MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

ZIMSKA ŠKOLA MATEMATIKE 2024.

2.1.-7.1.

OGULIN

Sadržaj Knjige predavanja

1. Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći sva predavanja koja su se održala na Zimskoj školi matematike 2024. godine, zajedno s većinom hintova i rješenja.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bismo zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na našu email adresu.

mentori Udruge,
25. siječnja 2024.

2. Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Slika 2.2: Jedno od prvih predavanja subotom

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema, no s vremenom se djelovanje udruge proširila i na druge aktivnosti poput zimskih škola, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama i sajmovima. . .

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, a članovi Udruge dolaze iz desetak različitih srednjih škola, iz svih dijelova Hrvatske. Važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerenje u organiziranje važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija godišnjeg matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" već desetak godina u kojem sudjeluje više od 30 država diljem svijeta!

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti sve svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te vjerujemo da kampovi svake godine postaju sve bolji. Godine iskustva starijih mentora, entuzijazam mladih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Nakon nekoliko godina uspješne organizacije Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Zimska je škola jako slična Ljetnom kampu, iako manja, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta.

Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa u kojoj projekti zauzimaju i jutro i popodne svakog dana. Nažalost, organizacija Konferencije zamrla je tijekom pandemije, no ponovno je obnovljena ovog ljeta i jedva čekamo sljedeće izdanje idućeg ljeta!

Jedan od ciljeva svih kampova je povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampovima se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

Kao i mnogih prethodnih godina, Zimska škola matematike 2024. održala se u Ogulinu. Svi sudionici bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin, a predavanja i miniprojekti su se održavala u Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin.

Slika 2.3: Učenički dom Ogulin [1]

Slika 2.4: OŠ Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin [2]

Kao i inače, Zimska škola je ove godine bila održana tijekom Zimskih praznika nastavne godine kako učenici (a ni mentori) ne bi gubili nastavu. Termin je kao i inače odabran odmah prije početka natjecanja u nadi kako će učenicima predavanja održana na kampu pomoći na školskoj, županijskoj, državnoj i višim razinama natjecanja!

[1] Izvor fotografije: Web stranica Učeničkog doma Novi Zagreb
[2] Izvor fotografije: Web stranice ogulin.eu

2.4. Aktivnosti na kampu

Kao i inače, glavne su aktivnosti na kampu bile predavanja i miniprojekti u trajanju od 4 sata. Učenici su slušali detaljno predavanja koja obrađuju određene teme natjecateljske matematike, a svako predavanje bavilo je jednim od četiri uobičajena područja olimpijske matematike. Miniprojekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz primijenjenu matematike u stvarnom životu i drugim znanostima, a čak i fakultetsku matematiku.

Nakon večere svaki dan odvijajale su se raznovrsne aktivnosti, kao što su Q&A, pub kviz, kahoot i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Osim toga, za učenike je pripremljena radionica o mentalnom zdravlju, emocijama, anksioznosti i perfekcionizmu. Učenici su se također okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", dok su ozbiljniji natjecatelji sudjelovali na još jednom izdanju ELMO-a, a osim toga KFMO je doživio još jedno izdanje!

Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi sudionici imali su slobodno vrijeme tijekom kojeg se mogu družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, bela, Coup, Exploding kittens, kockice . . .

2.4.1. Natjecanje kuća

Ove godine smo ponovo organizirali "Natjecanje kuća", u koju su svrhu učenici bili podijeljeni u četiri (otprilike) jednakobrojne kuće *Algebra*, *Kombinatorika*, *Geometrija* i *Teorija brojeva* koje su otprilike odgovarale njihovom omiljenom području, a svaku kuću vodio je par mentora.
Učenici su preko raznih zadataka koji su uključivali pjevanje pjesama, Blotta, kahoot kviza o povijesti MNM-a, prepoznavanje sudionika prošlih kampova i mnogih drugih osvajali bodove za svoje kuće.

Pobjednici drugog natjecanja su učenici kuće *Teorija brojeva* s osvojenih čak 127.933 bodova.

Slika 2.5: Pobjednička kuća "Teorija brojeva" na svečanom zatvaranju

Odmah iza njih našla se kuća *Kombinatorika* sa 117.45 bodova, a treće mjesto osvojila je kuća *Algebra* s odličnih 105.897 bodova! Daleko od postolja nije bila niti *Geometrija* s osvojenih 100.553 bodova.

2.5. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u četiri skupine ovisno o njihovom uzrastu i predznanju. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

2.6. Miniprojekti

Ove godine, zbog sve kraćih zimskih praznika, nažalost nismo imali dovoljno vremena u rasporedu za uobičajene projekte. Stoga smo u raspored ubacili čak dvije prilike za "miniprojekte" - predavanja/radionice u trajanju od samo četiri sata na kojim su učenici imali priliku čuti više o primjeni matematike u stvarnom životu ili proširiti svoje znanje o nekoj specifičnoj temi koja nije toliko usko vezana uz natjecanja. Popis i opise miniprojekata možete pronaći kasnije u knjizi!

2.7. Popis mentora

Slika 2.6: Mentorsko druženje zadnju večer kampa

Namik Agić
Borna Banjanin
Mislav Brnetić
Andrej Čizmarević
Marija Ćorić
Maja Drmač
Paula Horvat
Mislav Plavac
Hrvoje Radoš
Nika Utrobičić
Ivan Vojvodić
Matej Vojvodić

**nažalost nisu svi mentori bili prisutni cijelo vrijeme, ali im svakako zahvaljujemo na odvojenom vremenu i trudu!*

2.8. Ovaj kamp - u slikama

Slika 2.7: Jutarnja predavanja

Slika 2.8: Pobjednici i sastavljači ELMO-a

Slika 2.9: Miniprojekti

Slika 2.10: Pobjednici relija

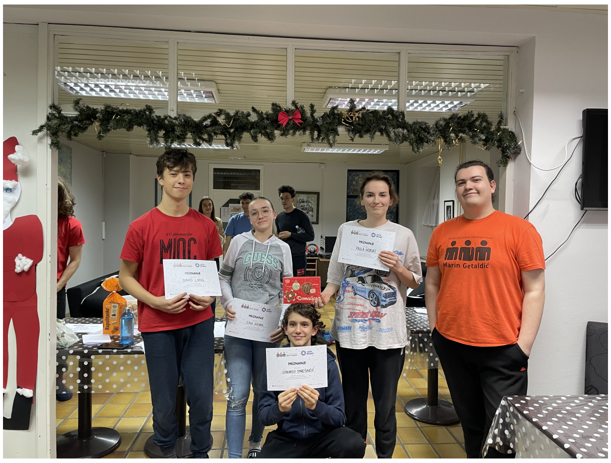
Slika 2.11: Pisanje KFMO-a

Slika 2.12: Pub kviz

Slika 2.13: Pobjednici kviza

Slika 2.14: Popularno-znanstveno predavanje

Slika 2.15: Kahoot



Slika 2.16: Pobjednici Estimathona

I. Zadaci s predavanja

3. Zadaci za prvu grupu

3.1. G1: Nika Utrobičić - Angle chasing

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

U ovom ćemo predavanju upoznati metodu "lovljenja" kuteva, koja nam može biti korisna pri rješavanju mnogih natjecateljskih zadataka. Metoda se sastoji od toga da na skici izračunamo što više kuteva, odnosno prikažemo veličine što više kuteva preko istog. To najčešće radimo koristeći da

- je zbroj kuteva u trokutu 180°
- je zbroj 2 sukuta 180°

te sljedeća 2 teorema.

Teorem 3.1.1: Poučak o obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Napomena: Neka je k kružnica sa središtem u S te A, B i C međusobno različite točke na toj kružnici. Tada kut $\angle ACB$ nazivamo **obodnim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$ u točki C, a kut $\angle ASB$ **središnjim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$.

Teorem 3.1.2: Poučak o tetivi i tangenti

Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut izmedu tangente t i tetive AB jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Vaš prvi zadatak je dokazati ta 2 teorema!

Zadaci

1. Dokažite poučak o obodnom i središnjem kutu!
2. Dokažite poučak o tetivi i tangenti!
3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.
4. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od 60°. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

5. Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?

6. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokažite da je pravac BD simetrala kuta $\angle CBA$.

7. U trokutu ABC je $\angle ABC = 45°$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka D tako da je $|CD| = 2|BD|$ i $\angle BDA = 120°$. Odredite veličine kutova trokuta ABC.

8. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredite kutove danog trokuta.

9. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

10. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$ i $\sphericalangle ACB = 40°$. Ako je $\sphericalangle DBC = 30° + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$.

11. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

12. Dokaži lemu o trozupcu: Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D sjecište BI (simetrala kuta $\angle ABC$) i opisane kružnice trokuta ABC. Lema o trozupcu kaže da je

$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte trokutu pripisane kružnice koja dira AB, BC i $\overline{AC}$.

13. Točke M i N se nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ tako da je $|\angle BMA| = |\angle NMC| = 60°$. Odredi kut $\angle MAN$.

14. Dokažite da ako je H ortocentar, a O centar opisane kružnice trokuta ABC tada je

$$\angle BAC = 60° \Leftrightarrow AH = AO.$$

Jadan Namik :(

15. Triangle ABC has circumcircle Ω and circumcenter O. A circle Γ with center A intersects the segment BC at points D and E, such that B, D, E, and C are all different and lie on line BC in this order. Let F and G be the points of intersection of Γ and Ω, such that A, F, B, C, and G lie on Ω in this order. Let K be the second point of intersection of the circumcircle of triangle BDF and the segment AB. Let L be the second point of intersection of the circumcircle of triangle CGE and the segment CA.

Suppose that the lines FK and GL are different and intersect at the point X. Prove that X lies on the line AO.

16. Let ABC be a triangle with $\angle B > \angle C$. Let P and Q be two different points on line AC such that $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ and A is located between P and C. Suppose that there exists and interior point D of segment BQ for which $PD = PB$. Let the ray AD intersect the circle ABC at $R \neq A$. Prove that $QB = QR$.

17. A convex quadrilateral $ABCD$ has an inscribed circle with center I. Let I_a, I_b, I_c and I_d be the incenters of the triangles DAB, ABC, BCD and CDA, respectively. Suppose that the common external tangents of the circles AI_bI_d and CI_bI_d meet at X, and the common external tangents of the circles BI_aI_c and DI_aI_c meet at Y. Prove that $\angle XIY = 90°$.

3.2. C1: Marija Ćorić - Prebrojavanja

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

U ovom ćemo se predavanju baviti raznim principima prebrojavanja, te ih primijenjivati u raznim zadatcima. Prebrojavanja su vrlo česta na natjecanjima i u akademskoj matematici u područjima kao što su diskretna matematika i kombinatorika, te vjerojatnost (na diskretnom prostoru događaja). Proći ćemo kroz neke osnovne principe, korisne oznake, te ćemo na kraju rješavati zadatke.

Teorem 3.2.1: Osnovni principi prebrojavanja

Neki od osnovnih principa prebrojavanja:

- **sume** (broj elemenata unije disjunktnih skupova jednak je sumi broja elemenata tih skupova - ako imamo 5 jabuka u jednoj košari i 4 kruške u drugoj košari tada imamo ukupno $5+4=9$ komada voća)
- **princip produkta** (broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova - u ormaru imamo 3 jakne i 7 majici, tada imamo $3 \cdot 7 = 21$ parova (jakna, majica))
- **princip kvocijenta** (reformulacija principa produkta - ukoliko skup S ima particiju od q skupova, od kojih svaki ima r elemenata, onda vrijedi q = |S|/r)
- **princip bijekcije** (dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih - ako svakoj lijevoj cipeli mogu jedinstveno pridružiti desnu cipelu tada ih imam jednako)
- **princip dvostrukog prebrojavanja** (ako elemente istog skupa prebrojimo na dva različita načina, rezultat mora biti isti)
- **princip matematičke indukcije** (baza, pretpostavka i korak)
- **Dirichletov princip** (ako $k+1$ zečeva želimo smjestiti u k kutija barem jedna kutija imat će više od 1 zeca)

Pri rješavanju ovih zadataka, bit će nam korisno znati pojmove kao što su:

- faktorijele: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ (posebno, $0! = 1$)
- binomni koeficijent (n *povrh* k) označava broj k-članih podskupova n-članog skupa: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Napomena 3.2.2

Prilikom rješavanja dobro je razmisliti:

- što želimo prebrojati?
- koja svojstva ima to što želim prebrojati?
- mogu li prebrojati sve osim onoga što želim prebrojati (komplement)?
- mogu li riješiti zadatak za male primjere "na prste", i generalizirati za veće?

Još jedan koristan način prebrojavanja je uz pomoć:

Teorem 3.2.3: Formula uključivanja-isključivanja

Ukoliko želimo odrediti broj elemenata više skupova koja nisu nužno disjunktna, korisno je tu situaciju vizualizirati pomoću Vennovih dijagrama. Za dva skupa lako se zaključuje i dokazuje da je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Isto se može primijeniti i za bilo koji broj skupova (kako?).

Lakši zadaci

1. Na koliko načina možemo izabrati 4 slijeda u restoranu ako na izbor imamo 3 topla, a 2 hladna predjela, 5 glavnih jela i 3 deserta?

2. Na koliko načina možemo postaviti 8 topova na šahovsku ploču tako da se nijedna dva ne napadaju?

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 djeljivih s 3 ili sa 7?

4. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

5. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, 3, \dots, 2001\}$ tako njihov zbroj bude paran?

6. Koliko prirodnih djelitelja ima broj 600?

7. Koliko ima parnih brojeva između 20000 i 70000 takvih da su znamenke svakog broja međusobno različite?

8. . Neka je S skup prirodnih brojeva čije znamenke su iz skupa 1, 3, 5, 7 takvih da se niti jedna znamenka ne ponavlja.

(a) Odredi $|S|$.

(b) Odredi $\sum_{n \in S} n$.

9. Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 studenata

(a) ako nema restrikcija,

(b) tako da u grupi budu točno 2 profesora,

(c) tako da u grupi budu barem 3 profesora,

(d) tako da određeni profesor i student ne budu u grupi?

10. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

Umjereni zadaci

11. Koliko ima najkraćih puteva cjelobrojnoj mreži od (0, 0) do $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?

(a) Bez dodatnih uvjeta.

(b) Koji prolaze točkom (p, q), gdje je $p \in \mathbb{N}, p < m, q \in \mathbb{N}, q < n$.

(c) Koji ne prolaze segmentom $[(p, q), (p + 1, q)]$, gdje je $p \in \mathbb{N}, p < m - 1, q \in \mathbb{N}, q < n$.

12. Pauk ima po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko načina se pauk može obuti ako na svaku mogu najprije mora obući čarapu, a onda cipelu. Prebrojavamo procese oblačenja, a ne konačan rezultat!

13. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. Na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da:

(a) 3 djevojke čine jedan blok;

(b) se mladići nalaze na prvoj i posljednjoj poziciji i nema susjednih djevojaka.

14. Na koliko načina možemo rasporediti n bračnih parova oko okruglog stola? Dva rasporeda smatramo jednakim ako se jedan iz drugoga može dobiti rotacijom.

(a) Bez dodatnih uvjeta.

(b) Tako da Ana i Ivan sjede jedno do drugoga. ($n \geq 2$)

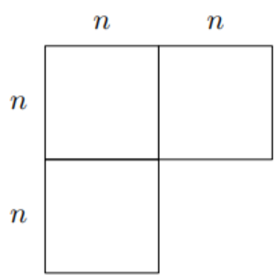
(c) Muškarci i žene alterniraju.

(d) Svaka žena sjedi do svog muža.

15. Na koliko je načina moguće podijeliti n lopti na k djece? Što ako svatko mora dobiti barem 1 loptu?

16. Neka su m i n prirodni brojevi. Višeslav je nacrtao pravokutnik duljina stranica m i n podijelio ga na $m \times n$ jediničnih kvadratića. Koliko pravokutnika ima na tom crtežu?

17. Neka je n prirodni broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 jediničnih kvadratića. Koliko je ukupno pravokutnika na crtežu nakon podjele na jedinične kvadratiće?



18. 15 učenika sudjeluje na ljetnom kampu. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Kamp traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k.

19. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Teži zadatci

20. 100 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

21. Dana je 3×9 ploča u kojoj je svako polje obojano plavo ili crveno. Dokaži da postoje 2 reda i 2 stupca (ne nužno za redom) čiji presjeci daju 4 polja iste boje.

22. Zadana je tablica $5 \times n$ kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađite najmanji n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

23. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su prijateljska ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

3.3. A1: Hrvoje Radoš - KAGH

Predavanje

Hintovi

Rješenja

"In a gentle way, you can shake the world." - Mahatma Gandhi

Uvod

Za početak, definirajmo neka svojstva te što su sredine.

Teorem 3.3.1: Svojstva uređaja realnih brojeva

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \quad \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $z \geq 0 \implies xz \geq yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, a, b \geq 0$
8. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$
9. $x \geq y \implies \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Definicija 3.3.2: Sredine za 2 broja

Sredine 2 broja su algebarski izrazi koji ovise o njima. Neka su a i b dva **pozitivna** realna broja. Definiramo 4 sredine:

- aritmetička sredina

$$A_2 = \frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina

$$G_2 = \sqrt{a \cdot b}$$

- harmonijska sredina

$$H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

- kvadratna sredina

$$K_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Napomena 3.3.3

Ovo vrijedi samo za pozitivne realne... :)

⚠ Oprez 1

Myb je prethodna napomena ipak oprez

Definicija 3.3.4: Korisne formule

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Lema 3.3.5

Za svaka dva **pozitivna** broja a, b vrijedi

$$K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2$$

Jednakost se postiže kada je $a = b$.

Dokaz. Primjetimo najprije da je zbog svojstva 2. dovoljno dokazati sljedeće 3 nejednakosti

$$K_2 \geq A_2, \quad A_2 \geq G_2, \quad G_2 \geq H_2.$$

$$G_2 \geq H_2 \iff \sqrt{a \cdot b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Nadalje, primjetimo da je H_2 dvojni razlomak, stoga ga možemo algebarskim manipualcijama pojednostaviti.

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti za H_2 i daljnje rješavanje pomoću svojstava nejednakosti dobivamo

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\iff a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$

Kako ovo vrijedi za sve realne brojeve po svojstvu 8, tvrdnja je dokazana. Druge dvije nejednakosti se analogno dokažu kvadriranjem i svođenjem na isti izraz te ih ostavljamo kao vježbu.

□

Primjetimo da se sredine mogu proširiti na n **pozitivnih** realnih brojeva.

Definicija 3.3.6: Sredine za n brojeva

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada definiramo

- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 3.3.7: KAGH nejednakost

Za gore definirane sredine vrijedi
$$K \geq A \geq G \geq H$$
Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Napomena. Najćešće se koristi nejednakost $A \geq G$, dok su ponekad korisne $K \geq A$ i $A \geq H$.

Primjer 1. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Rješenje 1. Primjenjujemo A-G nejednakost na x i $\frac{1}{x}$.
$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$
□

Teorem 3.3.8: nejednakost trokuta

Tri stranice a, b, c mogu činiti trokut ako i samo ako vrijedi:
$$a + b > c$$
$$c + a > b$$
$$b + c > a$$

Lakši zadatci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost
$$(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$$

2. Dokaži da za realne brojeve a i b vrijedi
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$$
uz uvjet $a + b = 1$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokažite nejednakost
$$ab + bc + ac \geq 3$$

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Umjereni zadatci

7. Dokaži:

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq$$

$p, q \in \mathbb{R}^+$

8. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$$

9. Dokažite da ako

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$$

Onda $abc \leq \frac{1}{8}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

10. Neka su a, b, c stranice trokuta. Dokaži:

$$\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}+\frac{2}{a+b-c} > \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$$

11. Ako $a+2b+c=4$,$a, b, c \in \mathbb{R}$. Odredite maksimum izraza:

$$ab+bc+ac$$

Teži zadatci

12. **Nesbittova nejednakost** Dokažite da za sve pozivine realne brojeve vrijedi:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

13. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tako da $ab(a+b)=2000$. Odredite minimalnu vrijednost izraza.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}$$

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}$$

15. Dokaži:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$

16. Dokaži da za trokut sa stranicama a, b, c i površinom S vrijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

17. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ i vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Dokažite da:

$$\frac{\sqrt{a+\frac{b}{c}}+\sqrt{b+\frac{c}{a}}+\sqrt{c+\frac{a}{b}}}{3} \leq \frac{a+b+c-1}{\sqrt{2}}$$

3.4. N1: Marija Ćorić - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

U ovome predavanju definirat ćemo osnovne pojmove i teoreme vezane uz kongruencije koji će nam pomoći pri rješavanju raznih zadataka iz sfere teorije brojeva, poput zadataka sa znamenkama, diofantskih jednadžbi i slično. Iako tu riječ možda ne koristite svakodnevno, zapravo se neprestano koristite kongruencijama. Na primjer, ako pogledate na sat, velika kazaljka pokazuje između 2 i 3, ali vi znate da je zapravo, dogovorno, između 14 i 15 sati.

Definicija 3.4.1

Za cijele brojeve a i b i prirodan broj n reći ćemo da su a i b kongruentni modulo n, u oznaci $a \equiv b \pmod{n}$, ako vrijedi da n dijeli razliku $a-b$, odnosno ako postoji k cijeli broj takav da $a-b=kn$.

Teorem 3.4.2: Svojstva kongruencija

Za a,b,c,d,k cijele, te n prirodan broj takve da je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$, vrijedi:

- $a \equiv b + kn \pmod{n}$
- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- $ac \equiv bd \pmod{n}$
- $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

Također, ako vrijedi $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $gcd(c,n)=1$, tada $a \equiv b \pmod{n}$.

Dokaz. Dokažimo neka od gore napisanih svojstava. Na primjer, ono drugo: $a \equiv b \pmod{n}, c \equiv d \pmod{n} \implies a+b \equiv c+d \pmod{n}$. Po definiciji iz prve dvije kongruencije slijedi da postoje cijeli brojevi k,l takvi da $a-b=kn$ i $c-d=ln$. Njihovim zbrajanjem dobivamo $a-b+c-d=a+c-(b+d)=(k+l)n$, što se drukčije može zapisati upravo kao $a+c \equiv b+d \pmod{n}$. Dokažimo i treće: $a \equiv b \pmod{n}, c \equiv d \pmod{n} \implies ab \equiv cd \pmod{n}$. Kao i gore, iz prve dvije kongruencije slijedi da postoje cijeli brojevi k,l takvi da $a-b=kn$ i $c-d=ln$. Tada pišem $ac-bd=(a-b)c+b(c-d)=knc+cln=(kc+cl)n$. Ovo drukčije zapisujemo kao $ac \equiv bd \pmod{n}$. □

Napomena 3.4.3

Ako vrijedi $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, tada to možemo zapisati i kao $a \equiv b \equiv c \pmod{m}$, to jest, možemo *nizati* kongruencije.

Eulerova funkcija i teorem

Definicija 3.4.4

Eulerova funkcija $\phi(n)$ je broj brojeva iz skupa $\{1,2,...,n\}$ koji su **relativno prosti** s n.

Propozicija 3.4.5: Svojstva Eulerove funkcije

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:

$$\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_l})$$

- ϕ je multiplikativna funkcija, što će reći: $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$, za one n, m za koje vrijedi $gcd(n, m) = 1$

Teorem 3.4.6: Eulerov teorem

Eulerov teorem. Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi: $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)$.

Njegova direktna posljedica je Mali Fermatov teorem:

Teorem 3.4.7: Mali Fermatov teorem

Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je p prost broj takav da a nije djeljiv s p. Tada vrijedi: $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Lakši zadaci

1. Dokažite da je svaki prost broj veći od 3 oblika $6k + 1$ ili $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Dokaži pravilo djeljivosti s 9. Koje je analogno pravilo za djeljivost s 11, dokaži.

3. Dokaži da kvadrat prirodnog broja daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3, odnosno s 4.

4. Dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih brojeva djeljiv s 9.

5. Za prirodne brojeve a, b, c vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Dokaži da je jedan od ta 3 broja djeljiv s 3.

6. Neka je n prirodan broj. Ako je zadnja znamenka broja 3^n jednaka 1, dokaži da je n djeljiv sa 4.

7. Za koje proste brojeve p, q, r vrijedi jednakost $p^q = r - 1$.

8. Odredite zadnje dvije znamenke broja 3^{400}.

9. Nađite sve prirodne brojeve m, n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$4^m - 9n = 5$$

10. Nađite ostatak pri dijeljenju broja $(7^{2014})^{2015} + (3^{2014})^{2015}$ s 11.

11. Neka $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n + 2$ prost. Pokažite da $n + 2$ tada dijeli $n \cdot 2^n + 1$.

Teži zadaci

12. Dokaži za $m, n \in \mathbb{N}$ sljedeća jednadžba nema rješenja: $n^2 - 7m^2 = 28$.

13. Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

14. Odredi sve parove prostih brojeva (p, q) takve da je

$$p^q q^p + 1$$

također prost broj.

15. Dokaži za $m, n \in \mathbb{N}$ sljedeća jednadžba nema rješenja: $n^{21} - n + 11 = 5^m$.

16. Koje znamenke moramo napisati umjesto a i b u $30a0b03$ tako da je rezultirajući broj djeljiv s 13?

17. Prirodni brojevi N i N^2 oba završavaju istim nizom od 4 znamenke $abcd$ kada zapisani u bazi 10, pri čemu je $a \neq 0$. Pronađi troznamenkasti broj abc.

18. Je li moguće posložiti brojeve $1^1, 2^2, \ldots, 2008^{2008}$ jedan za drugim tako da broj dobiven spajanjem znamenaka bude kvadrat nekog prirodnog broja? (Na primjer, broj dobiven spajanjem $\overline{3^3 2^2 1^1}$ je 2714.

4. Zadaci za drugu grupu

4.1. G2: Ivan Vojvodić - Radikalno centriranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Poznato je da najkvalitetnija predavanja otvaraju kamp, pa se zato danas ujutro družite sa mnom. Bavit ćemo se potencijom točke s naglaskom na radikalne osi i radikalna središta kao metode za dokazivanje konkurentnosti pravaca. Ako budete posebno dobri i poslušni, na kraju ćemo spomenuti i što je to kružnica radijusa 0 i kako se može koristiti u zadacima.
Za početak radi potpunosti zapisujemo definicije pojmova koje ćemo često koristiti. Nema ničeg revolucionarnog, ovo je samo da ispuni prostor.

Definicija 4.1.1: Potencija točke

Neka je ω kružnica i neka je P bilokoja točka u ravnini. Neka je l bilokoji pravac koji prolazi kroz P i siječe ω u točkama A i B. Tada vrijedi da vrijednost izraza $PA \cdot PB$ ne ovisi o odabiru pravca l te definiramo *potenciju točke* P *s obzirom na kružnicu* ω kao

$$\text{Pow}(P, \omega) = PA \cdot PB$$

Dokaz da sve u gornjoj definiciji štima bi trebao biti poznat, ali i ako nije, nije bitno jer nije u fokusu predavanja, pa ga izostavljamo.

Definicija 4.1.2: Radikalna os

Neka su ω i Γ dvije nekoncikličnе kružnice u ravnini. Tada vrijedi sljedeće:
Skup svih točaka P koje zadovoljavaju

$$\text{Pow}(P, \omega) = \text{Pow}(P, \Gamma)$$

jest *pravac* koji je *okomit* na spojnicu središta kružnica ω i Γ.
Taj pravac nazivamo *radikalna os kružnica* ω *i* Γ.

