IMOSL 1999 G2) Dokaži da svaki skup od pet točaka u općem položaju (takve da nikoje tri nisu kolinearne, nikoje četiri konciklične) ima točno četiri *separatora* - kažemo da je krug *separator* ako mu kružnica prolaze kroz tri točke, sadrže četvrtu točku unutar, a peta se nalazi izvan kruga.
18. (IMOSL 2015 C2) Neka je  $V$  konačan skup točaka u ravni. Kažemo da je  $V$  uravnotežen ako za svake dvije različite točke  $A, B \in V$  postoji točka  $C \in V$  takva da je  $AC = BC$ . Kažemo da je  $V$  bez središta ako za svake različite točke  $A, B, C \in V$  ne postoji točka  $P \in V$  takva da je  $PA = PB = PC$ .
- a) Pokaži da za svaki  $n \geq 3$  postoji uravnotežen skup koji se sastoji od  $n$  točaka.
- b) Za koje  $n \geq 3$  postoji uravnotežen skup bez središta koji se sastoji od  $n$  točaka?
19. (IMOSL 2013 C2) U ravni je zadano 2013 crvenih i 2014 plavih točaka tako da ni jedne tri nisu na istom pravcu. Potrebno je nacrtati  $k$  pravaca koji dijele ravninu na način da ni u jednom dijelu ne postoji i plava i crvena točka. Odredi najmanji  $k$  tako da je opisano moguće postići neovisno o unaprijed zadanim točkama.
20. (IMO 2002 P6) Dan je prirodan broj  $n \geq 3$ . Neka su  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  jedinične kružnice u ravni sa središtima  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$  redom. Ako niti jedan pravac siječe više od dvije kružnice, dokažite da vrijedi

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

## 6. Zadaci za četvrtu grupu

### 6.1. G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Uvod

Za početak krenimo s jednom uzrečicom iz mojih krajeva:

"(J)Amerika zemlja je bogata, vu nji ima dolara i zlata."

I tako mi, po uzoru na Amere, na vašem putu do zlata idemo prčkat malo po konfiguracijama.

#### moj mali rječnik

#### Jao ne rade kutovi kaj bumo ve?

##### Teorem 6.1.1: Sinusni poučak

U trokutu  $ABC$  vrijedi

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{CA}{\sin \angle ABC} = 2R,$$

gdje je  $R$  polumjer opisane kružnice.

##### Teorem 6.1.2: Cevin poučak

Neka su  $X \in BC$ ,  $Y \in CA$ ,  $Z \in AB$ . Pravci  $AX$ ,  $BY$ ,  $CZ$  sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

##### Teorem 6.1.3: Menelajev poučak

Neka su  $X \in BC$ ,  $Y \in CA$ ,  $Z \in AB$  kolinearne točke. Tada vrijedi

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

## neke linije koje nekaj ( $\triangle$ ) sijeku

### Teorem 6.1.4: Eulerov pravac

Eulerov pravac trokuta prolazi kroz ortocentar  $H$ , težište  $G$  i središte opisane kružnice  $O$ .

### Propozicija 6.1.5

Vrijedi  $HG = 2GO$ .

### Teorem 6.1.6: Simsonov pravac

Za točku  $P$  na opisanoj kružnici trokuta, projekcije točke  $P$  na stranice trokuta su kolinearne. Taj pravac naziva se Simsonov pravac.

### Propozicija 6.1.7

Simsonov pravac prolazi kroz polovište dužine  $PH$ , gdje je  $H$  ortocentar trokuta.

## Simedijane i izogonalnost

### Definicija 6.1.8: Izogonalni pravci

Dva pravca kroz isti vrh trokuta izogonalna su ako su simetrična s obzirom na simetralu tog kuta.

### Lema 6.1.9

Izogonala  $AO$  jest  $AH$ .

### Definicija 6.1.10: Simedijana

Simedijana iz vrha  $A$  trokuta  $ABC$  je izogonala težišnice iz vrha  $A$ .

### Propozicija 6.1.11

Ako simedijana iz vrha  $A$  siječe stranicu  $BC$  u točki  $D$ , tada vrijedi

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

### Propozicija 6.1.12

Neka se tangente u  $B$  i  $C$  na kružnicu opisanu trokutu  $\triangle ABC$  sijeku u  $T$ .  $AT$  je simedijana iz vrha  $A$  trokuta  $\triangle ABC$ .

### Definicija 6.1.13: Izogonalna konjugata

Izogonalna konjugata točke  $P$  je točka  $P'$  dobivena refleksijom pravaca  $AP, BP, CP$  preko simetrala pripadnih kutova trokuta.

#### Korolar 6.1.14

Ortocentar i središte opisane kružnice čine izogonalni par, dok je središte upisane kružnice samo sebi izogonalno.

## Crtamo i u krug

#### Definicija 6.1.15: Miquelova točka

Za četiri pravca u općem položaju, opisane kružnice pripadnih trokuta prolaze kroz jednu zajedničku točku, koja se naziva Miquelova točka.

#### Teorem 6.1.18: Feuerbachova kružnica

Feuerbachova kružnica, ili *kružnica devet točaka* (ponekad se naziva i *Eulerova kružnica*), je kružnica koja prolazi kroz sljedećih devet točaka trokuta:

- tri nožišta visina trokuta,
- tri polovišta stranica trokuta,
- tri polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta s ortocentrom.

#### Propozicija 6.1.17

Središte Feuerbachove kružnice jest polovište dužine koja spaja ortocentar trokuta sa središtem opisane kružnice.

#### Propozicija 6.1.18

Polumjer Feuerbachove kružnice jednak je polovici polumjera opisane kružnice trokuta.

## problemčići

### Neke korisne konstrukcije

#### Lema 6.1.19: A-Schwatt pravac

Neka je  $ABC$  trokut s visinom  $AD$ . Neka su  $M$  i  $N$  redom polovišta dužina  $AD$  i  $BC$ . Dokaži da pravac  $MN$  prolazi kroz simedijalnu točku trokuta  $ABC$  (*A-Schwattov pravac*).

#### Lema 6.1.20: Humpty Dumpty

Neka je  $ABC$  raznostraničan trokut s visinom  $AD$  i ortocentrom  $H$ . Neka je  $M$  polovište stranice  $BC$ . Točka  $Q$  definirana je kao nožište okomice spuštene iz  $H$  na pravac  $AM$ . (U AoPS terminologiji, to se naziva *A-HM točka* ili *A-Humpty točka*.)

- Dokaži da su točke  $B, H, Q, C$  kokružne.
- Dokaži da je pravac  $BC$  jedna od zajedničkih vanjskih tangenti opisanih kružnica trokuta

$\triangle ABQ$  i  $\triangle ACQ$ .

(iii) Neka  $A$ -simeđijana ponovno siječe opisanu kružnicu u točki  $X$ . *Dumpty točka* je polovište dužine  $AX$ . Dokaži da je njezin izogonalni konjugat točka  $Q$ .

(iv) Dokaži da vrijedi

$$\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC},$$

(v) Dokaži da se zrcalna slika točke  $Q$  preko pravca  $BC$  poklapa s presjekom  $A$ -simeđijale i opisane kružnice.

#### Lema 6.1.21: Miquelova točka u ortičnoj slici - $A$ - queue točka

astavljajući prethodni zadatak za raznostraničan trokut  $ABC$ , neka je  $G$  Miquelova točka četvorke  $BFEC$ , tj. presjek opisane kružnice trokuta  $ABC$  i kružnice s promjerom  $AH$ . (U AoPS terminologiji, to se naziva *A-queue točka*.)

- (i) Dokaži da pravac  $GH$  raspolavlja dužinu  $BC$ .
- (ii) Dokaži da su pravci  $AG$ ,  $EF$ ,  $BC$  i  $QH$  konkurentni u točki  $T$ .
- (iii) Dokaži da je  $H$  ortocentar trokuta  $\triangle ATM$ .
- (iv) Dokaži da je pravac  $BC$  zajednička tangenta opisanih kružnica trokuta  $\triangle GHB$  i  $\triangle GHC$ .
- (v) Neka je  $H'$  zrcalna slika točke  $H$  preko pravca  $BC$ . Dokaži da su pravac  $GH'$  i tangente na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $B$  i  $C$  konkurentni.

#### Lema 6.1.22: Miquelova točka u intouch slici – Sharkydevil

Neka je  $ABC$  trokut s intouch trokutom  $DEF$ . Neka je  $K$  Miquelova točka četvorke  $BFEC$ , tj. presjek pravaca  $(AEF)$  i  $(ABC)$ . (U AoPS terminologiji, to se naziva *A-Sharkydevil točka*.) Budući da je  $\angle AKI = 90^\circ$ , pravac  $KI$  prolazi kroz antipod točke  $A$ , koji označavamo s  $S$ .

- (a) Dokaži da pravac  $KD$  raspolavlja kut  $\angle BKC$  te stoga prolazi kroz polovište  $M$  dužine  $BC$ .
- (b) Neka je  $P$  nožište okomice spuštene iz točke  $D$  na pravac  $EF$ . Dokaži da je  $K$  inverz točke  $P$  s obzirom na upisanu kružnicu.
- (c) Dokaži da se pravci  $AK$  i  $BC$  sijeku na pravcu koji prolazi kroz  $I$  i okomit je na  $AI$ .
- (d) Dokaži da pravac  $KD$  siječe opisanu kružnicu trokuta  $\triangle AEF$  na  $A$ -visini.

Ove tri posljednje nećemo dokazivati jer se ne mrzimo sad dokazivati jer se ne mrzimo toliko :)

#### Lema 6.1.23: Prva lema o izogonalnosti

Neka je  $ABC$  trokut i neka je  $P$  točka unutar njega takva da vrijedi

$$\angle ABP = \angle PCA.$$

Neka je  $Q$  zrcalna slika točke  $P$  preko polovišta dužine  $BC$ . Dokaži da vrijedi

$$\angle BAP = \angle CAQ.$$

### Napomena 6.1.24

Uvjet  $\angle ABP = \angle ACP$  često se prirodnije interpretira kao tvrdnja da su točke

$$B, C, BP \cap AC, CP \cap AB$$

kokružne. Slično tome, paralelogram  $BPCQ$  također je vrijedan pažnje.

## nešto konkretnije

1. Dan je šiljastokutni trokut  $ABC$  s centrom opisane kružnice  $O$  i ortocentrom  $H$ . Neka su  $E$  i  $F$  nožišta visina iz  $B$  i  $C$  na  $AC$  i  $AB$  redom, i neka je  $D$  drugo sjecište  $AH$  i  $(ABC)$ . Neka je  $I$  polovište  $\overline{AH}$ .  $EI$  i  $BD$  se sijeku u  $M$ , a  $FI$  i  $CD$  se sijeku u  $N$ . Dokaži da je  $MN \perp OH$ .
2. U trokutu  $ABC$  s težištem  $G$ , neka su  $M$  i  $N$  polovišta dužina  $AB$  i  $AC$ . Tangente povučene iz točaka  $M$  i  $N$  na opisanu kružnicu trokuta  $\triangle AMN$  sijeku pravac  $BC$  u točkama  $R$  i  $S$ , redom. Točka  $X$  leži na stranici  $BC$  i zadovoljava uvjet

$$\angle CAG = \angle BAX.$$

Dokaži da je pravac  $GX$  radikalna os opisanih kružnica trokuta  $\triangle BMS$  i  $\triangle CNR$ .

3. Neka je  $ABC$  raznostraničan trokut s upisanim središtem  $I$ . Upisana kružnica trokuta  $ABC$  dodiruje stranice  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  u točkama  $D$ ,  $E$  i  $F$ , redom. Neka je  $P$  nožište okomice spuštene iz točke  $D$  na pravac  $EF$ , a  $M$  polovište dužine  $BC$ . Polupravci  $AP$  i  $IP$  ponovno sijeku opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $G$  i  $Q$ , redom. Dokaži da se upisano središte trokuta  $\triangle GQM$  poklapa s točkom  $D$ .
4. Neka je  $ABC$  trokut s upisanim središtem  $I$  i intouch trokutom  $DEF$ . Neka je  $M$  nožište okomice spuštene iz točke  $D$  na pravac  $EF$ , a  $P$  polovište dužine  $DM$ . Ako je  $H$  ortocentar trokuta  $\triangle BIC$ , dokaži da pravac  $PH$  raspolavlja dužinu  $EF$ .

## Za mlade i nadobudne

5. Neka je  $ABC$  raznostraničan trokut s upisanim središtem  $I$ , čija je upisana kružnica tangentna na stranice  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  u točkama  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Neka je  $M$  polovište stranice  $BC$ , a neka je  $P$  točka u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$  takva da vrijedi  $MD = MP$  i  $\angle PAB = \angle PAC$ . Neka je  $Q$  točka na upisanoj kružnici takva da je  $\angle AQD = 90^\circ$ . Dokaži da vrijedi ili  $\angle PQE = 90^\circ$  ili  $\angle PQF = 90^\circ$ .
6. Neka je  $ABC$  oštrokutan trokut, a neka su  $I_B$ ,  $I_C$  i  $O$  redom  $B$ -pripisano središte,  $C$ -pripisano središte i središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Točke  $E$  i  $Y$  odabrane su na stranici  $AC$  tako da vrijedi

$$\angle ABY = \angle CBY \quad \text{i} \quad BE \perp AC.$$

Slično tome, točke  $F$  i  $Z$  odabrane su na stranici  $AB$  tako da vrijedi

$$\angle ACZ = \angle BCZ \quad \text{i} \quad CF \perp AB.$$

Pravci  $I_B F$  i  $I_C E$  sijeku se u točki  $P$ . Dokaži da su pravci  $PO$  i  $YZ$  međusobno okomiti.

7. Neka je  $ABC$  raznostraničan trokut s opisanom kružnicom  $\Omega$  i upisanim središtem  $I$ . Polupravac  $AI$  siječe stranicu  $BC$  u točki  $D$ , a opisanu kružnicu  $\Omega$  ponovno u točki  $M$ . Kružnica s promjerom  $DM$  ponovno siječe  $\Omega$  u točki  $K$ . Pravci  $MK$  i  $BC$  sijeku se u točki  $S$ , a  $N$  je polovište dužine  $IS$ . Opisane kružnice trokuta  $\triangle KID$  i  $\triangle MAN$  sijeku se u točkama  $L_1$  i  $L_2$ .  
Dokaži da kružnica  $\Omega$  prolazi kroz polovište barem jedne od dužina  $IL_1$  ili  $IL_2$ .

## 6.2. C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom

Predavanje

Hintovi

Rješenja

1. Neka je  $n$  prirodan broj. U nekoj državi postoji  $n$  gradova tako da su svaka dva grada povezana jednom jednosmjernom avionskom linijom. Dokaži da je moguće napraviti put od  $n - 1$  letova u kojem svaki grad (uključujući onaj iz kojeg smo krenuli) posjećujemo točno jednom.
2. U nekom arhipelagu je  $n$  otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag uredno povezan ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija.  
Za koje prirodne brojeve  $n$  svaki uredno povezan arhipelag s  $n$  otoka ima paran broj avionskih linija?
3. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?
4. Žaba Žana nalazise ishodištu brojevnog pravca, te u svakom koraku skače za jedan ulijevo, za jedan udesno ili ostaje na mjestu. Lina i Dina izabrale su relativno proste brojeve  $m$  i  $n$ , gdje je  $m > n$ . Nakon svakih  $n$  koraka Lina zapovijeda: „Lijevo!”, a nakon svakih  $m$  koraka Dina zapovijeda: „Desno!” Žana miruje dok ne čuje prvu zapovijed, a nakon toga počinje (ili nastavlja) skakati u smjeru prema zapovijedi. Zaustavlja se u prvom koraku u kojem čuje obje zapovijedi. U ovisnosti o brojevima  $m$  i  $n$  odredi na kojoj se udaljenosti od ishodišta Žana zaustavila.
5. Neka  $n \geq 2$  bude prirodan broj. Dokaži da svi djelitelji od  $n$  mogu biti zapisani u niz  $d_1, d_2, \dots, d_k$  tako da za sve  $1 \leq i < k$  vrijedi da je jedan od  $\frac{d_i}{d_{i+1}}$  i  $\frac{d_{i+1}}{d_i}$  je prost broj.
6. U jednom gradu je  $M$  ulica i  $N$  trgova, pri čemu su  $M$  i  $N$  prirodni brojevi takvi da je  $M > N$ . Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.
7. Neka je  $n$  prirodni broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i  $n$  utega čije su težine  $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ . Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu. Odredi na koliko načina to možemo napraviti.
8. Vjeverice Grmko i Skočko su skupile 2021 orah tijekom zime. Skočko je označio orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 malu rupu ukrug u tlu oko najdražeg stabla. Idućeg jutra Skočko je primijetio da je Grmko stavio po jedan orah u svaku rupu, ali nije obraćao pažnju na brojeve. Skočko je zato odlučio promijeniti raspored oraha nizom od 2021 poteza. U  $k$ -tom potezu, Skočko mijenja pozicije dvama orasima susjednima orahu označenom brojem  $k$ . Dokaži da postoji broj  $k$  takav da u  $k$ -tom potezu Skočko mijenja pozicije nekim orasima označenima brojevima  $a$  i  $b$  takvima da vrijedi  $a < k < b$ .
9. U nekom arhipelagu nalazi se 2017 otoka nazvanih 1, 2, ..., 2017. Dvije agencije, Crveni zmaj i Plavo oko, dogovaraju se oko rasporeda brodskih linija između pojedinih otoka. Za svaki par otoka, točno jedna agencija će organizirati brodsku liniju i to samo u smjeru od otoka nazvanog



manjim brojem do otoka nazvanog većim brojem. Raspored brodskih linija je dobar ako ne postoje dva otoka s oznakama  $A < B$  takva da je s otoka  $A$  na otok  $B$  moguće doći koristeći samo brodove Crvenog zmaja, a također i koristeći samo brodove Plavog oka. Odredi ukupan broj dobrih rasporeda brodskih linija.

10. Let  $\mathbb{Z}_{>0}$  be the set of all positive integers. Determine all subsets  $\mathcal{S}$  of  $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$  for which there exists a function  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  such that

$$\mathcal{S} = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

11. Dan je prirodni broj  $N > 2$ . U skupini od  $N(N+1)$  nogometaša nikoja dva nisu iste visine. Ti su nogometaši poredani u red. Trener želi iz reda izbaciti  $N(N-1)$  igrača tako da preostalih  $2N$  igrača tvori red za koji vrijedi sljedećih  $N$  uvjeta:

- (1) između dva najviša igrača nema nikoga,
- (2) između trećeg i četvrtog igrača po visini nema nikoga,
- .
- .
- .

( $N$ ) između dva najniža igrača nema nikoga.

Dokaži da je to uvijek moguće napraviti.

12. Neka je  $n$  pozitivan cijeli broj. *Japanski trokut* sastoji se od  $1 + 2 + \dots + n$  krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta tako da za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$  vrijedi da  $i$ -ti redak sadrži točno  $i$  krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninja put* u japanskom trokutu je niz od  $n$  krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog kruga na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak. U ovisnosti o  $n$ , nađi najveći  $k$  takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem  $k$  crvenih krugova.

13. Anti-Pascalov trokut je tablica u obliku jednakostraničnog trokuta koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem retku, vrijedi da je svaki broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koji su neposredno ispod njega. Da li postoji anti-Pascalov trokut sa 2018 redaka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do  $1 + 2 + \dots + 2018$ ?

14. Neka je  $S$  konačan skup točaka u ravnini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa  $S$  nisu kolinearne. Nazovimo vjetrenjačom postupak određen pravcem  $l$  na kojem se nalazi točno jedna točka  $P$  skupa  $S$  na sljedeći način:

Pravac  $l$  rotira se u smjeru kazaljke na satu oko točke  $P$  (središta rotacije) do prvog trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa  $S$ . Ta točka, nazovimo je  $Q$ , postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke  $Q$ , do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa  $S$ . Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije  $P \in S$  i pravac  $l$  koji prolazi kroz  $P$ , koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa  $S$  beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

15. Let  $n \geq 2$  be a positive integer. Paul has a 1 by  $n^2$  rectangular strip consisting of  $n^2$  unit squares, where the  $i$ th square is labelled with  $i$  for all  $1 \leq i \leq n^2$ . He wishes to cut the strip into several pieces, where each piece consists of a number of consecutive unit squares, and then translate (without rotating or flipping) the pieces to obtain an  $n$  by  $n$  square satisfying the following property: if the unit square in the  $i$ -th row and  $j$ -th column is labelled with  $a_{i,j}$ , then  $a_{i,j} - (i + j - 1)$  is divisible by  $n$ . Determine the smallest number of pieces Paul needs to make in order to accomplish this.

16. Neka je  $m > 2$  prirodni broj,  $A$  konačan skup (ne nužno pozitivnih) cijelih brojeva, te  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  podskupovi skupa  $A$ . Ako za svaki  $k = 1, 2, \dots, m$  zbroj elemenata skupa  $B_k$  iznosi  $m^k$ , dokaži da  $A$  ima barem  $\frac{m}{2}$  elemenata.
17. Let  $n > 2$  be an integer. In the plane, there are  $n$  segments given in such a way that any two segments have an intersection point in the interior, and no three segments intersect at a single point. Jeff places a snail at one of the endpoints of each of the segments and claps his hands  $n - 1$  times. Each time when he claps his hands, all the snails move along their own segments and stay at the next intersection points until the next clap. Since there are  $n - 1$  intersection points on each segment, all snails will reach the furthest intersection points from their starting points after  $n - 1$  claps.
- (a) Prove that if  $n$  is odd then Jeff can always place the snails so that no two of them ever occupy the same intersection point.
- (b) Prove that if  $n$  is even then there must be a moment when some two snails occupy the same intersection point no matter how Jeff places the snails.
18. Dano je  $4n$  kamenčića težina  $1, 2, 3, \dots, 4n$ . Svaki kamenčić je obojen jednom od  $n$  boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:
- Ukupne težine obje hrpe su jednake.
  - Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.
19. Lovac i nevidljivi zec igraju igru u euklidskoj ravlini. Početna točka zeca,  $A_0$ , i početna točka lovca,  $B_0$ , su iste. Nakon  $n - 1$  rundi igre, zec je u točki  $A_{n-1}$ , a lovac u točki  $B_{n-1}$ . U  $n$ -toj rundi, redom se odvija sljedeće:
- (i) Zec se neprimjetno premješta u točku  $A_n$  tako da je udaljenost između  $A_{n-1}$  i  $A_n$  točno 1.
- (ii) Uređaj za lociranje dojavljuje lovcu točku  $P_n$ , garantirajući samo da je udaljenost između  $P_n$  i  $A_n$  najviše 1.
- (iii) Lovac se vidljivo premješta u točku  $B_n$  tako da je udaljenost između  $B_{n-1}$  i  $B_n$  točno 1. Može li lovac uvijek, za bilo koje pomake zeca i za bilo koje točke koje dojavljuje uređaj za lociranje, birati svoje poteze tako da udaljenost između njega i zeca nakon  $10^9$  rundi bude najviše 100 ?
20. Neka je  $a_1, a_2, a_3, \dots$  beskonačan niz prirodnih brojeva, i neka je  $N$  prirodan broj. Pretpostavimo da za svaki  $n > N$  vrijedi da se broj  $a_{n-1}$  pojavljuje točno  $a_n$  puta na listi  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Dokaži da barem jedan od nizova  $a_1, a_3, a_5, \dots$  i  $a_2, a_4, a_6, \dots$  postaje periodičan. (Za beskonačan niz  $b_1, b_2, b_3, \dots$  kažemo da postaje periodičan ako postoje prirodni brojevi  $p$  i  $M$  takvi da je  $b_{m+p} = b_m$  za sve  $m \geq M$ .)
21. Let  $n$  be a positive integer. Given an  $n \times n$  board, the unit cell in the top left corner is initially coloured black, and the other cells are coloured white. We then apply a series of colouring operations to the board. In each operation, we choose a  $2 \times 2$  square with exactly one cell coloured black and we colour the remaining three cells of that  $2 \times 2$  square black. Determine all values of  $n$  such that we can colour the whole board black.
22. Let  $p \neq q$  be coprime positive integers. Determine all infinite sequences  $a_1, a_2, \dots$  of positive integers such that the following conditions hold for all  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \max(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}) - \min(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}) &= p \\ \max(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+q}) - \min(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+q}) &= q \end{aligned}$$

- 23.** Promatrajmo ploču dimenzije  $2025$  puta  $2025$  sastavljenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi na ploču postaviti određen broj pravokutnika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravokutnika leži na rubovima jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravokutnikom. Odredi minimalni broj pravokutnika koje Matilda treba postaviti tako da svaki redak i svaki stupac ploče sadrži točno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva ni jedan pravokutnik.

## 6.3. N4: Lana Milani - TB polinomi

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Uvod

#### Teorem 6.3.1: Eisensteinov kriterij

Neka je  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  polinom te  $p$  prost broj koji dijeli  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , te  $p \nmid a_n$  i  $p^2 \nmid a_0$ . Tada je  $P(x)$  ireducibilan.

#### Napomena

$\mathbb{Z}[x]$  označava skup polinoma s koeficijentima u cijelim brojevima.

#### Napomena

Polinom  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  je *ireducibilan* ako ne postoje polinomi  $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$  pozitivnog stupnja, takvi da je  $P(x) = Q(x)R(x)$ .

#### Teorem 6.3.2: Schurov teorem

Neka je  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  polinom pozitivnog stupnja. Tada postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji dijele barem jedan od članova niza  $P(1), P(2), P(3), \dots$  različitih od nula.

### Zadaci

1. Neka su  $a, b, c$  tri različita cijela broja. Dokaži da ne postoji polinom  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  takav da vrijedi  $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$ .
2. Neka je  $P(x)$  cijeli polinom stupnja  $n > 1$  i neka je  $k$  prirodan broj. Neka je

$$Q(x) = P(P(\dots P(x) \dots)),$$

gdje je polinom  $P$  komponiran  $k$  puta. Dokaži da postoji najviše  $n$  cijelih brojeva  $t$  takvih da vrijedi

$$Q(t) = t.$$

3. Neka je  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  polinom stupnja  $n \geq 3$  s cjelobrojnim koeficijentima takav da je  $P(m)$  paran za sve parne brojeve  $m$ . Nadalje, neka je  $a_0$  paran, i  $a_k + a_{n-k}$  paran za svaki  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Neka je  $P(x) = Q(x)R(x)$  gdje su  $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $\deg Q \leq \deg R$  i svi koeficijenti od  $R(x)$  su neparni. Pokaži da  $P$  ima cjelobrojni korijen.
4. Neka je  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  takav da je  $P(0) = 0$  i  $\gcd(P(0), P(1), P(2), \dots) = 1$ . Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva  $n$  takvih da

$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), P(n+2) - P(2), \dots) = n.$$

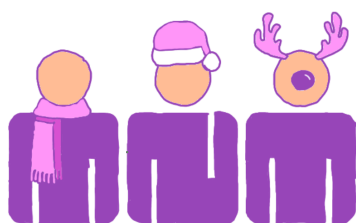
5. Polinom  $(x+1)^n - 1$  djeljiv je polinomom  $P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$  parnog stupnja  $k$ , takvog da su mu svi koeficijenti neparni cijeli brojevi. Dokažite da je  $n$  djeljiv s  $k+1$ .

## 6.4. X4: Karlo Jokoš - Local ideja

Predavanje

Hintovi

Rješenja



Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"  
Ogulin, 8.1.2026.

# Prereq?

Ovo predavanje zamišljeno je kao nastavak na predavanje koje sam držao na prošlogodišnjem ljetnom kampu koje se zvalo Global. Iako zapravo uopće nije bitno poznavati Global kako bismo napali Local, smatram da je za kompletnost ovog predavanja korisno ponoviti i što je Global.

## Global ideja

'Global' zadatci posebna je kategorija zadataka u kojima možemo izvući netrivialne informacije o zadatku tako da gledamo cijelu strukturu zadatka odjednom. Stereotipičan (i lagan) primjer global pristupa je *Handshake lemma*

**Primjer 1.** Neka je  $G$  konačan graf. Dokaži da je zbroj svih stupnjeva vrhova paran broj.

**Rješenje 1.** Tvrdimo da je zbroj stupnjeva jednak dvostrukom zbroju stranica grafa  $G$ . Ovo vrijedi jer pri zbrajanju stupnjeva svaku stranicu prebrojimo dvaput (jednom iz jednog vrha stranice, a drugi put iz drugog).  $\square$

### Napomena: Global psihologija - handshake lemma

Kao i u svakom kombinatornom zadatku, gornji zadatak krenuli smo s gledanjem malih primjera. Gledali smo kako se struktura mijenja kada negdje dodamo stranicu u grafu ili kada ju negdje oduzmemo. Međutim, vrlo brzo se da shvatiti da se unošenjem ikakvih modifikacija situacija u grafu znamenito mijenja. Dakle, ne možemo *jednostavno* pratiti kako se struktura mijenja pri našim promjenama. To nas motivira da nekako pokušamo čitavu strukturu obuhvatiti jednom jednadžbom, odnosno jednim argumentom  $\implies$  global metoda.

Dakle, budući da se Global zadatci rješavaju tako da pogledamo cijelu strukturu istovremeno, česte strategije koje ćemo koristiti da riješimo ove zadatku su:

- prebrojavanje
- dvostruko prebrojavanje (linearnost očekivanja <sup>1</sup>)
- Dirichletov princip
- bojanje (ili generalno neko specifično označavanje elemenata)

## Local ideja

Nasuprot Global pristupu, koji proučava cijelu strukturu odjednom, Local pristup podrazumijeva fiksiranje na posebne slučajeve zadatka i promatranje promjena u strukturi pri izvođenju sitnih promjena. Česta će biti situacija da pri sitnim promjenama u podacima koje ubacujemo u zadatak možemo kompletno okarakterizirati rezultate (ili ih barem okarakterizirati dovoljno dobro da riješimo zadatak). Kao i svaku novu ideju u matematici, najjasnije ju je vidjeti preko primjera. Jedan takav primjer je sljedeći:

**Primjer 2.** Neka  $G$  bude jednostavan graf. Pokaži da je moguće obojati vrhove u crvenu i plavu boju tako da za svaki vrh vrijedi da je bar pola vrhova s kojima je povezan druge boje.

**Rješenje 2.** Napravimo neko proizvoljno bojanje vrhova. Zatim, izvodit ćemo sljedeći algoritam: Ako zna neki vrh vrijedi da je povezan s bar pola vrhova iste boje, tada ćemo tom vrhu promijeniti boju.

<sup>1</sup>\* Linearnost očekivanja moćan je alat koji ubija zadatke iz dvostrukog prebrojavanja i Dirichletovog principa. Zasniva se na ideji da je očekivanje linearno.

Primijetimo da se ovom operacijom broj dužina koji spaja crveni i plavi vrh nužno mora smanjiti. Kako je dužina koje spajaju crvene i plave vrhove konačno mnogo, naš algoritam nužno mora terminirati. Kako naš algoritam mora terminirati, to znači da nakon nekog trenutka više nećemo imati vrhova koji su povezani s bar pola vrhova koji su iste boje kao i on, odnosno za svaki vrh će vrijediti tvrdnja zadatka. Win.  $\square$

Dakle, koji su to *poznati* pristupi koje ćemo koristiti u rješavanju Local zadatka? **Glavna ideja** u Local zadacima je takozvani Chenov **RUST** (repeat until stuck). Naime, ideja će biti izvoditi određenu operaciju sve do trenutka kad ju više ne možemo izvoditi. Puno netrivialnih informacija možemo izvaditi promatrajući konstrukciju u kojoj više ne možemo izvoditi algoritam našeg izbora

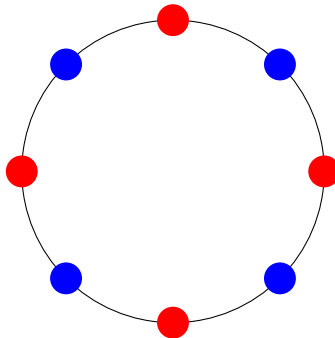
- Greedy algoritmi (naprimjer, ako želimo pronaći  $n$  objekata koji zadovoljavaju neko svojstvo i uspijemo napraviti algoritam koji nesmetano konstruira tih  $n$  objekata. Također, primjer iznad)
- Princip ekstrema (gledaj granične slučaje)
- smoothing (nevjerojatno, ali Local ima primjenu na nejednakosti).
- Indukcija

## Riješeni primjeri

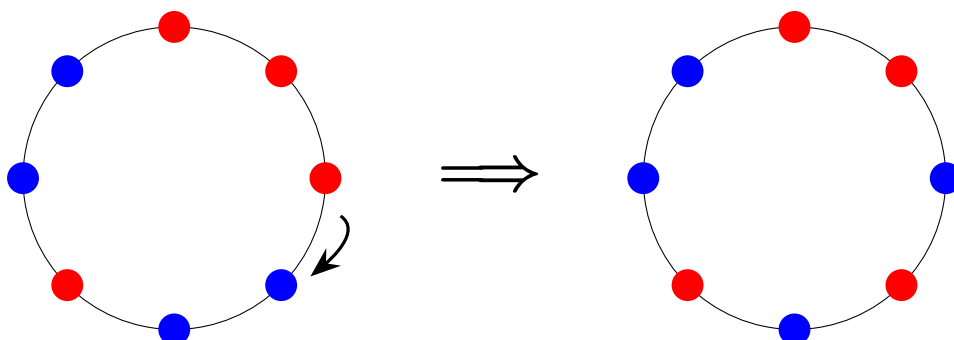
**Primjer 3.** Vrhovi  $2n$ -terokuta obojani su ili crveno ili plavo, svaka se boja pojavljuje točno  $n$  puta. Neka  $A$  bude multiskup svih udaljenosti crvenih točaka i  $B$  multiskup svih udaljenosti plavih točaka. Dokaži da  $A = B$ .

**Rješenje 3.** Skice koje se nalaze ispod predstavljaju slučaj  $n = 4$ , ali argumentacija u tekstu vrijedi za bilo koji  $n$ .

Promotrimo neku konstrukciju za koju ova tvrdnja zadatka trivijalno vrijedi (što inače radimo kad rješavamo ovakve zadatke).



Naravno, skupovi  $A$  i  $B$  su jednaki jer je skica kompletno simetrična. Sada slijedi ključna tvrdnja koja će nam riješiti ovaj zadatak. Ako za neki poredak plavih i crvenih vrhova vrijedi da je multiskup  $A$  jednak multiskupu  $B$ , tada, ako bismo zamjenili poredak susjednog crvenog i plavog vrha, i dalje bi vrijedilo da je multiskup  $A$  jednak multiskupu  $B$  (skica).



Međutim, ova tvrdnja je zapravo jako lagana za pokazati. Budući da mijenjamo samo redoslijed neka dva vrha, dio multiskupa generiran od ostalih vrhova ostaje nepromijenjen, zbog toga je dovoljno pokazati da su promjene u multiskupovima koje generiraju te dvije točke jednake.

U gornjem primjeru, plava točka prije zamjene generira multiskup  $(1, 3, 4)$ , a nakon  $(2, 3, 4)$ . Crvena točka prije zamjene generira multiskup  $(1, 2, 3)$ , a nakon promjene multiskup  $(2, 2, 3)$ . U oba slučaja promjena elementa multiskupa je s 1 na 2.

Nazovimo crvenu točku koju mijenjamo  $P$  te plavu  $Q$ . Neka  $X$  bude neki vrh na mnogokutu te neka  $X'$  bude vrh na mnogokutu koji je preslika od  $X$  preko simetrane pravca od  $PQ$  (ovo je samo fancy geometrijski način za reć, ej, ajmo gledat nekejednake udaljenosti). Sada, iz ove definicije imamo da je četverokut  $PXQX'$  jednakokrani trapez. Iz toga imamo

$$XP = X'Q, \quad XQ = X'P$$

odnosno

$$\{XP, X'P\} = \{XQ, X'Q\}$$

Budući da je  $X$  bila bilo koja točna na mnogokutu, dokazali smo ono što smo htjeli pokazati. □

### Napomena: Local psihologija - gornji primjer

Primjer 2 nam govori o jednom svojstvu koji trebamo dokazati koji vrijedi za apsolutno svaku konstrukciju koju možemo smisliti. Upravo zato što ovo vrijedi za sve konstrukcije, znamo da bilo koju promjenu da napravimo u poretku boja na vrhovima da tvrdnja i dalje treba vrijediti. Zato ulazimo u sljedeći headspace: "Dobro, ako znam da mi tvrdnja zadatka vrijedi za neku konstrukciju, mogu li pokazati da tvrdnja zadatka vrijedi i za konstrukciju koja je njoj najbližija?" Naravno, ima smisla gledati najmanju promjenu jer bi ju *trebalo* biti najlakše za dokazati. Dakle, ako za neku konstrukciju imamo da je multiskup  $A$  jednak multiskupu  $B$ , nakon što zamijenimo dva uzastopna vrha različitih boja (što se čini kao sitna promjena), imamo osjećaj da se struktura multiskupova nije mogla baš *toliko* promijeniti. Naša sumnja da promjenu možemo okarakterizirati se ispostavila ispravnom jer smo u zadatku lagano pokazali ovu tvrdnju.

**Primjer 4.** Neka  $n$  bude prirodan broj. Pronađi najmanji prirodan  $k$  (u ovisnosti o  $n$ ) sa sljedećim svojstvom: za bilo koji konačan dani multiskup realnih brojeva iz intervala  $[0, 1]$  čija je suma  $n$ , moguće je podijeliti te brojeve u  $k$  grupa (od kojih neke mogu biti prazne) tako da suma brojeva u svakoj grupi bude najviše 1.

**Rješenje 4.** Tvrdimo da je odgovor  $k = 2n - 1$ .

Da vidimo da je doista potrebno  $2n - 1$  grupa, možemo napraviti sljedeću konstrukciju. Uzmimo  $2n - 1$  kopiju broja  $\frac{n}{2n-1}$ .

Da bismo pokazali da je  $2n - 1$  grupa uvijek dovoljno, radimo sljedeću argumentaciju.

Ideja je kombinirati realne u malo veće realne iz kojih ćemo moći izvoditi korisne zaključke.

Dakle, na početku zadatka, nama su dani neki realni brojevi u vrlo kaotičnom stanju i mi zapravo ne vidimo ništa korisno na prvu. Međutim, mi možemo izvesti sljedeći greedy algoritam da si malo sredimo strukturu tih realnih brojeva. Konkretno, ako nam za neka dva realna broja  $x$  i  $y$  u nizu realnih brojeva koji nam je dan vrijedi  $x + y < 1$ , onda brišemo  $x$  i  $y$  s niza realnih brojeva i stavljamo samo  $x + y$ . Ovaj algoritam 'zbiranja' brojeva nastavljamo. Primijetimo da ovaj algoritam mora stat jer je suma svih brojeva u nizu konačna, a imamo i konačno mnogo brojeva u nizu od samog početka. Dakle, naš algoritam stane ako za bilo koja dva broja  $x$  i  $y$  u novonastalom nizu realnih brojeva vrijedi  $x + y > 1$  (u suprotnom bi opet mogli izvesti naš algoritam). Označimo redom elemente ovog novonastalog niza s  $g_1, g_2, \dots, g_m$ . Primijetimo sada da ako bismo imali  $m \geq 2n$ , da bi onda vrijedilo

$$(g_1 + g_2) + (g_3 + g_4) + \dots + (g_{2n-1} + g_{2n}) > 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

No suma svih brojeva mora biti točno 1, prema tome nije moguće da vrijedi  $m \geq 2n$ , dakle mora vrijediti  $m \leq 2n - 1$ , a to smo trebali i pokazati. □



### Napomena: Local psihologija - gornji primjer

Što je ovdje bilo local? Naime, kao i u uvodnom primjeru, konstruirali smo greedy algoritam koji terminira kako bismo dobili neka dosta cool dodatna svojstva za napasti ovaj zadatak. Ispostavilo se da su ta svojstva bila dovoljno jaka da automatski ubiju zadatak.

## Zadaci za samostalni rad

“We gonna do this, or are we gonna keep chit-chatting like this is your mommy’s book club?”

Erica Sinclair, *Stranger Things*

1. Pri smišljanju plana kako konačno poraziti glavnog negativca Vecnu, ekipa pozitivaca *Stranger Things* svijeta naišla je na izraz

$$(1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)$$

pri čemu je unutar tog izraza bilo ukupno 2016 jedinica. Budući da ovaj izraz, kao takav, nema nikakvo značenje, odlučili su da između svakih od dviju susjednih jedinica moraju dodati ili "+" ili ")" tako da izraz na ploči pridobi maksimalnu vrijednost. Koju vrijednost će naši pozitivci postići?

2. Nakon što je barijera između *Upside downa* i naše stvarnosti postala djelomično slomljena, na tlu se pojavilo  $n$  crvenih svjetlećih točaka (portala) i  $n$  plavih svjetlećih točaka (sigurna mjesta gdje se mogu stvoriti svjetlosne zrake koje zatvaraju portale). Nijedne tri točke nisu kolinearne.

Vaš zadatak je nacrtati  $n$  svjetlosnih zraka koje spajaju svaku crvenu točku s jednom plavom točkom, tako da se nijedne dvije zrake ne sijeku. Svaka zraka simbolizira kontrolirani energetska tok koji neutralizira portal, a križanje zraka može izazvati eksploziju koja bi u potpunosti slomila barijeru između *Upside Downa* i nas.

Je li uvijek moguće konstruirati  $n$  svjetlosnih zraka i pri tome izbjeći katastrofu spajanja *Upside downa* i našeg svijeta?

3. Iako su zrake iz prošlog zadatka pomogle, portali u *Upside Down* nastavljali su se pojavljivati i to u različitim intenzitetima. Unutar Mikeovog podruma pojavila se  $n \times n$  mrežu portala prema *Upside Downu*. Svako polje u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu označava intenzitet portala i jednak je  $ij$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n-3 & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2-n & n^2 \end{bmatrix}$$

Demadog počinje u polju označenom s 1 i mora doći do polja označenog s  $n^2$ , praveći točno  $2n-2$  koraka, pri čemu se u svakom koraku može kretati samo desno ili dolje kroz mrežu portala.

Vaš zadatak je odrediti minimalni i maksimalni mogući zbroj intenziteta portala kroz koji Demadog prolazi na svom putu od početka do kraja ploče.

4. Vecna je zarobio troje djece iz Hawkinsa te svakom dodijelio prirodan broj koji označava jačinu kontrole koju on ima nad tim djetetom.

Kako je Vecna izrazito moćan, glavni pozitivac serije, Eleven, ne može direktno spasiti tu djecu, ali pronašla je način da im pomogne tako da prenese jačinu Vecnine kontrole s jedne osobe na drugu, i to po sljedećem pravilu:

Eleven može prenesti jačinu Vecnine kontrole s jedne osobe na drugu tako da se jačina kontrole druge osobe podupla. Naprimjer, ako imamo da jedna osoba ima jačinu kontrole 23, a druga 4, nakon prenošenja kontrole imamo da prva osoba ima 19, a druga 8.

Ako neko dijete ima jačinu kontrole 0, ono postaje slobodno od Vecninih moći. Je li uvijek moguće spasiti bar jedno dijete? A dva?

5. Grad Hawkins i okolna naselja povezana su mrežom tajnih cesta koje koriste stanovnici, vojska i istraživačke ekipe koje se bore protiv prijetnji iz *Upside Downa*.

Svaka cesta povezuje točno dvije lokacije (ceste se smiju križati, primjerice pomoću nadvožnjaka ili podzemnih prolaza). Neke ceste dopuštaju prolazak najviše jednog vozila istovremeno, dok druge dopuštaju prolazak najviše dva vozila istovremeno.

Iz sigurnosnih razloga, promet na svakoj cesti dopušten je samo u **jednom smjeru**.

Poznato je da je za svaku lokaciju zbroj kapaciteta svih cesta koje su s njom povezane uvijek **neparan**.

Novodošla vojska u Hawkinsu mora odrediti smjer svake ceste. Dokažite da je moguće odrediti smjerove cesta tako da za svaku lokaciju **pozitivna razlika između zbroja kapaciteta cesta koje ulaze u lokaciju i zbroja kapaciteta cesta koje iz nje izlaze iznosi točno 1**.

6. Dustin, kao genije koji jest, shvatio je da ključ u spašavanju svijeta zapravo možda leži upravo u sljedećem zadatku:

Neka  $x_1, x_2, \dots, x_n$  budu realni brojevi koji zadovoljavaju

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, n$$

Pokaži da postoji permutacija  $y_1, y_2, \dots, y_n$  od  $x_1, x_2, \dots, x_n$  takvih da

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

Pomozite pronaći Dustinu rješenje na ovaj zadatak.

7. Neka su  $b \geq 2$  i  $w \geq 2$  fiksni cijeli brojevi te neka je  $n = b + w$ . Zadan je skup od  $2b$  jednakih crnih štapića i  $2w$  jednakih bijelih štapića, pri čemu svaki ima duljinu stranice 1.

Od tih štapića sastavljamo pravilni  $2n$ -kut tako da su paralelne stranice iste boje. Zatim se translacijom crnih štapića formira konveksni  $2b$ -kut  $B$ , a translacijom bijelih štapića formira se konveksni  $2w$ -kut  $W$ . Primjer jednog načina sastavljanja u slučaju  $b = 3$  i  $w = 2$  prikazan je dolje, kao i pripadajući mnogokuti  $B$  i  $W$ .

Dokažite da razlika površina mnogokuta  $B$  i  $W$  ovisi samo o brojevima  $b$  i  $w$ , a ne o načinu na koji je sastavljen  $2n$ -kut.

**Napomena.** Ne znam kako napraviti da ovaj zadatak ima Stranger things story line.

8. Neka je  $n$  prirodan broj. Starcourt Mall u Hawkinsu izgrađen je u pravilnoj mreži hodnika i raskrižja. Svako raskrižje može se opisati parom cijelih koordinata  $(x, y)$ , gdje  $x$  označava položaj istočno–zapadnih hodnika, a  $y$  položaj sjeverno–južnih hodnika.

Zbog zatvorenih prolaza i urušavanja dijelova centra, dostupna su samo ona raskrižja koja zadovoljavaju uvjet

$$|x| + \left| y + \frac{1}{2} \right| < n.$$

Neka je skup svih takvih dostupnih raskrižja označen s  $S_n$ .

Sigurnosna patrola u Starcourt Mallu definira se kao niz različitih raskrižja

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_\ell, y_\ell)$$

takvih da se svako sljedeće raskrižje može dosegnuti hodanjem iz prethodnog, odnosno udaljenost između  $(x_i, y_i)$  i  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  iznosi točno 1 za svaki  $i = 2, \dots, \ell$ .

Uprava centra želi organizirati patrole tako da svako dostupno raskrižje u skupu  $S_n$  pripada točno jednoj patroli.

Dokažite da raskrižja iz skupa  $S_n$  nije moguće podijeliti u manje od  $n$  takvih patrola.

9. Na svakoj točki  $A_1, A_2, \dots, A_n$  i  $O$ , gdje je  $n \geq 3$ , nalazi se špil karata. U svakom koraku možemo napraviti jednu od sljedećih dviju operacija:

- (a) Ako na nekoj točki  $A_i$  ima više od 2 karte, možemo uzeti tri karte iz tog špila i staviti po jednu na  $A_{i-1}$ ,  $A_{i+1}$  i  $O$ . (Ovdje vrijedi  $A_0 = A_n$  i  $A_{n+1} = A_1$ .)
- (b) Ako na točki  $O$  ima najmanje  $n$  karata, možemo uzeti  $n$  karata iz tog špila i staviti po jednu na  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Dokažite da, ako je ukupan broj karata  $\geq n^2 + 3n + 1$ , nakon konačno mnogo koraka možemo postići da na svakoj točki bude najmanje  $n + 1$  karata.

10. Skup pravaca u ravnini je u *općem položaju* ako nijedna dva pravca nisu paralelna i nijedan tri pravca ne prolaze kroz istu točku. Skup pravaca u općem položaju dijeli ravninu na regije, od kojih neke imaju konačnu površinu; te regije nazivamo njegovim *končanim regijama*.

Dokažite da za sve dovoljno velike  $n$ , u bilo kojem skupu od  $n$  pravaca u općem položaju moguće je obojati barem  $\sqrt{n}$  pravaca plavom bojom tako da nijedna od njegovih konačnih regija nema potpuno plavu granicu.

# Zadaci za samostalni rad, ali shortlist

“We gonna do this, or are we gonna keep  
chit-chatting like this is your mommy’s  
book club?”

Erica Sinclair, Stranger Things

1. Pravokutni list bijelog papira ima duljinu 25 i visinu 20. Na taj papir nacrtamo 120 disjunktih jediničnih kvadratića (koji ne moraju biti paralelni sa stranicama papira). Dokaži da možemo pronaći disk (ispunjenu kružnicu) promjera 1 koja se niti jednim dijelom ne nalazi na površini nekog plavog jediničnog kvadrata.
2. Pretpostavimo da je u ravnini dano 4951 različitih točaka tako da nijedne četiri točke nisu kolinearne. Pokažite da je moguće odabrati 100 tih točaka tako da nijedne tri točke nisu kolinearne.
- 3.
4. Neka  $G$  bude konačan, jednostavan graf s  $n \geq 3$  vrhova. Pretpostavimo da  $\deg(v) + \deg(w) \geq n$  za svaki par različitih vrhova  $v$  i  $w$  koji nisu međusobno povezani. Dokaži da  $G$  ima Hamiltonov ciklus.

*Definicija.* Hamiltonov ciklus je u teoriji grafova zatvorena staza (ciklus) koja prolazi svakim vrhom grafa točno jednom, vraćajući se na početni vrh

5. za svaki cijeli broj  $n \geq 1$ , izračunajte najmanju moguću vrijednost izraza

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor$$

kroz sve permutacije  $(a_1, \dots, a_n)$  skupa  $\{1, \dots, n\}$

6. Neka je  $A$  podskup od  $S = \{1, 2, \dots, 106\}$  s 101 elementom. Dokažite da postoje brojevi  $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$  takvi da su skupovi

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1, 2, \dots, 100,$$

međusobno disjunktne.

7. Eva ima nekoliko nedjeljivih jabuka od kojih svaka najviše teži  $\frac{1}{2}$  grama. Njene jabuke ukupno teže  $W$  grama, pri čemu  $W > \frac{1}{3}$ . Dokaži da Eva može staviti njene jabuke u

$$\left\lceil \frac{3W - 1}{2} \right\rceil$$

ili manje kutija od kojih svaka sadrži maksimalno po 1 gram jabuka.

8. Za svaki pozitivan cijeli broj  $n$  Banka Cape Towna izdaje kovanice nominalne vrijednosti  $\frac{1}{n}$ . Dana je konačna kolekcija takvih kovanica (ne nužno različitih nominalnih vrijednosti) čija je ukupna vrijednost najviše  $99 + \frac{1}{2}$ . Dokažite da je moguće podijeliti ovu kolekciju u 100 ili manje skupina tako da svaka skupina ima ukupnu vrijednost najviše 1.

9. Šest kutija s kovanicama  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  poredano je u nizu. Svaka kutija u početku sadrži točno jednu kovanicu. Dopuštene su dvije vrste poteza:

**Potez 1:** Ako  $B_k$ , gdje je  $1 \leq k \leq 5$ , sadrži barem jednu kovanicu, smijete ukloniti jednu kovanicu iz  $B_k$  i dodati dvije kovanice u  $B_{k+1}$ .

**Potez 2:** Ako  $B_k$ , gdje je  $1 \leq k \leq 4$ , sadrži barem jednu kovanicu, smijete ukloniti jednu kovanicu iz  $B_k$  i zamijeniti sadržaje (moguće prazne) kutija  $B_{k+1}$  i  $B_{k+2}$ .

Odredite postoji li konačan niz dopuštenih poteza takav da kutije  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  postanu prazne, dok kutija  $B_6$  sadrži točno  $2010^{2010^{2010}}$  kovanica.

**Napomena:**  $a^{bc} = a^{(bc)}$ .

10. Na svečanoj večeri na sveučilištu prisutno je 2017 matematičara, od kojih svaki naruči dva različita glavna jela, pri čemu nijedna dva matematičara ne naruče isti par jela. Cijena svakog jela jednaka je broju matematičara koji su ga naručili, a sveučilište plaća za svaki matematičarov jeftiniji obrok (u slučaju jednakih cijena izbor je proizvoljan). Među svim mogućim skupovima narudžbi, koliki je maksimalni ukupni iznos koji bi sveučilište moglo platiti?
11. Neka polja na mreži veličine  $10 \times 10$  obojena su plavom bojom. Skup od šest polja naziva se *gremista* ako su ta polja presjek tri reda i dvije kolone ili dva reda i tri kolone, i obojena su plavom bojom. Odredite najveću vrijednost  $n$  za koju je moguće obojiti  $n$  polja na šahovskoj ploči plavom bojom tako da ne postoji skup *gremista*.

## **II. Hintovi s predavanja**

## 7. Hintovi za prvu grupu

### 7.1. G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

1. Uoči da su  $\angle BPC$  i  $\angle PNA$  pravi kutovi te pronadi još jedan par jednakih kutova.
2. Pronadi dva para jednakih kutova koristeći vršne kutove i transverzalu dijagonale.
3. Spusti okomice na krakove kuta i usporedi nastale pravokutne trokute pomoću simetrale.
4. Spoji krajeve tetiva sa središtem kružnice i primijeni S-S-S poučak.
5. Usporedi trokute  $ABG$  i  $ADC$  koristeći stranice kvadrata i pravi kut.
6. Konstruiraj točku  $Q$  na pravcu  $AP$  s  $|AQ| = 2|AP|$  i usporedi trokute  $ABQ$  i  $KAN$ .
7. Označi dijelove kuta koje čine visina i težišnica i izrazi ih pomoću  $\alpha$ .
8.
  - Izračunaj površinu trokuta Heronovom formulom.
  - Visine se u sličnim trokutima mijenjaju istim koeficijentom.
  - Sličnost čuva kutove, a zakon refleksije ovisi samo o njima.
9. Povuci simetralu kuta i primijeni sličnost trokuta dobivenih presijecanjem.

## 7.2. C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Recimo da smo stavili neku znamenku na prvo mjesto, koliko sada znamenaka možemo staviti na drugo mjesto. Nakon toga, koliko znamenaka možemo staviti na treće mjesto? Konačno, koliko na četvrto?
2. Broj ponavljanja slova.
3. Skupi te 3 knjige u jednu jedinicu.
4. Kategoriziraj koji sve pravokutnici se mogu pojaviti.
5. Početak može biti dječak ili djevojčica, zatim permutirajte unutar svake grupe.
6. Primijetite da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top.
7. Ako znamo koliko je peteroznamenastih brojeva i koliko brojeva ne sadrži znamenku 5, onda možemo saznati i koliko brojeva sadrži barem jednu znamenku 5, kako? Izračunaj.
8. Gledaj manje slučajeve i zaključi koji je odgovor. Argumentiraj zašto je tako.
9. Izračunaj točno suprotno. Od prije znamo koliko je topova moguće staviti na ploču tako da se ne napadaju (zadatak 6).
10. Razmisli o *broju parova učenika* koji se mogu formirati.  
S jedne strane, možeš prebrojati sve moguće parove među 15 učenika. S druge strane, promatraj svaki dan čišćenja: tada sudjeluju 3 učenika i oni zajedno čine određeni broj parova.  
Pokušaj usporediti ta dva načina brojanja (ukupno parova i parova po danima) i iskoristi činjenicu da se svaki par pojavljuje *točno jednom*.
11. Razmisli o tome kako formirati parove korak po korak i ne zaboravi da redoslijed parova i redoslijed unutar para nije važan
12. Označimo s  $a_n$  broj načina popločavanja ploče  $2 \times n$  dominima  $2 \times 1$ . Razmisli kako može započeti popločavanje ploče:
  - ako na početak stavimo jednu okomitu dominicu,
  - ili ako stavimo dvije vodoravne dominice jednu iznad druge.Pokušaj izraziti  $a_n$  pomoću prethodnih članova niza.
13. Ako obojimo kvadrate u ovoj mreži naizmjenično crnom i bijelom bojom, primijetimo da strelice u crnim kvadratima pokazuju prema bijelim kvadratima, a strelice u bijelim kvadratima pokazuju prema crnim. Kako to možemo iskoristiti?
14. Razmislite o tome da vrijednosti polja zapravo predstavljaju udaljenost do najbliže nule. Jednom kad znate gdje su sve nule, cijela mreža se jedinstveno određuje. Broj konfiguracija odgovara broju mogućih pozicija nula (osim praznog slučaja).
15. Što se dogodi ako  $2 \times 1$  domino stavimo okomitu u donji lijevi kut (ili vodoravno, zapravo je simetrično).



**16.** Prvo kreni s postavljanjem najvećeg lika. Recimo da smo ga postavili u poziciju  $LD$  ako se nalazi 'lijevo-dolje'. Dakle, bilo koja figura može biti u poziciji  $LD, LG, RG, RD$  pri čemu

- D...dolje
- G...gore
- R...desno
- L...lijevo

Kad bismo raspisali sve figure koje pismo postavili redom (prvo najveću, pa drugu najveću, ...). Koliko se puta mora pojaviti  $L$ , koliko  $G$ , a  $D$  i  $R$ ?

**17.** Riješi prošli zadatak jer je princip prebrojavanja isti.

## 7.3. A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Igraj se s eksponentima
2. Racionaliziraj nazivnik i algebriraj
3. Racionaliziraj nazivnik, ovo je teži dio zadatka. Mi želimo pomnožiti

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

s nečime (kao i brojnik) tako da nazivnik postane racionalan. Što će to biti? Prisjeti se da

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$$

4. Primijeti  $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ . Iskoristi formulu  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ .
5. Svedi sve nepoznanice na jednu stranu jednadžbe i pokušaj izraz koji dobiješ prikazati kao sumu dvaju kvadrata.
6. Ako  $x + y + z = 0$ , što onda još možemo reći? Pogledaj faktorizacijske klasike
7. Uzmi za početak  $2^x = a$  i  $3^x = b$ . Faktoriziraj i sredi izraz (neke stvari se na lijevoj strani pokrate).
8. Bog zna
9. Pojavljuju se kubovi... Koja faktorizacija nam pomaže napast kubove?
10. Pomnoži s dva i pravi kvadrate.
11. Imamo treće korijenje, koja faktorizacija baš jako voli eksponent 3?
12. Uzmi  $2^x = a$  i  $3^x = b$ . Faktoriziraj brojnik i nazivnik od lijevog izraza i skрати razlomak. Nakon toga izmnoži i riješi jednadžbu.
13. Pretpostavi da izraz može biti 0. Koja je naša najdraža faktorizacija?
14. Koja je ovo zapravo faktorizacija (znaš u duši)
15. Uzmi  $\sqrt{x} = u$  i  $\sqrt{y} = v$ . Promotri sustav u kontekstu binomnih koeficijenata raspisa zbroja na eksponent 6.
16. Ovaj izraz je zapravo jednak

$$\frac{4^n + 1}{5}$$

Zašto i kako nam to pomaže?

17. Podsjeća na

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

zar ne? Nebi li bilo baš cool kad bismo pokazali da taj izraz ima baš tu strukturu. To bi nam dalo puno informacija.

18. Prisjeti se

$$a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

## 7.4. N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

#### Baratanje simbolima

1. Uzastopno oduzimaj manji od većeg.
2. Euklidov algoritam svede na  $\gcd(\cdot, 1)$ .
3. Svedi na  $\gcd(3, 2n)$ .
4. Jedan korak Euklidovog algoritma.
5.  $\gcd(a, b)$  uvijek dijeli oba broja.
6. Djelitelji prostog broja su 1 i  $p$ .
7. Zajednički faktor  $d$  se može izvući.

#### Više natjecateljski

8. Izvuci zajedničke faktore na lijevoj strani. Čime je sve djeljiv broj 483?
9. Razmotri ostatke pri dijeljenju s 3. Što se događa s brojevima  $p + 10$  i  $p + 14$  u različitim slučajevima?
10. Što možeš zaključiti o broju  $m - 8$  ako broj  $m$  daje ostatak 8 pri dijeljenju i s 18 i s 24?
11. Drugi broj se može faktorizirati, koja je definicija prostog broja?
12. Faktorizirajte.
13. Invarijanta.
14. Budući da je produkt djeljiv s 5, jedan od prostih brojeva mora biti 5. Nakon što taj broj odvojiš, pokušaj faktorizirati izraz dodavanjem 1 na obje strane.
15. Prvo pronađi  $a$ ,  $b$  i  $c$  iz uvjeta  $4a + 3b + 2c = 30$ . Zatim postupno koristi uvjete o ostacima da pronađeš  $n$  modulo 105.
16. Što možeš zaključiti o djeljivosti brojeva  $a$  i  $c$  iz uvjeta o NZD? Kako to utječe na zadnju znamenku broja  $b$ ?
18. Koristi činjenicu da ih ne dijele ni 2 ni 3.
19. Gledaj module.
20. Ostatak s 4 i parnosti.
21. (1) Zajednički faktori. (2) Kongruencija.
22. Faktoriziraj izraz i pokaži da je djeljiv s 4. Zatim koristi Dirichletov princip za djeljivost s 5.
23. Oblik umnožak=konst.
24. Označi  $c + 1 = p^2$  i transformiraj zadanu jednakost. Koji su mogući djelitelji broja  $p^2$ ?
25. Beskonačni spust.
26. Označi varijable i postavi jednakosti. Transformiraj jednakost u produkt dva uzastopna broja. Što možeš zaključiti o njihovoj djeljivosti s  $p$ ?