Ništa gore navedeno ne bi trebalo biti novo, samo uputite pozornost na riječ *okomit* jer je ta činjenica nerijetko lagani način da dokažete okomitost dvaju naizgled potpuno nepovezanih pravaca (ako pametno odaberete kružnice, jedan ispadne spojnica centara, a drugi ispadne radikalna os i tvrdnja odmah slijedi).

Definicija 4.1.3: Radikalno središte

Neka su ω, Γ i Ω proizvoljne kružnice u ravnini, od kojih nikoje dvije nisu konciklične. Tada se radikalne osi parova (ω, Ω), (Ω, Γ) te (Γ, ω) sijeku u jednoj točki i tu točku nazivamo *radikalno središte kružnica* ω, Ω *i* Γ.

> Radikalno središte, naravno, ima jednaku potenciju točke na sve tri kružnice.

Ovdje dokaz nije niti težak niti je ikakva geometrija, pa ne zaslužuje ni da ga spominjem. Uočavamo onu prethodno najavljenju korisnu činjenicu: postojanje radikalnog centra nam daje "besplatnu" konkurentnost tri pravca.
Sad kad smo prošli sve preliminarne gluposti, možemo preći na zadatke. U zadacima, kao i uvijek, imajte na umu što je tema predavanja.

Lakši zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Dan je šiljastokutni trokut ABC s centrom opisane kružnice O i ortocentrom H. Neka su E i F nožišta visina iz B i C na AC i AB redom, i neka je D drugo sjecište AH i (ABC). Neka je I polovište $\overline{AH}$. EI i BD se sijeku u M, a FI i CD se sijeku u N. Dokaži da je $MN \perp OH$.

2. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica Γ_A ima centar u polovištu $\overline{BC}$ i prolazi kroz H, te siječe stranicu $\overline{BC}$ u točkama A_1 i A_2. Slično su definirane i točke B_1, B_2, C_1, C_2.

   Dokaži da su točke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ konciklične.

3. Neka je O centar opisane kružnice trokutu ABC. Točke P i Q nalaze se na stranicama $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom. Neka su K, L, M polovišta od $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$, $\overline{PQ}$ redom, i neka je Γ kružnica opisana trokutu KLM. Pretpostavimo da je pravac PQ tangenta na Γ. Dokaži da je $OP = OQ$.

4. Neka su A, B, C, D točke na pravcu, u tom redosljedu. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u X i Y. Pravac XY siječe $\overline{BC}$ u Z. Neka je $P \neq Z$ točka na pravcu XY. Pravac CP siječe kružnicu promjera $\overline{AC}$ ponovno u M, i pravac BP siječe kružnicu promjera $\overline{BD}$ ponovno u N.

   Dokaži da su pravci AM, DN, XY konkurentni.

5. Kružnica upisana trokutu ABC ima središte u I te dira stranice AB, BC, CA u točkama C_1, A_1, B_1 redom. Okomica iz I na težišnicu iz C siječe A_1B_1 u K. Dokaži da je $CK || AB$.

Bonus: kružnica radijusa 0

6. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $\angle B > \angle C$. Točka M je polovište $\overline{BC}$ te su točke D i E nožišta visina iz C i B redom. K i L su polovišta $\overline{ME}$ i $\overline{MD}$ redom, i KL siječe paralelu kroz A s BC u T. Dokaži da je $TA = TM$.

7. Dan je trokut ABC s opsegom 4. Točke X i Y leže na polupravcima AB i AC redom, tako da vrijedi $AX = AY = 1$. Dužine $\overline{BC}$ i $\overline{XY}$ sijeku se u M. Dokaži da je opseg trokuta ABM ili opseg trokuta ACM jednak 2.

8. Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama Z i Y, redom. BY i CZ se sijeku u G, a točke R i S su takve da su $BCYR$ i $BCSZ$ paralelogrami.

   Dokaži da je $GR = GS$.

4.2. C2: Mislav Brnetić - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Primjer 1. Na stolu se nalazi 100 kovanica od kojih je jedna okrenuta pismom prema gore, a ostale glavom. U svakom koraku biramo dvije kovanice i okrećemo ih.
Mogu li nakon konačno mnogo koraka sve biti okrenute glavom prema gore?

Rješenje 1. Primijetimo kako u svakom koraku parnost broja kovanica okrenutih glavom prema gore ostaje jednaka (ne mijenja se ili se mijenja za 2).
Kako je na početku neparno mnogo kovanica okrenuto glavom prema gore, nakon konačno mnogo ovakvih koraka će također neparno mnogo kovanica biti okrenuto glavom prema gore, odnosno nije moguće postići da su sve okrenute glavom prema gore. □

Veličina (ili svojstvo) koja se, poput ove, ne mijenja tijekom operacija koje provodimo naziva se *invarijanta* i vrlo je korisna prilikom dokazivanja tvrdnji da se nešto ne može postići nakon konačno mnogo opisanih koraka. Naime, ako se svojstvo nakon svakog koraka ne mijenja, ne može se promijeniti niti nakon konačno mnogo koraka.

Dakle, kad tražimo invarijantu, zapravo tražimo nešto što se ne mijenja kod dozvoljenih koraka. Ako dokazujemo da se nešto ne može postići nakon konačno mnogo koraka, tražimo invarijantu koja se ne mijenja kroz korake, ali bi se trebala promijeniti kako bi se cilj mogao ostvariti.

Za razliku od invarijante, *monovarijante* su veličine koje se tijekom operacija ponašaju monotono (rastu, padaju, ne rastu ili ne padaju), a način primjene im je vrlo sličan kao kod invarijanti.

Oprez 2

Bitno je primijetiti kako pomoću invarijante u principu ne možemo dokazati da je nešto moguće konstruirati, odnosno ukoliko pronađemo invarijantu koja se ne mijenja kroz operacije te je takva i u ciljanom stanju, to ne znači nužno da je takvo stanje moguće postići. Tada treba konstuirati primjer u kojem se to postiže (ili dokazati da je moguće konstruirati takav primjer).

Zadaci

1. Ploča 8×8 obojena je kao šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svim poljima u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu i obrnuto.

   (a) Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

   (b) Ukoliko, osim opisane promjene, možemo izabrati i bilo koji kvadrat 2×2, te također zamijeniti boje na isti način, može li se postići isti cilj?

2. Na školskoj ploči je napisano 5 brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo bilo koja tri broja, x, y, z i mijenjamo ih u $2x - y, 2y - z, 2z - x$.

   Ako su na početku bili napisani brojevi $7, 10, 12, 15, 17$, možemo li, uzastopnim ponavljanjem tog postupka, doći do petorke brojeva:

   (a) $6, 8, 10, 18, 19$

   (b) $9, 11, 13, 14, 16$?

3. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b$, $3b - c$ i $3c - a$.

Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja?

4. Na stolu se nalazi 13 plavih, 15 crvenih i 17 zelenih kuglica. U svakom koraku biramo dvije kuglice različite boje i pretvaramo ih u kuglice preostale (treće boje).

Je li moguće konačnim nizom ovakvih poteza postići da su sve kuglice iste boje?

5. Mačka stoji u točki koordinatnog sustava $(3, 1)$. Svake sekunde skače na drugo mjesto u koordinatnom sustavu na sljedeći način: ako se trenutno nalazi na poziciji (a, b), bira neki prirodan broj n i skače na poziciju $(\frac{a+b}{n}, \frac{n \cdot ab}{a+b})$. Može li mačka odabrati neki niz prirodnih brojeva tako da doskoči:

(a) u točku $(1, 3)$

(b) u točku $(1, 4)$?

6. U Parlamentu neke države svaki član Parlamenta ima točno tri neprijatelja (neprijateljstva su uzajamna). Dokažite da se Parlament može podijeliti u dva doma ("Gornji dom" i "Donji dom") tako da svaki član Parlamenta ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član.

7. Ivan je na ploču zapisao brojeve $1, 2, ..., 2n$, pri čemu je n neparan prirodan broj. U svakom koraku odabire 2 broja, a i b s ploče te ih zamijeni brojem $|a - b|$. Takvim postupkom, nakon konačno mnogo koraka, ostat će 1 broj.

Odredite parnost tog broja.

8. Počinjemo s brojevima 18 i 19 na ploči. U svakom potezu možete na ploču dopisati zbroj nekih dvaju elemenata na ploči. Možete li doći do broja 1994?

9. Polja ploče dimenzija $N \times N$ obojana su u crno i bijelo tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različite boje i tako da je barem jedno polje u kutu ploče crne boje. U pojedinom koraku odabire se kvadrat dimenzija 2×2 i sva četiri polja unutar tog kvadrata mijenjaju boju tako da bijela polja postaju crna, crna postaju siva, a siva postaju bijela.

Odredite sve prirodne brojeve $N > 1$ za koje je konačnim nizom opisanih koraka moguće postići da sva polja koja su na početku bila crna budu bijela i da sva polja koja su na početku bila bijela budu crna.

10. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

11. Na po volji velikoj kvadratnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja jednog kvadrata 3×3, po jedan u svako polje. U svakom koraku možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo.

Može li ova igra završiti sa samo jednim žetonom na ploči?

12. Zemljište dimenzija $n \times p$ podijeljeno je na np čestica - jediničnih kvadratića. Svaka je čestica u početnom stanju ili obrasla u korov ili je očišćena - na početku je m čestica obraslo u korov. Korov se širi na susjedne čestice na sljedeći način: svake godine one čestice koje su imale dvije susjedne čestice (sa zajedničkom stranicom) obrasle u korov i same obrastu u korov.

Odredite najmanji m za koji postoji početni raspored u korov obraslih čestica takav da, nakon konačnog broja godina, cijelo zemljište mora obrasti u korov.

13. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a-b$ i $13a-3b$.

Ako su na početku na ploči brojevi $1,2,3,4,...2011,2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2,4,6,8,...4022,4024$?

14. Anica i Božica igraju igru. Prvo Božica napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku ona odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem.

Može li Božica odabrati brojeve tako da Anica ne može ostvariti svoj naum?

15. $2n$ veleposlanika pozvano je na banket. Svaki veleposlanik ima najviše $n-1$ neprijatelja. Dokaži da se veleposlanici mogu razmjestiti oko okruglog stola tako da nitko ne sjedi pored svog neprijatelja.

16. Na školskoj ploči napisani su brojevi $1,2,...,n$. U svakom koraku brišu se brojevi a i b s ploče i zamjenjuju brojem $ab+a+b$.

Odredite posljednji broj koji ostaje na ploči.

17. Na ploči su napisani cijeli brojevi a,b,c,d koji nisu svi jednaki. U svakom koraku brojevi na ploči a,b,c,d zamjenjuju se brojevima $a-b,b-c,c-d,d-a$.

Dokažite da će, nakon konačno mnogo koraka, apsolutna vrijednost jednog broja biti veća od 2021!.

4.3. A2: Mislav Plavac - How to Viète

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

Tl;dr polinoma

Definicija 4.3.1

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.
Brojeve $a_0, ..., a_n$ zovemo *koeficijenti polinoma*, a_n *vodeći koeficijent*, a a_0 *slobodni koeficijent*.
Ako je $f \neq 0$, broj n zovemo *stupanj polinoma* i pišemo $deg f = n$.
Ako je $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, onda polinom f zovemo *nul - polinom*, pišemo $f = 0$.
Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom *normiran*. Ako postoji $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. takav da $f(x) = a$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tada polinom f zovemo *konstantni polinom* i pišemo $f = a$.

Propozicija 4.3.2

Neka su f i g dva polinoma. Tada je:

1. $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$
2. $deg(f + g) \leq \max\{deg(f), deg(g)\}$
3. $deg(f \circ g) = deg(f) \cdot deg(g)$

Definicija 4.3.3: Jednakost polinoma

Polinomi f i g su *jednaki* ako su jednaki kao funkcije, tj.

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorem 4.3.4: Teorem o nulpolinomu

Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, jednak je nul - polinomu ako i samo ako $a_i = 0, \forall i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 4.3.5: O jednakosti polinoma

Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako $m = n$ i $a_i = b_i, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 4.3.6: O dijeljenju s ostatkom

Za polinome f i g postoje jedinstveni polinomi q i r tako da

$$f(x) = g(x)\ q(x) + r(x), \ \ deg(r) < deg(g) \ \ ili \ \ r(x) = 0.$$

q i r zovu se kvocjent i ostatak pri dijeljenju f s g. Ako je $r = 0$ tada kažemo da g dijeli f.

Korolar 4.3.7

Neka je f polinom stupnja n i $a \in \mathbb{R}$. Dijeljenje s $x - a$ daje

$$f(x) = (x - a)q(x) + r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad deg(q) = n - 1$$

Definicija 4.3.8

Ako je za polinom f, za neki $a \in \mathbb{C}$ $f(a) = 0$, tada a zovemo *nultočka* ili *korijen* polinoma f.

Napomena 4.3.9

Uočimo da vrijedi:

$$f(a) = 0 \iff f(x) = (x - a)\, q(x), \text{za neki polinom } q.$$

Ako za polinom f stupnja n, postoji n nultočaka a_1, a_2, ... , a_n, tada je

$$f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n), \quad c \in \mathbb{R}$$

Definicija 4.3.10

Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ i polinom q tako da je

$$f(x) = (x - a)^m\, q(x),\ q(a) \neq 0,$$

tada broj m zovemo *kratnost* nultočke a od f.

Propozicija 4.3.11

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i neka je $z \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$f(z) = 0 \iff z \mid a_0.$$

Propozicija 4.3.12

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$ korijen jednadžbe, dakle $\alpha = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, pri čemu su p i q relativno prosti, onda $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Primjer 1. Odredite nultočke polinoma $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$.

Rješenje 1. Pogađamo racionalne nultočke. Prema prethodnoj propoziciji kandidati za brojnik racionalne nultočke su ± 1, za za nazivnik su $\pm 1, \pm 2$. Lako vidimo da su $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{2}$ nultočke. Nakon diljenja polinomima preostaje nam $(x-1)(2x+1)(x^2+x-1)$ te vidimo da su preostala 2 rješenja nultočke polinoma x^2+x-1 što po formuli za kvadratnu jednadžbu dobivamo da su $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\square$

The tool

Sada dolazimo do najbitnijeg alata ovog predavanja, posebna vrsta polinoma koja se pojavljuje u Vieteovim formulama - simetrični polinomi.