## 7.5. X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### kombica bombica

1. Što bi bilo ako bi najviše dva učenika imala rođendan u istom mjesecu?
2. Pretpostavite suprotno, što ako bi svaki odjel imao maksimalno 33 učenika. Primijenite onda Dirichlet.
3. Koliko imamo kombinacija? Jesu li sve kombinacije istovremeno moguće?
4. Pogledaj što smo napravili u primjeru. Napravi istu stvar, samo što ćeš imati tri boje, umjesto dvije.
5. Znamo da sigurno stol možemo okrenuti za neki broj stupnjeva kako bi neka specifična osoba dobila svoju karticu ispred sebe. Koliko takvih opcija zapravo imamo, a koliko je mentora?
6. Možeš li izračunati koliko bi iznosio zbroj svih trojki isječaka zajedno? Što ako bi zbroj svake trojke bio maksimalno 55?

### Svima nama draga teorija brojeva

7. Koliko postoji ostataka pri dijeljenju s  $n$
8. Gledaj zbrojeve  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2021}$
9. Umjesto da pokažeš da postoji neki koji je jednak zbroju druga dva, pokaži da postoji neki koji je jednak razlici druga dva. Kako su ova dva problema ekvivalentna i kako nam ovo olakšava rješavanje zadatka?
10. Pogledaj prva 2026 takva broja.

### Vrijeme je za crtanje

11. Podijeli kvadrat na 9 manjih kvadratića duljine stranice 1 cm.
12. Možeš li podijeliti naš kvadrat na neki broj manjih kvadrata kao u primjeru, ali tako da okrugla metlica sigurno pokriva cijeli taj manji kvadrat?
13. Primijeni istu strategiju kao i u prošlom zadatku.
14. Uoči da ovi pravci dijele kvadrat na dva trapeza, s istom duljinom visine.

### Bučkuriš svega i svačega

15. Primjenjuj istu metodu kao i u prijašnjim zadacima ovakvog tipa.
16. Idi po redu i dijeli učenike u skupine: po tipu sladoleda, po godinama i po državi.

17. Gledaj  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .
18. Označi s  $k_i$  broj zadataka koje je učenik riješio do kraja  $i$ -tog dana. Promotri nizove  $k_1, k_2, \dots, k_{365}$  i  $k_1 + 20, k_2 + 20, \dots, k_{365} + 20$ .
19. Koliko mora biti najmanje brojeva iste parnosti?
20. Gledaj brojeve  $1, 11, 111, 1111, \dots$ .
21. Projicirajte promjer svake kružnice na stranicu kvadrata. Kolika je duljina svakog tog segmenta (ovisno o opsegu) i kolika je duljina svih segmenata zajedno?
22. Promatrajte razlike  $a_{20} - a_{19}, \dots, a_2 - a_1$ .
23. Primijeti da ovih 6 točaka tvore šesterokut. Podijeli zadatak na dva slučaja: konveksni i nekonveksni četverokut.

## 8. Hintovi za drugu grupu

### 8.1. G2: Matej Vojvodić - Catcher in the $\pi$

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Hintovi

1. Zapiši  $180^\circ$  na dva različita načina.
2. SKS poučak o sukladnosti da pokažemo da su te točke dobre, a mini nejednakost (Pitagora) da ostale nisu.
3. KSK da pokažemo da su te točke dobre. Za ostale, pretpostavimo suprotno (da su dobre), ali tada po SSK su dva nastala trokuta sukladna, pa je i točka na simetrali kuta.
4. Docrtaj središte kružnice.
5. Iskoristi raniji zadatak o simetrali stranice.
6. Prikaži što više kuteva preko kuta  $\angle ABC$ .
7. Sukladnost. :)
8. Što znamo o srednjici trokuta? Sličnost.
9. Raspiši kuteve tetivnog četverokuta.
10. Prikaži kuteve  $EFGH$  preko kuteva  $ABCD$ .
11. Na skicu docrtajte polumjer.
12. Pokažite da se sjecište simetrale kuta i opisane kružnice nalazi na simetrali stranice, ili da se sjecište simetrale stranice i opisane kružnice nalazi na simetrali kuta.
13. Kako ćeš iskoristiti simetriju? Koji su trokuti sukladni?
14. Kako pokazujemo da je nešto središte kružnice? Jednakokračni trokuti! Kako dobivamo kuteve? Tetivni četverokuti!
15. Najlakše je malo po malo, dobra je ideja uzeti dvije slične točke i dvije drukčije točke i pokazati da je nešto tetivno, pa se argument često može proširiti analogno.
16. Zbroj vanjskih kuteva u mnogokutu ili zbroj unutarnjih kuteva u sedmerokutu.
17. Ima li četverokut iz zadatka kakva dobra svojstva?
18. Možeš li si olakšati lemom o refleksijama ortocentra
19. Koji su sve kutevi jednaki? Točka  $P$  je korisna!
20. Poučak o tetivi i tangenti... a lot.
21. Dokaži da je  $APQF$  tetivan.

## 8.2. C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Oboji ploči u crno i bijelo šahovskim bojanjem, no tako da crna i bijela polja budu dimenzija  $2 \times 2$ .
2. Oboji ploču u crno i bijelo tako da svaka pločica zauzima točno jedno crno polje.
3. Oboji kutiju tako da, kada staviš jednu ciglu unutra, ona će pokriti 1 crnu kocku i 3 bijele kocke.
4. Oboji ploču u crno i bijelo tako da različite pločice zauzimaju različiti broj crnih i bijelih polja.
5. Oboji ploču po stupcima u crno i bijelo.
6. Princip komplementa, funkcija uključivanja i isključivanja.
7. Za  $n$  paran tvrdnja vrijedi, a  $n$  neparan ne.
8. Prvi dio se lako konstruira. Hint za drugi dio je Dirichletov princip.
9. Koji će biti ukupan broj susjeda na ploči?
10. Matematička indukcija.
11. Fiksiraj jednu obojanu nit i promatraj koliko barem parova različitih boja mora postojati.
12. Ako je  $N$  djeljiv s 3, moguće je, u suprotnom nije. Promatraj prvi red i probaj doći do traženog bojanja. Zašto ne možeš?
13. Odgovor je  $2016^2 + 1$ . Neparne redove oboji u dvije boje nasumično, parne oboje s druge dvije boje nasumično.
14. Koliko maksimalno lovaca može biti na jednoj dijagonali? Nacrtaj si lovca kao točku na polju iz koje izlaze 3 strelice, svaka u smjeru koji napada. Koliko maksimalno strelica može biti na ploči?

## 8.3. A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Izvuci jedinicu iz svakog razlomka i napiši ostatak kao razliku dva razlomka.
2. Racionaliziraj sve razlomke.
3. Zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.
4. Preoblikuj svaki član u umnošku tako da koristiš formulu za razliku kvadrata.
5. Iskoristi formulu za razliku kvadrata i zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.
6. Pomnoži i podijeli izraz s  $1 - x$ .
7. Pomnoži i podijeli izraz s  $1 - x$ .
8. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.
9. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.
10. Zapiši svaki razlomak kao zbroj (ili razliku) tri jednostavnija razlomka.
11. Izrazi  $a_n$  samo preko  $a_{n-1}$ , ispiši par članova niza i uoči pravilnost te ju dokaži matematičkom indukcijom. (ovaj zadatak nema puno veze s teleskopiranjem)
12. Faktoriziraj nazivnik i prikaži razlomak kao razliku dva razlomka.
13. Ogradi svaki razlomak odozgo s izrazom koji će se moći teleskopirati.
14. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.
15. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.
16. Faktoriziraj svaki član što je više moguće.



## 8.4. N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Napravi najjednostavniju moguću faktORIZACIJU i gledaj parnost.
2.  $m^4 + mn^3 = m(m+n)(m^2 - mn + n^2)$ .
3. Modulo 3.
4. Dodaj 1 s obje strane.
5. Vidiš li faktORIZACIJU?  $9^m - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1)$ .
6. Koja će biti parnost tog izraza za  $m \geq 2$ . Koja je onda jedina potencija prostog broja koja bi mogla raditi? Nakon toga završi gledajući jedan nestandardni modulo.
7. Jako puno modularne aritmetike i onda na kraju faktORIZACIJA.
8. Dovrši faktORIZACIJU na lijevoj strani i ostatak prebaci na desnu. Lijeva strana je pozitivna, ali... hoće li i desna biti pozitivna?
9. Napravi slučajeve ovisno o parnosti  $p$  i  $q$ . U tim slučajevima pametno koristi module i potom faktORIZACIJE.
10. Imamo kubove, koji modulo je zgodno gledati? Iskoristi to kako bi utvrdio oblik od  $m$  i onda napravi faktORIZACIJU.
11. Gledaj najveću potenciju  $2^k$  koja dijeli sva tri broja. Nemoj zaboravit, ne mora nužno biti konačan broj rješenja.
12. Prvo pokušaj odrediti parnost od  $n$  pomoću modularne aritmetike, nakon toga napravi faktORIZACIJU i podijeli na slučajeve koje si dobio Euklidovim algoritmom.
13. Prvo riješi slučaj  $m = k$ . Nakon toga ćeš morati napraviti par zapažanja i pretpostavki. Na kraju usporedi veličine i pokaži da nema rješenja.
14. Prvo ustvrdi djeljivost  $m$  s 3. Nakon toga uvedi supstituciju  $a = 3^k$ . Na kraju će biti smještanja između kubova.
15. Ustvrdi parnost  $m$ , nakon toga faktORIZIRAJ i onda još malo modularne aritmetike.
16. Napravi faktORIZACIJU. Euklidovim algoritmom pokaži da su faktori relativno prosti i nakon toga u jednom slučaju smjesti između kubova, a u drugom modularnom pokaži da nema rješenja.
17. FaktORIZIRAJ  $a^5 + a^4 + 1$

## 8.5. X2: Dario Vuksan - Indukcija

Predavanja

Hintovi

Rješenja

1. Pogledaj riješen primjer
2. Pogledaj riješen primjer
3. Pogledaj riješen primjer
4. Pogledaj riješen primjer
5. Zapiši zadan broj za  $n = k$  kao  $13a$ . Pokaži da se za  $n = k + 1$  broj može zapisati kao  $13b$ .
6. Kao i prethodni zadatak
7. Počni od pretpostavke i pažljivo ju sredi tako da dobiješ nešto nalik na zadanu rekursivnu formulu.
8. Napiši rekursivnu formulu za taj niz.
9. Pokaži da je zbroj izraza za  $n$  i  $n + 1$  jednak nula.
10. Izračunaj prvih nekoliko članova niza i pretpostavi formulu, pa dokaži indukcijom.
11. Pomnoži  $x + \frac{1}{x}$  s  $x^k + \frac{1}{x^k}$
12. Primijeti da ne pomaže ostaviti 2 na desnoj strani. Treba malo pojačati nejednakost dodavanjem ili oduzimanjem nečega što ovisi o  $n$ . Ali, dodavanjem se oslabljuje nejednakost, zato treba oduzeti.
13. Raspiši izraz za  $(m, n + 1)$
14. Trebat će pretpostaviti nešto ne samo za  $n$  nego i sve ranije.
15. Počni od dva igrača, pa tri...
16. Počni od trokuta, pa kvadrata...
17. Provedite indukciju po  $n$ , a u svakom koraku iskoristite pretpostavku da postoji popločavanje za neki  $k \in \mathbb{N}$  kako biste popločali i za  $k + 1$ .
18. Analiziraj igru za mali broj keksa, pa poopći.
19. Provedite indukciju po broju gradova. Podijelite gradove u skup onih koji su povezani s "glavnim" gradom direktno te onih koji su povezani preko nekog drugog grada. Kakav je odnos novododanog grada s tim gradovima?
20. U koraku (za  $n + 1$ ) promatrajte  $n$  kružnica i što se dogodi s bojanjem kad dodamo tu zadnju kružnicu.
21. Provedite indukciju po broju ljudi. Kako se ponaša parnost broja ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi dodavanjem još jedne osobe?

## 9. Hintovi za treću grupu

### 9.1. G3: Lana Milani - Potencija točke

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Hintovi

1. Želimo promotriti potenciju točke  $K$ , a prije toga treba pronaći jedan tetivan četverokut.
2. Radikalna os je okomita na spojnicu središta.
3. Potencijom točke iz  $C$  dokaži da su  $A_1, A_2, B_1, B_2$  konciklične. Dovrši iz toga u jednoj rečenici.
4.  $OP = OQ \iff P$  i  $Q$  imaju istu potenciju točke na  $(ABC)$ .
5. Radikalne osi sijeku se u radikalnom centru. Primjena na 2 trojke kružnica.
6. Želimo da  $K$  bude radikalno središte. Koje su 3 kružnice?

#### Bonus: kružnica radijusa 0

7. Kružnica radijusa 0 u  $M$ .
8. Preslikamo  $A$  preko  $X$  i preko  $Y$ , dobijemo  $U$  i  $V$ . Što su  $U$  i  $V$  u trokutu  $ABC$  (sjetimo se  $AU = AV = 2 = \frac{o(ABC)}{2}$ ). Odgovor nam daje jednu kružnicu. Uz nju trebamo još jednu kružnicu takvu da  $XY$  bude radikalna os. Koja je to?
9. Želimo da  $G$  bude radikalni centar tri kružnice: dvije s radijusom 0 u  $R$  i u  $S$ , koja je treća?.

## 9.2. C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Kreni od pozicije  $1 \times 1$ . Jeli ona pobjednička ili gubitnička. Iz kojih pozicija se dolazi u tu poziciju. Istom logikom pokaži da su sve pozicije  $n \times n$  gubitničke, a ostale pobjedničke.
2. Pogledaj što se dogodi ako prvi igrač pojede ili ne pojede gornji desni kvadratić.
3. Analiziraj pravila djeljivosti sa svakim od ova tri broja.
4. Dovoljno je da je pobjednik samo malo bolji, tj. da uzme samo jedan stupac/red više od drugog igrača.
5. Jeli prva pozicija pobjednička ili gubitnička?
6. Pijun je trivijalan. Ostatak pokušaj riješiti metodom simetrije.
7. Tko dobiva u ako postoji blok SXXS (gdje su X prazna polja)? Ovisi li naša igra o parnosti  $n$ ?
8. Pokaži da ako je broj paran i različit od 998 Martin može pobijediti, a ako je broj neparan ili 998 da onda Dario pobjeđuje.
9. Primijeti da je pozicija u kojoj je broj bombončića oblika  $1 \bmod k + 1$  gubitnička. Zašto?
10. Razmišljaj o simetriji.
11. Pokušaj pobojati ploču i  $X$ -evima označi mjesta na kojima bi bilo zgodno Niku da se nalaze najveći brojevi.
12. Pokaži indukcijom da su parne pozicije pobjedničke.
13. Što ako je  $N$  neparan, a što ako je  $N$  paran. U slučaju da je  $N$  paran gledaj što ako dodemo do nekog broja koji je veći ili jednak  $\frac{N}{2}$  ili što zašto je ako je  $N = 4k$  ili  $N = 4k + 2$ ,  $k$  pobjednička pozicija.
14. Razmišljaj o sparivanju blokova na tornjevima brojeva sa blokovima na susjednim tornjevima.
15. Prvo riješi slučajeve s jednoznačenkastim brojevima da dobiješ neku ideju. Onda pokaži da za ostale  $n$  će Jan uvijek nakon Jakovljeva poteza moći i sam odigrati potez tako što razmišljaš o Jakovljevim potezima kao razdjelnicima blokova seta  $\{1, \dots, n\}$ . Zašto je optimalno da Jan na svom prvom potezu uzme 1 ili  $n$ ?
16. Prvo gledaj ako je barem jedan od  $m, n$  veći ili jednak 5. Gledaj 2 dijagonale koje se sastoje od 4 polja i sijeku se u točno jednom polju. Zašto Bruno tu pobjeđuje? Ako je  $m = n = 4$  naći simetriju kojom Lucijan može spriječiti Brunu da pobijedi.
17. Pokaži da po Dirchletu ako je broj polja 12 ili manji da mora biti da postoje 4 stupca u kojima je barem  $n-4$  obojanih polja.
18. Pokaži da sve ovisi o tome jeli gornja kartica na početku  $k$  najmanja od prvih  $k$  kartica. Što ako nije? Što ako je?
19. Ključne pozicije su one u kojima ostane  $2^k - 1$  kamenčića. Jesu li one gubitničke ili pobjedničke?
20. Ovdje će jako biti bitna parnost. Pokušaj opet koirstiti simetrično razmišljanje.

## 9.3. A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednađžbe

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Uvrstite  $x = 0$ .
2. Uvrstite  $y = 0$ .
3. Uvrstite  $y = 0$ .
4. Neka je  $f(0) = k$ . Stavite  $y = 0$  i  $x - k \mapsto x$ .
5. Uočite da vrijedi  $1 - (1 - x) = x$ . Uvrštavanje  $1 - x \mapsto x$  može pomoći.
6. Najveće cijelo.
7. Uvrstite  $(0, 0) \mapsto (x, y)$  da dobijete  $(f(f(0)) = f(0)$  sada iskoristite injektivnost.
8. Indukcija po  $n$ .
9.  $y=0$ ,  $x=y$ .
10. Nule, jedinice i indukcija :) i minus jedinice

## 9.4. N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Primijeni Lemu 1.11
2. Možeš li odrediti posljednje tri znamenke broja  $3^{2000}$  koristeći Eulerov teorem?
3. Primijeni Lemu 1.11
4. MFT ili Lema 1.11
5. Promotri jedan član. Kada je broj djeljiv s 14?
6. Zapiši kongruenciju kao jednakost (teorem o dijeljenju s ostatkom)
7. Primijeni Lemu 1.11 s oprezom!
8. Primijeni MFT:  $a^p \equiv a \pmod{p}$
9. Zapiši zadani broj tako da se može iskoristiti Mali Fermatov teorem na njemu
10. Za prvi podzadatak dovoljno je promatrati koliko je "velik" svaki broj. Tvrdnja iz prvog podzadatka je hint za drugi.
11. Iskoristi mali Fermatov teorem da smanjiš eksponent.
12. Propozicija 2, dokažemo posebno za  $\pmod{p}$  i posebno za  $\pmod{q}$
13. Tvrdnja je ekvivalentna s time da promatramo samo proste djelitelje oblika  $4k + 3$ . Pretpostavi suprotno i koristeći mali Fermatov teorem dođi do kontradikcije.
14. Postavi jednadžbe, kongruencije ili druge uvjete koji ograničavaju izbor brojeva pa iz jednog konstruiraj drugi.
15. Koristi formulu za Eulerovu funkciju, malo ju transformiraj i promatraj parnost.
16. Iskoristi MFT. Usporedi zadanu tvrdnju i MFT. Utiliziraj order.
17.  $221 = 13 \cdot 17$ . Dokaži posebno za  $\pmod{13}$  i  $\pmod{17}$
18. Uvrsti  $c$  i sređuj malo po malo i vidi gdje će te to dovesti

## 9.5. X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija

Predavanje

Hintovi

Rješenja

1. Uzmi neku dužinu na konveksnoj ljusci. Teorem o obodnom i središnjem kutu.
2. Ako nisu sve na istom pravcu, onda postoji nedegenerirani trokut kojem su vrhovi iste boje. Ekstremno.
3. Gledaj spojnice iz vrha piramide. Koliko ih može biti najviše?
4. Izravni tetivu na kružnicu
5. Promatraj stranicu s najviše susjednih.
6. Invarijante?
7. Ekstremno!
8. Pretpostavi da to ne vrijedi. Uzmi neki pravac koji prepolavlja opseg i rotiraj ga do iste točke. Nепrekidnost funkcije :)
9. Želiš svakoj stranici od  $A$  pridružiti dio opsega  $B$  koji je veći ili jednak (i svi su disjunktni).
10. Koje je najbolje pakiranje krugova u ravninu? Neko će uspjeti!
11. Na kojoj udaljenosti bi miš trebao biti od obale da pobjegne od mačke? Može li doći do tamo?
12. Uzmi proizvoljni pravac, i kako nisu sve na istom pravcu moguće je naći najbližu točku tom pravcu koja mu ne pripada.
13. Uzmi pravac i sjecište koji su najmanje udaljeni.
14. Na manjim primjerima pokušaj pogoditi odgovor. Promatraj konveksnu ljusku.
15. Prvo uočimo da je isti problem ako dopustimo da su mnogokuti *skoro konveksni* tj. svi kutevi su  $\leq 180^\circ$ . Time je jednaki problem za mnogokut  $P$  i mnogokut  $P'$  koji ima particionirane stranice od mnogokuta  $P$ . Zbog toga možemo postići da su sve površine pridružene otprilike jednake. Koja očita lema se nameće?

## 10. Hintovi za četvrtu grupu

### 10.1. G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Hintovi

1. *hint.* pokaži da je simedijalna točka trokuta  $ABC$ , nazovimo je  $K$  težište trokuta čije su točke nožišta okomica iz  $K$  na stranice trokuta.  
2. *hint.* vidi prvu stvar u riječniku (za dokaz leme)  
3. *hint.* ako su neprisupačne  $N$ ,  $K$  i  $M$ , preko kolinearnosti koje tri druge točke možeš dobiti njihovu kolinearnost (hint hint iskoristi lemu, zašto ju uopće uvodimo?)
2. Možete se izvući angle-chaseom, potencijom točke, sličnosti i tako - izdržite snažni ste vi momci i žene!
3. Stare leme, radikalne osi, prethodno dokazani dijelovi zadatka, simedijane.
4. sličnost i poučak o simetrali kuta
5. Dodaj točku  $R$  takvu da je  $ARBP$  paralelogram.

#### nešto konkretnije

6. Radikalna os je okomita na spojnicu središta
7. Posebno  $G$ , posebno  $X$
8. Feuerbachova, što je  $H \triangle APQ$
9. dokaži da su točke  $E$ ,  $F$ ,  $X$  i  $Y$  (nožišta visina iz  $B$  i  $C$  u  $\triangle BIC$ ) kolinearne, ima i neka divna lema koja baš pomaže a baš se i ne koristi i baš je osnovna i baš je kul da se tu koristi

#### Za mlade i nadobudne

10. Neka je  $ABC$  raznostraničan trokut s upisanim središtem  $I$  čija je upisana kružnica tangentna na stranice  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  u točkama  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Neka je  $M$  polovište stranice  $BC$  i neka je  $P$  točka u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$  takva da vrijedi  $MD = MP$  i  $\angle PAB = \angle PAC$ . Neka je  $Q$  točka na upisanoj kružnici takva da je  $\angle AQD = 90^\circ$ . Dokaži da vrijedi ili  $\angle PQE = 90^\circ$  ili  $\angle PQF = 90^\circ$ .

**Razrada.** Postoji nekoliko pristupa, ali koristimo onaj koji je izvorno primijenjen.



1. *hint.* Pokaži da točka  $Q$  leži na kružnici sa središtem u  $M$  i polumjerom  $MD$ . (Ovo vjerojatno uključuje vanjsku upisanu kružnicu.)

2. *hint.* Kako funkcionira tvrdnja „ $\angle PQE = 90^\circ$  ili  $\angle PQF = 90^\circ$ ”? (Napomena: postoje dva sjecišta pravca  $AI$  s tom kružnicom.)

3. *hint.* Pretpostavi da smo u slučaju  $\angle PQE = 90^\circ$ . Tada je točka  $P$  zapravo kolinearne s dvjema od navedenih točaka; koje su to točke?

4. *hint.* Odredi iz koje je klasične konfiguracije potekla točka  $P$ . (Koristi poglavlje 1 iz EGMO-a.)

5. *hint.* Primijeni tu konfiguraciju kako bi dokazala (3) u slučaju  $AB < AC$ .

6. *hint.* Razmatranjem kutova pokaži da (5) sada povlači  $\angle PQE = 90^\circ$ .

11. Neka  $I_A$  označava  $A$ -pripisano središte, a  $D$  nožište  $A$ -visine. Za sada zanemarimo točku  $P$ ; naš prvi korak je pokazati da vrijedi

$$OI_A \perp YZ.$$

(a) Pokaži da je pravac  $YZ$  radikalna os kružnica  $(I_B I_C)$  i  $(ABC)$ .

(b) Neka  $S$  označava središte opisane kružnice trokuta  $\triangle I_B I_C$ . Pokaži da vrijedi  $SO \perp YZ$ .

(c) Dokaži da su točke  $S$ ,  $O$  i  $I_A$  kolinearne na Eulerovoj pravcu trokuta  $\triangle I_B I_C$ .

Prema tome, dovoljno je pokazati da točka  $P$  leži na pravcu  $SOI_A$ . Zapravo, bit će pogodnije pokazati da ona leži na pravcu  $SI_A$ .

Neka su  $A_1, B_1, C_1$  dodirne točke kružnice  $(I_A)$  sa stranicama (ili njihovim produžecima) trokuta  $\triangle ABC$ . Neka su  $A_2, B_2, C_2$  zrcalne slike točke  $I_A$  preko tih točaka.

(d) Pokaži da su točke  $D$ ,  $I$  i  $A_2$  kolinearne. (Ovo je zahtjevno; trebat će ti lema o “polovištu visina”, odnosno da  $IA_1$  raspolavlja dužinu  $AD$ .)

(e) Dokaži da su točke  $E$ ,  $I_C$  i  $C_2$  kolinearne te da su točke  $F$ ,  $I_B$  i  $B_2$  kolinearne. Ovo se može provesti na sličan način kao u prethodnom dijelu.

(f) Pokaži da je trokut  $\triangle A_2 B_2 C_2$  homotetičan trokutu  $\triangle I_B I_C$ , te da je središte te homotetije točka  $P$ .

(g) Iskoristi prethodni dio kako bi pokazala da su točke  $S$ ,  $I_A$  i  $P$  kolinearne, čime je zadatak dovršen.

12. (a) Nacrtaj precizan dijagram.

(b) Uključi u konstrukciju  $A$ -pripisano središte  $I_A$ , i neka je  $X$  polovište luka  $\widehat{BAC}$ . Pokaži da su točke  $X$ ,  $A$  i  $S$  kolinearne.

(c) Odredi ortocentre trokuta  $\triangle XSM$  i  $\triangle XSI_A$ .

(d) Neka  $L$  označava traženu presječnu točku (jednu od  $L_1$  ili  $L_2$ ). Pronađi što više svojstava točke  $L$ .

(e) Definiraj točku  $L$  koristeći dva svojstva pronađena u (d), koja nisu zadana u izvornom tekstu zadatka. Pokaži da vrijedi  $L \in (MAN)$ . (Većina rješenja ovdje koristi kružnicu devet točaka.)

(f) Pokaži također da vrijedi  $L \in (KID)$  koristeći potenciju točke iz  $X$ .

(g) Pokaži da kružnica  $\Omega$  raspolavlja dužinu  $IL$ . (Ovisno o tome koje su definicije korištene u (c), ovaj korak može imati mnogo različitih oblika.)

## 10.2. C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom

### Predavanje

### Hintovi

### Rješenja

1. Indukcija
2. Kada u grafu postoji Eulerov ciklus?
3. Suma broja rukovanja bilo koja dva bračna partnera je ista.
4. Nešto će izgledat isto odsprijeda i odzada.
5. Zamisli skup djelitelja  $n$  kao  $t$ -dimenzionalni kvadar gdje je  $t$  broj različitih prostih djelitelja od  $n$ .
6. Primjeti da je operacija biranja trgova komutativna.
7. Indukcija.
8. Nemoj fiksirati početni raspored oraha. oboji iskorištene orahe u crno.
9. Jaka indukcija. Alternativno, probaj poistovjetiti dobar raspored sa linearnim uređajem
10. Konstruiraj male vrijednosti i vidi zašto  $|\mathcal{S}| > 2$  ne radi baš.
11. Po visini podijeli igrače u  $N$  skupina od  $N + 1$  igrača.
12. Na jako jako pametan način razapni graf preko trokuta i gledaj mu dubinu.
13. Brojevi od 1 do 2018 se nalaze u različitim retcima, "jedan iznad drugog".
14. Broj točaka sa jedne strane pravca  $l$  se ne mijenja.
15. Napravi nejednostavni graf na  $n$ -članom skupu.
16. Gledaj izraz  $c_1 s_1 + \dots + c_m s_m$  za  $c_i \in \{0, \dots, m - 1\}$  i  $s_i$  je suma elemenata  $B_i$ .
17. Jako veliki krug.
18. Upari svaki kamenčić sa nekim drugim i neka ti to budu stranice nejednostavnog grafa na  $n$  čvorova.
19. Zeko iskreno dojavljuje svoju lokaciju lovcu.
20. Reprezentiraj niz kao histogram sa gravitacijom (ma što god to značilo).
21. Napravi graf. Reduciraj sa  $n$  na  $n/2$ .
22. Let  $k = p \cdot \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$  The main idea now is that for  $0 \leq i \leq k$ ,  $a_{n+i} - a_n \leq k$ . Thus, the indices for  $Q_i, q_i$  must be sufficiently spaced out.
23. Erdos-Szekeres

## 10.3. N4: Lana Milani - TB polinomi

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Hintovi

1. Primijetimo da  $a - b \mid P(a) - P(b)$ .
2. Dokažite da ako je broj periodičan pod  $P$ , onda je fiksni po  $P \circ P$ .
3. Dokažite da je  $Q$  linearan gledajući  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
4. Neka je  $P(x) = x^k Q(x)$ , gdje  $Q(0) \neq 0$ . Tvrdimo da ako  $n = p^k$  za neki prost broj  $p$  koji ne dijeli  $kQ(1) + Q'(1)$ , onda  $n$  zadovoljava tvrdnju zadatka.
5. Imamo  $(x+1)^n - 1 = P(x)Q(x)$ . Nazovimo dva polinoma  $f(x)$  i  $g(x)$  sličnima i označimo to s  $f(x) \equiv g(x)$  ako su koeficijenti uz istu potenciju  $f(x)$  i  $g(x)$  iste parnosti.

## 10.4. X4: Karlo Jokoš - Local ideja

### Predavanje

### Hintovi

### Rješenja

1. Ideja je prvo pokazati da će izraz koji postiže maksimalnu vrijednost morati biti umnožak zagrada koji imaju duljinu najviše 3. Ovo se dokazuje Local pristupom (a i intuitivno je da, naprimjer, nije optimalno imati izraz s pet jedinica u jednoj zagradi).
2. Intuitivno nam je, ako nam je dana neka opća konstrukcija, da pokušavamo 'odmotati' sva sjecišta. Nije pre teško (odnosno vrlo je lagano) smisliti kako taj algoritam radi, ali je malo teže smisliti zašto mora stati. Promatraj jednu iteraciju algoritma i pokušaj upčiti što se striktno smanjuje.
3. Ako čitaš ovaj hint znači da kompliciraš. Recimo da, umjesto ga gledamo samo kraj, želimo imati minimum/maximum, nakon 7-og koraka (neka  $n \geq 3$ ). Koji broj ćemo pokupiti onda nakon 7 pomicanja ako želimo maksimum, a koji ako želimo minimum?
4. Za početak, jasno je da nije moguće da uvijek oslobodimo dvije osobe (ovo je dosta jednostavna tvrdnja koju možeš dokazati primjerom). Sada je ideja pokazati da je jednu osobu samu ipak moguće osloboditi. Označimo tri jačine kontrole s  $A \leq B \leq C$ . Želimo napraviti algoritam koji monotonično smanjuje  $\min(A, B, C)$  sve dok ne dobijemo  $\min(A, B, C) = 0$ . To pokušaj koristeći Euklidov algoritam. Može ti biti od pomoći i prikaz brojeva u binarnom obliku
5. Recimo da imamo neki vrh  $A$  koji je povezan s vrhovima  $B$  i  $C$  te neka bridovi  $AB$  i  $AC$  mogu prevoziti jednako mnogo maksimalno vozila. Neka je to 1 (može i 2!). Primijetimo sada da, ako tvrdnja vrijedi da graf u kojemu nemamo bridove  $AC$  i  $AB$ , ali imamo brid  $BC$  s maksimalnim brojem vozila 1, da onda tvrdnja mora vrijediti i za naš graf.
6. Ovo kreće jednim lijepim globalnim argumentom koji nam pokazuje da minimum i maximum koji možemo dobiti permutiranjem ne mogu oboje biti veći od

$$\frac{n+1}{2}$$

ili oboje manji od

$$-\frac{n+1}{2}$$

Nakon toga slijedi Local dio zadatka u kojem 'forsiramo' da za jedan broj vrijedi da mora biti u traženom intervalu.

7. Ideja jako slična primjeru 3, Ako nam vrijedi za neku konstrukciju i zamijenimo dva susjedna štapića (i njihove nasuprotno štapiće), treba dokazati da tvrdnja i dalje vrijedi.
8. Želimo ovo nekako svladati indukcijom. Naravno, ako imamo jednu patrolu koja kreće od najj-gornje točke i ide prema najdonjoj točki tako da grli lijevi rub, onda možemo reći, aha, indukcija. Nama je taj slučaj jako lijep. Smisli algoritam koji će, bez da mijenja broj patrola, nekako pogurati neku patrolu da postane baš ta patrola koja grli lijevi rub.
9. Možemo napraviti da svaki  $A_i$  ima 0, 1, 2 karte, ali možemo napraviti da svaki  $A_i$  ima i 1, 2, 3. Odnosno možemo držati broj karata približno jednak u svakom špilu. Zašto nam je to cool?
10. Za početak, isprobavanjem s pravcima vidimo da nejednakost nije baš jaka. Znači otprilike bilo što iole pametno će nas dovesti do rješenja. Cilj je konstruirati greedy algoritam. Također, ako bismo pretpostavili maksimalni broj plavih pravaca, onda vidimo da ne postoji crveni pravac koji je stranica samo zatvorenim površinama koje imaju više od jedne crvene stranice.

### **III. Rješenja s predavanja**

## 11. Rješenja za prvu grupu

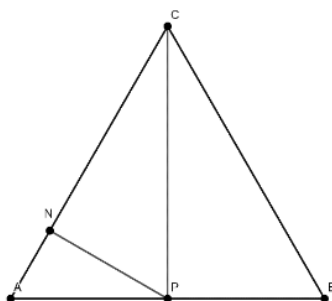
### 11.1. G1: Lara Jana Pačak - Sličnost i sukladnost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

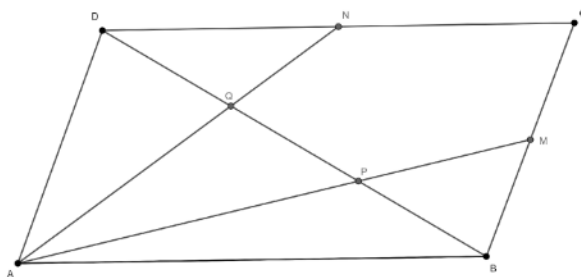
1. Najprije nacrtajmo skicu.



Slika 11.1: Skica

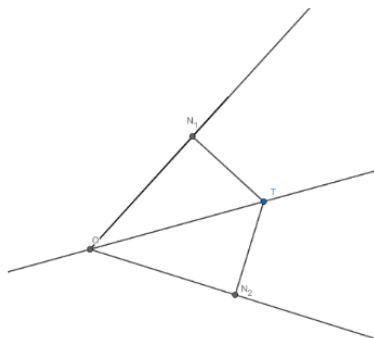
Ako iskoristimo prethodni teorem, možemo zaključiti kako je  $\overline{CP}$  visina na  $\overline{AB}$ . Iz toga slijedi da je  $\angle BPC$  pravi. Također, kako je  $\triangle ABC$  jednakokratan, slijedi da je  $\angle CBA = \angle BAC$ . Međutim, kako je i  $\overline{PN}$  visina trokuta (i to trokuta  $\triangle APC$ ), slijedi da je i  $\angle PNA$  pravi kut. Budući da  $\triangle PBC$  i  $\triangle APN$  imaju 2 sukladna kuta, željena sličnost slijedi iz K-K poučka.

2. Primijetimo da trokuti  $ABQ$  i  $DQN$  imaju sukladne kuteve pri vrhu  $B$  jer su to vršni kutevi. Dakle, vrijedi  $\angle NQD = \angle BQA$ . Također možemo primijetiti da je  $\angle DBA = \angle NDQ$  jer su to kutevi uz presječnicu (transverzal). Međutim, sad smo pronašli 2 kuta unutar trokuta  $ABQ$  i  $DQN$  koji se podudaraju, pa po K-K poučku slijedi željena sličnost.



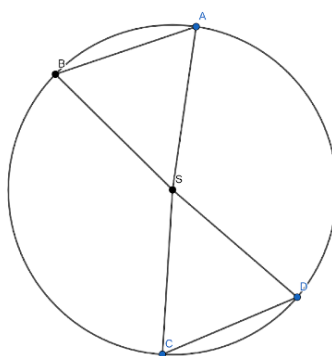
Slika 11.2: Pogodite šta? Opet skica :D

3. Označimo sjecište dvaju krakova kuta s  $O$ , a neka su  $N_1$  i  $N_2$  nožišta okomica iz točkaka  $T$  na krakove kuta  $\angle N_1ON_2$ .  $OT$  je simetrala kuta  $\angle N_1ON_2$  iz čega slijedi da su  $\angle N_1OT$  i  $\angle N_2OT$  sukladni. Kako su  $N_1$  i  $N_2$  nožišta okomica, slijedi da su i  $\angle TN_1O$  i kut  $\angle TN_2O$  sukladni (i pravi). Trokuti  $ON_1T$  i  $OTN_2$  dijele stranicu  $\overline{OT}$  pa po K-S-K poučku slijedi da su sukladni. Kako su trokuti sukladni, sve su njihove stranice sukladne iz čega direktno slijedi da je točka  $T$  jednako udaljena od  $N_1$  i  $N_2$ .



Slika 11.3: Skica

4. Neka je  $S$  središte kružnice. Budući da su tetive sukladne, imamo  $|AB| = |CD|$ . Također, kako  $A, B, C$  i  $D$  leže na kružnici, znamo  $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$ , jer se radi o polumjerima krunice. Sada prema S-S-S poučku slijedi da su trokuti  $ASB$  i  $DSC$  sukladni. Iz toga slijedi da su im svi kutovi sukladni, pa su jednaki i  $\angle ASB = \angle DSC$ , što su upravo traženi središnji kutovi.



Slika 11.4: I again, skica

5. Vrijedi  $\triangle ABG \cong \triangle ADC$  zbog  $|AG| = |AC|$ ,  $|AB| = |AD|$  i  $\angle DAC = \angle GAB = 90^\circ + \angle BAC$ , pa tvrdnja zadatka očito vrijedi.





(c) Poluopseg trokuta iznosi

$$s = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12.$$

Površina trokuta je

$$P = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24.$$

Duljina visine iz vrha  $A$  iznosi

$$|AD| = \frac{2P}{|BC|} = \frac{48}{10} = 4.8.$$

Nadalje,

$$|BD| = \sqrt{6^2 - 4.8^2} = 3.6, \quad |DC| = \sqrt{8^2 - 4.8^2} = 6.4.$$

(d) Visine u sličnim trokutima proporcionalne su koeficijentu sličnosti, pa vrijedi

$$|A'D'| = k \cdot |AD| = 1.5 \cdot 4.8 = 7.2.$$

(e) Zakon refleksije svjetlosti ovisi isključivo o jednakosti upadnog i odbijenog kuta. Budući da sličnost trokuta čuva kutove, zakon refleksije ostaje nepromijenjen, iako se sve duljine skaliraju.

9. Neka je povučena simetrala kuta iz vrha  $B$  i točka  $D$  sjecište te simetrale tog kuta sa stranicom  $\overline{AC}$ . Tada je  $|\overline{AD}| = |\overline{BD}|$ . Jer je  $\angle CBD = \angle BAC$  i  $\angle ACD$  zajednički kut, trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle BDC$  su slični. Tada vrijedi:

$$\frac{c}{y} = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}.$$

Kako je  $ac = by$ , iz omjera  $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}$  slijedi  $b^2 - a^2 = ac$ , što je trebalo i dokazati.

*Alternativno:* Sukladnost i sličnost - Zadatak 7.

## 11.2. C1: Karlo Jokoš - Prebrojavanje

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

2. Slova: B(1), A(3), N(2)

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = \boxed{60}.$$

3. Broj „jedinica“:  $8 - 3 + 1 = 6$  Permutacije jedinica:  $6!$  Permutacije unutar grupe od 3:  $3!$  Ukupno:

$$6! \cdot 3! = 720 \cdot 6 = \boxed{4320}.$$

4. Podijelimo na slučajeve prema veličini:

- $1 \times 1$   :  $2 + 4 + 3 = 9$
- $1 \times 2$   :  $1 + 3 + 2 = 6$
- $1 \times 3$   :  $2 + 1 = 3$
- $1 \times 4$   : 1
- $2 \times 1$   :  $2 + 3 = 5$
- $2 \times 2$   :  $1 + 2 = 3$
- $2 \times 3$   : 1
- $3 \times 1$   : 1

Prema principu zbrajanja:  $9 + 6 + 3 + 1 + 5 + 3 + 1 + 1 = \boxed{29}$

5. Dječak na početku:  $5! \cdot 5!$  Djevojčica na početku:  $5! \cdot 5!$  Ukupno:

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 120 \cdot 120 = \boxed{28800}.$$

6. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje  $8!$ .

7. Svih peteroznamenastih brojeva ima 90000, a onih koji nemaju znamenku 5 ima  $8 \cdot 9^4$ . Dakle, rješenje je  $90000 - 8 \cdot 9^4$ .

8. Prvo primijetimo kako 1 pravac dijeli ravninu na dva dijela. Ako je  $a_{n-1}$  broj dijelova ravnine na koji ju dijeli  $n - 1$  pravac, dodavanjem još jednog pravca (koji će postojeće sijeći u  $n - 1$  točki se broj dijelova ravnine povećava za  $n$  odnosno vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Kako vrijedi  $a_1 = 2$ , indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

9. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A-4.3.

10. Među 15 učenika imamo  $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$  različitih parova.

Svaki dan, među 3 učenika koja čiste učionicu, pojavljuju se točno 3 različita para.

Dakle, kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, broj parova učenika jednak je  $i \cdot 3 \cdot k$ .

Imamo  $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$ , odnosno  $k = 35$ .

11. Razmotrimo skup brojeva  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  i želimo ih podijeliti u  $n$  parova.

Prvo, zamislimo da poredimo sve brojeve u redoslijed:

$$(2n)!$$

To su sve moguće permutacije brojeva od 1 do  $2n$ .

Ako uzmemo permutaciju i podijelimo je u parove po redu:

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n),$$

dobijemo raspored svih parova. Dakle, svaki način grupiranja parova odgovara  $(2n)!$  permutacija.

Redoslijed unutar svakog para nije važan, tj.  $(a, b)$  je isto što i  $(b, a)$ . Za svaki par postoji 2 načina da se raspoređi, a imamo  $n$  parova, pa dijelimo s  $2^n$ :

$$\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Također, redoslijed parova među sobom nije važan, što daje još faktor  $n!$ :

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Dakle, broj načina da se  $2n$  brojeva podijeli u  $n$  parova je:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

12. Neka je  $a_n$  broj načina popločavanja ploče  $2 \times n$  dominima  $2 \times 1$ .

*Bazni koraci:*

$$a_1 = 1 \quad (\text{jedna okomita domina}),$$

$$a_2 = 2 \quad (\text{dvije okomite ili dvije vodoravne domine}).$$

*Induktivni korak:* Za  $n \geq 3$  razmotrimo prvi stupac ploče:

- Ako u prvi stupac stavimo jednu okomitu dominicu, preostaje ploča  $2 \times (n-1)$ , što se može popločiti na  $a_{n-1}$  načina.
- Ako u prva dva stupca stavimo dvije vodoravne dominice, preostaje ploča  $2 \times (n-2)$ , koja se može popločiti na  $a_{n-2}$  načina.

Stoga vrijedi rekurzija

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Kako su bazni slučajevi zadovoljeni, indukcijom zaključujemo da je broj načina popločavanja ploče  $2 \times n$  jednak  $a_n$ , gdje niz  $(a_n)$  zadovoljava Fibonaccijevu rekurziju.

13. Obojimo mrežu crnom i bijelom bojom. Dovoljno je usmjeriti strelice u crnim i bijelim kvadratima zasebno, budući da strelice u crnim kvadratima pokazuju isključivo prema bijelim kvadratima, a strelice u bijelim kvadratima pokazuju isključivo prema crnim kvadratima.

Za svaku od 6 strelica u crnom kvadratu, razmotrimo domino dimenzija  $1 \times 2$  koji čini kvadrat u kojem se nalazi strelica i (bijeli) kvadrat na koji strelica pokazuje. Ovih šest domina mora popločati mrežu, budući da svaka strelica pokazuje na različiti bijeli kvadrat.

S druge strane, za neko popločavanje mreže domino pločicama, svaki domino sadrži jedan crni i jedan bijeli kvadrat; možemo nacrtati strelicu u svakom crnom kvadratu koja pokazuje na bijeli kvadrat u istom domino pločici.

Dakle, postoji jednoznačna korespondencija između popločavanja mreže domino pločicama i broja načina da se pravilno usmjere crne strelice.

Možemo izbrojati, pomoću pažljivog razmatranja slučaja, da postoji 11 načina za popločavanje mreže domino pločicama, stoga postoji 11 načina za usmjeravanje crnih strelica. Slično, slijedi da postoji 11 načina za usmjeravanje bijelih strelica, pa postoji  $11^2 = \boxed{121}$  načina za usmjeravanje svih 12 strelica.

14. Odgovor je  $2^{mn} - 1$ .

**Ključna tvrdnja:** Bilo koja konfiguracija je jedinstveno određena položajima svojih 0.

**Dokaz.** Razmotrimo neki polje  $(i, j)$  na mreži. Razmotrimo 0 u mreži koja je na minimalnoj taksi udaljenosti od  $(i, j)$ ; označimo njen položaj s  $(z_1, z_2)$ , a udaljenost s  $d$ . Tvrdimo da ovo polje ima vrijednost  $d$ .

Indukcijom po  $d$  pokazujemo ovo, pri čemu je osnovni slučaj  $d = 0$  trivijalan. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo da je  $z_1 \leq i$  i  $z_2 \leq j$ . Tada su  $(i, j - 1)$  i  $(i - 1, j)$  (ako ti indeksi postoje) na taksi udaljenosti  $d - 1$  od  $(z_1, z_2)$ , i budući da je  $(z_1, z_2)$  najbliža 0 tim poljima, njihove vrijednosti su obje  $d - 1$ . Udaljenost od  $(i + 1, j)$  i  $(i, j + 1)$  do najbliže 0 je najviše  $d - 1$ , pa su vrijednosti na  $(i + 1, j)$  i  $(i, j + 1)$  najviše  $d - 1$ . Vrijednost na  $(i, j)$  ne može biti manja ili jednaka  $d - 1$ , pa je najmanje  $d$ .

Nadalje, budući da postoji put od  $(i, j)$  do  $(z_1, z_2)$  duljine  $d$ , a na svakom koraku vrijednost se povećava najviše za 1, vrijednost na  $(i, j)$  je najviše  $d$ . Stoga je vrijednost na  $(i, j)$  točno  $d$ .  $\square$

Primijetite da gornji dokaz također daje konstrukciju kako, poznavajući položaje 0, konstruirati mrežu. Tijekom ovog postupka ne može doći do kontradikcija, budući da svaki polje ima jedinstvenu minimalnu udaljenost  $d$  do svoje najbliže 0.

Stoga je dovoljno fiksirati položaje 0, jer to proizvodi svaku konfiguraciju. Jasno je da postoji  $2^{mn}$  načina da se to učini, ali isključujemo slučaj kada nema 0. (To se ne može dogoditi jer tada razmotrimo najmanju vrijednost u mreži; bit će okružena brojevima koji su barem jednaki njoj dok je sama nenulta.)

15. Razmotrimo polje koja se nalazi najjužnije i najzapadnije; bez gubitka općenitosti (zbog simetrije) pokriva je domino okrenut prema sjeveru (kasnije množeno s dva): tada se problem svodi na popločavanje pravokutnika dimenzija  $2 \times 5$  i  $2 \times 6$ .

Broj načina popločavanja pravokutnika dimenzija  $2 \times n$  je zapravo primjer koji smo obradili na predavanju!

$$2F_6F_7 = 2 \cdot 8 \cdot 13 = 208.$$

16. ARML

17. EMC 2026. Junior P2

## 11.3. A1: Lara Jana Pačak - Faktorizacije

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1.

$$\left[ 27^{-2m+3} \cdot \left( \frac{1}{9} \right)^{3-2m} \right]^{-2} : 81^{1+m} - 6 \cdot 81^{-3}$$

$$27 = 3^3, \quad 9 = 3^2, \quad 81 = 3^4$$

$$27^{-2m+3} = 3^{-6m+9}, \quad \left( \frac{1}{9} \right)^{3-2m} = 3^{-6+4m}$$

$$3^{-6m+9} \cdot 3^{-6+4m} = 3^{-2m+3}$$

$$(3^{-2m+3})^{-2} = 3^{4m-6}$$

$$3^{4m-6} : 3^{4+4m} = 3^{-10}$$

$$3^{-10} - 6 \cdot 3^{-12} = 3^{-12}(9 - 6) = 3^{-11}$$

$$\boxed{\left( \frac{1}{3} \right)^{11}}$$

2.

$$(\sqrt{43} + \sqrt{47})^{-2}(43^{-1} + 47^{-1}) + \frac{2}{(\sqrt{43} + \sqrt{47})^3} \left( \frac{1}{\sqrt{43}} + \frac{1}{\sqrt{47}} \right)$$

Neka je  $a = \sqrt{43}$ ,  $b = \sqrt{47}$ .

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 (a + b)^2} + \frac{2}{ab(a + b)^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 b^2 (a + b)^2} = \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$a^2 b^2 = 43 \cdot 47 = 2021$$

$$\boxed{\frac{1}{2021}}$$

3.

$$\sqrt{2} + \left( \frac{3}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} - 1 \right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

Neka je  $t = \sqrt[3]{2}$ .

$$\frac{1}{t^2 + t + 1} = t - 1$$

$$\frac{3}{t^2 + t + 1} - 1 = 3t - 4$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$\boxed{1 + (3\sqrt[3]{2} - 4)^3}$$

4.

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

Neka su  $A = x - y$ ,  $B = y - z$ ,  $C = z - x$ , tada je  $A + B + C = 0$ .

$$A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

$$\boxed{3(x - y)(y - z)(z - x)}$$

5.

$$2x^2 + 2y^2 = 2x + 2y - 1$$

$$x^2 - x + y^2 - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}}$$

6.

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$$

Funkcija je strogo rastuća, pa ima najviše jedno rješenje.

$$\sqrt[3]{-1} + 0 + \sqrt[3]{1} = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

7.

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

Neka su  $a = 2^x$ ,  $b = 3^x$ .

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2b + ab^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{ab}$$

$$\frac{r^2 - r + 1}{r} = \frac{7}{6}, \quad r = \frac{a}{b}$$

$$6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$r = \frac{3}{2} \text{ ili } r = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{x = -1, x = 1}$$

8. Pretpostavimo

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} = 0$$

Neka su

$$A = \sqrt[3]{x-y}, \quad B = \sqrt[3]{y-z}, \quad C = \sqrt[3]{z-x}$$

$$A + B + C = 0, \quad A^3 + B^3 + C^3 = 0$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC \Rightarrow ABC = 0$$

$$x = y \text{ ili } y = z \text{ ili } z = x$$

Kontradikcija jer su  $x, y, z$  različiti.

9.

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3, \quad mn \geq 0$$

Neka su  $s = m + n$ ,  $p = mn$ .

$$s^3 - 3ps + 99p = 33^3$$

$$s^3 + (99 - 3s)p = 33^3$$

Ako je  $s = 33$ , jednadžba vrijedi za svaki  $p$ .

Ako je  $s \neq 33$ :

$$p = \frac{s^2 + 33s + 1089}{3}$$

Diskriminanta:

$$\Delta = s^2 - 4p = -\frac{(s + 66)^2}{3}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow s = -66, p = 1089$$

$$m = n = -33$$

$$\boxed{\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m + n = 33, mn \geq 0\} \cup \{(-33, -33)\}}$$

**10.** Uvođenjem supstitucija  $\sqrt{x} = u$  i  $\sqrt{y} = v$  dobivamo ekvivalentni sustav

$$uv(3u^4 + 10u^2v^2 + 3v^4) = 14,$$

$$u^6 + 15u^4v^2 + 15u^2v^4 + v^6 = 36.$$

Ovdje treba prepoznati elemente binomnog razvoja s eksponentom jednakim 6. Na temelju toga dobivamo

$$36 + 2 \cdot 14 = u^6 + 6u^5v + 15u^4v^2 + 20u^3v^3 + 15u^2v^4 + 6uv^5 + v^6$$

i

$$36 - 2 \cdot 14 = u^6 - 6u^5v + 15u^4v^2 - 20u^3v^3 + 15u^2v^4 - 6uv^5 + v^6.$$

Prema tome,

$$(u + v)^6 = 64 \quad \text{i} \quad (u - v)^6 = 8,$$

što povlači  $u + v = 2$  i  $u - v = \pm\sqrt{2}$  (prisjetimo se da  $u$  i  $v$  moraju biti pozitivni). Dakle,

$$u = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ili

$$u = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rješenja sustava su

$$(x, y) = \left( \frac{3}{2} + \sqrt{2}, \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right)$$

i

$$(x, y) = \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right).$$

**11.** pretpostavimo suprotno te postavimo

$$\sqrt{3}x - y = a, \quad \sqrt{3}y - z = b, \quad \sqrt{3}z - x = c.$$

Prema pretpostavci vrijedi  $a + b + c = 0$ , pa slijedi i

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

No to povlači

$$0 = (x - y) + (y - z) + (z - x) = \frac{3}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}y - z)(\sqrt{3}z - x) = 0,$$

budući da su brojevi međusobno različiti. Protuslovlje do kojeg smo došli pokazuje da je naša pretpostavka pogrešna, pa je stoga zbroj različit od nule.

**12.** Neka je

$$N = \binom{n}{1}5^{n-1} - \binom{n}{2}5^{n-2} + \binom{n}{3}5^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Tada vrijedi

$$5N - 1 = (5 - 1)^n.$$

Otuda slijedi

$$N = \frac{4^n + 1}{5} = \frac{4^{2k+1} + 1}{5} = \frac{(2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1)(2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1)}{5},$$

gdje je  $k = \frac{n-1}{2}$ . Budući da je  $n \geq 5$ , oba faktora u brojniku veća su od 5, što pokazuje da se i nakon skraćivanja nazivnika izraz na desnoj strani može zapisati kao umnožak dvaju brojeva. Time je dokazano da  $N$  nije prost broj.



**13.** Koristimo identitet

$$a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1),$$

primijenjen za  $a = 5^{397}$ . Teži dio je faktorizirati izraz  $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ . Primijetimo da vrijedi

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2 - 5a(a + 1)^2.$$

Stoga

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2 - 5^{398}(a + 1)^2 = (a^2 + 3a + 1)^2 - (5^{199}(a + 1))^2,$$

pa dobivamo

$$a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a^2 + 3a + 1 + 5^{199}(a + 1))(a^2 + 3a + 1 - 5^{199}(a + 1)).$$

Očito je da su faktori  $a - 1$  i  $a^2 + 3a + 1 + 5^{199}(a + 1)$  oba veća od  $5^{100}$ . Što se tiče trećeg faktora, vrijedi

$$a^2 + 3a + 1 - 5^{199}(a + 1) = a(a - 5^{199}) + 3a - 5^{199} + 1 \geq a + 0 + 1 \geq 5^{100}.$$

Time je zaključak dokazan.

**14.** Rješenje se temelji na sljedećoj verziji identiteta Sophie Germain:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2).$$

Zapišimo

$$\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{a^2 + \sqrt{2}ab + b^2} \cdot \sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2}.$$

Primjenom kosinusnog poučka možemo konstruirati dužine  $\sqrt{a^2 \pm \sqrt{2}ab + b^2}$  pomoću trokuta sa stranicama  $a$  i  $b$ , pri čemu je kut između njih  $135^\circ$ , odnosno  $45^\circ$ .

S druge strane, za zadane dvije dužine duljina  $x$  i  $y$  možemo konstruirati dužinu duljine  $\sqrt{xy}$  (njihovu geometrijsku sredinu) kao visinu  $AD$  u pravokutnom trokutu  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) pri čemu vrijedi  $BD = x$  i  $CD = y$ .

Kombiniranjem ova dva koraka dobiva se metoda za konstrukciju  $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ .

## 11.4. N1: Martin Vrbovčan - Djeljivost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

### Zadaci!

#### Baratanje simbolima

1.

$$\gcd(500, 120) = \gcd(20, 120) = \gcd(20, 0) = 20$$

2.

$$\gcd(21n + 4, 14n + 3) = \gcd(7n + 1, 14n + 3) = \gcd(7n + 1, 1) = 1$$

3.

$$\gcd(4n + 3, 2n) = \gcd(3, 2n) = \gcd(3, n) \in \{1, 3\}$$

4.

$$\gcd(a + 1, a) = \gcd(1, a) = 1$$

5. ( $\Rightarrow$ ) Ako  $\gcd(a, b) = a$ , tada  $a \mid b$  jer  $\gcd$  dijeli  $b$ .

( $\Leftarrow$ ) Ako  $a \mid b$ , tada je  $a$  zajednički djeliteľ od  $a$  i  $b$ , a očito i najveći takav jer  $\gcd(a, b) \leq a$ .

6.  $\gcd(a, p)$  mora biti djeliteľ od  $p$ . Kako je  $p$  prost, to je 1 ili  $p$ .

7. Neka  $g = \gcd(a, b)$ , te  $a = ga'$ ,  $b = gb'$  gdje su  $a', b'$  relativno prosti. Tada:

$$\gcd(da, db) = \gcd(dga', dgb') = dg \cdot \gcd(a', b') = dg = d \cdot \gcd(a, b)$$

#### Više natjecateljski

8. Izvučemo zajedničke faktore:  $3p^2q + 2pq^2 = pq(3p + 2q) = 483 = 3 \times 7 \times 23$ . Budući da su  $p$  i  $q$  prosti brojevi, faktori 3, 7 i 23 moraju biti raspoređeni među  $p$ ,  $q$  i  $3p + 2q$ . Isprobamo  $p = 3$ ,  $q = 7$ : tada je  $3p + 2q = 9 + 14 = 23$  i  $pq(3p + 2q) = 3 \times 7 \times 23 = 483$ . Ostale kombinacije ne zadovoljavaju uvjete, pa je jedino rješenje  $(p, q) = (3, 7)$ .

9. Svaki cijeli broj pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0, 1 ili 2. Razmotrimo slučajeve:

**Slučaj 1:**  $p \equiv 0 \pmod{3}$ . Tada je  $p$  djeljiv s 3, pa je jedini takav prost broj  $p = 3$ . Provjera:  $p + 10 = 13$  (prost) i  $p + 14 = 17$  (prost)

**Slučaj 2:**  $p \equiv 1 \pmod{3}$ . Tada  $p + 14 \equiv 1 + 14 \equiv 0 \pmod{3}$ , što znači da je  $p + 14$  djeljiv s 3. Budući da je  $p + 14 > 3$ , broj  $p + 14$  nije prost.

**Slučaj 3:**  $p \equiv 2 \pmod{3}$ . Tada  $p + 10 \equiv 2 + 10 \equiv 0 \pmod{3}$ , što znači da je  $p + 10$  djeljiv s 3. Budući da je  $p + 10 > 3$ , broj  $p + 10$  nije prost. Jedini prost broj koji zadovoljava uvjete je  $p = 3$ .

10. Ako broj  $m$  pri dijeljenju i sa 18 i sa 24 daje ostatak 8, broj  $m - 8$  je djeljiv i sa 18 i sa 24, pa je djeljiv sa njihovim najmanjim zajedničkim višekratnikom  $\text{NZV}(18, 24) = 72$ . Dakle, broj  $m$  daje ostatak 8 pri dijeljenju sa 72, odnosno  $m = 72k + 8$  za neki  $k \geq 0$ .

Trebamo odrediti broj brojeva manjih od 10000 oblika  $m = 72k + 8$ . Iz  $72k + 8 < 10000$  dobivamo  $72k < 9992$ , odnosno  $k < 138.78$ , pa je  $k \leq 138$ .

Traženi brojevi su 8 ( $k = 0$ ), 80 ( $k = 1$ ), 152 ( $k = 2$ ), ..., 9944 ( $k = 138$ ).

Dakle, ima ih 139.

11. Ovaj zadatak ima mnogo različitih rješenja, ali ovdje će biti predstavljeno ono najkraće. Primijetimo

$$p^2 + 2p - 8 = (p - 2)(p + 4)$$

Za bilo koji prost broj znamo da su mu jedini djelitelji 1 i on sam. Dakle, možemo zaključiti da je  $p = 3$  jedina opcija te vidimo da su nam  $p, p + 2$  i  $p^2 + 2p - 8$  svi redom prosti.