Definicija 4.3.13: Simetrični polinomi

Za polinom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u n varijabli kažemo da je simetričan ako za bilo koju bijekciju $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

Neformalno, polinom je simetričan ako zamijenom bilo kojih dvaju varijabli dobijemo ponovno isti polinom. Neki primjeri simetričnih polinoma su $x^2 + y^2$, $x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y^2z^4$, $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
Nadalje ćemo se fokusirati na 2 varijable i nama vrlo koristan i bitan rezultat.

Definicija 4.3.14

Polinome $\sigma_1 = x + y$ i $\sigma_2 = xy$ nazivamo elementarnim simetričnim polinomima.

Teorem 4.3.15

Svaki simetričan polinom u dvije varijable može se zapisati pomoću elemetarnih polinoma.

Naravno, ovaj rezultat vrijedi i za polinome više varijabli, ali je sa sve više varijabli kompliciranije za zapisati te teže za dokazati.

Primjer 2. Odredite sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\begin{aligned} x^2(y-1) + y^2(x-1) &= -4 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= -3 \end{aligned}$$

The fun stuff

Sada dolazimo do drugog bitnog rezultata, trik koji se na raznim razinama natjecanja koristi, ponekad i u zadacima gdje to ne bismo očekivali. Formule koje povezuju koeficijente polinoma i simetrične polinome u nultočkama polinoma.

Teorem 4.3.16: Viѐteove formule

Za $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ njegove nultočke. Tada je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Primjer 3. Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned} z_1z_2z_3 &= 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 &= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \end{aligned}$$

Dokažite da je barem jedan od njih jednak 1.

Primjer 4 (Argentina TST 2007.). Odredite sve realne brojeve $x > 1$ za koje vrijedi

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

Lakši zadaci

1. Podijeli $f(x) = 3x^5 - x^4 + 7x^2 + 2x - 6$ s $g(x) = x - 2$.

2. Faktoriziraj $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$.

3. Koja je suma recipročnih korijena jednadžbe

$$\frac{2003}{2004}x + 1 + \frac{1}{x}?$$

4. Neka su a, b, c kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ ab + bc + ac &= 0 \end{aligned}$$

Dokažite da je $\mid a \mid = \mid b \mid = \mid c \mid$.

5. Neka su x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$. Odredi $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.

6. Neka su α, β, γ nultočke polinoma $x^3 - 3x - 1$. Odredite $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

7. Neka su α, β takvi da vrijedi

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} + 2 = \beta + \frac{4}{\beta} + 2 = 0$$

Odredite $\dfrac{\alpha^{100} + \beta^{100}}{\alpha^{98} + \beta^{98}}$.

8. Neka su r, s, t korijeni polinoma $x^3 - 3x^2 + 1$. Odredite polinom čiji su korijeni $\dfrac{1}{s+3}, \dfrac{1}{t+3}, \dfrac{1}{r+3}$.

9. Neka su a, b različiti realni brojevi za koje vrijedi

$$a^2 + 3a + 1 = b^2 + 3b + 1 = 0$$

Odredite $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.

Umjereni zadaci

10. Ako su x_1, x_2, x_3 nultočke polinoma $x^3 - 2x^2 - x + 3$, odredite polinom čije su nultočke $x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2$.

11. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 rješenja jednadžbe $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$. Odredite

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4}$$

12. Neka su α, β, γ nultočke polinoma $x^3 - x - 1 = 0$. Odredite

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

13. Neka su r_1, r_2, r_3, r_4 korijeni polinoma $4x^4 + 2x^2 + x$. Odredite

$$\frac{r_1 + r_2}{r_3 + r_4} + \frac{r_2 + r_3}{r_4 + r_1} + \frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2} + \frac{r_4 + r_1}{r_2 + r_3}$$

14. Neka su a, b, c nultočke polinoma $x^3 - 2007x + 2002 = 0$. Odredite

$$\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right)$$

15. Dokaži da $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ nije racionalan broj.

16. Neka su a, b, c, x, y realni brojevi takvi da $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ i $c^3 + cx + y = 0$. Ako su a, b, c svi međusobno različiti, dokaži da im je suma jednaka nuli.

17. Neka su α, β, γ rješenja jednadžbe $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Odredite

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{\beta^2\gamma^2}} + \sqrt[3]{\frac{\beta^4}{\alpha^2\gamma^2}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma^4}{\alpha^2\beta^2}}$$

18. Odredite sve realne brojeve x, y, z koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

19. Neka su a, b, x, y realni brojevi takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Odredite $ax^5 + by^5$.

20. Neka su r, s, t rješenja jednadžbe $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$. Odredite $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$.

21. Neka su r_1, r_2, r_3 nultočke polinoma $5x^3 - 11x^2 + 7x + 3$. Odredite

(a) $r_1(1 + r_2 + r_3) + r_2(1 + r_1 + r_3) + r_3(1 + r_1 + r_2)$

(b) $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$

22. Zadan je polinom $x^3 - 30x^2 + rx - 780$. Odredite sve realne brojeve r takve da nultočke polinoma čine duljine stranice pravokutnog trokuta.

23. Neka su a, b, c rješenja jednadžbe $x^3 - (k+1)x^2 + kx + 12 = 0$ gdje je $k \in \mathbb{R}$. Ako su $(a-2)^3 + (b-2)^3 + (c-2)^3 = -18$, odredite k.

Teži zadaci

24. Neka je polinom $f(x) = x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$. Umnožak dvaju od četiri korijena polinoma je -32. Odredi k.

25. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke polinoma $x^{10} + x^9 + \ldots + x + 1$. Odredite

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1 - x_n}$$

26. Odredi sve polinome P takve da im je vodeći koeficijent 1, a svi ostali koeficijenti mogu biti 1 ili -1 uz uvjet da su svi korijeni polinoma realni brojevi.

27. Riješite sustav jednadžbi:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} = -2$$
$$x + y + z = 1$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

28. Neka su a, b, c cijeli brojevi te $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ i $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$ takvi da je $f(1) = 0$ te su nultočke od g kvadrati nultočaka f. Odredite $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024}$.

29. (Kenya MO 2018.) Neka su a, b, c, d nultočke polinoma $x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Odredite

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)$$

30. (INMO 2021.) Odredite sve parove cijelih brojeva (a, b) takve da polinomi $x^3 + ax + b$ i $x^3 + bx + a$ imaju isključivo cjelobrojne nultočke.

31. (IMOSL 1982.) Odredite sve realne parametre a za koje jednadžba

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

ima 4 različita rješenja koja tvore geometrijski niz.

32. (IMOSL 1988.) Neka je α najveće rješenje jednadžbe $x^3 - 3x^2 + 1$. Dokažite da je $\lfloor \alpha^{1988} \rfloor$ djeljivo sa 17.

33. (IMOSL 2002.) Postoji li prirodan broj m takav da jednadžba

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a + b + c}$$

ima beskonačno mnogo rješenja za prirodne brojeve a, b, c.

4.4. N2: Mislav Brnetić - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

Mali Fermatov i Eulerov teorem važni su rezultati u teoriji brojeva koji nam pomažu odrediti odrediti ostatke pri dijeljenju i za velike brojeve određeog oblika (npr. potencije).

Prije iskazivanja teorema, uvedimo pojmove potpunog sustava ostataka i reduciranog sustava ostataka te Eulerovu funkciju koja će biti potrebna za iskaz Eulerovog teorema.

Definicija 4.4.1: Potpun sustav ostataka

Skup S je *potpuni sustav ostataka* modulo n ako elementi S svi daju različite ostatke pri dijeljenju s n, i svi ostatci se pojavljuju.

Definicija 4.4.2: Reducirani sustav ostataka

Reducirani sustav ostataka modulo m je skup cijelih brojeva r_i sa svojstvom da je $gcd(r_i, m) = 1$ i $r_i \not\equiv r_j \pmod{m}$ za svaki $i \neq j$ te da za svaki cijeli broj x takav da je $gcd(x, m) = 1$ postoj r_i takav da je $x \equiv r_i \pmod{m}$.

Sada možemo iskazati Mali Fermatov teorem koji govori o ostatku pri dijeljenju koji daje broj oblika a^p za prirodan broj a i prost broj p.

Teorem 4.4.3: Mali Fermatov teorem

Ako je p prost broj tada za svaki prirodan broj a vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$.
Specijalno, ako je $\gcd(a, p) = 1$ vrijedi $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

⚠ Oprez 3

Ne vrijedi obrat Malog Fermatovog teorema, tj. ako vrijedi $a^x \equiv a \pmod{x}$, ne znači nužno da je x prost.

Definicija 4.4.4: Eulerova funkcija

Neka je m prirodan broj. Funkciju $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je $\phi(m)$ jednako broju prirodnih brojeva relativno prostih s m koji su manji ili jednaki m zovemo *Eulerova funkcija.*

Za Eulerovu funkciju postoji i eksplicitna formula:

Propozicija 4.4.5

Za $n \in \mathbb{N}$ čiji su prosti faktori $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vrijedi

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Općenitiji rezultat od Malog Fermatovog teorema je Eulerov teorem (primijetimo kako je Mali Fermatov teorem zapravo samo poseban slučaj Eulerovog teorema za m prost broj jer je $\phi(p) = p - 1$ za p prost).

Teorem 4.4.6: Eulerov teorem

Ako su a i m relativno prosti brojevi, vrijedi $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Sada definirajmo pojam ordera:

Definicija 4.4.7

Neka su a i n prirodni brojevi takvi da je $\gcd(a, n) = 1$. *Order* od a modulo n (u oznaci $\operatorname{ord}_n(a)$) je najmanji prirodan broj e takav da je

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}.$$

Napomena 4.4.8

Primijetimo kako, korištenjem Eulerovog teorema, lako pokažemo kako za sve a i n prirodne brojeve postoji $\operatorname{ord}_n(a)$, odnosno kako je definicija dobra.

Za ordere vrijedi sljedeći važan rezultat:

Teorem 4.4.9

Ako je $a^n \equiv 1 \pmod{p}$, tada $\operatorname{ord}_p(a)$ dijeli n.

Uvodni zadaci

1. Odredite ostatak broja 5^{500} pri dijeljenju sa 7.
2. Odredite posljednje dvije znamenke broja $7^{7^{100}}$.
3. Dokažite da je, za sve prirodne brojeve m i n, $m^{61}n - mn^{61}$ djeljivo s 2015.

Zadaci

4. Neka su p i q različiti prosti brojevi. Dokažite da tada vrijedi
$$q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$
5. Dokažite da $13|3^{105} + 4^{105}$.
6. Neka je p prost broj oblika $3k + 2$ koji dijeli $a^2 + ab + b^2$ za neke prirodne brojeve a i b. Dokažite da su a i b djeljivi s p.
7. *(Wilsonov teorem)* Dokaži da je za prost p,
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$
8. Odredite sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je $4mn - m - n$ potpuni kvadrat.
9. Dokažite da za sve $a \in \mathbb{N}, a > 1, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$n \mid \phi_{(a^n - 1)}$$

10. Dokažite da ne postoji $n > 1$ za koji vrijedi $n|2^n - 1$

11. Neka je p prost broj i neka je m prirodan broj. Dokažite da postoji prirodni broj n takav da broj p^n u decimalnom prikazu ima m uzastopnih znamenki 0.

12. Odredite sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svim članovima niza $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

13. Dokažite: ako prost broj p dijeli $a^p - 1$, za neki prirodni broj a, tada p^2 također dijeli $a^p - 1$.

14. Za $x \in \langle 0, 1\rangle$ neka je $y \in \langle 0, 1\rangle$ broj čija je $n-$ta decimala jednaka 2^n-toj decimali broja x. Dokažite:

$$x \in \mathbb{Q} \implies y \in \mathbb{Q}$$

5. Zadaci za treću grupu

5.1. G3: Borna Banjanin - Fantomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

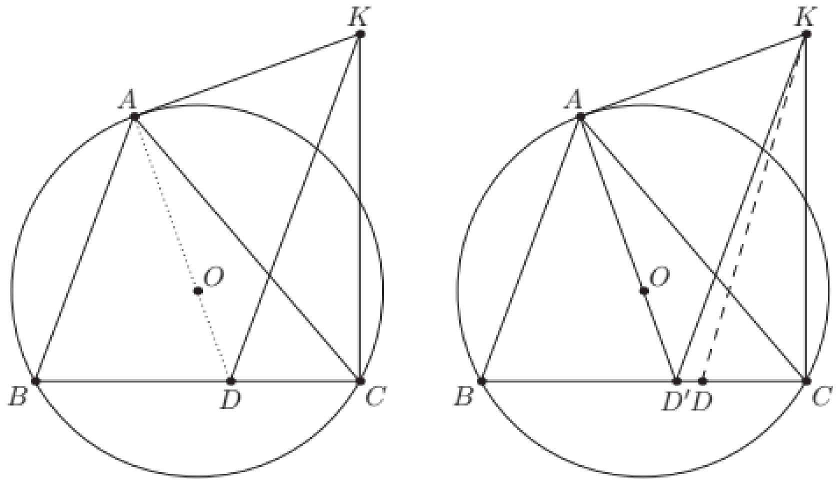
Ako ste na ovom predavanju, ili ste ga odlučili otvoriti i čitati iz nekog razloga, to znači da ste se do sad susreli s podosta geometrijskih zadataka. Iz tih dugih i teških sati rješavanja ste mogli zaključiti da nekad na prvu možete vidjeti kako će glasiti zadnjih par rečenica dokaza, a nekad ne. Ako zadatak traži da pokažete da neke točke leže na kružnici, vjerojatno ćete morati dobiti da je suma neka dva kuta 180° ili gledati neku potenciju točke ili nešto treće. Ako treba dokazati da su neka dva pravca paralelna, vjerojatno će se za dokaz toga koristiti jednakost kuteva uz presječnicu. Ako treba pokazati da su neke dvije dužine jednakih duljina za to ćete najčešće koristiti činjenicu o jednakosti kuteva u jednakokračnom trokutu. To su samo neki primjeri onoga što se traži u geometrijskim zadacima, a što se obično čini lakše za dokazati. Za razliku od toga, zadatak koji traži da pokažete da neka 3 pravca prolaze istom točkom, ili da neke 3 točke leže na istom pravcu, će se uvijek na prvu činiti malo težim. U ovom predavanju predstavljam metodu koja će olakšati te zadatke i pomoći kod mnogih drugih.