12. **Zadatak 6.**

13. Primijetimo da vrijedi:  $M(a, b) \cdot V(a, b) = ab$ , stoga nakon svakog poteza umnožak našeg niza ostaje isti (invarijanta). S obzirom da umnožak ostaje isti - broj pojedinih prostih faktora (broj dvojki, broj trojki, ...) između svih brojeva niza također ostaje isti primjenom koraka. Primijetimo kako  $M(a, b)$ , za potenciju svakog prosti faktora  $p$  uzima  $\min(\alpha, \beta)$  gdje je  $a = p^\alpha \cdot k$ , a  $b = p^\beta \cdot m$ .  $V(a, b)$  za svaki prosti faktor analogno uzima  $\max(\alpha, \beta)$ .

Opisanim postupkom potencije prostih faktora će se grupirati tako da najveće prelaze na jedan, a najmanje na drugi broj; primjerice  $2^3 5^2$  i  $2^5 5^1$ , nakon opisanog postupka sigurno postaje  $2^3 5^1, 2^5 5^2$ . Za svaki prosti faktor  $p$  koji se pojavljuje u nizu, broj poteza u kojima se njegova raspodjela može promijeniti je konačan jer nakon svake zamjene, on se može nalaziti s drugim faktorima manjih ili jednakih potencija ( $M(a, b)$ ), ili s drugim faktorima većih ili jednakih potencija  $V(a, b)$ . Kako su potencije prirodnih brojeva ograničene odozdo s 0, a ukupan broj potencija ostaje konstantan, nakon konačno mnogo koraka više neće biti moguće napraviti promjenu broja u nizu (prelazak prostog broja s jednog na drugi broj) i brojevi u nizu se neće mijenjati.

14. Neka su prosti brojevi 5,  $a$  i  $b$ . Tada je  $5ab = 5(a + b + 5)$ , odnosno  $ab = a + b + 5$ . Preuredimo:  $ab - a - b = 5$ . Dodamo 1 na obje strane:

$$ab - a - b + 1 = 6 \implies (a - 1)(b - 1) = 6$$

Mogući faktori od 6 su:  $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ . To daje  $(a - 1, b - 1) \in \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$ , odnosno  $(a, b) \in \{(2, 7), (3, 4), (4, 3), (7, 2)\}$ . Budući da  $a$  i  $b$  moraju biti prosti, jedina rješenja su  $(a, b) = (2, 7)$  ili  $(7, 2)$ . Dakle, tri prosta broja su  $\boxed{2, 5, 7}$ .

15. **Korak 1:** Iz  $4a + 3b + 2c = 30$  gdje je  $0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 6$ . Kako je  $4a \leq 8$ , slijedi  $3b + 2c \geq 22$ . Probamo  $a = 2$ : tada je  $3b + 2c = 22$ . Za  $b = 4$  dobivamo  $c = 5$ . Dakle,  $a = 2, b = 4, c = 5$ .

**Korak 2:** Trebamo naći  $n$  takav da  $n = 3q_1 + 2, n = 5q_2 + 4$  i  $n = 7q_3 + 5$ . Iz drugog uvjeta:  $n = 5k + 4$ . Uvrstimo u prvi uvjet:  $5k + 4$  mora davati ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Budući da je  $5k + 4 = 3k + 2(k + 2)$ , trebamo da  $k + 2$  daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, odnosno  $k = 3m + 2$ . Tada je  $n = 15m + 14$ .

Uvrstimo u treći uvjet:  $15m + 14$  mora davati ostatak 5 pri dijeljenju s 7. Budući da je  $15m + 14 = 14m + m + 14$ , trebamo  $m$  da daje ostatak 5 pri dijeljenju s 7. Dakle  $m = 7t + 5$ , što daje  $n = 15(7t + 5) + 14 = 105t + 89$ .

Ostatak pri dijeljenju s 105 je  $\boxed{89}$ .

16. Iz  $\text{NZD}(a, c) = 130$  slijedi da postoje prirodni brojevi  $k, l$  takvi da je  $a = 130k$  i  $c = 130l$  pri čemu je  $\text{NZD}(k, l) = 1$ . Budući da je  $130 = 2 \times 5 \times 13$ , brojevi  $a$  i  $c$  su djeljivi s 10.

Iz  $a + b + c = 2023$  imamo  $b = 2023 - (a + c)$ . Kako su  $a$  i  $c$  djeljivi s 10, njihov zbroj završava s 0, pa  $b$  mora završavati s 3. Budući da  $b$  ima sve iste znamenke, mogućnosti su:  $b \in \{3, 33, 333, 3333, \dots\}$ .

Iz  $a < b < c$  i  $a = 130k \geq 130$  slijedi  $b > 130$ . Ako je  $b \geq 3333$ , tada bi  $a + c \leq 2023 - 3333 < 0$ , što je nemoguće. Dakle,  $b = 333$ .

Iz  $a + c = 1690$  i  $a = 130k < 333$  dobivamo  $k < 2.56$ , pa je  $k \in \{1, 2\}$ .

- $k = 1$ :  $a = 130, c = 1560 = 130 \times 12$ . Vrijedi  $\text{NZD}(130, 1560) = 130$

- $k = 2$ :  $a = 260$ ,  $c = 1430 = 130 \times 11$ . Vrijedi  $\text{NZD}(260, 1430) = 130$

Rješenja:  $(a, b, c) \in \{(130, 333, 1560), (260, 333, 1430)\}$ .

17. Rješenje je  $x = \frac{1 \cdot (10^6 - 1)}{7} = 142857$ . Postupak od 2024. državno 1. SŠ B kategorija.
18.  $p = 6m \pm 1, q = 6n \pm 1$ .  $p^2 - q^2 = (6m \pm 1)^2 - (6n \pm 1)^2 = 36(m^2 - n^2) - 12(\pm m \pm n) = 12(m+n)(3(m-n) \pm 1)$ . Na desnoj strani, ili su  $m+n$  ili  $3(m-n) \pm 1$  parni. Stoga  $24 | p^2 - q^2$ .
19. Ako pogledamo modulo 3, vidimo da nužno jedan od brojeva mora biti jednak tri. Dalje je jednostavno.
20. Promatramo djeljivost sa 2. Ili je jedan ili sva tri broja paran. Ako je samo jedan, onda je lijeva strana dijeljiva s 2, a desna je s 4 što je kontradikcija. Dakle mora biti  $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ . Uvrštavanjem dobivamo  $x_1^2 + y_1^2 z_1^2 = 4x_1 y_1 z_1$ , iz čega opet možemo raditi početni zaključak. Dakle,  $x, y$  i  $z$  trebaju sadržavati beskonačan broj faktora 2, stoga jedino mogu biti  $x = y = z = 0$ .
- 21.
- $$15x^2 - 7y^2 = 9 \implies y = 3y_1 \implies 15x^2 - 63y_1^2 = 9 \implies 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \implies x = 3x_1$$
- $$\implies 45x_1^2 - 21y_1^2 = 3 \implies 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1 \implies y_1^2 \equiv -1 \pmod{3}$$
- . Kontradikcija na kraju jer  $y_1^2 \equiv 0$  ili  $1 \pmod{3}$
22. Izraz možemo napisati kao  $a^4 b^2 - a^2 b^4 = a^2 b^2 (a^2 - b^2) = a^2 b^2 (a - b)(a + b)$ .
- Djeljivost s 4:** Ako je bar jedan od brojeva  $a$  ili  $b$  paran, tada je izraz djeljiv s 4. Ako su oba broja neparna, tada su  $a - b$  i  $a + b$  parni, pa je  $(a - b)(a + b)$  djeljiv s 4. Dakle, izraz je uvijek djeljiv s 4.
- Djeljivost s 5:** Trebamo pokazati da među tri cijela broja možemo odabrati dva,  $a$  i  $b$ , takva da je izraz djeljiv s 5.
- Ako je jedan od tri broja djeljiv s 5, uzmemo ga za  $a$  i izraz  $a^2 b^2 (a - b)(a + b)$  je djeljiv s 5.
- Ako nijedan od tri broja nije djeljiv s 5, njihovi ostaci pri dijeljenju s 5 su iz skupa  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Grupiramo ostatke u skupove  $\{1, 4\}$  i  $\{2, 3\}$ . Prema Dirichletovom principu, dva od tri broja imaju ostatke iz istog skupa.
- Ako  $a$  i  $b$  imaju isti ostatak pri dijeljenju s 5, tada je  $a - b$  djeljiv s 5, pa je i izraz djeljiv s 5.
- Ako  $a$  i  $b$  imaju različite ostatke iz istog skupa (npr. 1 i 4, ili 2 i 3), tada je  $a + b$  djeljiv s 5 (jer  $1 + 4 = 5$  i  $2 + 3 = 5$ ), pa je i izraz djeljiv s 5.
- Budući da je izraz djeljiv i s 4 i s 5, djeljiv je s 20.
23.  $(3, 4), (4, 3), (0, 7), (7, 0)$ . Ekvivalentno je jednačbi  $(xy - 6)^2 - (x + y)^2 = -13$  tj.  $[xy - 6 - (x + y)][xy - 6 + (x + y)] = -13$ . S obzirom da je 13 prost broj dobivamo 2 moguće faktORIZACIJE koja nam daju 4 rješenja.
24. Označimo  $c + 1 = p^2$  gdje je  $p$  prost broj, pa je  $c = p^2 - 1$ . Uvrstimo u  $a + b = ab - bc$ :

$$a + b = ab - b(p^2 - 1) = ab - bp^2 + b \implies bp^2 = a(b - 1)$$

Primijetimo da je  $b \neq 1$  (inače bi desna strana bila 0). Kako su  $b - 1$  i  $b$  relativno prosti ( $\text{NZD}(b - 1, b) = 1$ ), član  $(b - 1)$  mora biti djelitelj od  $bp^2$ . Zbog  $\text{NZD}(b - 1, b) = 1$ , slijedi da  $b - 1$  dijeli  $p^2$ .

Kvadrat prostog broja  $p^2$  ima tri djelitelja:  $1, p, p^2$ . Razmotrimo slučajeve:

**Slučaj 1:**  $b - 1 = 1 \implies b = 2 \implies 2p^2 = a \implies ab = 4p^2 = (2p)^2$

**Slučaj 2:**  $b - 1 = p \implies b = p + 1 \implies a = p^2 + p \implies a + b = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$

**Slučaj 3:**  $b - 1 = p^2 \implies b = p^2 + 1 \implies a = p^2 + 1 \implies ab = (p^2 + 1)^2$

U svim slučajevima, barem jedan od brojeva  $ab$  ili  $a + b$  je potpun kvadrat.

- 25.** Gledajući ostatke pri dijeljenju s 5, vidimo da  $5|b, c$ . Stoga  $b = 5b', c = 5c'$ , jednačba postaje  $a^2 + 45b'^2 = 65c'^2$ . 5 dijeli sve članove osim  $a^2$ , stoga  $5|a$ , pa  $a = 5a'$ . Dijeljenjem opet dobivamo početnu  $5a'^2 + 9b'^2 = 13c'^2$ . Beskonačnim spustom dobivamo da mora biti  $a = b = c = 0$ .
- 26.** Neka je  $x$  broj tinejdžera koji koriste samo Instagram,  $y$  broj koji koriste samo TikTok, a  $z$  broj koji koriste oboje. Uvjeti zadatka su:

$$\begin{aligned} z &\geq 1 \\ y &= (p+1) \cdot x \\ (x+z)^2 &= y+z \end{aligned}$$

Ako je  $x = 0$ , tada iz  $y = (p+1) \cdot x$  slijedi  $y = 0$ , pa jednakost  $(x+z)^2 = y+z$  postaje  $z^2 = z$ . Uz  $z \geq 1$  dobivamo  $z = 1$ .

Pretpostavimo  $x > 0$ . Uvrštavanjem  $y = (p+1) \cdot x$  u  $(x+z)^2 = y+z$  dobivamo:

$$(x+z)^2 = (p+1) \cdot x + z \implies (x+z)^2 = (x+z) + p \cdot x \implies (x+z)(x+z-1) = p \cdot x$$

Brojevi  $x+z$  i  $x+z-1$  su uzastopni, pa su relativno prosti. Budući da je njihov produkt djeljiv s  $p$ , jedan od njih mora biti djeljiv s  $p$ . Oba dijele  $p \cdot x$ , pa onaj koji je relativno prost s  $p$  mora dijeliti  $x$ .

Kako je  $x+z \geq x+1 > x$ , ne može vrijediti  $x+z | x$ , pa mora  $x+z-1 | x$ . Budući da su to prirodni brojevi,  $x+z-1 \leq x$ , odakle  $z \leq 1$ , pa je  $z = 1$ .

Tada je  $x+z-1 = x$ , pa mora  $x+z = p$ , odnosno  $x = p-1$ . Provjera:  $y = p^2 - 1$ ,  $z = 1$  zadovoljavaju sve uvjete.

Jedina mogućnost za broj tinejdžera koji koriste obje mreže je  $\boxed{1}$ .

## 11.5. X1: Zvonko Andrijević - Dirichlet

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### kombica bombica

1. Pretpostavimo suprotno. Ako najviše 2 učenika imaju rođendan u istom mjesecu, onda bi najviše moglo biti  $12 \cdot 2 = 24$  učenika. Ovo znači da čak i ako smo imali 25 učenika bi uvijek bio zadovoljen.
2. Pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakom odjelu maksimalno 33 učenika. Tada bi škola imala najviše  $33 \cdot 30 = 990$  učenika, što je manje od 1000. Znači, sigurno postoji neki razredni odjel s barem 34 učenika.
3. Svaki učenik može poznavati 0, 1, ..., 39 drugih učenika. To je ukupno 40 kombinacija što nam nije dovoljno za primijeniti Dirichleta jer imamo 40 učenika. ALI, mi znamo da ne možemo istovremeno imati učenika koji poznaje 0 drugih učenika tj. nijednog drugog učenika, i učenika koji poznaje 39 drugih učenika tj. sve druge učenike. Upravo zato možemo imati maksimalno 39 kombinacija i sad možemo primijeniti Dirichleta i reći da sigurno postoje neka dva učenika koji imaju isti broj poznanstava.
4. Označimo učenike s  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  i zamislimo ih kao 17 točaka. Ovisno o temi spojimo ih jednom tri boje: zelena, crvena ili plava. Ako pokažemo da postoji jednobojni trokut bit ćemo gotovi. Fiksirajmo osobu  $A_1$  i promatrajmo dužine koje tvori s drugim ljudima. Takvih dužina postoji 16 pa po Dirichletovu principu definitivno postoje nekih 6 iste boje (neka to bude zelena). Ako među tim dužinama postoji ijedna zelena dužina onda smo gotovi. U suprotnom, imamo šestero ljudi koji su povezani dužinama od dvije boje i trebamo naći jednobojni trokut. Zvuči poznato? :) (pogledaj primjer).
5. Stol se uvijek može okrenuti za kut  $\frac{k}{18} \cdot 360^\circ$ , gdje je  $k$  prirodan broj  $1 \leq k \leq 17$  tako da ispred po volji odabranog mentora dođe kartica sa njegovim imenom. Budući da je mentora 18, a broj položaja stola 17, prema Dirichletu postoji neki položaj stola u kojem barem dvije osobe imaju kartice sa svojim imenima.
6. Neka je  $S_i$  zbroj brojeva u  $i$ -tom i njemu susjednim isječcima,  $i = 1, 2, \dots, 36$ . Primijetimo onda da je

$$\sum_{i=1}^{36} S_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{36} i = 3 \cdot \frac{36 \cdot 37}{2} = 1988$$

Kada bi svi zbrojevi bili najviše 55, bilo bi

$$\sum_{i=1}^{36} S_i \leq 36 \cdot 55 = 1980$$

. Ovo očito nije moguće pa po Dirichletu mora postojati neka trojka čiji je zbroj isječaka  $\geq 56$ .

### Svima nama draga teorija brojeva

7. Postoje tri ostatka pri dijeljenju s  $n$ . Ovo znači da za  $n + 1$  brojeva moraju postojati neka dva koja daju isti ostatak pri dijeljenju s  $n$
8. B varijanta drž 2021. 1.razred

9. Pretpostavimo da je  $a_1 < a_2 < \dots < a_{51}$  i promatrajmo 50 razlika  $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{50} - a_1, a_{51} - a_1$ . Primijetimo da su te razlike sve pozitivne, različite i sve manje od 100. Na taj način smo dobili niz  $a_2, \dots, a_{51}, a_2 - a_1, \dots, a_{51} - a_1$  s 100 članova koji su svi iz skupa  $\{1, 2, \dots, 99\}$ . Ovo znači da postoje dva koja su jednaka. Brojevi su međusobno različiti, kao što su i razlike. Iz toga slijedi da je barem jedna razlika jednaka barem jednom broju tj.  $a_k = a_m - a_1$ .
10. Pogledajmo brojeve  $7^1 - 1, 7^2 - 1, \dots, 7^{2026} - 1$ . Njih je 2026 pa onda neka dva daju isti ostatak pri dijeljenju s 2025. Neka su to  $7^k - 1$  i  $7^l - 1$ . Njihova razlika je onda sigurno djeljiva 2025, no lako vidimo da je ta razlika oblika

$$7^k - 1 - (7^l - 1) = 7^l(7^{k-l} - 1) \equiv 0 \pmod{2025}$$

. Znamo da je  $\text{nz}(2025, 7) = 1$  pa onda mora biti da je  $2025 | 7^{k-l} - 1$  čime je zadatak riješen.

## Vrijeme je za crtanje

11. Možemo podijeliti kvadrat na 9 manjih kvadratića svaki površine 1 cm. Imamo 10 točaka pa po Dirichletu u nekom kvadratiću se nalazi barem dvije točke.
12. S obzirom na to da imamo  $25 \cdot 2 + 1 = 51$  komaraca i želimo u nekom malom prostoru ih imati  $2 + 1 = 3$  ima nam smisla kvadrat podijeliti na 25 manjih kvadratića, svaki duljine stranice  $\frac{1}{5}m$ . Na ovaj način možemo osigurati zbog Dirichleta da postoji neki kvadratić u kojem su barem tri komarca. Sad samo moramo pokazati da naša metlica pokriva površinu cijelog tog manjeg kvadratića i gotovi smo. Ovo ćemo pokazati tako što pokažemo da krug opisan ovom kvadratu sigurno ima manji polumjer od  $\frac{1}{7}m$ . Lakim računom dobijemo da je polumjer opisane kružnice (iliti iznos polovice dijagonale tog malog kvadratića) jednak

$$\sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}m.$$

Zbog toga učenici mogu jednim udarcem metlice ubiti barem tri komarca.

13. Vidimo da je  $136 = 27 \cdot 5 + 1$  i  $6 = 5 + 1$ . Zbog toga podijelit ćemo našu veliku kocku duljine brida  $3m$  na 27 manjih kocaka duljine brida  $1m$ . Opet želimo pokazati da je duljina polumjera sfere opisane svakom od tih malih kvadrata manja od duljine polumjera sfere koja nam je zadana. Lakim računom dobijemo da je duljina polumjera sfere manjih kvadrata jednaka  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  što je zapravo samo polovica iznosa prostorne dijagonale kvadrata.

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{81}{108}} < \sqrt{\frac{81}{100}} = 0.9$$

Primjenom Dirichleta znamo da je u nekoj manjoj kocki barem 6 leptira i time smo gotovi.

14. Primijetimo da svaki od ovih pravaca dijeli kvadrat na dva trapeza, svaki od kojih ima jednaku duljinu visine (nacrtajte si skicu kako biste to jasnije vidjeli). Površina trapeza jednaka je umnošku srednjice i visine pa možemo zaključiti da zapravo naši pravci dijele spojnicu polovišta nasuprotnih stranica kvadrata u omjeru 2 : 3. Postoje dvije spojnice polovišta stranica, a na svakoj toj spojnici postoje dvije točke koje dijele tu spojnicu u omjeru 2 : 3. Znači svaki pravac prolazi jednom od te 4 točke, a s obzirom da je pravaca 9 prema Dirichletu jednom točkom prolaze barem tri pravca.

## Bučkuriš svega i svačega

15. Rješenje ovog zadatka će biti jako slično drugim zadacima na ovom predavanju ovakvog tipa, ali će zahtijevati mrvicu više analize i raspisivanja. Prvo opet imamo osobe  $A_1, A_2, \dots, A_{18}$  koje

su povezane plavom bojom ako se znaju i crvenom bojom ako se ne znaju. Želimo naći jednobojni četverokut. Fiksirajmo osobu  $A_1$ . Ona po Dirichletu sigurno ima barem 9 osoba s kojima ima isti tip poznanstva i neka to bude da se poznaje sa njima, tj. oni su povezani plavom bojom. Neka je tih 9 osoba numerirano  $B_1, B_2, \dots, B_9$ . Ako među njima postoji osoba (recimo  $B_1$ ) koja poznaje barem 4 ljudi, onda u toj četvorci ili se nekih dvoje poznaju pa smo gotovi, ili se nitko ne poznaje pa oni čine jednobojni četverokut. Ako postoji osoba (opet recimo  $B_1$ ) koja poznaje najviše 2 ljudi, onda sigurno ne poznaje barem 6 ljudi. Gledajmo tu 6. U njoj tražimo jednobojni trokut (čiji će onda zadnji vrh do četverokuta biti ili  $A_1$  ili  $B_1$ ). Ova konfiguracija je ista kao i u primjeru pa smo i tu gotovi. Ako ne postoji osoba u devetorci koja poznaje najviše 2 ili najmanje 4 osobe, onda mora biti da sve osobe u toj devetorci poznaju točno troje drugih ljudi. No, ovo je nemoguće jer ako bi brojili ukupni broj plavih bridova, vidjeli bi da je njih  $\frac{9 \cdot 3}{2} \notin \mathbb{N}$ . Ovaj broj smo dobili jer je ukupno 9 ljudi sa 3 plava brida, ali svaki plavi brid smo brojili dvaput pa moramo podijeliti s dva. Znači, jedina situacija koja nam je ostala nije moguća pa smo time dokazali tvrdnju zadatka.

- 16.** Postoji  $n$  ostataka pri dijeljenju s  $n$ . Gledajmo zbrojeve  $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Ako jedan od njih dijeli  $n$  onda smo gotovi. Ako ne, onda sigurno postoje dva koja daju isti ostatak pri dijeljenju s  $n$ . Onda njihova razlika sigurno dijeli  $n$ . Neka su to  $a_1 + \dots + a_k$  i  $a_1 + \dots + a_l$  ( $l > k$ ). Tada je njihova razlika oblika  $a_{k+1} + \dots + a_l$  što je upravo zbroj nekoliko uzastopnih članova niza te ta suma dijeli  $n$  čime smo gotovi.
- 17.** Neka je  $k_i$  broj zadataka koje je učenik riješio do kraja  $i$ -tog dana. Promotrimo sad nizove  $k_1, k_2, \dots, k_{365}$  i  $k_1 + 20, k_2 + 20, \dots, k_{365} + 20$ . Brojevi u svakom nizu su sigurno različiti jer učenik svaki dan riješi barem 1 zadatak. Bitno je primijetiti da učenik u jednom danu sigurno neće riješiti više od 6 zadataka jer to bi značilo da neki drugi dan u tjednu ne smije riješiti nijedan zadatak. Godina se sastoji od 52 tjedna i 1 dana pa je zato maksimalna moguća vrijednost najvećeg člana ovog niza jednaka:

$$k_{365} + 20 \leq 12 \cdot 52 + 6 + 20 = 650.$$

Ovo znači da imamo najviše 650 različitih brojeva, a ukupno je u naša dva niza 730 članova. Prema Dirichletu slijedi da su neka dva člana jednaka, tj. da mora vrijediti  $k_i = k_j + 20$ , ili drugim riječima  $k_i - k_j = 20$  pa je učenik u razdoblju od  $j$ -tog do  $i$ -tog dana riješio točno 20 zadataka.

- 18.** Među odabranim 51 brojem, prema Dirichletovu principu postoji barem 26 brojeva iste parnosti. Označimo te brojeve s  $a_1, a_2, \dots, a_{26}$ . Pretpostavimo da je  $a_1 < a_2 < \dots < a_{26}$  i promatrajmo razlike  $a_1 - 2, a_2 - 2, \dots, a_{26} - 2$ . te su razlike međusobno različite, a iste su parnosti kao i istaknuti brojevi. Primijetimo sad da brojevi  $a_1, a_2, \dots, a_{26}, a_1 - 2, \dots, a_{26} - 2$  koji ima 52 člana, a svi su oni iste parnosti. Vidimo da su svi oni iz skupa  $\{-1, 0, 1, 2, \dots, 100\}$ . Sličnom argumentacijom kao i u prijašnjem zadatku zaključujemo da mora vrijediti da je neki broj  $a_i$  jednak broju  $a_j - 2$  iliti  $a_j - a_i = 2$ .
- 19.** Gledajmo brojeve oblika  $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots11}_{n+1 \text{ puta}}$ . Takvih brojeva je  $n + 1$ , a ostataka pri dijeljenju s  $n$  je  $n$ . Zbog toga neka dva broja daju isti ostatak pri dijeljenju s  $n$ . Njihova razlika je zato djeljiva s  $n$  i ona je oblika  $111\dots100\dots0 = 11\dots1 \cdot 10^k$ . Znamo da je  $\text{nzd}(n, 10) = 1$  jer je  $n$  relativno prost s 2 i 5. Stoga ovih  $10^k$  ne utječe na djeljivost s  $n$  pa je upravo zato drugi dio umnoška tj. broj oblika  $111\dots11$  višekratnik od  $n$ .
- 20.** Projiciramo ortogonalno sve krugove na stranicu  $\overline{AB}$  jediničnog kvadrata. Ortogonalna projekcija kruga opsega  $l$  iznosi  $\frac{l}{\pi}$  tj. duljini promjera kruga. Ukupni opseg je jednak 10 pa je zbroj svih segmenata jednak  $\frac{10}{\pi}$ . Vidimo da je  $\frac{10}{\pi} > 3 = 3|AB|$ . Po Dirichletu onda mora postojati neka točka koja pripada barem četirima projekcijama krugova. Okomica na stranicu  $\overline{AB}$  u toj točki je traženi pravac.



- 21.** Pokažimo da među razlikama  $a_{20} - a_{19}, \dots, a_2 - a_1$  postoje četiri koje su međusobno jednake. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje najviše tri jednake razlike. Budući da se među razlikama  $a_{20} - a_{19}, \dots, a_2 - a_1$  najviše tri puta javljaju 1, 2, 3, 4, 5 i 6 vrijedi  $a_{20} - a_1 = (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \dots + (a_2 - a_1) \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 7 = 70$ . S druge strane  $a_{20} < 70$  i  $a_1 \geq 1$ , odnosno  $a_{20} - a_1 \leq 68$ , pa smo došli do kontradikcije. Zaključujemo da među promatranim razlikama moraju postojati četiri međusobno jednake.
- 22.** Ako naših 6 točaka tvore konveksni šesterokut onda sigurno prema Dirichletu postoji neki kut tog šesterokuta koji nije manji od  $120^\circ$  (inače bi zbroj svih kutova bio manji od  $720^\circ$ ). Time je problem u ovom slučaju riješen jer samo možemo odabrati vrh u kojem se nalazi taj kut i dva susjedna vrha. S druge strane, ako je šesterokut konkavan, onda možemo odabrati neke tri od šest točaka tako da se unutar trokuta koji tvore te tri točke, nalazi još neka točka našeg šesterokuta. Sad spajanjem te tri točke s tom jednom točkom unutar tog trokuta, dobit ćemo tri trokuta s jednim zajedničkim vrhom (skicirajte si to!!). U tom zajedničkom vrhu jedan kut je definitivno ne manji od  $120^\circ$  (jer inače bi zbroj kutova u tom punom kutu bio manji od  $360^\circ$ ).

## 12. Rješenja za drugu grupu

### 12.1. G2: Matej Vojvodić - Catcher in the $\pi$

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Rješenja

1. Neka je  $\alpha$  kut koji promatramo,  $\alpha'$  pripadni vanjski kut, te  $\beta$  i  $\gamma$  preostala dva unutarnja. Tada je  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  jer se radi o zbroju kuteva u trokutu, a  $\alpha + \alpha' = 180^\circ$  jer se radi o ispruženom kutu. Kad izjednačimo dva načina, dobivamo upravo traženo u zadatku.
2. Neka je  $\overline{AB}$  zadana dužina. Primijetimo da je jedna dobra točka na pravcu  $AB$  upravo polovište; označimo ga s  $P$ . Pokažimo da je proizvoljna točka  $Q$  na simetrali dobra. Kako je  $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$ , onda su trokuti  $APQ$  i  $BPQ$  sukladni po SKS (zajednička stranica  $\overline{PQ}$  i pravi kutevi)  
Obratno, neka je  $|\overline{QA}| = |\overline{QB}|$  za neku točku  $Q$ . Neka je  $P$  nožište visine iz  $Q$  na pravac  $AB$ . Laganom primjenom Pitagorinog poučka na trokute  $APQ$  i  $BPQ$  dobivamo da je  $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$ , pa je  $P$  polovište, te  $Q$  na simetrali dužine.
3. Neka je  $Q$  vrh kuta kojeg promatramo,  $P$  točka unutar kuta, te  $A$  i  $B$  redom nožišta visina iz  $P$  na krakove kuta.  
Ako je  $P$  na simetrali kuta, pokazat ćemo da je  $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$  jer su trokuti  $APQ$  i  $BPQ$  sukladni, što jesu po KSK poučku o sukladnosti ( $\overline{PQ}$  zajednička, kutevi kod  $Q$  zajednički, kutevi kod  $A$  i  $B$  pravi po konstrukciji).  
Ako je pak  $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$ , promatranjem trokuta  $APQ$  i  $BPQ$  dobivamo njihovu sukladnost po SSK poučku (opet zajednička  $\overline{PQ}$  te pravi kutevi kod  $A$  i  $B$ ), pa su kutevi kod  $Q$  oba trokuta jednaki, tj.  $P$  leži na simetrali kuta.
4. Trokuti koje označavaju središte kružnice, točka  $T$  i točka dodira su sukladni po SSK: pravi kut u točki dodira, zajednička stranica  $ST$  i stranice koje su duljine radijusa (od  $S$  do točke dodira). Dakle, onda i dirališta moraju biti jednako udaljena od  $T$ .
5. Raniji zadatak nam je rekao da se točke na simetrali kut jednako udaljene od vrhova. Nije teško pogoditi ni dokazati da je točka sjecišta sve četiri simetrale upravo središte opisane kružnice tetivnom četverokutu; odnosno, da je to točka koja je jednako udaljena od četiri vrha četverokuta pa trivijalno postoji kružnica kojoj je to središte s dobrim polumjerom.
6. Ukoliko spustimo visinu iz  $A$  na  $BC$ , odmah vidimo kako je  $\angle BAH = 90^\circ - \beta$  zbog pravog kuta kod nožišta visine. Slično možemo zaključiti kako je  $|\angle AOC| = 2 \times |\angle ABC| = 2 \times \beta$  jer se radi o središnjem kutu nad  $AC$ . Kako je  $|AO| = |CO|$ , iz zbroja kuteva  $\triangle AOC$  slijedi  $\angle CAO = 90^\circ - \beta$  što je i trebalo pokazati.
7. Pokažimo najprije da se paralelogramu dijagonale raspolavljaju: neka je  $S$  sjecište dijagonala. Trokuti  $ABS$  i  $DCS$  su sukladni po KSK jer su kutevi  $\angle ABS = \angle CDS$  i  $\angle BAS = \angle DCS$  jer se

radi o presječnici paralelnih pravaca, a stranice  $AB$  i  $CD$  su jednake po definiciji paralelograma. Dakle, po sukladnosti mora vrijediti i  $|AS| = |SC|$  i  $|BS| = |SD|$ . Drugi smjer bi bio da se dvije dijagonale raspolavljaju, tj.  $|AS| = |SC|$  i  $|BS| = |SD|$ . Kako se radi o vršnom kutu  $\angle ASB = \angle CSD$ , vrijedi da su trokuti sukladni po  $SKS$ . Kako su zato stranice četverokuta  $AB$  i  $CD$  jednake, (i analogno možemo pokazati  $|BC| = |DA|$ ), vrijedi da je četverokut paralelogram.