Fantomiranje

Možda ste prije čili i izraz fantomske točke (ili nešto slično tome), ali ja koristim ovaj izraz čisto zato što je više kul.
Mislim da je najbolje da se odmah bacimo na primjer jednom zadatka koji se čini malo zeznut, ali se dosta lagano riješi fantomiranjem, a onda ćemo malo bolje pojasniti što sve to znači.

Primjer 1. Neka je ABC šiljastokutan trokut sa središtem opisane kružnice O i neka je K točka takva da je KA tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC i da je $\angle KCB$ pravi kut. Točka D leži na pravcu BC tako da su KD i AB paralelni. Dokaži da su točke D, O i A kolinearne.

Rješenje 1. Neka je D' presjek pravaca AO i BC. AK je tangenta na kružnicu u točki A, a $\overline{AO}$ je polumjer kružnice pa znamo da je $|\angle KAD| = 90°$. Imamo: $|\angle KAD'| + |\angle KCD'| = 180°$, odnosno $AKCD'$ je tetivni četverokut. Zbog te tetivnosti i zbog poučka o kutu između tangente i tetive imamo : $|\angle ABD'| = |\angle KAC| = |\angle KD'C|$. Pa prema obratu poučka o kutu između presječnice i paralelnih pravaca slijedi da su pravci AB i KD' paralelni. Znamo da se točke D i D' nalaze na pravcu BC i da su pravci KD i KD' oba paralelni s AB, ali može postojati samo jedna točka na pravcu BC čija je spojnica s točkom K paralelna s AB pa zaključujemo da su D i D' iste točke, odnosno da je točka D na pravcu AO. $\square$



Ovo je bio klasični primjer fantomiranja u zadatku. Točka D ima 3 svojstva, nalazi se na pravcu BC, pravac KD je paralelan s AB i nalazi se na pravcu AO. U zadatku su nam dana 2 od ta 3 svojstva i moramo dokazati da vrijedi treće svojstvo, ali odmah vidimo da bi bilo lakše dokazati neku paralelnost uz pomoć kolinearnosti nego obrnuto. Zbog toga uvodimo fantomsku točku D' koju ćemo definirati s jednim poznatim svojstvom od D (nalazi se na pravcu BC) i drugim kojeg u zadatku zapravo trebamo dokazati (nalazi se na pravcu AO) te treće svojstvo točke D (to da je KD paralelno s AB) zapravo dokazujemo. Nakon što dokažemo da vrijedi to treće svojstvo za točku D' možemo reći da su D i D' jednake i da onda ono prvotno svojstvo koje smo htjeli dokazati vrijedi i za D. Tu moramo biti oprezni da vidimo definiraju li prva dva svojstva jedinstvenu točku.

Naravno da se ovaj zadatak, kao i svi drugi, mogao riješiti bez fantomiranja. Prava težina korištenja ove metode je odlučiti na kojim zadacima je ima smisla primjeniti, a to možete steći na jedini mogući način, rješavanje puno zadataka.

Lakši zadaci

1. Neka je ABC trokut i točke X, Y i Z na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Dokaži da se kružnice opisane trokutima AZY, BXZ i CXY sijeku u jednoj točki.

2. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

3. Dokaži da je četverokut tetivan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih kuteva $180°$.

4. Dokaži da se simetrala stranice i simetrala nasuprotnog kuta trokuta sijeku na opisanoj kružnici.

5. Dan je trokut ABC. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom BC siječe dužinu LM u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

6. Neka su P i Q na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC tako da je $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle CAQ = \angle ABC$. Točke M i N su na pravcima AP i AQ, redom, tako da je P polovište $\overline{AM}$ i Q polovište $\overline{AN}$. Dokaži da je presjek BM i CN na opisanoj kružnici trokuta ABC.

5.2. C3: Paula Horvat - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Za razliku od većine predavanja, ovdje ne ćemo uvoditi puno formalnih definicija, već ćemo se fokusirati na razne tehnike i trikove koji će olakšati rješavanje zadataka s bojanjima/popločavanjima. Pokušat ćemo stvoriti jasniji put i intuiciju o različitim tipovima zadataka. Tako ćete, ako se nađete u situaciji da ne znate ni kako početi rješavati zadatak, moći pristupiti mu na smislen način.

Napomena 5.2.1

Vrlo često u zadacima vam ne kažu direktno da dokažete da se nešto može nekako popločati, već vam kažu da sami dođete do zaključka koje od toga vrijedi pa da to i dokažete. Ukoliko dokazujete da se nešto može popločati na neki način **potrebno je pronaći konstrukciju popločavanja**. Takvu konstrukciju možemo nacrtati, ako je ploča dovoljno malenih dimenzija, ili opisati kako bi izgledala, ako je ploča toliko velika da je nepraktično je nacrtati. U naprednijim zadacima možemo se koristiti i drugim tehnikama, poput matematičke indukcije, kako bismo konstruirali traženo popločavanje.

Primjer 1.

1. Može li se ploča 10 x 10 popločati pločicama dimencije 1x2 (dominama)?
2. Može li se ploča 10 x 10 od koje su izrezana dva nasuprotna kutna polja popločati pravokutnim pločicama dimenzije 1x2 (dominima)?

Rješenje 1.

1. Moguće je. Nacrtaj ili objasni kako.
2. Ovdje se koristi jedan od najbasic, ali najkorisnijih trikova za popločavanje: šahovsko bojanje ploče. Primjećujemo da smo izrezali polje iste boje. Kada bi mogli popločati cijelu danu ploču sa dominama tada bi ukupni broj crnih i bijelih polja trebao biti jednak (jer svaka domina pokriva jedno bijelo i jedno crno polje). Dana ploča ima 32 polja jedne boje, a 30 polja druge boja pa takvo popločavanje nije moguće.

□

U gornjem primjeru susreli smo se s jednostavnim bojanjem ploče koje nam brzo riješi zadatak. Naravno, šahovsko bojanje neće uvijek voditi do rješenja, no može biti odličan početak. Broj boja koji će bit koristan u određenom zadatku kao i način bojanja, naravno, moramo sami otkriti...

Napomena 5.2.2

Nemoj zaboraviti na **matematičku indukciju**. Nije uvijek očito kada ju možemo primijeniti. Kada isprobavaš neka svojstva za pločice, polja ili dimenzije može vrijediti neka pravilnost. U takvim se situacijama sjeti indukcije. Naravno, indukciju možeš provoditi samo po parnim brojevima, neparnim brojevima, potencijama broja 2 itd.

Još neke stvari na koje valja obratiti pozornost:

- Ako se u zadatku radi o $n \times n$ ploči, korisno je proučiti što se događa na manjim pločama te potom naslutiti nešto o ploči dimenzija $n \times n$.
- Kada tražimo najmanji ili najveći broj za koji nešto vrijedi, koristan nam je Dirichletov princip i princip ekstrema
- Kad želimo doći do kontradikcije, jako je korisno pronaći neku invarijantu na ploči. U tu svrhu je često korisno obojati ploču.

Zadaci (ne nužno poredani po težini)

1. Možemo li popločati 10×10 kvadratnu ploču s 1×4 pločicama?

2. Može li se šahovska ploča od koje je izrezano jedno kutno polje pokriti pravokutnim pločicama dimenzije 1×3?

3. Je li moguće posložiti 53 cigla dimenzija $1 \times 1 \times 4$ u kutiju dimenzija $6 \times 6 \times 6$?

4. Antun i Karlo popločali su pravokutni pod pločicama dimenzija 1×4 i 2×2. Na kraju posla Antun je slučajno razbio jednu pločicu. U zalihi im je ostala još samo jedna pločica, no suprotnog oblika. Mogu li Antun i Karlo ikako popraviti grešku i popločati pod preostalim pločicama?

5. Djeca na matematičkom kampu igraju igru na velikoj ploči dimenzija 9×9 tako da na početku igre u svakom polju stoji jedan učenik. Kada Mislav vikne "SAD!" svaki učenik nasumično prelazi u neko od dijagonalnih susjeda svojeg polja (dijagonalni susjed je ono polje s kojim početno polje dijeli samo vrh). Nakon jednog poteza, koji je minimalni broj praznih polja?

6. Svaki od 9 kvadratića na ploči dimenzija 3×3 treba obojati crvenom ili plavom bojom tako da se na ploči ne pojavljuje kvadrat dimenzija 2×2 čitav obojan crvenom bojom. Na koliko načna možemo obojati danu ploču?

7. Jedan kut ploče dimenzija $(2n+1) \times (2n+1)$ nedostaje. Odredi za koje sve brojeve n je moguće popločati danu ploču dominama 1×2 tako da ih je točno pola u horizontalnoj poziciji.

8. (a) Dokažite da se ploča dimenzija 4×4 može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.

(b) Dokažite da gore navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija 5×5.

9. Dana je ploča dimenzija 1000×1000. Je li moguće obojati točno 125 polja te ploče tako da svako od obojanih polja ima neparan broj obojanih susjeda? Dva polja nazivamo susjedima ako imaju zajedničku stranicu.

10. Dokažite da ploču dimenzija $2^n \times 2^n$ bez jednog kvadratića možemo popločati L-trominama.

11. U ravnini se nalazi n točaka i svaka je sa svakom spojena obojanom dužinom. Postoji n boja kojom su obojane dužine. Za sve 3 različite boje postoje 3 točke takve da one čine trokut obojan tim trima bojama. Može li n biti:

(a) 6?

(b) 7?

12. Polja ploče dimenzija N $\times$ N obojana su u crno i bijelo tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različite boje i tako da je barem jedno polje u kutu ploče crne boje. U pojedinom koraku odabire se kvadrat dimenzija 2×2 i sva četiri polja unutar tog kvadrata mijenjaju boju tako da bijela polja postaju crna, crna postaju siva, a siva postaju bijela.
Odredi sve prirodne brojeve N > 1 za koje je konačnim nizom opisanih koraka moguće postići da sva polja koja su na početku bila crna budu bijela i da sva polja koja su na početku bila bijela budu crna.

13. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na

kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak.
Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

14. *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh. Odredi najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

5.3. A3: Borna Banjanin - Polinomi

Predavanje | Hintovi | Rješenja

Uvod

Odlučio sam se napraviti predavanje o polinomima zato što sam se kao natjecatelj jako bojao zadatka s njima. Bilo to na županijskom, državnom ili HMO-u. Nadam se da će ovaj PDF svakom čitatelju i slušatelju pomoći i dobro pripremiti na polonomijalne vradžbe pisatelja zadataka. U idućih nekoliko odjeljaka malo ću opisati kakvi su obično polinomijalni zadaci na razinama natjecanja na kojima sam bio, a nakon toga slijedi teorija te zadaci.

Polinomi na županijskom natjecanju

Na županijskom natjecanju su polinomijalni zadaci budu jednostavniji i na njima nije potrebno znati gotovo nikakvu teoriju. Uglavnom je samo bitno da se u polinom kao u funkciju uvrste vrijednosti dane u zadatku te nekom algebarskom manipulacijom dođe do rješenja.

Polinomi na državnom natjecanju

Na sreću se nisam nikada susreo sa polinomima tijekom državnom natjecanja, ali zbog samog pripremanja kroz srednju školu mogu reći nekoliko najbitnijih stvari za njih. Na ovoj razini polinomi već počinju biti problematični i osim samih algebarskih rješavanja jednadžbi (koje je sada, naravno, teže nego prije) bitno je znati i dio teorije.

Polinomi na HMO-u

Samo sam se jednom susreo s polinomima na HMO-u i to je bilo u 2. razredu, kada sam bio najneiskusniji (HMO 2021., drugi dan, algebra). Iako mi na kraju nije ništa značilo, bio sam te sreće da nisam u taj zadatak uložio nimalo truda jer se ispostavilo da je bio najteži na tom testu (riješili su ga samo slavni Dorijan Lendvaj i možda još pokoji bistri natjecatelj na kojeg sam zaboravio). U ovakvim zadacima je bitno znati gotovo svu teoriju, ali isto tako jako dobro baratati samom algebrom. Ako se kroz svoju natjecateljsku karijeru susretnete s ovakvim zadacima, želim svu sreću ovog svijeta.

Polinomi

Nakon ovog srceparajućeg uvoda se možemo napokon baciti na posao i upoznati se s polinomima i najbitnijim njihovim svojstvima.

Definicija 5.3.1

Monom u varijabli x je algebarski izraz oblika cx^k, gdje je c konstanta, a k nenegativni cijeli broj.

Definicija 5.3.2

Polinom u varijabli x je suma konačno mnogo monoma u x, odnosno izraz oblike:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

. Ako ne pričamo o nul-polinomu, pretpostavljamo da je n prirodan broj i da je a_n različit od nule. Tada kažemo da je stupanj polinoma P jednak n i pišemo:

$$deg(P) = n$$

.

Konstante $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima, a skup polinoma s koeficijentima iz skupa A označavamo s $A[x]$.

Definicija 5.3.3

Polinom nazivamo nul-polinomom ako i samo ako su mi svi koeficijenti jednaki 0 i pišemo:

$$P = 0$$

Nul-polinomu dogovorno pridružujemo stupanj $-\infty$.

Stupanj nul-polinoma ima savršenog smisla, ali neću ovdje objašnjavati zašti je to tako. Možete za vježbu sami promisliti.

Teorem 5.3.4

Ako su A i B dva polinoma onda:

$$deg(A \pm B) \leq max(deg(A), deg(B))$$

$$deg(A \cdot B) = deg(A) + deg(B)$$

Teorem 5.3.5

Za polinome A i B postoje jedinstveni polinomi Q i R tako da:

$$A = BQ + R, deg(R) < deg(B)$$

Gornji teorem je teorem o dijeljenju polinoma koji nam je bitan kod polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Teorem 5.3.6

Polinom $P(x)$ je djeljiv s binomom $x - a$ ako i samo ako $P(a) = 0$.

Teorem 5.3.7

Ako je polinom P djeljiv s polinomom Q onda je svaka nultočka od Q ujedno i nultočka od P.

Teorem 5.3.8

Polinom $P(x)$ stupnja n većeg od 0 ima jedinstveni zapis oblika

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

gdje je c različit od 0 i $x_1, x_2, \ldots x_n$ kompleksni brojevi. Odnosno polinom stupnja n ima maksimalno n nultočki.

Nakon što smo se dotakli kompleksnih nultočaka polinoma, bitno je spomenuti i ovo:

Teorem 5.3.9

Ako je x nultočka polinoma P, onda je i $\overline{x}$ nultučka polinoma P.

Ovo je jako bitna tvrdnja koju ćemo dosta koristiti kod zadataka s polinoma kompleksnih koeficijenata. Osim toga, spomenut ćemo i neke druge bitne teoreme vezane uz nultočke polinoma.

Teorem 5.3.10

Ako su b_1, b_2, $\ldots b_n$ nultočke polinoma $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, onda vrijedi:

U ovom trenutku sam preumoran napisati točno Vieta formule za ovo tako da ću ih zapisati na ploču. U knjizi predavanja ću ispraviti ovu grešku.
Nakon toga krećemo na polinome s cjelobrojnim koeficijentima. Ovo predavanja je iz algebre, a ne iz teorije brojeva tako da će ovaj dio biti manje bitan za rješavanje mojih zadataka, ali ću spomenuti čisto da se podsjetite da postoji i ta strana polinoma.

Teorem 5.3.11

Ako je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima, $a-b$ dijeli $P(a)-P(b)$ za sve različite cijele brojeve a i b.

Teorem 5.3.12

Ako racionalni broj $\frac{p}{q}$ (gdje su p i q relativno prosti) nultočka polinoma $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima onda $p|a_0$ i $q|a_n$.

I to je bilo to od teorije. Drago mi je da ste izdržali kroz cijelo predavanje. Sad se bacamo na zadatke.

Brutalno teški zadaci kao Brutalni Vux

1. Neka su a, b, c različiti cijeli brojevi i $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom takav da je $P(a) = a^3$ i $P(b) = b^3$. Odredi $P(1)$.
2. Odredi sve koeficijente s realnim koeficijentima takve da za sve realne brojeve x vrijedi:
$$P(x^2) + 2P(x) = (P(x))^2 + 2$$
3. Odredite polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima takav da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $xP(x-n) = (x-1)P(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Neka je P polinom n-tog stupnja čiji su svi koeficijenti nenegativni, a vodeći i slobodni koeficijent jednaki su 1. Uz pretpostavku da su sve nultočke od P realni brojevi, dokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $P(x) \geq (x+1)^n$.
5. Dokažite da ne postoji polinom p s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(1) = 4$ i $p(4) = 9$.
6. Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(5) = 2005$. Može li broj $P(2005)$ biti potpun kvadrat (kvadrat prirodnog broja)?
7. Ovisno o realnom parametru a, riješi jednadžbu
$$(a-1)\left(1+x+x^2\right)^2 = (a+1)\left(1+x^2+x^4\right)$$
u skupu realnih brojeva.
8. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je polinom $(x+1)^n - x^n - 1$ djeljiv s x^2+x+1.
9. Ako ste riješili sve prošle zadatke pliz mi recite jer budem vam samo pisao teže zadatke na ploču. Pusa.

5.4. N3: Mislav Plavac - Diofantske jednadžbe

Predavanje | Hintovi | Rješenja

Uvod

Diofantske jednadžbe su jednadžbe s dvije ili više nepoznanica koje rješavamo u skupu prirodnih ili cijelih brojeva. Ne postoji univerzalan način ra rješavanje svih diofantskih jednadžbi koje se pojavljuju na natjecanjima, ali postoje određene ideje koje su vrlo često korisne u rješavanju.

Metoda faktorizacije

Primjer 1. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$xy - y + 2x = 4.$$

Rješenje 1.

$$\begin{aligned} &y(x-1) + 2x - 2 = 2 \\ &y(x-1) + 2(x-1) = 2 \\ &(x-1)(y+2) = 2 \end{aligned}$$

1. $x-1=1$, $\underline{y+2=2}$, $x=2$, $y=0$
2. $x-1=2$, $\underline{y+2=1}$, $x=3$, $y=-1$
3. $x-1=-1$, $\underline{y+2=-2}$, $x=0$, $y=-4$
4. $x-1=-2$, $\underline{y+2=-1}$, $x=-1$, $y=-3$

Rješenja su $(x,y) \in \{(2,0),(3,-1),(0,-4),(-1,-3)\}$. □

Primjer 2. Riješite jednadžbu $x^2 + x = 2^a$

Rješenje 2. Jednadžbu zapišemo kao $x(x+1) = 2^a$.
Kako su x i $x+1$ relativno prosti, možemo zaključiti da je manji od njih (odnosno x) jednak 1, a veći jednak 2^a.
Dakle, jedino rješenje jest $x = 1$. □

Metoda kvocijenta

Primjer 3. Riješite u skupu prirodnih brojeva sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}.$$

Rješenje 3.

$$\begin{aligned} &13x + 13y = xy \\ &y(x-13) = 13x \\ &y = \frac{13x}{x-13} = 13 + \frac{13^2}{x-13} \end{aligned}$$

Kako y mora biti cijeli broj slijedi $(x-13)|13^2$, odnosno $x = 14, 26, 182$, $y = 182, 26, 14$. Rješenja su $(x,y) \in \{(14,182),(26,26),(182,14)\}$. □

Promatranje ostatka (kongruencije)

Ovom metodom pokazujemo da neka diofantska jednadžba nema rješenja tako da pokažemo da se ostatak koji pri dijeljenju s nekim brojem daje lijeva strana jednakosti razlikuje od ostatka koji daje desna strana.

Primjer 4. Odredite sva prirodna rješenja jednadžbe: $x^2 - 4y = 1995$.

Rješenje 4. Vidimo da desna strana jednadžbe daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Zaključujemo da i lijeva strana jednadžbe mora dati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Budući da je $4y$ očito djeljivo sa 4, x^2 mora dati ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Ali lako se uvjerimo da za svaki prirodni broj x^2 daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 4. Dakle, zaključujemo da jednadžba nema prirodnih rješenja. $\square$

Nejednakosti

Primjer 5. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $a + b + c = abc$.

Rješenje 5. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $abc = a+b+c \leq 3c$, odnosno $ab \leq 3$, pa razlikujemo tri slučaja:

1. $a = 1$, $b = 1$;
2. $a = 1$, $b = 2$;
3. $a = 1$, $b = 3$;

Uvrštavajući te vrijednosti u početnu jednadžbu u 1.slučaju dobijemo kontradikciju $(2 = 0)$, 2.slučaj daje $c = 3$, a 3. daje $c = 2$ što je pak kontradikcija s $b \leq c$. Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$. $\square$

Primjer 6. Dokažite da izraz n^2+n+1, gdje je n prirodan broj, ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Rješenje 6. Primijetimo da zbog $n \in \mathbb{N}$ tj. $n > 0$ vrijedi

$$n^2 + n + 1 > n^2 + 0 + 1 > n^2$$

S druge strane, sličnim zaključivanjem imamo i

$$n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Međutim, n i $n+1$ su 2 uzastopna prirodna broja. S obzirom da je n^2+n+1 strogo između njihovih kvadrata, taj broj nikako ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja. $\square$

Lakši zadaci

1. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) takve da je

$$x^2 + 10y = 1234567$$

2. Odredite sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je

$$3 \cdot 2^m + 1 = n^2$$

3. Nađite sve prirodne brojeve m, n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$4^m - 9n = 5$$

4. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 - y! = 2001$$

5. Odredite sve prirodne brojeve x, y, z takve da je

$$x^2 - y^2 = 2xyz$$

6. Dokažite da jednadžba

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004},$$

pri čemu vrijedi da je $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$, ima točno 2 rješenja u skupu cijelih brojeva.

7. Odredite sve parove cijelih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$$

8. Odredite sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13$$

9. Odredite sve prirodne brojeve x takve da vrijedi

$$3^x + 4^x = 5^x$$

10. Odredite prirodne brojeve a, b, c takve da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

Umjereni zadaci

11. Odredite sve nenegativne cijele brojeve x, y takve da je

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

12. Odredite sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je

$$5(xy + yz + zx) = 4xyz$$

13. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

14. Neka su m, n, x i y prirodni brojevi za koje vrijedi

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

Dokažite da je tada $x = y$.

15. Dokažite da jednadžba $y^2 = x^5 - 4$ nema cjelobrojnih rješenja.

16. Odredite sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

17. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$$

Teži zadaci

18. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a^b - b^a + 2^a = 17a^4 - 2b^2 + 52$$

19. Nađite sve trojke (x, y, p) gdje su x i y prirodni brojevi te p prost broj takve da zadovoljavaju

$$x^5 + x^4 + 1 = p^y$$

20. Odredite sve cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$3^x - 2^y = 5$$

21. Odredite sve uređene trojke prostih brojeva (p, q, r) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$$

22. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi x, y, z takvi da je:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

6. Zadaci za četvrtu grupu

6.1. G4: Namik Agić - Uvod u projektivnu geometriju

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Projektivna geometrija postala je jako popularna u zadnjih nekoliko godina i postala je jedna od stvari čije osnove svaki ozbiljan natjecatelj treba znati. Ovdje ćemo proći samo osnove, za dodatne reference na stranici natjecanja.math.hr pogledajte predavanja Grgura Valentića, Matije Bucića i Domagoja Ćevida.

Prva stvar koja razlikuje projektivnu od obične geometrije je postojanje točaka u beskonačnosti (time zapravo rješavamo problem tako da se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točki. U nastavku, dozvoljavamo da su točke u beskonačnosti u stvarima koje slijede:

Definicija 6.1.1: Dvoomjer

Za četvorku točaka A, B, C, D na pravcu ili na kružnici definiramo dvoomjer

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{AC}{AD}}{\frac{BC}{BD}}$$

, pri čemu dužine gledamo orijentirano (Drugim riječima, ako se AB i CD sijeku i nisu sadržane jedna u drugoj, dvoomjer je negativan, a inače je pozitivan.

Motivacija za ovo dolazi iz projektivnih transformacija koje su detaljnije obrađene u dva gore spomenuta predavanja.
Dodatno, željeli bismo imati neku ekvivalentnu definiciju dvoomjera preko kuteva, a u tome nam pomaže sljedeće:

Definicija 6.1.2: Dvoomjer s kutevima

Neka su A, B, C, D na pravcu i neka je O točka ravnine koja nije na tom pravcu. Tada definiramo

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{\sin AOC}{\sin BOC}}{\frac{\sin AOD}{\sin BOD}}$$

Ako su A, B, C, D na kružnici, dodatan zahtjev je da je O na istoj kružnici s njima. Dodatno, poistovjećivat ćemo dvoomjere pravaca OA, OB, OC, OD s A, B, C, D.

Promotrimo prvu posljedicu ovoga:

Korolar 6.1.3

Ako je $\alpha \in \mathbb{R}$ fiksan, te ako su fiksne točke A, B, C na pravcu ℓ, točka X na ℓ za koju vrijedi $(A, B; C, X) = \alpha$ je jedinstvena.

Ovo može biti jako koristan alat za pokazivanje konkurentnosti i kolinearnosti uz fantomiranje; ako imamo Z_1 i Z_2 na pravcu koje rade isti dvoomjer s 3 fiksne točke, tada su i one iste.

Sad imamo dobar alat za prebacivanje dvoomjera s pravca na druge pravce/kružnice. U ovom predavanju glavni objekt promatranja će biti četvorke točaka za koje je taj dvoomjer jednak -1 i ubuduće ćemo takve četvorke zvati harmonitetima. Te točke uglavnom nastaju na sljedeće načine (sami se uvjerite da zaista dobivamo harmonitete):

- Ako u trokutu imamo konkurentne čevijane AD, BE, CF, onda ako je $T = EF \cap BC$, $(T, D; B, C)$ je harmonitet.
- Ako imamo trokut ABC i presiječemo tangente na opisanu kružnicu u B, C i nazovemo tu točku Z, te ako je T presjek AZ i opisane, $(A, Z; B, C) = -1$. Oni koji znaju malo teorije prepoznat će AT kao simedijanu u ABC.
- Neka su A, C, B, D na pravcu tim redom i neka je T točka van tog pravca. AKo je TB simetrala $\angle CTD$ i $\angle ATB = 90°$, tada je $(A, B; C, D) = -1$.
- Ako je C polovište AB, tada je $(A, B; C, \infty_{BC}) = -1$

6.2. Pol i polara

Neka je Ω fiksna kružnica sa centrom O radijusa r. Osnovna ideja polova i polara je uvođenje svojevrsne dualnosti točaka i pravaca s obzirom na tu kružnicu. Radimo bijekciju sa skupa točaka projektivne ravnine na skup pravaca projektivne ravnine na sljedeći način: za zadani pravac ℓ koji je udaljen za d od O. Njoj pridružujemo točku T takvu da je:

- $OT \cdot d = r^2$
- T leži na okomici iz O na ℓ, i to između O i ℓ

Lako je vidjeti da je ovo preslikavanje zaista bijekcija. Korisna obzervacija je:

Teorem 6.2.1: La Hire

X je na polari od Y akko je Y na polari od X

Praktična vizualizacija za polaru točke van kružnice je sljedeća: polara od Z je pravac koji prolazi diralištima tangenti iz Z na Ω te je to ujedno i jako efikasan način za prepoznavanje polara u divljini.