8. Uzmimo proizvoljne dvije težišnice; one se sijeku u točki  $T$ . Budući da znamo da je srednjica upola kraća od pripadne stranice i paralelna njoj, lagano se vidi da smo dobili dva slična trokuta kojima je koeficijent sličnosti upravo  $2 : 1$  (jer je srednjica upola kraća od pripadne stranice)
9. Budući da se ostali slučajevi dokazuju analogno, pokazat ćemo samo da su slični  $PAC$  i  $PBD$ . Neka je zbog jednostavnosti  $P$  izvan kružnice, te je redosljed točaka u smjeru obrnutom od kazaljke na satu upravo  $ABCD$ . Tada pošto je  $ABCD$  tetivani, imamo  $\angle ABD = \angle ACD$ , te je kut kod  $P$  jednak, pa su  $PAC$  i  $PBD$  slični po  $KK$  poučku o sličnosti.
10. Neka je  $E$  sjecište simetrala kutova kod  $A$  i  $B$ . Tada je  $\angle EAB = \frac{\alpha}{2}$  te  $\angle EBA = \frac{\beta}{2}$ , i stoga je  $\angle AEB = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$ . Analogno pokazujemo  $\angle BFC = 180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$ ,  $\angle CGD = 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2}$  te  $\angle DHA = 180^\circ - \frac{\delta+\alpha}{2}$ . Zbroj nasuprotnih kuteva četverokuta  $EFGH$  je stoga  $180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2} = 360^\circ + \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ , što četverokut čini tetivnim.

*“Ako čovjek nešto čini previše dobro, onda se, nakon određenog vremena, ako ne pazi na to, počinje time razmetati.”*

11. Docrtajmo središte opisane kružnice  $\triangle ABC$  i nazovimo ga  $S$ , te izaberimo neku proizvoljnu točku  $T$  na tangenti (kako bi mogli imenovati kuteve). Trivijalno je  $\angle SBT = 90^\circ$ . Neka je  $\alpha = \angle CBT$ , tada je  $\angle SBC = 90^\circ - \alpha$ . Kako je  $\triangle SBC$  jednakokračan, onda je  $\angle SBC = \angle SCB$ , i vrijedi  $\angle BSC = 180^\circ - 2 \times (90^\circ - \alpha) = 2 \times \alpha$ . Kako je  $\angle BSC$  središnji kut obodnog kuta  $\angle BAC$ , dobivamo  $\angle BAC = \alpha$  što je i trebalo pokazati.
12. Neka simetrala kuta  $\angle BAC$  u trokutu  $\triangle ABC$  siječe opisanu kružnicu u točki  $T$ . Označimo  $\angle BAC = \alpha$ . Pokazat ćemo da tada  $T$  leži na simetrali stranice  $\overline{BC}$ . Budući da je  $T$  na simetrali kuta, vrijedi  $\angle BAT = \angle TAC = \frac{\alpha}{2}$ .  
Zbog jednakosti obodnih kutova nad  $\overline{BT}$  imamo  $\angle BCT = \angle BAT = \frac{\alpha}{2}$ , a zbog jednakosti obodnih kutova nad  $\overline{CT}$  imamo  $\angle CBT = \angle CAT = \frac{\alpha}{2}$ . Dakle,  $\angle BCT = \angle CBT$ , odnosno trokut  $\triangle BCT$  je jednakokračan. Iz toga slijedi  $|BT| = |CT|$ , pa  $T$  leži na simetrali stranice  $\overline{BC}$ .

13. [https://artofproblemsolving.com/community/c451884h1460830\\_geometry\\_9\\_egmo\\_117](https://artofproblemsolving.com/community/c451884h1460830_geometry_9_egmo_117).

14. [https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Incenter/excenter\\_lemma](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Incenter/excenter_lemma).

15. <https://brilliant.org/wiki/nine-point-circle/>

*"You are on your own, kid, you always have been.  
You can face this."*

RIP Karlo Jokoš. ☺

16. Nazovimo označene kutove redom  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ . Primijetimo da je svaki  $\alpha_i$  jedan od unutar-njih vrhova trokuta određenih "krakovima" zvijezde. Označimo preostale kutove s  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_7$  tako da je  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180^\circ$  i da su vršni kutovi u nekom vrhu  $\gamma_1 = \beta_2, \gamma_2 = \beta_3, \dots, \gamma_7 = \beta_1$ . (U svakom trokutu imamo  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  i označavamo ih tako da se ne dodiruju  $\beta$  i  $\beta$  ili  $\gamma$  i  $\gamma$ .)

Dužine kojima smo spajali 7 vrhova zvijezde sijeku se u 7 točaka koje određuju konveksan sedmerokut. Sukut svakom od unutarnjih kutova tog sedmerokuta jednak je nekom  $\beta_i$  ili  $\gamma_j$ , a

to su točno i vanjski kutovi sedmerokuta. Budući da već znamo jednakost odgovarajućih vršnih kutova i pokazali smo da je zbroj vanjskih kutova  $n$ -terokuta jednak  $360^\circ$ , zaključujemo da je

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_7 = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_7 = 360^\circ.$$

Još pozbrajamo sve jednakosti  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180^\circ$  da dobijemo

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_7) + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_7) + (\gamma_1 + \dots + \gamma_7) = 7 \cdot 180^\circ.$$

Konačno, ako spojimo što smo izračunali, dobivamo

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_7 = 7 \cdot 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_7) - (\gamma_1 + \dots + \gamma_7) = 7 \cdot 180^\circ - 360^\circ - 360^\circ = 540^\circ.$$

Zadatak smo mogli riješiti i koristeći formulu za zbroj unutarnjih kutova sedmerokuta.

- 17.** Ključno je primijetiti da je četverokut iz zadatka tetivan. Neka je  $S$  sjecište dijagonala. Vrijedi da je  $\angle SBA = 50^\circ$  iz zbroja kuteva trokuta  $ABS$ . Dakle, vrijedi  $\angle DBA = \angle DCA$ , što je dovoljno da zaključimo da je četverokut  $ABCD$  tetivan. Sada preko obodnih kuteva nad ostalim tetivama možemo zaključiti sve ostale kuteve. Rješenje je  $\angle ADC = 70^\circ$  i  $\angle CBA = 110^\circ$ .

- 18.** Zapišimo  $\sphericalangle H'AC$  kao zbroj tri kuta:

$$\sphericalangle H'AC = \sphericalangle H'AB + \sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC$$

Pritom znamo da je  $\sphericalangle H'AB = \sphericalangle BAH$  zbog simetrije, te je jasno da  $\sphericalangle BAH = 90^\circ - \sphericalangle CBA$  zbog zbroja kuteva u trokutu  $ABN$ .

Što je pak jednako  $90^\circ - \sphericalangle BAC$  jer je  $ABC$  jednakokrakan.

Sada smo gotovi jer je:

$$\begin{aligned} \sphericalangle H'AC &= \sphericalangle H'AB + (\sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC) = \\ &= 90^\circ - \sphericalangle BAC + \sphericalangle BAC = 90^\circ. \end{aligned}$$

Alternativno, prema lemi o refleksijama ortocentra,  $H'$  preslika od  $H$  preko polovišta  $\overline{AB}$ , onda je  $H'$  na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ , te je  $\overline{CH'}$  njen promjer. Traženi kut je po Talesu pravi.

- 19.** Školsko 2010. 2.A 7.

- 20.** It suffices to show that  $\angle PFQ = 90^\circ$ . Since  $AE = DE$  (since  $E$  is the centre of the circumcircle of  $ABD$ ), this is equivalent to  $QE$  being the perpendicular bisector of  $\overline{AD}$ , since we know that all points on the perpendicular bisector are equidistant from the endpoints of  $\overline{AD}$ . So, it is sufficient to prove  $QA = QD$ , and with this, we completely remove  $E$  from the diagram.

For convenience, denote  $\angle AQP = \alpha$ ,  $\angle APQ = \beta$ . Then:

$$\angle QAD = \alpha + \beta$$

from triangle  $APQ$  (since the exterior angle is equal to the sum of the two remaining interior angles).

It remains to compute  $\angle QDA = \angle ACD + \angle DAC$ . We have

$$\angle ACD = \angle ACQ = \angle AQP = \alpha$$

from the tangent  $QP$  to  $\omega_2$  (by the Chord Tangent Lemma, also known as the Alternate Segment Theorem)

On the other hand,  $\angle DAC = 180^\circ - \angle PAC$  since  $P$ ,  $A$  and  $D$  lie on the same line. However, since  $AC$  is tangent to  $\omega_1$ , we can find  $\angle CAB = \angle APB$  (again by the Chord Tangent Lemma).

Now, we can break the  $180^\circ = \angle PAD = \angle PAB + \angle BAC + \angle CAD$  around point  $A$ , but we can also find the sum of internal angles in  $APB$  to be  $\angle PAB + \angle BPA + \angle ABP = 180^\circ$ , so by previous conclusion, we get that  $\angle ABP = \angle CAD$ .

Lastly,  $\angle ABP = \angle APQ = \beta$  since  $PQ$  is tangent to  $\omega_1$  (using the Chord Tangent Lemma one last time).

By looking at triangle  $CDA$ , we conclude that  $\angle QDA = \angle ACD + \angle DAC$ , so we have

$$\angle QDA = \angle ACD + \angle DAC = \alpha + \beta = \angle AQP + \angle APQ = \angle QAD$$

concluding  $QA = QD$ , as desired.

## 21. IMO shortlist 2010. G1

## 12.2. C2: Lana Milani - Bojanja i popločavanja

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. Koristimo "šahovsko bojanje" ali tako da i crno i bijelo obojamo  $2 \times 2$  polja. Tako dobijemo šahovsko polje veličine  $5 \times 5$ . Ako u jednom kutu imamo crni kvadrat, tada ćemo u svakom kutu imati crni kvadrat. Vidimo da crnih kvadrata ima više, točnije imamo 52 polja obojana u crno, a 48 obojanih u bijelo. Na isti način kao u početnom primjeru zaključimo da ne postoji traženo bojanje jer svaka  $1 \times 4$  pločica će zauzeti 2 bijela i 2 crna polja.
2. Ne može. Obojimo ploču tako da je svako treće polje u pojedinom retku i stupcu crno, pri čemu su polja koja dijele brid s izrezanim poljem oba obojena crno. Lako sada izbrojimo da je crnih polja 22, a preostalih 41. No, budući da svaka pločica pokriva točno 1 crno polje, zaključujemo da ovakvo popločavanje nije moguće.
3. Oboji kutiju tako da, kada staviš jednu ciglu unutra, ona će pokriti 1 crnu kocku i 3 bijele kocke. Kada bi bilo moguće posložiti 53 cigle u tako obojanu kutiju, one bi pokrivale 53 crne kocke od ukupno 60 i 159 bijelih kocka od ukupno 156 što je nemoguće.
4. 1. zadatak, str. 28
5. Str. 31, zadatak 12.
6. Zadatak 3.
7. Str. 31, zadatak 9.
8. Državno 2007., SŠ1-A 3. zadatak
9. Županijsko 2012., SŠ A-3.5
10. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Baza za  $n = 1$  je očita. Pretpostavimo da je za neki prirodan broj  $k$  moguće popločati ploču  $2^k \times 2^k$  na traženi način. Ploču  $2^{k+1} \times 2^{k+1}$  možemo podijeliti na 4 ploče dimenzija  $2^k \times 2^k$  od kojih jednoj fali jedno polje. Tu manju ploču kojoj fali jedno polje možemo popločati prema pretpostavci indukcije. Ostaje pokazati da preostale 3 manje ploče kojima ne fali nijedno polje možemo popločati danim pločicama.  
Tu tvrdnju također ćemo dokazati indukcijom. Dakle, sada ćemo indukcijom dokazati da se ploča dimenzija  $2^n \times 2^n$  kojoj npr. fali gornja desna četvrtina može popločati danim pločicama. Baza je identična kao i na početku. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki  $k$ . U koraku indukcije nije se teško uvjeriti da ploču dimenzija  $2^{k+1} \times 2^{k+1}$  kojoj fali jedna četvrtina možemo podijeliti na 4 istovjetne ploče dimenzije  $2^k \times 2^k$  koje možemo popločati po pretpostavci indukcije. Ovime je dokaz gotov.
11. JBMO, 2012. Zadatak 3.
12. Državno 2017., SŠ A-1.5
13. Državno 2017. - SŠ A-4.5
14. HMO 2017., MEMO test

## 12.3. A2: Emanuel Bajamić - Teleskopiranje

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  vrijedi

$$\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = 1 + \frac{2}{(k-1)(k+1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n+1} = \boxed{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}.$$

2. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \boxed{\sqrt{n+1} - 1}.$$

3. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{6}{k(k+3)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+3},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} - \dots - \frac{2}{n+3} = 2 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} =$$

$$\boxed{\frac{11}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}}.$$

4. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  vrijedi

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

što znači da dani umnožak možemo zapisati kao

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} =$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n}}.$$

5. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \boxed{1 - \frac{1}{2n+1}}.$$

6. Za  $x = 1$  vrijedi

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 + 1 + \dots + 1 = \boxed{n + 1}.$$

Za  $x \neq 1$  možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s  $1 - x$ , što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)}{1-x} = \frac{1-x+x-x^2+x^2-x^3+\dots+x^n-x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}.$$

7. Za  $x = 1$  vrijedi

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Za  $x \neq 1$  možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s  $1 - x$ , što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n)}{1-x} = \frac{1-x+2x-2x^2+3x^2-3x^3+\dots+(n+1)x^n-(n+1)x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\frac{1+x+x^2+\dots+x^n}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

Sada možemo iskoristiti rezultat iz prethodnog zadatka, pa je dana suma jednaka

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}}.$$

8. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2! - 1! + 3! - 2! + \dots + (n+1)! - n! = \boxed{(n+1)! - 1}.$$

9. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$(k^2 + k + 1) \cdot k! = ((k+1)^2 - k) \cdot k! = (k+1)^2 \cdot k! - k \cdot k! = (k+1) \cdot (k+1)! - k \cdot k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2 \cdot 2! - 1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! - 2 \cdot 2! + \dots + (n+1) \cdot (n+1)! - n \cdot n! = \boxed{(n+1) \cdot (n+1)! - 1}.$$

10. Rastavimo izraz  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$  na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Odredimo koeficijente  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$



Usporedimo li dobiveni brojnik s brojnikom izraza  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$  i izjednačimo li koeficijente uz  $k^2$ ,  $k$  te slobodne koeficijente, dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ 2a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -1, \\ c = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \dots - \frac{2}{n+1} \right) = \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2}}. \end{aligned}$$

11. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  vrijedi

$$a_{k-1} = 2 + a_0 a_1 \dots a_{k-2} \implies a_0 a_1 \dots a_{k-2} = a_{k-1} - 2,$$

što znači da za svaki  $k \geq 2$  vrijedi

$$a_k = 2 + a_0 a_1 \dots a_{k-2} \cdot a_{k-1} = 2 + (a_{k-1} - 2)a_{k-1} = a_{k-1}^2 - 2a_{k-1} + 2.$$

Dokažimo sada principom matematičke indukcije da vrijedi za svaki  $n \geq 1$   $a_n = 2^{2^n} + 1$ .

**Baza.**  $n = 1$ ,  $a_1 = 2 + 3 = 2^{2^1} + 1$ .

**Pretpostavka.** Za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $a_n = 2^{2^n} + 1$ .

**Korak.** Dokažimo da vrijedi  $a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$ . Korištenjem formule koju smo gore dokazali, imamo da vrijedi

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 = (2^{2^n} + 1)^2 - 2(2^{2^n} + 1) + 2 = 2^{2^{n+1}} + 1,$$

čime je završen korak indukcije. Iz ovoga slijedi  $\boxed{a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1}$ .

12. Primijetimo da se nazivnici mogu faktorizirati na sljedeći način:

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1).$$

Ono što je zanimljivo kod ove faktorizacije jest da je jedna zagrada zapravo jednaka drugoj zagradi uz translaciju varijable za jedan, odnosno vrijedi

$$k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1.$$

Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bi izveli teleskopiranje. Rastavljaajući izraz

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{k}{(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)}$$

na parcijalne razlomke, dobivamo da vrijedi

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2(k^2 - k + 1)} - \frac{1}{2(k^2 + k + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{((k + 1) - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right),$$

pa je dana suma jednaka

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{(n + 1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2 + 2n + 2}}.$$

13. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  vrijedi

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

pa je dana suma manja od

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

14. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  vrijedi

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}(F_{k-1} + F_k)} = \frac{1}{F_k} \left( \frac{1}{F_{k-1}} - \frac{1}{F_{k-1} + F_k} \right) = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \dots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = \boxed{1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}}}.$$

15. Primijetimo da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\frac{6^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k - 2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} - 2^{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{3-2} - \frac{2^2}{3^2-2^2} + \frac{2^2}{3^2-2^2} - \frac{2^3}{3^3-2^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} = \boxed{2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}}.$$

16. Rješenje ovog zadatka možete pronaći na sljedećem linku:

<https://artofproblemsolving.com/community/c7h1885809p12847890>

## 12.4. N2: Zvonko Andrijević - Diofantske jednačbe

Predavanja

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. Žup 2019 2.razred
2. Žup 2021. 1.razred
3. Žup 2021. 2.razred
4. Žup 2023. 2.razred
5. Žup 2019 3.razred
6. Žup 2021. 4.razred
7. Drž 2021. 2.razred
8. Žup 2019. 4.razred
9. Drž 2018. 2.razred
10. Žup 2021. 3.razred
11. Drž 2016. 2.raz
12. Žup 2022. 4.razred
13. Drž 2022. 2.razred
14. Drž 2022. 1.razred
15. Drž 2016. 4.raz
16. HMO 2017. 1.dan
17. HMO 2021. 2.dan

## 12.5. X2: Dario Vuksan - Indukcija

### Predavanja

### Hintovi

### Rješenja

1. Baza:  $1 = 1^2$  za  $n = 1$

Korak:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1}_{k^2} + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

2. Baza:  $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$  za  $n = 1$

Korak:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Sređivanjem treba dobiti  $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ .

3. Baza:  $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$  za  $n = 1$

Korak:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3}_{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

Sređivanjem treba dobiti  $\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ .

4. Baza:  $4! = 24 > 2^4 = 16$

Korak: Pretpostavimo  $k! > 2^k$ . Također vrijedi  $k + 1 > 2$  pa množenjem te dvije nejednakosti slijedi tvrdnja za  $k + 1$ .

5.  $3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3} = 5 \cdot 15^n + 8 \cdot 2^n$

Za  $n = 1$  to je jednako 91 što je djeljivo s 13.

Pretpostavimo tvrdnju za  $n = k$ . Neka je  $5 \cdot 15^n + 8 \cdot 2^n = 13a$ . Za  $n = k + 1$  broj je  $5 \cdot 15^{n+1} + 8 \cdot 2^{n+1} = 75 \cdot 15^n + 16 \cdot 2^n$ . Moramo "namjestiti" tako da se pojavi neki višekratnik  $13a$ :

$$75 \cdot 15^n + 16 \cdot 2^n = 65 \cdot 15^n + 2(5 \cdot 15^n + 8 \cdot 2^n) = 65 \cdot 15^n + 2 \cdot 13a$$

što je očito djeljivo brojem 13.

6. Kao i prethodni zadatak

7. Baza  $a_1 = 0 \in [0, 1]$ . Pretpostavka:  $a_k \in [0, 1]$ . Korak:

$$a_k \in [0, 1] \iff a_k + 4 \in [4, 5] \iff \frac{5}{a_k + 4} \in \left[1, \frac{5}{4}\right] \iff 2 - \frac{5}{a_k + 4} \in \left[2 - \frac{5}{4}, 2 - 1\right] = \left[\frac{3}{4}, 1\right] \subset [0, 1]$$

Može se pokazati i posebno za  $\geq 0$  i  $\leq 1$ .

8. Vrijedi  $a_n = \sqrt{4 + a_{n-1}}$ . Baza indukcije je:  $a_1 = 2 < 3$ . Korak:

$$a_{k+1} = \sqrt{4 + a_k} < \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} < 3$$

9. Neka je  $S_n = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}$

Izračunamo  $S_{k+1} + S_k$ , nakon sređivanja to ispadne 0. Dakle,  $S_{k+1} = -S_k$ .

Direktnim računanjem dobijemo  $S_1 = 1$

10.  $a_n = n!$ , baza indukcije je  $n = 1$  i  $n = 2$ .

Pretpostavka: za  $k - 1$  i  $k - 2$  vrijedi  $a_{k-1} = (k - 1)!$ ,  $a_{k-2} = (k - 2)!$

Dokažemo  $a_k = k!$ . Napišemo  $a_k = (2k + 1)(k - 1)! - (k^2 - 1)(k - 2)!$  i nakon sređivanja tvrdnja slijedi.

11. Označimo  $S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ . Za bazu vrijedi  $S_0 = 2$  trivijalno i  $S_1 \in \mathbb{Z}$  prema zadatku. Pretpostavimo  $S_{k-1}$  i  $S_k \in \mathbb{Z}$  za neki  $k$ . Pomnožimo  $S_1$  i  $S_k$ :

$$S_1 \cdot S_k = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}} = S_{k+1} + S_{k-1}$$

Dakle,  $S_{k+1} = S_1 S_k - S_{k-1}$  što je cijeli broj po pretpostavkama.

12. Dokazat ćemo

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Baza  $n = 1$  očito vrijedi. Pretpostavimo  $S_k \leq 2 - \frac{1}{k}$  za neki  $k$ . Tada je

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Dovoljno je pokazati

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

što je ekvivalentno

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

odakle slijedi korak indukcije.

13. 5. zadatak <https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2016/12/C-Indukcija-Grga.pdf#page=4>

14. Baza indukcije su  $n = 1, 2, 3$  jer rekurzivna formula niza za te brojeve nije definirana. Kako je  $1 < 2^1 < 2^2 < 2^3$ , vrijedi  $a_n < 2^n$  za  $n \leq 3$  pa je baza dokazana.

Pretpostavimo sada da za  $1, 2, \dots, k$  vrijedi  $a_k < 2^k$ , gdje je  $k \geq 3$  prirodan broj. Kako je  $k+1 \geq 4$ , možemo iskoristiti rekurzivnu formulu niza da izrazimo  $a_{k+1}$  kao

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobivamo nejednakost

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2}.$$

Kako je  $2^{k-2} < 2^{k-1}$ , dalje vrijedi

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

odnosno  $a_k < 2^k \implies a_{k+1} < 2^{k+1}$  što smo i htjeli dobiti pa je tvrdnja dokazana.

Ovakav princip kad uzimamo tvrdnju za sve  $1, 2, \dots, k$  kao pretpostavku se naziva jaka indukcija.

15. str. 8, zadatak 6 TLDR: baza  $n = 1$  odigrano nula partija, dodavanjem  $k$ -tog igrača se broj odigranih partija povećava za  $k - 1$ .

16. str. 8, zadatak 6 [https://mnm.hr/wp-content/uploads/2015/11/matematicka\\_indukcija.pdf#page=8](https://mnm.hr/wp-content/uploads/2015/11/matematicka_indukcija.pdf#page=8)

Slično kao prethodni zadatak.

17. Podijelimo ploču na četiri kvadranta veličine  $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ , stavimo jednu L-trominu u centar tako da prekrije tri puna kvadranta i riješimo rekurzivno za manje ploče, a baza je  $2 \times 2$  ploča koja se trivijalno poploča jednom L-trominom.

18. str. 3, zadatak 4 [natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2016/12/C-Indukcija-Grga.pdf#page=3](http://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2016/12/C-Indukcija-Grga.pdf#page=3)

19. Dokazujemo tvrdnju indukcijom. ( $T_n$  je tvrdnja zadatka za  $n$  gradova.) Za  $n = 1$  tvrdnja trivijalno vrijedi, možemo uzeti bazu  $n = 2$ , gdje tvrdnja ponovno trivijalno vrijedi.

Sada pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $n \in \mathbb{N}$ . Neka je  $A$  grad u koji je moguće doći iz svih ostalih gradova direktno ili preko najviše jednog grada.

Označimo s  $B_1, \dots, B_k$  gradove iz kojih se u grad  $A$  može doći direktno, a s  $C_1, \dots, C_l$  gradove iz kojih se može doći samo preko nekog drugog grada. Dakle, svi gradovi su zapravo  $A, B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_l$ .

Primijetimo da se iz svakog od C-gradova u grad  $A$  zapravo dolazi preko nekog od B-gradova. Dodajmo novi grad  $D$ , imamo dvije mogućnosti:

1. *slučaj* Postoji cesta iz  $D$  u  $A$  ili u neki od B-gradova. Sada tvrdnja zadatka i dalje vrijedi, naime  $D$  je povezan s  $A$  ili direktno ili preko nekog B-grada.

2. *slučaj* Ne postoji cesta iz  $D$  niti u  $A$  te niti u jedan od B-gradova. Sada dokažimo da je  $D$  grad za koji vrijedi tvrdnja zadatka.

Budući da između svaka dva grada postoji jedna jednosmjerna cesta, možemo zaključiti da iz grada  $A$  te iz svakog B-grada postoji cesta u  $D$ . Također, kako se iz svakog od C-gradova u grad  $A$  zapravo dolazi preko nekog od B-gradova i prethodne tvrdnje, sada imamo da se iz svakog C-grada može doći u  $D$  preko nekog B-grada.

Dakle, tvrdnja zadatka vrijedi za sve gradove. Pokrili smo oba slučaja, zaključujemo  $T_n \implies T_{n+1}$  pa vrijedi  $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , čime je dokaz završen.

20. [Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7](#)

21. [MNM online predavanja - Napredna indukcija - Zadatak 12.](#)

## 13. Rješenja za treću grupu

### 13.1. G3: Lana Milani - Potencija točke

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Rješenja

1. EGMO 2024 P2
2. Vietnam 2017 problem 3 a)
3. Službeno rješenje: IMOSL 2008 G1
3. (Alternativno rješenje) AoPS: IMO 2008/1
4. Službeno rješenje: IMOSL 2009 G2
4. (Alternativno rješenje) AoPS: IMO 2009/2
5. IMO 1995/1
6. Sharygin First Round 2013, Problem 16

#### Bonus: kružnica radijusa 0

7. Iran TST 2011/1
8. Neka su  $U$  i  $V$  preslike  $A$  preko  $X$  i  $Y$  redom. Uočavamo  $AU = AV = 2 = \frac{o(ABC)}{2}$ , što znači da su  $U$  i  $V$  dirališta  $A$ –pripisane kružnice s  $AB$  i  $AC$ , redom. Nazovimo tu kružnicu  $\omega$  i neka  $\omega$  dira  $BC$  u  $T$ . Neka je  $\Gamma$  kružnica radijusa 0 s centrom u  $A$ . Tada je  $XY$  radikalna os  $\omega$  i  $\Gamma$ , i vrijedi  $MA = MT$ . Tada sumiranje stranica trokuta  $AMB$  i  $AMC$  daje da jedan mora imati opseg 2.
9. Službeno rješenje: IMOSL 2009 G3
9. (Alternativno rješenje) AoPS: IMOSL 2009 G3

## 13.2. C3: Zvonko Andrijević - Teorija igara

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. Analizirajmo gubitničke pozicije unatrag. Igrač koji je na potezu kod ploče dimenzija  $1 \times 1$  nema više mogućih poteza i gubi igru. Stoga je  $1 \times 1$  gubitnička pozicija. Sve pozicije  $1 \times k$  i  $k \times 1$  su pobjedničke jer se iz njih može doći do  $1 \times 1$ . Gledajmo sad ploču  $2 \times 2$ . Ona je gubitnička jer iz nje možemo samo doći do  $2 \times 1$  ili  $1 \times 2$ . Zbog toga su ploče dimenzija  $2 \times k$  i  $k \times 2$  dobitničke jer iz njih možemo doći do  $2 \times 2$ . Generalizirajmo! Zaista, svaka ploča dimenzija  $p \times k$  ( $p > k$ ) je pobjednička jer se može svesti na ploču  $k \times k$ , a  $k \times k$  je gubitnička jer se može svesti samo na ploče  $q \times k$  ili  $k \times q$ .
2. Prvi igrač ima pobjedničku strategiju. Razlikujemo dva slučaja. Ako prvi igrač odabirom gornjeg desnog kvadratića dovodi drugog igrača u gubitničku poziciju, onda je taj potez definitivno dio pobjedničke strategije i prvi igrač će ga napraviti i na kraju pobijediti. Ako odabirom gornjeg desnog kvadratića prvi igrač dovodi drugog u pobjedničku poziciju tj. polje u kojem nema gornjeg desnog kvadratića, a sva ostala su tu je pobjedničko, onda će samo prvi igrač napraviti odmah potez koji bi napravio drugi igrač i tako uzeti njegovu pobjedničku strategiju. Nažalost, pobjednička strategija nam još uvijek nije poznata za opći slučaj.
3. Državno 2009. 1.raz
4. Prvi igrač uvijek može dobiti, i to rezultatom 10:8. Dovoljno je da stavi svoj znak u centralno polje ploče, a dalje igra centralno simetrično s obzirom na drugog igrača. Tako osigurava da dobije srednji red i stupac, a sve ostale dobiva u paru s drugim igračem.
5. Prvi igrač uvijek pobjeđuje. Logika je slična kao i kod igre sa čokoladom gdje je proučavanje odabira gornjeg desnog kuta bila dobra ideja. U ovom zadatku ulogu gornjeg desnog kuta ima broj 1. Ostatak dokaza je isti kao i u tom zadatku.
6. Za pijuna je lako pokazati da dobiva Karlo namještanjem neke specifične pozicije jer pijun može igrati samo jedan mogući potez.