Teorem 6.2.2

Neka je AB tetiva kružnice Ω, te neka su X, Y na AB. Tada je X na polari od Y akko $(A, B; X, Y) = -1$

Najkorisniji teoremi koje ću napisati na ploči su: Pascalov teorem, Pappusove teorem, Brianchonov teorem i teorem o leptiru. Zbog autorove lijenosti neću ovdje natipkavati njihov iskaz nego ćemo to zajedno proći na ploči. Dokaz istih postoji u raznoj literaturi, no neki koriste projektivne transformacije.
S ovim znanjem možete se okušati na zadacima, no bitna napomena: za većinu ovih zadataka ćete morati doći do nekih geometrijskih zaključaka uz projektivne korake, pa nemojte misliti da su harmoniteti no-brain metoda za rješavanje geometrijskih zadataka.

Zadaci

1. U trokutu ABC, D, E, F su dirališta upisane kružnice sa BC, CA, AB redom, te je I centar upisane kružnice. Ako je $S = EF \cap BC$, dokaži $IS \perp AD$.

2. Neka je AD visina u šiljastokutnom trokutu ABC, a P proizvoljna točka na $\overline{AD}$. BP siječe AC u M, a CP siječe AB u N. MN siječe AD u Q. Neka je F proizvoljna točka na $\overline{AC}$. FQ siječe CN u E. Dokaži $\angle FDA = \angle EDA$.

3. Neka je ABC šiljastokutan s $AB < AC$. Neka su M, N redom polovišta BC i AB. D, E, F su redom presjeci kružnice promjera AB s BC, AM, AC. Neka je G polovište CF. Dokaži da su NF, GM, DE konkurentni.

4. Neka je ω kružnica kroz točke A, B trokuta ABC i neka ω siječe AC, BC u D, E redom. Neka je N na AB takva da se CN, BD i AE sijeku u jednoj točki. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokaži da su M, N, D, E konciklične.

5. U trokutu ABC, D je diralište upisane kružnice sa stranicom BC. AD siječe upisanu kružnicu opet u X. Neka je $T \neq D$ na AD takva da $BT = BD$ i neka je $S \equiv BT \cap CX$. Dokaži da je $ST = TB$.

6. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut u kojem je $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ i $\angle EDC = \angle CBA$. AC i BD sijeku se u X. Dokaži $EX \perp BC$.

7. U tetivnom četverokutu $ABCD$, neka je M polovište stranice $\overline{CD}$ i neka je $N \neq M$ na kružnici opisanoj trokutu ABM takva da vrijedi $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Neka je $E \equiv AC \cap BD$ i $F \equiv AD \cap BC$. Dokaži da su E, F i N kolinearne.

8. Neka je ABC šiljastokutan s opisanom kružnicom Ω. D, E, F su dirališta upisane kružnice ABC s BC, CA, AB redom. P, Q su na Ω tako da su P, F, E, Q na pravcu u tom redu. Dokaži $\angle PIQ = \angle DQA + \angle APD$

6.3. C4: Andrej Čizmarević - Olimpijski zadaci

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci

1. Zeton je postavljen na svaki vrh pravilnog n-terokuta. Potez se sastoji od izabiranja brida i zamjene zetona koji se nalaze na vrhovima koje izabrani brid spaja. Nakon konacnog broja poteza ispostavilo se da su svaka dva zetona tocno jednom zamijenila mjesta. Dokazi da postoji brid na kojem se nije dogodila zamjena.

2. Neka je n prirodan broj ≥ 3. U drzavi postoji n zracnih luka i n aviokompanija. Za svaku aviokompaniju postoji prirodan broj $m \geq 3$ i m razlicitih zracnih luka $c_1, ..., c_m$ tako da ta aviokompanija nudi letove tocno izmedu sljedecih parova gradova: c_1 i c_2; c_2 i c_3; ...; c_{m-1} i c_m; c_m i c_1. Dokazi da postoji zatvoreni ciklus neparne duljine u kojem niti jedna dva brida nisu organizirana od iste aviokompanije.

6.4. A4: Ivan Vojvodić - Nizovi u algebri

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Poznato je da se najkvalitetnija predavanja stavljaju na drugi dan popodne, pa se zato danas družite sa mnom.
Nizovi su jedna od najstandardnijih tema nestandardne algebre i kao takvi se znaju često pojaviti na natjecanjima. Najčešće su to zabavni zadaci s kojima se samo treba igrati i raditi polupametne algebarske manipulacije, uočiti neka netrivijalna svojstva niza, i onda se samo raspadnu u nekom trenutku. Ovo je naravno žestoko pojednostavljenje, ali definitivno postoje generalne smjernice koje su primijenjive na gotovo svaki zadatak s gdje se proučava neki niz.

Tips and tricks

Generalno korisne stvari za razmišljanje kad se radi o zadatku s nizom:

- Dokaži da je niz rastući/padajući/strogo rastući/strogo padajući.
- Često je niz zadan nekim čudnim rekurzivnim pravilom, tada je gotovo sigurno nužan korak u rješenju nekakva algebarska manipulacija tog pravila koja ga pretvara u nešto s čime se lakše barata.
- Također korisno kod rekurzivno zadanih nizova, ali i općenito: definiraj novi niz iz niza koji je zadan i promotri kako se on ponaša.
- Padajući niz cijelih brojeva koji je omeđen odozdo će nakon nekog vremena biti konstantan.
- Dokaži da je niz periodičan.
- Zapiši prvih nekoliko članova i pokušaj uočiti neki uzorak (često ne pomaže kod težih zadataka).
- I naravno, najbitniji alat u cijeloj matematici: INDUKCIJA.

Lakši zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Dan je prirodan broj n i niz $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koji zadovoljava $a_0 = \frac{1}{2}$ i

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$$

za svaki $1 \leq k \leq n$. Dokaži da vrijedi

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

2. Nizovi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ su definirani s $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ te

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \; b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

Dokaži da je $a_{2008} < 5$.

3. Niz realnih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definiran je sa $a_0 = -1$ te s relacijom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \text{ za } n \geq 1$$

Dokaži da je $a_n > 0$ za svaki $n \geq 1$.

4. Neka je n prirodni broj i $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ proizvoljni realni brojevi. Definirajmo nizove $u_0, \ldots, u_n$ i $v_0, \ldots, v_n$ induktivno sa $u_0 = u_1 = v_0 = v_1$, te

$$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1},\ v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$$

za svaki $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dokaži da je $u_n = v_n$.

5. Niz realnih brojeva $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran je na sljedeći način: a_0 je proizvoljan realni broj, i za svaki $n \geq 0$ vrijedi

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \{a_n\}$$

gdje je $\lfloor x \rfloor$ definiran kao najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x, te je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Dokaži da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $a_{n+2} = a_n$ za svaki $n \geq N$.

6. Dokaži da je $r = 2$ najveći realni broj r koji zadovoljava sljedeći uvjet:

Ako niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodnih brojeva zadovoljava

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

za svaki prirodni broj n, tada postoji prirodni broj M takav da je $a_{n+2} = a_n$ za svaki $n \geq M$.

7. Dan je niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ koji zadovoljava $a_1 = 1$ te

$$a_{2n} = a_n + 1;\ a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$$

za svaki $n \geq 1$. Dokaži da se svaki pozitivni racionalni broj u nizu pojavljuje točno jednom.

6.5. N4: Namik Agić - Vp načini razmišljanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Ovo sam predavanje htio napraviti jer sam na svojoj koži uočio da se na dosta puno TB predavanja zadaci fokusiraju na "prepoznavanje" ideje iz naslova, a rijetko se spominje motivacija za to (odnosno ono pitanje "Kako mi je to moglo/trebalo pasti na pamet?). Ovo je predavanje moj pokušaj da tome doskočim, kako ste najviša grupa pretpostavljam da ste upoznati s osnovnim/standardnijim idejama gledanja v_p stvari: LTE, eventualno Zsigmondy. Za očekivati je da će IMO ekipa biti sačinjena od nekoliko vas koji slušaju ovo predavanje, zato će ovo predavanje biti sačinjeno od manjeg broja zadataka koji će zato biti teži i nadam se poučni. Naravno, nijedno predavanje ne može zamijeniti vaš samostali rad, ali možda nešto što čujete može pomoći.

O samom gledanju prostih faktora u teoriji brojeva

U zadacima iz teorije brojeva prosti brojevi djeljivost je najbolja struktura koju imamo, a prosti brojevi iskaču kao posljedica toga ("jako ih malo" brojeva dijeli). Inače, izrazi poput "jako malo/puno", "dovoljno veliko/malo" će biti neke mentalne zabilješke koje ćemo sebi raditi u rješavanju zadataka, dok ćemo u zapisu rješenja ipak precizirati što to točno znači.

U težim zadacima iz teorije brojeva koji se pojavljuju na olimpijadama, obično će glavna stvar biti naći strukturu koju čine uvjeti (koja dakako može biti nešto okusa teorije brojeva ili nečeg drugog). Kad rješavate takve zadatke, nemojte se bojati pokušavati različite stvari, ako ne rade probajte otkriti zašto raspisivanjem primjera ili nekako drugačije: ja sam s ovim posebno imao problema, čim bi ispucao ideje koje sam imao na početku, nekako bih gledao u prazno jako drugo očekivajući da će se rješenje ukazati samo umjesto da sam nastavio pokušavati. Ispod je jedan lakši ilustrativan primjer sa Sveruske olimpijade 2022. koji ćemo diskutirati uživo:

Primjer 1. Za složen prirodan broj a neka su njegovi "glavni djelitelji" dva najveća različita prirodna broja m, n takvi da $m \mid a, n \mid a$, te $m, n \neq a$. Dokaži da ako dva složena broja imaju iste glavne djelitelje da su onda i oni sami međusobno jednaki.

U ovom zadatku glavna je ideja povezivanje najvećih i najmanjih djelitelja broja. Naravno, intuitivno je jasno da ne možemo imati složen broj kao jako malen djelitelj prije malenih prostih i to nam zapravo ostavlja jako malo mogućnosti za treći najmanji djelitelj broj, nakon čega se zadatak brzo završava.

Naravno, pod ovu kategoriju možemo staviti i diofantske, ali na ovom predavanju se nećemo toliko baviti njihovim rješavanjem: vjerojatno ste to čuli dovoljno puta. U zadacima na kraju će se potkrasti koja diofantska više kao utvrđivanje gradiva od prije.

6.5.1. Traženje karakterizacija/strukture u zadacima iz teorije brojeva

Ovo poglavlje će biti namijenjeno strategijama za traženje bitnih informacija u zadacima teorije brojeva. Vjerojatno ste dosad vidjeli zadatke oblika n je dobar ako za njega nešto vrijedi, a rješenje ima oblik dokažimo da za takav n vrijedi nešto drugo s čime je lakše raditi. Sljedeći primjer pokazuje koliko je bitno igranje sa raznim slučajevima u pokušajima dolazaka do takvih tvrdnji:

Primjer 2. (Kineski TST 2016.) Neka su c, d prirodni brojevi veći od 1. $\{a_n\}$ je niz prirodnih brojeva zadan s $a_1 = c, a_{n+1} = a_n^d + c$. Dokaži da za svaki prirodan k postoji prost broj koji dijeli a_k ali ne dijeli a_j za sve $j < k$.

Prvo pokušajte neko vrijeme razmisliti o ovom zadatku. Uvjet je na prvu čudan, možda nam nije jasno na prvu kako dokazivati takve stvari, naravno prvi korak je pretpostaviti suprotno, neka je a_n prvi takav protuprimjer. Budući da se dosta malo zna o prostim brojevima, vjerojatno nećemo eksplicitno naći takav prost broj. Ovdje se nameće ideja koja se isto pojavljuje dosta često: dokazat ćemo da prosti djelitelji prošlih brojeva ne mogu doprinijeti dovoljno, odnosno laički, niz raste prebrzo a v_p ne mogu pratiti taj rast. Ispod je uputa za rješavanje:

- Dokažite da ako fiksiramo prost p, skup indekasa z za koje p dijeli a_z čini aritmetički niz.
- Dokažite da ako p dijeli a_x (uzimamo minimalan takav), tada neka velika potencija od p dijeli $a_{kx} - a_x$, ovo osigurava da v_p neće rasti. (Zašto?)
- Sad iz gornjeg dobijte ogradu za a_n preko prethodnih članova niza (Imate jako puno slobode, dovoljno je $a_n < a_1 \dots a_{n-1}$).
- Dokažite da je zapravo uvijek $a_n > a_1 \dots a_{n-1}$, za sve prirodne n i završite.

Razmislimo malo o rješenju i našim heuristikama za rješavanje. Prva točka je nešto što i generalno vrijedi za rekurzivno zadane nizove prirodnih brojeva i to je često korisna obzervacija, te iako je izgledala banalno, dala nam je nešto s čime možemo raditi. Druga točka je materijalizacija ove ideje kontroliranja v_p-ova i sad je malo jasnije da ona nije baš došla iz vedra neba. Zadnje dvije točke su formalizacija ovog argumenta da niz raste prebrzo da ga stari prosti cijelog popune. Dakako, ovo je ozbiljan zadatak i nemojte se osjećati ako ga ne riješite. Ovo je samo primjer da i ozbiljni zadaci mogu postati dohvatljivi ako razmišljate na pravi način i ne bojite se pokušavati stvari.
Ovo sve u teoriji zvuči super, ali najviše ćete to moći doživjeti samo ako rješavate zadatke. Zadaci su većinom vađeni sa IMO shortlista i svi su ozbiljni zadaci. Ako negdje zapnete, slobodno pitajte za hint.