Za ostale figure pobjeđuje Matej. Na početku igre polja ploče podijelit će u parove tako da bude moguće napraviti potez između polja svakog para. To za kralja, topa, i damu mogu biti domine; za lovca  $2 \times 2$  pločice, a za skakača nešto specijalno (slično kao L pločica bez sredine; pogledaj skicu dolje).

Promotrimo jednu moguću podjelu/strategiju ukoliko je odabrana figura skakač. Najprije dio ploče veličine  $2 \times 4$  podijelimo na četiri para, a zatim koristeći kopije te podjele popunimo cijelu ploču kao na skici 13.1.



|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 3  | 4  | 1  | 2  | 7  | 8  | 5  | 6  |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 11 | 12 | 9  | 10 | 15 | 16 | 13 | 14 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 19 | 20 | 17 | 18 | 23 | 24 | 21 | 22 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 27 | 28 | 25 | 26 | 31 | 32 | 29 | 30 |

Slika 13.1: podjela šahovske ploče na parove polja

Nakon što Karlo stavi skakača na ploču, prvi Matejev potez bit će pomaknuti skakača na polje spareno s Karlovim početnim poljem. Općenito, kako Karlo igra prvi, morat će skakača dovesti na jedno polje neposjećenog para, a Matej će tada postaviti figuru na preostalo polje tog para. Matej uvijek na raspolaganju ima taj potez, stoga će Karlo ostati bez poteza i izgubiti.

7. [USAMO 1999 P5](#)
8. [Example 1](#)
9. [Example 5](#)
10. [Example 6](#)
11. [Games Example 3](#)
12. [Games Example 10](#)
13. [Games Example 12](#)
14. [Post 5](#)
15. [IMO 2015 SL C4](#)
16. [JBMO 2021 SL C6, stranica 333 u pdf-u](#)
17. Tvrdimo da je odgovor 13. Ako je označeno manje od 13 polja, bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da ih je 12 (ako ih je manje od 12, proizvoljno označimo nekoliko polja, ako pokrijemo veći broj, sigurno možemo pokriti manji broj). Sada, po Dirichletovom principu, kako je 8 stupaca, a 12 označenih polja, sigurno postoje četiri stupca u kojima je barem 8 označenih polja. Sada odaberemo četiri retka u kojima se nalaze preostalih četiri označena polja i sve smo pokrili. Konstrukciju za 13 ostavljamo čitatelju.
18. [Problem I2](#)
19. Problem je samo generalizacija zadatka na linku. Strategija je identična [1.razred žup 2019](#).
20. Pretpostavimo da je  $n$  neparan. Tada Anica prvo obriše jedan od rubnih brojeva, a preostale (u glavi) podijeli u parove koji se sastoje od 2 uzastopna brojeva. Kad Božica obriše neki broj, Anica obriše drugi iz tog para. Time će na kraju ostati dva uzastopna broja za koje znamo da su relativno prosti. Dakle, u ovom slučaju Anica ima pobjedničku strategiju.  
Pretpostavimo sada da je  $n$  paran; tada se među tim brojevima nalazi po  $\frac{n}{2}$  parnih i neparnih brojeva. Ukoliko ostanu dva parna broja, Božica pobjeđuje, pa je stoga Božici u interesu da briše

neparne brojeve. Tada Anica, da spriječi takav razvoj događaja, mora brisati isključivo parne brojeve (jer čim obriše jedan neparan, a Božica briše samo neparne, ostat će 2 parna broja na kraju). Dakle, prije no što njih dvije povuku zadnji potez, ostat će 2 parna i 2 neparna broja. Anica je opet prisiljena obrisati paran broj (jer inače Božica može ostaviti 2 parna broja na ploči). Dakle, bilo bi dobro da ta 2 neparna broja ne budu relativno проста, i to Božica zaista može osigurati, jer će se među 12 uzastopnih prirodnih brojeva naći dva neparna koja su djeljiva s 3. Stoga Božica može obrisati sve neparne brojeve osim ta 2 koja su djeljiva s 3, te u zadnjem koraku preostali parni. Zaključujemo da u ovom slučaju Božica ima pobjedničku strategiju.

## 13.3. A3: Marija Dora Marodi - Funkcijske jednadžbe

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. Uvrštavanjem para  $(x, 0)$  dobivamo  $f(0) = f(x) + f(0)$ . Stoga je  $f(x) = 0$  PROVJERA!
2. Uvrštavanjem para  $(x, 0)$  dobivamo  $2f(x) = x^2$ , iz čega slijedi  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ . PROVJERA!
3. Uvrštavanjem  $(x, 0)$  dobivamo  $4f(x) + 2f(0) = 4x$  iz čega  $f(x) = x - c$  pri čemu je  $c = \frac{f(0)}{2}$ . Provjerom vidimo da je početno svojstvo zadovoljeno samo kada je  $c=0$ .
4. Iz  $y = 0$  i  $c = f(0)$  dobivamo  $f(x + c) = f(c) + 2xc + x^2$ , daljnjim uvrštavanjem  $x - c$  umjesto  $x$  dobivamo  $f(x) = f(c) - c^2 + x^2$ . Neka je  $k = f(c) - c^2$ . Tada provjerom vidimo da funkcija  $f(x) = x^2 + k$  zadovoljava uvjete zadatka akko  $k = 0$ .
5. Uvrštavanjem  $x = 1 - x$ , dobivamo  $2f(x) + 1 = (1 - x)f(1 - x)$ . Množenjem tog izraza sa  $-2$  i početnog s  $1 - x$  ( $x$  različit od 1) te zbrajanjem ta dva izraza dobivamo  $f(x) = \frac{3-x}{x-x^2-4}$ .
6. Analiza 1, 1. kolokvij 2025./2026., ali može i  $f(x) = \lfloor x + c \rfloor$  gdje  $0 < c < 1$ .
7. Uvrštavanjem  $y = 0$  dobivamo  $(x + f(x)) = f(2x)$ , a kako je funkcija injektivna imamo  $f(x) + x = 2x$  odnosno  $f(x) = x$ .
8. Indukcijom po  $n$ .
9. Državno 2025.
10. HMOD 2023.

## 13.4. N3: Dario Vuksan - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1.  $128^{131} \equiv 128^{131 \bmod \varphi(17)} \equiv 128^3 \pmod{17}$

Dodatno je  $128 \equiv 9 \pmod{17}$  pa je  $128^3 \equiv 9^3 \pmod{17}$ .

Odavde jednostavno izračunamo rješenje 15.

2. Tražimo ostatak broja pri dijeljenju s 1000. Znamo da je  $\varphi(1000) = 400$  pa vrijedi  $3^{2000} \equiv (3^{400})^5 \equiv 1 \pmod{1000}$ . To znači da je  $3 \cdot 3^{1999} = 1000k + 1$  za neki  $k \in \mathbb{N}$ , ali kako je lijeva strana te jednakosti djeljiva s 3, i desna strana mora biti djeljiva s 3 te je  $k = 3t + 2$  za neki  $t \in \mathbb{N}$ . Sada jednakost postaje  $3^{2000} = 3000t + 2001$  odnosno  $3^{1999} = 1000t + 667$  za neki  $t \in \mathbb{N}$ .

3. Prema Lemi 2:  $7^{7^{100}} \equiv 7^{7^{100} \bmod \varphi(100)} \pmod{100}$

Treba odrediti  $7^{100} \pmod{40}$ :

$$7^{100} \equiv 7^{100 \bmod \varphi(40)} \equiv 7^{100 \bmod 16} \equiv 7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv 9^2 \equiv 1 \pmod{40}$$

Konačno je  $7^{7^{100}} \equiv 7^1 \pmod{100}$ . Posljednje dvije znamenke su 07.

4.  $7^{70} \equiv 0 \pmod{7}$ . Za ostale primijenimo lemu:

$$2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + \dots + 9^{90} \equiv 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 0 + 8^2 + 9^0 \equiv 4 + 1 + 4 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 \equiv 2 \pmod{7}$$

5. Broj je djeljiv s 14 ako je istovremeno djeljiv i s 2 i s 7. Očito je da je  $a_i \equiv a_i^7 \pmod{2}$  jer su iste parnosti, a po malom Fermatovom teoremu vrijedi  $a_i^7 \equiv a_i \pmod{7}$ . Kombiniranjem te dvije kongruencije koristeći tvrdnju iz Propozicije 2 zaključimo:

$$a_i^7 \equiv a_i \pmod{14}$$

odnosno svaki broj daje isti ostatak pri dijeljenju s 14 kao i njegova sedma potencija. Odavde slijedi tvrdnja zadatka.

6. Označimo  $b \bmod \varphi(n) = r$ . Zapisano preko kongruencije glasi  $b \equiv r \pmod{\varphi(n)}$ , a preko jednakosti  $b = k \cdot \varphi(n) + r$  za neki  $k$ .

$$\text{Uvrštavanjem slijedi } a^b = a^{k \cdot \varphi(n) + r} = a^{k \cdot \varphi(n)} \cdot a^r = (a^{\varphi(n)})^k \cdot a^r \equiv 1^k \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}$$

7. Na početku odmah primijenimo lemu jer je  $\gcd(3!, 11) = 1$ :

$$3!^{4!^{5!^{6!}}} \equiv 6^{4!^{5!^{6!}} \bmod 10} \pmod{11}$$

Da bismo odredili  $4!^{5!^{6!}} \pmod{10}$ , ne možemo primijeniti Eulerov teorem niti lemu zato što  $4!$  i  $10$  nisu relativno prosti. Ipak,  $4! = 24$  i možemo lako uočiti da parne potencije broja 24 završavaju znamenkom 6, a neparne znamenkom 4. Očito je ovdje eksponent  $5!^{6!}$  paran broj, stoga zaključimo  $4!^{5!^{6!}} \equiv 6 \pmod{10}$ . Konačno

$$3!^{4!^{5!^{6!}}} \equiv 6^6 \equiv (6^2)^3 \equiv 3^3 \equiv 5 \pmod{11}$$

8. Zbog Malog Fermatovog teorema imamo  $4^p + 5^p \equiv 9 \pmod{p}$  stoga  $p \mid 9$  te  $p = 3$ .

9. Vrijedi  $\underbrace{11 \dots 1}_{p-1} = \frac{10^{p-1} - 1}{9}$ , a budući da  $p \nmid 9$ , po malom Fermatovom teoremu slijedi tvrdnja zadatka.

10.  $\varphi(m) \leq m - 1$  što je manje od  $n$ , znači da je to  $\varphi(m)$  jedan od brojeva  $1, 2, \dots, n$  čiji je umnožak upravo  $n!$

Za paran  $n$  imamo:

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1), \quad \gcd(n - 1, n + 1) = 1$$

i  $\gcd(2, n \pm 1) = 1$ . Neka je  $m = n + 1$ . Eulerov teorem daje  $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ . Budući da je  $\varphi(m) \leq m - 1 \leq n$ , imamo  $\varphi(m) \mid n!$ , stoga je  $n! = k \cdot \varphi(m)$  za neki  $k$  iz čega slijedi  $2^{n!} = \left(2^{\varphi(m)}\right)^k \equiv 1 \pmod{m}$ . Analogno i za  $m = n - 1$ . Zaključili smo da i  $n - 1$  i  $n + 1$  dijele  $2^{n!} - 1$ , a dodatno su relativno prosti, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

11. Prema MFT-u vrijedi  $5^p \equiv 5 \pmod{p}$  (bez obzira na to je li  $\gcd(p, 5) = 1$ ). Primijetimo da  $p^2 \mid 5^{p^2} + 1 \implies p \mid 5^{p^2} + 1$ , tj. zapisano pomoću kongruencija:

$$5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2} \implies 5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Vrijedi  $5^{p^2} = (5^p)^p$  pa primjenom ranije spomenutog MFT-a dobijemo

$$5^{p^2} + 1 \equiv (5^p)^p + 1 \equiv 5^p + 1 \equiv 5 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

odakle postoje dvije mogućnosti:  $p = 2$  i  $p = 3$ . Provjera:

$$p = 2 \rightarrow 5^{2^2} + 1 \equiv 1^4 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$p = 3 \rightarrow 5^{3^2} + 1 \equiv (5^3)^3 + 1 \equiv 8^3 + 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

Jedini  $p$  s traženim svojstvom je 3.

12. Po malom Fermatovom teoremu vrijedi

$$q^{-1} \equiv 1 \pmod{q} \iff q \mid p^{q-1} - 1$$

Možemo slobodno dodati višekratnike broja  $q$ , zbroj će i dalje biti djeljiv s  $q$ :  $q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ . Analogno  $p \mid q^{p-1} + p^{q-1} - 1$ . Zbog činjenice da su  $p$  i  $q$  relativno prosti, slijedi tvrdnja zadatka.

13. Dovoljno je promatrati proste brojeve  $p = 4k + 3$ . Imamo  $x^2 \equiv -1 \pmod{p} \implies (x^2)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$  što je nemoguće po Malom Fermatovom teoremu.

14. Za  $p = 2$  bilo koji parni  $n$ .

Neka je  $p$  neparan i neka je  $d$  order od 2 modulo  $p$ . Tada  $d \mid p - 1$ , pa je  $d < p$  i otuda  $\gcd(d, p) = 1$ . Stoga postoji inverz  $t$  za koji je  $dt \equiv 1 \pmod{p}$ . Uzmimo  $n = dt$ . Sada  $d \mid n$  pa je  $2^n = \left(2^d\right)^t \equiv 1 \pmod{p}$ , i  $n \equiv 1 \pmod{p}$  po konstrukciji; dakle,  $2^n - n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Konačno, za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  brojevi oblika  $n + kpd$  također zadovoljavaju obje kongruencije u što se možemo uvjeriti provjerom.

15.

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = \frac{n}{2}$$

Želimo postići  $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = \frac{1}{2}$ . Ako je  $p_1 = 2$ , tada je to ujedno jedini prosti faktor, jer bi dodavanjem novih umnožak na lijevoj strani postao manji od  $\frac{1}{2}$ . Odavde je  $n = 2^k$ .

U slučaju da ne uzmemo 2 kao prosti faktor, svi  $p_i$  su neparni. Svaki faktor  $1 - \frac{1}{p_i} = \frac{p_i-1}{p_i}$  imat će paran brojnik i neparan nazivnik:

$$\frac{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_m-1)}{p_1p_2p_3\dots p_m} = \frac{1}{2} \iff 2(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_m-1) = p_1p_2p_3\dots p_m$$

Desna strana je neparan broj, a lijeva paran - kontradikcija. Uočite da smo mogli direktno dokazati da je 2 jedini mogući prosti faktor, jer umnožak na desnoj strani najviše može biti djeljiv s 2, nikako s 4, a zbog toga svaki  $(p_i-1)$  na lijevoj strani mora biti neparan.

Alternativno rješenje ([izvor](#)):

Samo neparni brojevi u skupu  $\{1, 2, \dots, 2^k\}$  su relativno prosti s  $2^k$ , a oni čine polovicu brojeva u tom skupu, stoga je  $\varphi(2^k) = \frac{2^k}{2} = 2^{k-1}$ .

Pretpostavimo da je  $n = 2^k b$  za neparan  $b > 1$ . Zbog multiplikativnosti Eulerove funkcije i  $\gcd(2^k, b) = 1$ , vrijedi:

$$\varphi(n) = \varphi(2^k b) = \varphi(2^k) \varphi(b) = 2^{k-1} \varphi(b)$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili činjenicu da je  $\varphi(n) = \frac{n}{2}$  za  $n = 2^k$ . Mi želimo:

$$\varphi(n) = \frac{n}{2} = \frac{2^k b}{2} = 2^{k-1} b$$

pa iz dvije jednakosti slijedi  $\varphi(b) = b$  što je moguće samo za  $b = 1$ , kontradikcija.

Za b)  $n = 2^a 3^b$  za prirodne  $a, b$

Za c) ne postoji takav  $n$ .

- 16.** Očito  $n$  ne može biti paran broj jer paran broj ne može biti djelitelj neparnog broja. Dakle  $\gcd(2, n) = 1$ .

Ako je  $n$  prost broj, prema MFT-u vrijedi  $2^n \equiv 2 \pmod{n}$ , a tvrdnja zadatka je  $2^n \equiv 1 \pmod{n}$ . Kombiniranjem te dvije kongruencije slijedi  $2 \equiv 1 \pmod{n}$  što je ekvivalentno  $n \mid 1$ , kontradikcija.

U drugom slučaju neka je  $p \geq 3$  najmanji prosti djelitelj broja  $n$ , dakle  $p \mid 2^n - 1$ , što je ekvivalentno  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ , a po malom Fermatu imamo  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Neka je  $d$  order od 2 modulo  $p$ . Iz prethodne dvije kongruencije se vidi  $d \mid n$  i  $d \mid p-1$ , iz potonjeg slijedi  $d \leq p-1 < p$ , ali zbog minimalnosti  $p$  to forsira  $d = 1$ . Međutim,  $d = 1$  bi značilo da je  $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$ , što ne vrijedi ni za jedan  $p$ . Dakle, ne postoji takav  $n$ .

- 17.** *Prilagođeno prema ovom zadatku*, na poveznici je navedeno i rješenje koje implicitno koristi Lemu 2.

- 18.** Imamo  $c^d \equiv (m^e)^d \equiv m^{ed} \pmod{n}$ . Želimo dokazati  $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$ .

Izraz  $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$  možemo zapisati kao  $ed = k \cdot \varphi(n) + 1$  za neki  $k \in \mathbb{N}$  i uvrstiti ga u  $m^{ed}$  pa je

$$m^{ed} = m^{k \cdot \varphi(n) + 1} = m^{k \cdot \varphi(n)} \cdot m = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$$

Odavde, ako je  $\gcd(m, n) = 1$ , prvi faktor u gornjem izrazu kongruentan je  $1 \pmod{n}$  prema Eulerovom teoremu, pa je dokaz izravno gotov:

$$c^d \equiv m^{ed} \equiv \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \equiv 1^k \cdot m \equiv m \pmod{n}$$

U drugom slučaju, neka je  $\gcd(m, n) = p$ . To možemo napraviti bez smanjenja općenitosti jer je  $n$  umnožak dva prosta faktora pa je svejedno koji je  $p$ , a koji  $q$ . Osim toga,  $\gcd(m, n) \neq n$  jer je  $m < n$  pa je nemoguće da je  $n$  faktor od  $m$ .

Ako je  $m$  djeljiv brojem  $p$ , svaki njegov višekratnik također je djeljiv brojem  $p$  i vrijedi  $m^{ed} \equiv m \pmod{p}$ . S druge strane, sigurno je  $\gcd(m, q) = 1$  (u suprotnom bi  $q$  bio djelitelj broja  $m$ , a kako je  $p$

isto djeljitelj  $m$ ,  $m$  bi bio djeljiv i njihovim umnoškom, odnosno  $n$ , što je kontradikcija uvjetu  $m < n$ ), pa je prema Eulerovom teoremu  $m^{\varphi(q)} = m^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ , iz čega slijedi

$$m^{ed} = m^{\varphi(n) \cdot k} \cdot m = \left(m^{q-1}\right)^{(p-1) \cdot k} \cdot m \equiv 1^{(p-1) \cdot k} \cdot m \equiv m \pmod{q}$$

U drugoj jednakosti uvrstili smo  $\varphi(n) = \varphi(pq) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p-1)(q-1)$ .

Konačno, iz dvije relacije  $m^{ed} \equiv m \pmod{p}$  i  $m^{ed} \equiv m \pmod{q}$  vrijedi  $m^{ed} \equiv m \pmod{pq = n}$ . (koristeći svojstvo na kraju uvoda i korišteno više puta u prijašnjim rješenjima)

Ovaj zadatak je osnova RSA kriptografije koja se zasniva na problemu faktORIZACIJE velikih brojeva.

## 13.5. X3: Emanuel Bajamić - Kombinatorna geometrija

### Predavanje

### Hintovi

### Rješenja

1. Slično kao u prošlom zadatku, uzmemo neke dvije točke s konveksne ljske. Nazovimo te dvije točke  $A, B$  i sortirajmo ostale po  $\angle AXB$ , te provuci kružnicu kroz  $A, B$  i  $n + 1$ -tu točku u tom poretku. Prvih  $n$  točaka je sigurno unutra, a ostalih  $n$  vani zbog poučka o obodnom i središnjem kutu.
2. Neka su zadane točke tako da nisu sve na istom pravcu. Konkretno, može se pokazati da tada moraju postojati po barem tri crne i tri bijele točke. Pretpostavimo suprotno, da je  $S$  konačan. Tada postoji konačno mnogo točaka svake boje, pa posebno postoji konačno mnogo jednobojnih trokuta. Uzmimo trokut najmanje površine koji ima vrhove iste boje. No, tada na svakoj stranici se trebaju nalaziti točke druge boje, a lako se pokaže da je trokut koje čine te tri točke strogo manje površine od promatranog. Dakle, pretpostavka da je  $S$  konačan je kriva - tj. moraju sve biti na istom pravcu ako ih je konačno mnogo.
3. Rješenja županijskog natjecanja 2020.
4. Nije teško pokazati da svaku od tetiva možemo "iskriviti" do kružnog luka koji je strogo dulji. No, iz uvijeta da svaki promjer siječe najviše  $k$  tetiva, onda je garantirano da svaku točku i njoj nasuprotnu pokriva najviše  $k$  tetiva (što onda nije teško poistovjetiti s opsegom  $k$  kružnica).
5. Promotrimo stranicu poliedra s najviše vrhova, i označimo taj broj vrhova s  $n$ . Primijetimo da svake dvije stranice mogu dijeliti najviše 1 brid. Naime, kada to ne bi bio slučaj, mogli bismo naći 3 nekolinearne točke koje se nalaze u obje ravnine (točnije, vrhove tih dvaju bridova koji sigurno nisu kolinearni), a ravnina je jednoznačno određena trima točkama, pa bi se te dvije stranice nalazile u istoj ravnini, što je nemoguće. Stoga će  $n$  stranica dijeliti brid s ovom koju smo izdvojili (jer naša stranica ima točno  $n$  bridova). No, te stranice mogu imati  $\leq n$  vrhova, a sigurno ne mogu imati 1 vrh, pa za tih  $n$  stranica ostaje  $n - 1$  mogućnosti za broj vrhova. Stoga po Dirichletovom principu zaključujemo da tvrdnja vrijedi.
6. Nije teško dokazati da su opseg i površina oblika invarijante na potez. Međutim, budući da su opseg i površina jednakostraničnog trokuta i kvadrata međusobno povezani, nije teško dokazati da se barem jedan od invarijanata treba promijeniti. Primjerice, neka je opseg konstantan,  $P_{\text{trokut}} = P_{\text{kvadrat}} = P$ .

$$A_{\text{trokut}} = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \neq A_{\text{kvadrat}} = \left(\frac{P}{4}\right)^2$$

7. Ono što nam je bitno je da postoji **konačno mnogo** načina na koje možemo spojiti  $n$  točaka s drugih  $n$  točaka. Između njih odaberemo ono spajanje  $\mathcal{E}$  koje ima najmanju sumu duljina  $n$  dužina (znamo da takvo postoji jer tih spajanja ima konačno mnogo).

Pretpostavimo da postoje dvije dužine koje se sijeku i označimo ih s  $\overline{P_1C_1}, \overline{P_2C_2}$  (pritom su  $P_1, P_2$  plave, a  $C_1, C_2$  crvene točke). Ukoliko te dužine zamijenimo dužinama  $\overline{P_1C_2}, \overline{P_2C_1}$ , dobit ćemo spajanje  $\mathcal{E}'$  koje ima manju ukupnu duljinu dužina.



Naime, ukoliko označimo sjecište dužina  $\overline{P_1C_1}, \overline{P_2C_2}$  sa  $S$ , prema nejednakosti trokuta primijenimoj na trokute  $P_1C_2S$  i  $P_2C_1S$  slijede nejednakosti

$$|P_1C_2| < |P_1S| + |C_2S|,$$

$$|P_2C_1| < |P_2S| + |C_1S|.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti imamo

$$|P_1C_2| + |P_2C_1| < (|P_1S| + |C_1S|) + (|C_2S| + |P_2S|) = |P_1C_1| + |P_2C_2|.$$

Ovo je u kontradikciji s odabirom spajanja. Dakle,  $\mathcal{E}$  je traženo spajanje.

8. Uzmi neki pravac koji raspolovljava opseg te ga rotiraj oko mnogokuta, čuvajući svojstvo za opseg, dok se ne vrati u početni položaj. Ako je na početku površina desne polovice mnogokuta  $X$ , a na kraju  $Y$ , razlike desne i lijeve polovice se iz  $X - Y$  promijenila u  $Y - X$ , a neprekidna je, pa je nekad bila 0.
9. Može se, recimo, dići okomice na svaku stranicu iz njenih krajeva. Dio  $B$  koji ta pruga u ravnini siječe je sigurno dulji od stranice (jednakost se postiže ako su stranice paralelne, inače nejednakosti trokuta nabacujemo). Lako se pokaže da je zbog konveksnosti  $A$  sigurno čak dio opsega  $B$  "viška".
10. Zadatak je zapravo podvaljena vjerojatnostna metoda - tj. na neki način, probat ćemo što gušće pokriti točke i nadati se da ništa neće završiti "između". Naime, optimalno pakiranje krugova u ravninu je takozvano "heksagonalno" (tj. u vrhove pravilnog šesterokuta), koje popunjava  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.9069$  prostora. Dakle, vjerojatnost da pokrijemo bilo koju točku je 0.9069, pa je očekivani broj pokrivenih točaka  $9.069 > 9$ , pa postoji barem neki slučaj u kojim smo pokrili svih 10 (očekivanu vrijednost možete shvatiti kao aritmetičku sredinu na neki način; naravno da sredina ne može biti veća od 9 ako su u svakom slučaju pokriveno najviše 9 točaka). Zadatak možete naći i u [MBL Balkans 2023. brošuri](#) na 68. stranici.
11. Strategija će se sastojati od dva dijela: prvi dio gdje miš ima veću kutnu brzinu (pa može doći na proizvoljno mjesto u usporedbi s mačkom), i zatim ravnocrtnog plivanja iz jezera. Za sve detalje toplo preporučam da pogledate ovaj [Numberphile video](#).
12. [Kellyjev dokaz](#)
13. Pretpostavimo suprotno, odnosno da kroz svako sjecište pravaca prolaze barem 3 pravca. Promotrimo sve parove nekog pravca i nekog sjecišta druga dva pravca te iz tog konačnog skupa odaberimo par s najmanjom udaljenosti između pravca i sjecišta. Označimo pravac s  $p$  i sjecište sa  $S$ . Povucimo okomicu  $q$  iz  $S$  na  $p$  te označimo sjecište  $p$  i  $q$  s  $T$ . Kako kroz  $S$  moraju prolaziti barem 3 te sva 3 sijeku  $p$ , barem 2 od tih sjecišta se moraju nalaziti s iste strane točke  $T$ . Označimo ta sjecišta s  $A$  i  $B$  tako da je  $A$  bliže točki  $T$  te promotrimo trokut  $\triangle SBA$ . Kut  $\angle SAB$  mora biti ili pravi kut (ako  $A = T$ ) ili tupi kut (jer je kut  $\angle SAT$  šiljasti kut budući da se nalazi u pravokutnom trokutu  $\triangle SAT$  a nije sam pravi kut). Dakle stranica nasuprot vrhu  $A$  je najdulja stranica trokuta  $\triangle SBA$  odnosno visina iz vrha  $A$  je najkraća visina trokuta  $\triangle SBA$ . Dakle visina iz vrha  $A$  kraća je od visine iz vrha  $S$  odnosno udaljenost pravca  $BS$  od sjecišta  $A$  kraća je od udaljenosti pravca  $AB$  od vrha  $S$ .  
Ali to je nemoguće jer smo pretpostavili da je udaljenost pravca  $p$  (koji je isto što i pravac  $AB$ ) od sjecišta  $S$  najkraća od svih takvih udaljenosti. Dakle, došli smo do kontradikcije iz čega zaključujemo da postoji sjecište pravaca kroz kojeg prolaze najviše 2 pravca čime smo dokazali tvrdnju zadatka.
14. [IMOSL C2 2013](#)
15. [IMO 2002 P6](#)

## 14. Rješenja za četvrtu grupu

### 14.1. G4: Marija Dora Marodi - Ko Ameri

Predavanje

Hintovi

Rješenja

#### Rješenja

1. Prvo treba pokazati jednu lemu, koja kaže da je simedijalna točka trokuta  $ABC$ , nazovimo je  $K$  težište trokuta čije su točke nožišta okomica iz  $K$  na stranice trokuta  $BC, AC, AB$ , nazovimo ih redom  $X, Y, Z$ . Neka je

$$P = KX \cap YZ.$$

Tada vrijedi

$$\angle ZKP = \angle B \quad \text{i} \quad \angle YKP = \angle C,$$

pa slijedi

$$\frac{ZP}{YP} = \frac{KZ \sin \angle B}{KY \sin \angle C} = 1,$$

što je i trebalo dokazati.

Ovdje smo koristili činjenicu da vrijedi

$$\frac{KZ}{KY} = \frac{AB}{AC}.$$

Sada možemo krenuti rješavati zadatak. Neka je

$$P = KX \cap YZ$$

polovište dužine  $YZ$ .

Budući da je  $KX \parallel AD$ , za dokaz kolinearosti točaka  $M, N, K$  dovoljno je pokazati da su točke  $M, A, H$  kolinearne, gdje je  $H$  refleksija točke  $X$  preko  $K$ .

Kako je  $K$  težište trokuta  $XYZ$ , točka  $H$  je ujedno refleksija točke  $K$  preko točke  $P$ .

Promotrimo sada trokut  $AYZ$ . Točka  $K$  leži na kružnici s promjerom  $AYZ$ , pa vrijedi

$$\angle AYK = \angle AZK = \frac{\pi}{2}.$$

Budući da je  $P$  polovište dužine  $YZ$ , slijedi da je  $H$  ortocentar trokuta  $AYZ$ .

Posebno, to znači da su dužine  $AH$  i  $AK$  izogonalne u kutu  $\angle YAZ$ , što je upravo kut  $\angle BAC$ .

Kako je  $AK$  simedijana, slijedi da je  $AH$  medijana, odnosno da su točke  $A, H, M$  kolinearne.

Time je dokazano da su točke  $N, K, M$  kolinearne.

2. aops

3. aops

4. Prvi dio se iz sličnosti  $\triangle BKF$  i  $\triangle CKE$  i iz poučka o simetrali kuta dobiva da je  $D$  na simetrali  $\angle BKD$  iz čega slijedi tvrdnja zadatka, a ovo je za znatiželjne: [aops](#)
5. Neka je  $R$  točka takva da je četverokut  $APBR$  paralelogram. Otuda slijedi da vrijedi

$$AR \parallel BP \parallel QC \quad \text{i} \quad AR = BP = CQ.$$

Prema tome, četverokut  $ARQC$  je paralelogram. Iz toga slijedi

$$\angle ACQ = \angle ARQ.$$

No vrijedi i

$$\angle ACQ = \angle ABQ,$$

pa zaključujemo da su točke  $A, R, B, Q$  kokružne.

Nadalje,

$$\angle PAB = \angle ABR = \angle AQR = \angle QAC,$$

odakle slijedi

$$\angle QAB = \angle PAC.$$

6. [Vietnam 2017 problem 3 a\)](#)
7. [Andrew Wu, GGG4 Mock – Problem 1](#)
8. [TSTST 2020/2](#)
9. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h277108p1499412>Iran TST 2009/9
10. USA TST 2015
11. USAMO 2016
12. USAMO 2017

## 14.2. C4: Emanuel Bajamić - Kombe nabacane lopatom

Predavanja

Hintovi

Rješenja

1. Neko županijsko zadnjih 10 godina, indukcija ga svakako ubije.
2. <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/> ZUP 2021, 3.5
3. <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-drz-1234-AB-zad+rj/> DRZ 2011, 1.5
4. ZUP 2023, 2.5
5. Ako zamislimo skup djelitelja  $n$  kao  $t$ -dimenzionalni kvadar gdje je  $t$  broj različitih prostih djelitelja od  $n$ , dovoljno je dokazati da ga možemo ispuniti "zmijicom", što je očito ali se može lako formalizirati indukcijom po  $t$ .
6. <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2017/2017-SS-drz-1234-AB-zad+rj/> DRZ 2017, 2.5
7. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2011-notes.pdf> IMO 2011, P4
8. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2021-notes.pdf> IMO 2021, P5
9. <https://natjecanja.math.hr/hjmo-hmo-hmod/hmo/hmo-arhiva/> HMO 2017 IMO test, P2
10. The answer is all such  $\mathcal{S}$  with  $|\mathcal{S}| = 1, 2$ .

For  $\mathcal{S} = 2^n$ , we take  $f(x) = 2^{n+1}x - 2^n$ , which we may check works.

For  $\mathcal{S} = 2^m, 2^n$  and  $m < n$ , we take

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 2^n & x \text{ even} \\ 2^{n+1}x - (2^{m-1} + 2^{n-1}) & x \text{ odd} \end{cases}$$

This works since  $f(a+b) - f(a) - f(b)$  equals  $2^m$  when  $a, b$  are both odd, and equals  $2^n$  otherwise.

We now show this is necessary. The key is the following:

Lemma: For nonnegative integers  $a, b, c, d$ ,

$$2^a + 2^b = 2^c + 2^d \implies \{a, b\} = \{c, d\}.$$

Proof. Follows by size. ■

Now the key is that for positive integers  $a, b, c$ ,

$$\begin{aligned} & (f(a+b+c) - f(a+b) - f(c)) + (f(a+b) - f(a) - f(b)) \\ &= (f(a+b+c) - f(a+c) - f(b)) + (f(a+c) - f(a) - f(c)). \end{aligned}$$

Thus by the lemma and rearranging, at least one of

$$f(a+b) + f(c) = f(a+c) + f(b)$$

or

$$f(a+b+c) + f(a) = f(a+b) + f(a+c)$$

is true.

Now set  $(a, b, c) = (1, n, c)$  and denote  $d_n = f(1 + n) - f(n)$ , so this rewrites as

$$d_c = d_n \text{ or } d_{c+1} + \dots + d_{c+n} = d_1 + \dots + d_n.$$

Now the main claim is the following:

Claim: The multiset  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  is a submultiset of  $\{d_c, d_{c+1}, \dots, d_{c+n}\}$  for every  $n, c$ . Proof. We use induction on  $n$ . For the base case, setting  $n = 1$  above gives  $d_c = d_1$  or  $d_{c+1} = d_1$ , as desired.

For the inductive step, if  $d_c = d_n$  then the result holds by the inductive hypothesis on  $(n-1, c+1)$ . Otherwise,  $d_{c+1} + \dots + d_{c+n} = d_1 + \dots + d_n$ . However, by the inductive hypothesis, there is some  $i$  with  $1 \leq i \leq n$  such that

$$d_{c+1} + \dots + d_{c+i-1} + d_{c+i+1} + \dots + d_{c+n} = d_1 + \dots + d_{n-1},$$

so  $d_{c+i} = d_n$ . This completes the induction. ■

We now show there are at most 2 distinct  $d_i$ .

Suppose otherwise, and let  $d_{n+1}$  be the first  $d_i \neq d_1$ . If any  $d_k \neq d_1, d_{n+1}$  exists, then using the claim on  $(n, k-n)$  and  $(n, k)$  implies that

$$d_{k-n} = \dots = d_{k-1} = d_{k+1} = \dots = d_{k+n} = d_1.$$

However, now no element of  $\{d_{k-1}, d_k, \dots, d_{k+n}\}$  equals  $d_{n+1}$ , contradicting the claim.

Thus there are at most two  $d_i$ , say  $s, t$  with possibly  $s = t$ .

Now  $f(a+b) - f(a) = d_a + \dots + d_{a+b-1}$  equals either  $d_1 + \dots + d_{b-1} + s$  or  $d_1 + \dots + d_{b-1} + t$ , by the claim and by above. However  $d_1 + \dots + d_{b-1} = f(b) - f(1)$ . Thus

$$f(a+b) - f(a) - f(b) \in \{s - f(1), t - f(1)\}$$

so  $|\mathcal{S}| \leq 2$  as desired.

11. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2017-notes.pdf> IMO 2017, P5
12. Konstrukcija lagana,  $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ . Vrhovi su krugovi. U retku poveži crveni krug sa oba kruga ispod njega, bijele krugove lijevo od crvenog sa lijevim krugom ispod njega i desne sa desnim. ovo daje binarno stablo. Napravimo restrikciju na crvene krugove. Njih je  $n$  i svaki ima maksimalno dvoje djece pa je maksimalna dubina barem  $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ .
13. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2018-notes.pdf> IMO 2018, P3
14. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2011-notes.pdf> IMO 2011, P2
15. <https://www.imo-official.org/problems/IMO2023SL.pdf> ISL 2023, C4
16. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2021-notes.pdf> IMO 2021, P6
17. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2016-notes.pdf> IMO 2016, P6
18. IMO 2020, P3
19. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2017-notes.pdf> IMO 2017, P3
20. <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2024-notes.pdf> IMO 2024, P3
21. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h3610448p35340921>

**22.** Note that  $a_n = n + c$  for fixed sign choice work and  $c \geq 0$ . WLOG  $p < q$ . Define  $P_i, p_i$  as the maximum and minimum of  $\{a_i, \dots, a_{i+p}\}$ . Define  $Q_i, q_i$  similarly. Let  $k = p \cdot \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor$ . The main idea now is that for  $0 \leq i \leq k$ ,  $a_{n+i} - a_n \leq k$ . Thus, the indices for  $Q_i, q_i$  must be sufficiently spaced out. Further note that  $k \geq \left\lfloor \frac{q+2}{2} \right\rfloor$ . This means that in intervals of length  $\leq q + 2$ , the minimal indices lie on one side and the maximal indices lie on the other.

Claim: If an index  $i$  of  $q_i$  is less than an index  $j$  of  $Q_i$ , then there exists a monotonic subsequence of  $a_i$  whose indices differ by at most  $q + 1$ . Proof. We may take  $i$  and  $j$  to be the two indices closest to each other in a unique fashion. Add  $a_j$  to be our sequence. Now consider the intervals  $I = \{a_i, \dots, a_{i+q}\}$  and  $I' = \{a_{i+1}, \dots, a_{i+q+1}\}$ . If  $a_{i+q+1} = q_i$  as well, then we may apply our earlier note to the interval  $I \cup I'$  to get a contradiction. As such,  $a_{i+q+1} > q_i$ , so the minimal element of  $I'$  increases compared to  $I$ , and thus the maximal element of  $I'$  must as well. Thus  $a_{i+q+1} > Q_i$  is a new maximal element, and there exists an index  $k$  such that  $a_k \in I'$  is minimal. We may then consider  $i = k, j = i + q + 1$ , and repeat this. ■ By symmetry in taking a negative sign, if instead  $i > j$ , then we get a monotonic decreasing subsequence, which is impossible. Thus, it follows that  $i < j$  always holds.

Claim: There exists some  $C$  such that  $a_n < n + C$  for all  $n$ . Proof. Note that  $a_{i+q} \leq a_i + q$ , so applying division algorithm suffices. ■

Claim: We have that the indices of  $Q_i$  and  $q_i$  differ by  $q$  for all but finitely many  $i$ . Proof. Let  $q_i, Q_i$  have indices  $i, j$ . Now consider the minimal and maximal elements  $a_m, a_n$  in  $\{a_{j-p}, \dots, a_{j+q-p}\}$  so  $n \leq j + q - p$  and  $j - p \leq m \leq j + q - p - k \leq j$ . We have that

$$a_n = a_m + q \geq a_j + q - p = a_i + 2q - p$$

so if  $j \neq i + q$ , then it follows that  $a_n > a_j + (n - j)$ . As such, for any chain from minimal index  $i$  to a maximal index of  $Q_i$  and so forth  $a_{t_0} \mapsto a_{t_1} \mapsto \dots$ , there are at most finitely many times where  $t_{i+1} \neq t_i + q$ . Since each chain thus has natural density  $\frac{1}{q}$ , there are finitely many chains and thus the result follows. ■ As such,  $a_{i+q} = a_i + q$  holds for all sufficiently large  $i$ , so  $f(x) > x + C$  holds for some  $C$ .

Claim: Likewise,  $P_i$  and  $p_i$  have indices differing by  $p$  for all but finitely many  $i$ . Proof. Consider the chain  $a_i \mapsto a_{i+p} \mapsto a_{i+2p} \mapsto \dots$ . The earlier fact means that  $a_{i+p} = a_i + p$  must occur all but finitely many times in this chain. These chains have density  $\frac{1}{p}$  which finishes. ■ As such, for sufficiently large  $i$ , we get that  $a_{i+q} = a_i + q, a_{i+p} = a_i + p$ . By division algorithm, this implies that  $a_{i+1} = a_i + 1$  so the sequence  $a_i$  is eventually linear with difference 1, say starting at  $a_N, a_{N+1}, \dots$ . We may now consider the interval starting with  $a_{N-1}$  and so forth to show that  $a_i$  is always linear with slope 1, which finishes.

**23.** <https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2025-notes.pdf> IMO 2025 P6

## 14.3. N4: Lana Milani - TB polinomi

Predavanje

Hintovi

Rješenja

### Rješenja

1. [link](#)
2. [link](#)
3. [link](#)
4. [link](#)
5. [link](#)

## 14.4. X4: Karlo Jokoš - Local ideja

### Predavanje

### Hintovi

### Rješenja

1. Pretpostavimo da nam je dana proizvoljna konfiguracija. Primijetimo da, ako zagrada koja se množi u gornjem izrazu sadrži više od 3 jedinice koje se zbrajaju, tada možemo povećati vrijednost izraza zamjenom trećeg znaka  $+$  s  $)$ . U suštini, radimo sljedeće:

$$\cdots(1+1+1+1+1)\cdots \longrightarrow \cdots(1+1)\cdot(1+1+1)\cdots$$

Dakle, konstrukcija s najvećom vrijednošću mora biti umnožak zagrada koje se sastoje od 2 ili 3 jedinice. U ovom trenutku možemo jednostavno „ručno provjeriti” koliki je maksimum, jer izraz može poprimiti jednu od sljedećih vrijednosti

$$2^{1008}, 2^{1005} \cdot 3^2, 2^{1002} \cdot 3^4, \dots, 2^3 \cdot 3^{670}, 3^{672}$$

I možemo vidjeti da je maksimum doista  $3^{672}$ .

2. Putnam 1979
3. BAMO 2017 12:3
4. Algoritmi 1
5. USA TST 2011 P2
6. IMO 1997 P3
7. USAMO 2022 P2
8. USAMO 2008 P3
9. Algoritmi 1
10. IMO 2014 P6



## **IV. Ostalo**

## 15. Projekti

### O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 3 do 9 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz nekoliko popodneva detaljnije odabranu temu. Na ovogodišnjem je Kampu bilo ponuđeno sveukupno 5 projekata.

Većina projekata može se svrstati u neku od sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema, a što su naučili na projektima možete pročitati u nastavku!

### 15.1. P1: Svi možete riješiti P6, ali ne i P7, Emanuel Bajamić i Lana Milani

Na ovom projektu bavili smo se posebno zahtjevnim zadacima s Međunarodne matematičke olimpijade (IMO), specifično trećim i šestim zadacima (P3 i P6). Cilj projekta bio je pokazati da takvi zadaci nisu nerješivi, već da se uz pravilan pristup, razvijenu intuiciju i sustavan rad mogu uspješno riješiti. Posebnu pažnju posvetili smo učenju kako pristupiti teškim problemima i kako razmišljati pri njihovom rješavanju.

Projekt je trajao pet dana, a svaki dan bio je posvećen rješavanju jednog ili dva IMO zadatka iz različitih matematičkih područja.

- **IMO 2016 P6 (kombinatorika)** U zadatku smo morali poslagati puževe te smo gledanjem šire slike napravili trivijalan korak koji je znatno olakšao zadatak
- **IMO 2020 P3 (kombinatorika)** Uparivanje kamenčića na temelju težine nam je omogućilo da u zadatku moramo promatrati samo boje kamenčića te smo sveli zadatak na teoriju grafova i tako ga riješili.
- **IMO 2021 P6 (algebra)** U zadatku smo zapisali brojeve u bazi  $n$ . Zatim smo umjesto po skupovima promatrali zbroj po elementima originalnog skupa. Time smo dobili kontradikciju da skup mora imati barem  $m/2$  elemenata zbog broja ukupnih mogućnosti.
- **IMO 2022 P3 (teorija brojeva)** U zadatku smo uzeli najveći prost broj i dobili smo da su brojevi oko njega određeni. Nakon toga smo dokazali da možemo maknuti taj broj i reducirati skup.
- **IMO 2018 P3 (kombinatorika)** U zadatku smo promatrali put koji prolazi po većem od dvaju sljedećih elemenata. Zatim smo uzeli novi trokut te dobili kontradikciju s najvećim brojem koji se pojavljuje.

Kroz ovaj projekt stekli smo iskustvo u radu s vrlo teškim matematičkim zadacima te razvili bolju intuiciju za njihovo rješavanje. Naučili smo da uspješno rješavanje IMO zadataka zahtijeva upornost, kreativnost i spremnost na istraživanje različitih pristupa.

## 15.2. P2: Vuku se linije, Matej Vojvodić i Marija Dora Marodi

Opće je poznato da Hrvati ne znaju geometriju (potvrđeno od strane mdma i mv) pa su mentori Marija Dora Marodi i Matej Vojvodić odlučili napraviti projekt posvećen strategijama kako ne bit zadnji na natjecanju zbog G. Prvog dana projekta upoznali smo se s nekim opće poznatim (neki bi rekli trivijalnim) činjenicama poput zbroja kuta u trokutu i karakterističnih točaka trokuta. Definirali smo i središnji i obodni kut u kružnici te iskazali poučak o tetivi i tangenti. Drugog smo dana dokazali 3 najdraže leme autora teksta, a to su Lema o trozubcu i leme o preslikama ortocentra.

Trećeg smo dana definirali pripisanu kružnicu i dokazali što vrijedi za odsječke tangente. Također smo rješavali primjere i zadatke homotetijom (homotetikicom). Četvrtog dana smo naučili (im)potenciju točke u odnosu na kružnicu, radikalnu os i središte te dokazivali Feuerbachovu (devetnička, kružnica 9 točaka, Eulerova...) kružnicu i pokazali gdje je središte te kružnice. Zadnjeg dana smo rješavali zadatke s relija, pisali knjigu, G su snimali video za bodove i završili najjači projekt ikad.

## 15.3. P3: Validan dokaz, Martin Vrbovčan i Dario Vuksan

Na projektu *Validan dokaz* učili smo pomoću simbola  $\wedge, \vee, \perp, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$  i 13 pravila prirodne dedukcije pisati dokaze i rješavati logičke zadatke na način koji se jako lako provjeri i nema nijednu rupu. Osim same logike, naučili smo prevoditi rečenice na hrvatskom jeziku, kao i matematičke zadatke u logički jezik. Usto smo rješavali natjecateljske zadatke i analizirali te diskutirali o pogreškama u tuđim, nerijetko nepotpunim i tragikomičnim rješenjima tih zadataka.

Naučili smo pet metoda rješavanja zadataka, a to su: direktan dokaz, kontradikcija, kontrapozicija, dokaz protuprimjerom i podjela na slučajeve.

Najbolji dio projekta definitivno je bila diskusija o tome koliko bi neko rješenje nosilo bodova na pravom natjecanju, gdje bi polaznici otvoreno iznosili svoje mišljenje usprkos tome što se ono često razlikovalo od mišljenja mentora.

Naučili smo o negiranju i korištenju egzistencijalnog kvantifikatora,  $\exists$ , te univerzalnog kvantifikatora,  $\forall$ . Egzistencijalni kvantifikator kaže da postoji predmet za koji vrijedi neko pravilo (postoji  $x$  takav da vrijedi  $A$ ). S druge strane, univerzalni kvantifikator nalaže da neko pravilo vrijedi za sve predmete u domeni koju razmatramo (za sve  $x$  vrijedi  $A$ ).

Ponosni smo jer je naš najmlađi polaznik naučio pravilno pisati simbol negacije  $\neg$ .

Svidio nam se različit pristup oba mentora, zadovoljni smo naučenim i svi bismo ponovili ovu pustolovinu i preporučili drugima.

## 15.4. P4: Pa nije nuklearna fizika, Lara Jana Pačak

Ovaj projekt predstavlja uvod u nuklearnu fiziku, osmišljen s ciljem da se složeni fizički koncepti približe matematičarskoj publici na intuitivan, sistematičan i povremeno duhovit način. Umjesto klasičnih tema poput mehanike ili elektromagnetizma, fokus je stavljen na nuklearnu fiziku kao relativno modernu i često zapostavljenu oblast u školskom obrazovanju.

Projekt započinje historijskim razvojem nuklearne fizike kroz ključna otkrića elektrona, atomske jezgre, protona i neutrona, čime se postavlja temelj za razumijevanje strukture jezgra. Uvedeni su osnovni pojmovi poput nukleona, nuklida, izotopa, izotona i izobara, te su objašnjene osnovne osobine jezgra: dimenzije, masa, gustina i radijus. Poseban naglasak stavljen je na energiju veze i defekt mase kao ključne koncepte koji objašnjavaju stabilnost jezgara.

U nastavku se razmatraju fundamentalne sile u prirodi, s posebnim fokusom na jaku nuklearnu silu koja omogućava postojanje stabilnih jezgara uprkos elektromagnetnom odbijanju protona. Zatim se uvodi pojam radioaktivnosti, objašnjavaju uzroci nestabilnosti jezgara i detaljno obrađuje zakon radioaktivnog raspada, vrijeme poluraspada i aktivnost. Matematički dodatak omogućava bolje razumijevanje

eksponencijalnih i logaritamskih funkcija koje se prirodno pojavljuju u opisu radioaktivnog raspada. Projekt dalje obrađuje nuklearne reakcije, fisiju i fuziju, uz objašnjenje energetskih aspekata ovih procesa i njihove primjene u energetici i astrofizici. Posebna pažnja posvećena je nuklearnim reaktorima, uslovima za njihovu realizaciju, kontroli lančane reakcije i sigurnosnim aspektima, uključujući primjer Černobilske nesreće i njene dugoročne posljedice.

Značajan dio projekta posvećen je radioaktivnom ugljiku  $^{14}\text{C}$  i metodi radiokarbonskog datiranja, uz objašnjenje porijekla izotopa, njegovog raspada i primjene u arheologiji. Kroz zadatke i simulacije omogućeno je praktično razumijevanje teorijskih koncepata.

Projekt se završava razmatranjem nuklearne fuzije kao budućeg izvora energije, uz opis procesa u Suncu, tehničkih izazova kontrolisane fuzije na Zemlji i savremenih istraživačkih projekata poput tokamaka i ITER-a. Time je zaokružena cjelina koja povezuje teorijske osnove, matematički aparat i savremene primjene nuklearne fizike.

## 15.5. P5: Riglob, Karlo Jokoš i Zvonko Andrijević

Riglob je skrećenica za dva pojma; Rigid i Global. Oba pojma uveo je (odnosno popularizirao) jedan od najboljih natjecateljskih matematičara Evan Chen. Riječ je o dvama znatno različitim pristupima olimpijskim zadacima te je sam projekt strukturiran tako da smo prva dva dana prolazili kroz zadatke koji su karakterizirani kao Rigid, a druga dva dana koji su karakterizirani kao Global.

### Rigid

Ovaj materijal bavi se tzv. *rigid* kombinatornim zadacima, u kojima je ponašanje strukture snažno određeno početnim uvjetima, ali je bez promjene perspektive izrazito teško pratiti i analizirati. Glavna ideja je naučiti kako dane informacije preoblikovati u prikaz koji otkriva skrivenu strukturu problema, slično kao što se u geometriji ponekad „doda pomoćna točka“ kako bi rješenje postalo jasno i prirodno. U teorijskom dijelu naglašava se kako prepoznati ovakve zadatke: stupanj slobode je malen, ponašanje sustava je forsirano, a zadatak je često maskiran kao teško prebrojavanje, iako se u pozadini radi o klasifikaciji svih mogućih slučajeva. Umjesto brutalnog računanja, naglasak je na soft tehnikama poput traženja obrazaca, raspisivanja prvih nekoliko primjera te prikazivanja elemenata u tablicama, grafovima, koordinatnim sustavima ili drugim prikladnim strukturama.

Primjeri ilustriraju kako promjena kuta gledanja može drastično pojednostaviti rješenje: od jednostavnog raspisivanja članova aritmetičkog niza, preko tabličnog prikaza binarnih nizova, do geometrijskih refleksija koje složeno gibanje svode na pravac u proširenom prostoru. U svim slučajevima pokazuje se da dobar prikaz ne samo da olakšava rješavanje, nego i daje rješenju jasnu motivaciju i estetsku vrijednost.

Završni dio sadrži izbor zahtjevnih zadataka namijenjenih vježbanju ovih ideja, s posebnim naglaskom na probleme kod kojih je pronalazak prave interpretacije ključan korak prema rješenju.

### Global

Ovaj dio materijala posvećen je tzv. *globalnim* zadacima, u kojima se ključne informacije o problemu dobivaju promatranjem cijele strukture odjednom, a ne analizom lokalnih promjena. Suprotno lokalnom pristupu, gdje se prati učinak malih modifikacija, globalni pristup nastoji obuhvatiti čitav problem jednim argumentom, često kroz prebrojavanje ili simetriju. Klasičan motivacijski primjer je Handshake lema, koja pokazuje kako jednostavna globalna relacija daje netrivialnu informaciju o grafu.

Naglašava se da ne postoji univerzalni recept za rješavanje globalnih zadataka, ali se često koriste alati poput (dvostrukog) prebrojavanja, Dirichletovog principa, bojenja te posebno matematičkog očekivanja. Uvod u matematičko očekivanje ilustriran je problemom fiksni točkova permutacije, gdje se ideja dvostrukog prebrojavanja prirodno pojavljuje kroz zbrajanje po stupcima umjesto po redcima. Time se motivira i formalno uvodi teorem o linearnosti matematičkog očekivanja, koji omogućuje rastavljanje složenih problema na jednostavne indikatorske varijable, neovisno o njihovoj međusobnoj zavisnosti. Kroz niz primjera pokazuje se snaga globalnog pogleda: umnošci razlomaka, nejednakosti dobivene nasumičnim označavanjem, problemi s očekivanjem i kombinatornim strukturama koje je gotovo nemoguće pratiti lokalno. U svakom slučaju, ključna ideja je da se problem „sagleda odozgo“, čime se izbjegava tehnička zapetljanost i dolazi do kratkih, čistih i motiviranih rješenja.

## 16. Natjecanja

Kao i svake godine, tijekom Zimske škole sudionici su se imali prilike i natjecati iz matematike. Kao i inače, jedno poslijepodne održala su se natjecanja Reli i ELMO u organizaciji mentora MNM-a.

Reli je već tradicionalno ekipno natjecanje u kojem timovi od četiri do pet učenika raznih uzrasta i predznanja imaju priliku rješavati između šest i devet zadataka iz svakog od četiri glavna područja olimpijske matematike.

Ove godine najbolje rezultate ostvarile su ekipe:

1. Bostonske palačinke – s osvojenih 187 boda!
2. Čokolino – s osvojenih 175 bodova!
3. Nizozemsko Kormilo – s osvojenih 168 bodova!

Svim sudionicima velike čestitke jer su svi timovi bili jako blizu i svi su uspjeli osvojiti preko 150 bodova!

ELMO (Ekstremno loša matematička olimpijada) je pojedinačno natjecanje na kojem natjecatelji rješavaju test od četiri olimpijska zadatka sličnih zadacima na državnim natjecanjima. Ove godine prvo mjesto uvjerljivo je osvojio Filip Šušakčević s osvojenih 29 bodova. Drugu nagradu osvojio je Ivan Katalenić s osvojenih 25 bodova, a treću nagradu osvojio je Fran Janči sa 17 bodova.

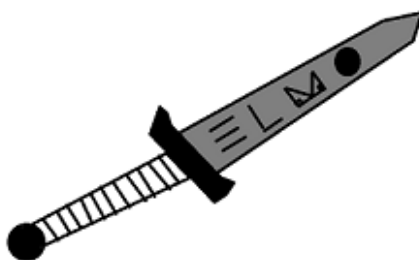
U nastavku donosimo zadatke ovogodišnjeg ELMO-a



## Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

11. Ekstremno loša matematička olimpijada  
Ogulin, 7. siječnja 2026.

1. Postoji li bijekcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takva da za svaki prirodni broj  $n > 1$  ne postoji  $M \in \mathbb{N}$  takav da za svaki  $m > M$  vrijedi  $f(m+n) \equiv f(m) \pmod{n}$ ?
2. Dan je jednakokračan trokut  $ABC$  s osnovicom  $\overline{BC}$  i upisanom kružnicom  $\omega$  sa središtem  $I$ . Neka  $\omega$  dira stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $D$ , a pravac  $DI$  siječe kružnicu  $\omega$  i pravac  $BC$  redom u točkama  $E$  i  $K$ . Pravac  $BE$  siječe  $\omega$  u  $F$ , a pravac  $DF$  siječe pravac  $BC$  u točki  $L$ . Dokaži da je  $|BK| = |CL|$ .
3. Neka je  $n$  prirodan broj. Paško ima  $n \times n$  ploču koju u potpunosti popločava  $1 \times 2$  dominima tako da nijedan domino ne izlazi iz ploče i da se nikoja dva domina ne preklapaju. Zatim na svaki domino zapiše broj njemu susjednih domina te na kraju zbroji sve zapisane brojeve. U ovisnosti o  $n$ , odredi najveći zbroj koji Paško može dobiti.
4. Neka su  $f$  i  $g$  nenul polinomi s cjelobrojnim koeficijentima i  $\deg f > \deg g$ . Ako za beskonačno mnogo prostih brojeva  $p$  polinom  $pf + g$  ima racionalan korijen. Dokaži da  $f$  ima racionalni korijen.



*Očekujemo vas pola na IMO-u (bez pritiska).*

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

## 17. Završne riječi i zahvale

Organizacija Zimske škole bila je, kao i svake godine, zahtjevna i nepredvidljiva (doduše, bar nam je postalo predviđljivo da će biti nepredvidljiva), no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jedne Zimske škole.

Naravno, Škola ne bi bila moguća bez svih mentora. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima Škole pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i nakon što je Škola završila.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu Ogulin i Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Ogulinu. Svakako se nadamo i veselimo vratiti i dogodine!

Naša najveća zahvala ide našem glavnom sponzoru, Jane Streetu. Osim što financijski podupiru sve aktivnosti Udruge, a među njima i posebno Zimsku školu, također su poslali poklone za sve sudionike.



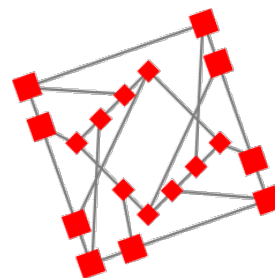
*Jane Street is a quantitative trading firm with offices worldwide. We hire smart, humble people who love to solve problems, build systems and test theories. You'll learn something new every day in our office — whether it's connecting with a colleague to share perspectives, or participating in a talk, class, or game night. Our success is driven by our people and we never stop improving.*

*Jane Street has a number of opportunities available for students - from multi-day educational programs to learn how we apply Mathematics and Computer Science in our everyday work, through to our global internships as well as full-time roles. Take a look at [www.janestreet.com](http://www.janestreet.com) to learn more!*

Istinski želimo zahvaliti i Ministarstvu znanosti, obrazovanja i mladih na financijskoj potpori za organizaciju Zimske škole i Hrvatskom matematičkom društvu, našem glavnom partneru, koji već godinama podupiru naše inicijative.



**REPUBLIKA HRVATSKA**  
**Ministarstvo znanosti,**  
**obrazovanja i mladih**



Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim ostalim donatorima i sponzorima: Podravka, Stype CS, Končar, Infobip, PBZ Card, Wiener osiguranje Vienna Insurance Group te svim drugim malim donatorima. Omogućili ste provedbu mnogih aktivnosti udruge; ne samo da se Zimska škola održi, već i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše Udruge.



Od srca zahvaljujemo i Borni Vukorepi, zaposleniku Stype-a, koji je održao popularno-znanstveno predavanje koje je svim sudionicama približilo svoj svakodnevni posao. Posebno želimo zahvaliti i Lari Jani Pačak koja je kroz svoje popularno-znanstveno predavanje učenicima približila svoj internship na CERN-u.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem i razvijanjem znanja u STEM području. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv potvrđuje da ono što radimo zaista čini razliku.

**Veliko vam hvala svima na svemu!**



## 18. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: [mnm.hr](http://mnm.hr)

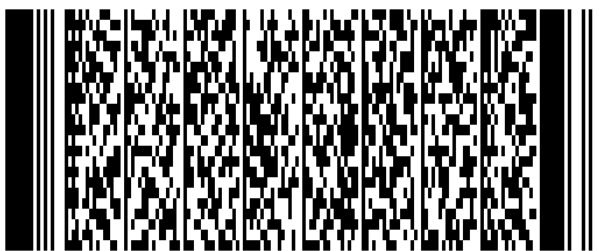
Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

### Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: [mnm@mnm.hr](mailto:mnm@mnm.hr)

kontakti i društvene mreže: [mnm.hr](http://mnm.hr)

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:



IBAN: HR5023400091110348338

*Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata i rada Udruge.*