Zadaci

1. Neka je $n > 6$ savršen broj i $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ njegova kanonska faktorizacija. Dokaži da je e_1 paran.
2. Odredi sve prirodne brojeve $m \geq 2$ takve da za svaki n za koji je $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$, n dijeli $\binom{n}{m-2n}$.
3. Nađite sve prirodne brojeve a, b i proste p za koje je $a^p = b! + p$
4. Neka je $\{a_n\}$ beskonačan niz prirodnih brojeva takav da postoji prirodan N takav da je
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$
prirodan za sve $n > N$. Dokaži da je niz $\{a_n\}$ eventualno konstantan, odnosno postoji prirodan M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m > M$.

5. Dokaži da $n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$ ima samo konačno rješenja u prirodnim brojevima.

6. Neka je a prirodan broj. Kažemo da je prirodan broj b a-*dobar* ako za svaki prirodan n za koji je $an > b$, $an + 1$ dijeli $\binom{an}{b} - 1$. Neka je b prirodan. Ako je b a-dobar, a $b + 2$ nije a-dobar, dokaži da je $b + 1$ prost.

7. Neka je c prirodan. Definiramo niz $\{a_n\}$ tako da je $a_1 = c$ te

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4a_n^2 \cdot c + 5a_n \cdot c^2 + c$$

za sve $n \geq 1$. Dokaži da za svaki prirodan k, a_k ima prost djelitelj koji ne dijeli a_l ni za jedan $l < k$.

II. Hintovi s predavanja

7. Hintovi za prvu grupu

7.1. G1: Nika Utrobičić - Angle chasing

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Razdvojite dokaž u 3 slučaja, jedan kad je središnji kut unutar obodnog, drugi kad središnji i obodni dijele krak, i treći kad se sijeku. Koji slučaj možete odmah riješiti?

2. Na skicu dodajte radijus.

3. Prikaži što više kuteva preko kuta $\angle ABC$.

4. Ako je E sjecište $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, promatrajte $\triangle AED$.

5. Primijetite da je središte upisane i opisane kružnice sjecište simetrala kutova.

6. Koristite teorem o obodnom i središnjem kutu te činjenicu da je tangenta okomita na polumjer.

7. Spustite okomicu iz vrha C na AD i promotrite $\triangle CED$.

8. Dokažite da je trokut $\triangle ABA_0$ jednakokračan.

9. Koristite da su obodni kutovi nad istom tetivom jednaki te primijetite tetivne četverokute.

10. Dovedi četverokut u vezu s nekom kružnicom!

11. Produži stranicu AB za AC!

12. Dobij jednakokračne trokute!

13. Spusti visinu i napravi sukladne trokute!

14. Dokaži da trokut $\triangle OAH$ mora biti jednakokračan! Kako ti to pomaže?

Jadan Namik :(

15. Naganjajte nekakve kuteve! :)

16. Naganjajte nekakve kuteve! :)

17. Naganjajte nekakve kuteve! :)

7.2. C1: Marija Ćorić - Prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Iskoristite princip umnoška.
2. U svakom se redu tada nužno nalazi jedan top, iskoristite princip umnoška.
3. Iskoristite FUI.
4. Iskoristite princip dvostrukog prebrojavanja.
5. Razdvojite na slučajeve u ovisnosti o parnosti respektivnih brojeva.
6. Faktorizirajte 600.
7. Razdvojite po slučajevima u ovisnosti o parnosti prve znamenke.
8. Grupirajte brojeve u S.
9. (a) Iskoristi binomni koeficijent.
   (b) Iskoristi princip produkta.
   (c) Razdvoji na slučajeve.
   (d) Iskoristi binomni koeficijent.
10. Pobrojite ih u ovisnosti o dimenzijama kvadrata.
11. (a) Najkraći putevi se sastoje samo od pokreta gore i desno.
    (b) Iskoristite prošli podzadatak i princip umnoška.
    (c) Iskoristite pretprošli podzadatak i FUI.
12. Raspored oblačenja jednoznačno je određen uređenom 16-orkom u kojoj se svaki broj od 1 do 8 ponavlja dvaput.
13. (a) Djevojke promatrajte kao zasebnu osobu radi njihove pozicije i zatim ih posebno permutiraj same unutar sebe.
    (b) Fiksiraj mladiće pa promotri koliko opcija imamo za postaviti djevojke.
14. (a) Fiksiraj neku osobu i nju smatraj početkom. Ostale rasporedi prema toj osobi. Drugi način razmišljanja je promatrati takav raspored prvo kao red, a onda spajanjem krajeva utvrđujemo da se neki rasporedi ponavljaju određen broj puta.
    (b) Anu i Ivana možete promatrati kao zaseban blok.
    (c) Slično kao i pod a).
    (d) Promatrajte ih sve kao zasebne blokove i zatim permutirajte ili rasporedite prvo samo jedne supružnike, a zatim druge do njih.
15. Metoda kuglica i štapića.
16. Svaki je pravokutnik jedinstveno određen dvama parovima pravaca.
17. Iskoristite FUI i prethodni zadatak.
18. Koliko ima parova učenika? Koliko ih čisti učionicu svaki dan?

19. Faktorizirajte 270 i promotrite na koliko načina možemo postaviti različite faktore po poljima matrice, grupirajući potencije istog prostog broja.

20. Na koliko načina možemo omotnicu drugu po veličini staviti u najveću? A treću?

21. Dirichletov princip.

22. Probajte iskoristiti prethodni zadatak.

23. Dirichletov princip.

7.3. A1: Hrvoje Radoš - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadatci

1. A-H
2. A-H
3. A-G
4. A-G
5. A-G (u promatrajte parove)
6. A-G

Umjereni zadatci

7. A-G (2 puta)
8. Slično kao prošli zadatak
9. Izmnoži sve i riješi se razlomka
10. pokušajte drugačije grupirati članove
11. kvadrirajte početni izraz

Teži zadatci

12. Direktno primijeni A-H na ... (a necu sada sve reci :))
13. minimum od $a + b$ je 20
14. $\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{b}{2}\frac{2ab}{a^2+b^2}$
15. Svedite sve na zajednički nazivnik i napravite $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{a^4+c^4}{2}$
16. Heronova formula
17. $\sqrt{2(a + \frac{b}{c})} \leq \frac{a+\frac{b}{c}+2}{2}$

7.4. N1: Marija Ćorić - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Može li neki prost broj biti oblika $6k+2$? A $6k+3$ ili $6k+4$?
2. $10^k \equiv ? \pmod 9, 11^k \equiv ? \pmod{11}$
3. Razvoji po slučajevima u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju s 3, odnosno s 4.
4. Razdvoji po slučajevima u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju s 3.
5. Iskoristi 4. zadatak.
6. Razdvoji po slučajevima u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju s 4.
7. Promotri male slučajeve, u ovisnosti o parnosti.
8. Eulerov teorem.
9. Promotrite kongruenciju modulo 9.
10. Mali Fermatov teorem.
11. Mali Fermatov teorem.
12. Promotri kongruenciju modulo 7.
13. Promotri kongruenciju modulo 11.
14. Promotri parnost izraza.
15. Eulerov teorem.
16. Iskoristi zadnje svojstvo navedeno u Teoremu 1.2.
17. Faktoriziraj i promotri po slučajevima djeljivost s potencijama od 2 i 5. Dovoljno promatrati $N = \overline{abcd}$.
18. Iskoristite 2. zadatak.

8. Hintovi za drugu grupu

8.1. G2: Ivan Vojvodić - Radikalno centriranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Radikalna os je okomita na spojnicu središta
2. Potencijom točke iz C dokaži da su A_1, A_2, B_1, B_2 konciklične. Dovrši iz toga u jednoj rečenici.
3. $OP = OQ \iff P$ i Q imaju istu potenciju točke na (ABC).
4. Radikalne osi sijeku se u radikalnom centru. Primjena na 2 trojke kružnica.
5. Želimo da K bude radikalno središte. Koje su 3 kružnice?

Bonus: kružnica radijusa 0

6. Kružnica radijusa 0 u M.
7. Preslikamo A preko X i preko Y, dobijemo U i V. Što su U i V u trokutu ABC (sjetimo se $AU = AV = 2 = \frac{o(ABC)}{2}$). Odgovor nam daje jednu kružnicu. Uz nju trebamo još jednu kružnicu takvu da XY bude radikalna os. Koja je to?
8. Želimo da G bude radikalni centar tri kružnice: dvije s radijusom 0 u R i u S, koja je treća?.

8.2. C2: Mislav Brnetić - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promotrite parnost broja crnih polja. Može li se na ploči nalaziti neparno crnih polja?
2. Promotrite broj parnih i neparnih brojeva, kao i zbroj brojeva. Možemo li koristiti istu invarijantu u oba podzadatka?
3. Kakva je parnost brojeva koji su zapisani na ploči u svakom koraku?
4. Kakvi su ostaci brojeva kuglica po bojama pri dijeljenju s 3?
5. Kakav je umnožak koordinata pozicije na kojoj se nalazi mačka u svakom trenutku?
6. Ako neki član Parlamenta u svom domu ima 2 ili 3 neprijatelja, možete li ga "premjestiti" u drugi dom?
7. Kakav je zbroj brojeva zapisanih na ploči nakon svakog koraka?
8. Nije uvijek odgovor ne. :)
9. Pokušajte provesti opisane transformacije za male vrijednosti N te naslutiti rješenje.
10. Pokušajte provesti opisani postupak za male vrijednosti n te naslutiti rješenje.
11. Obojite ploču u 3 boje po dijagonalama.
12. Kako se s vremenom mijenja opseg dijela zemljišta obraslog u korov?
13. Za koliko se suma brojeva na ploči mijenja nakon svakog koraka?
14. Što se događa s brojem najvećih brojeva tijekom opisanog postupka?
15. Ako dva veleposlanika koji su neprijatelji sjede jedan pokraj drugog, možete li ih prerasporediti i tako smanjiti broj neprijateljskih parova veleposlanika za stolom?
16. Što možete zaključiti iz $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$?
17. Promotrite udaljenost točke (a, b, c, d) u 4D prostoru od točke $(0, 0, 0, 0)$. Kako se ta udaljenost mijenja nakon svakog koraka?

8.3. A2: Mislav Plavac - How to Viète

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

1. Koristi korolar o dijeljenju s linearnim polinomom
2. Probaj pogoditi racionalne nultočke
3. $\frac{1}{x}$ smeta, napravi kvadratnu
4. Složi polinom s korijenima a, b, c.
5. Izmnoži izraz i primjeni Vieteove.
6. Viete i puno algebre.
7. Nađi polinom čijem su rješenja α i β

7.2. Kvadratni polinom nam nije od puno koristi, ali podsjeća na razliku kubova.

8. $y = \dfrac{1}{x+3}$
9. Što su a, b?

Umjereni zadaci

10. Ovo je ekvivalentno tome da nađete polinom kojemu su nultočke $2 - x_i$
11. Nađite polinom čije su nultočke $\frac{1}{x_i+1}$
12. Odredite polinom s nultočkama $\frac{1+x}{1-x}$
13. Pametno iskoristit Vieteove ili jako puno pisat.
14. Izmnožiti i Vieteove
15. Teorem o racionalnim nultočkama
16. Što su a, b, c?
17. Pametno iskoristite Vieteove da pojednostavite izraz.
18. Pokušajte dobiti Vieteove formule
19. Dobiti rekurziju za $ax^n + by^n$
20. Pametno iskoristit Vieteove ili puno raspisivat.
21. Raspišite izraze i primjenite Vieteove
22. Kombinirajte Vieteove formule i Pitagorin poučak
23. Raspisat uvjet i koristit Vieteove.

Teži zadaci

24. Raspiši Vieteove i koristi što imamo zadano.

24.2. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

25. $y_n = \dfrac{1}{1 - x_n}$

26. Vieteove i nejednakosti

27. Prva jednadžba ne izgleda baš korisno u ovom obliku.

27.2. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

28. Raspišite Vieteove na više načina.

29. Promatrajte polinom s inverznim nultočkama.

30. Postoji očito rješenje, pokažite da je jedino.

31. Polinom je simetričan. Uvedite niz na nultočke i odredite s čim se svaki idući član množi.

32. Pronađite gdje su nultočke. Ako je funkcija neprekidna i vrijedi $f(a) < 0$ te $f(b) > 0$ tada postoji neki $x_0 \in (a, b)$ takav da je $f(x_0) = 0$.

32.2. Promatrajte sumu n-tih potencija tih nultočaka.

33. Promatrajte kao jednadžbu za jednu od 3 varijable te fiksirajte druge dvije.

8.4. N2: Mislav Brnetić - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Primijenite Mali Fermatov teorem.

2. Primijenite Eulerov teorem kako biste odredili n takav da je $7^n \equiv 1 \pmod{100}$.

3. Primijetite kako je potrebno dokazati da je traženi izraz djeljiv sa 5, 13 i 31 te primijenite Eulerov teorem.

4. Primijetite kako po Malom Fermatovom teoremu vrijedi
$$q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
i
$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$
.

5. Odredite ostatak od $3^{105} i 4^{105}$ pri dijeljenju sa 13.

6. Dokažite da je $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$. Pretpostavite da $p \nmid a$ kako biste dobili kontradikciju.

7. Dokažite da skup {2, 3, ..., p-2} možemo podijeliti na dva jednaka dijela tako da za svaki 0 iz jednog dijela postoji jedinstven l iz drugog dijela sa svojstvom $kl \equiv 1 \pmod{p}$.

8. Zadani izraz izjednačite s kvadratom prirodnog broja. Pokušajte faktorizirati izraz $4mn - m - n + 1$.

9. Primijetite kako vrijedi $ord_{(a^n-1)}(a) = n$ te iskoristite Eulerov teorem i teorem o orderima s predavanja.

10. Pretpostavite suprotno te, korištenjem svojstava ordera, dođite do kontradikcije.

11. Pokušajte odrediti n takav da je $p^n \equiv 1 \pmod{10^{m+1}}$.

12. Dokažite kako je jedini takav broj 1.

13. Primijenite Mali Fermatov teorem.

14. Kako je x racionalan, decimale mu se ponavljaju periodički počevši od neke znamenke. Želimo dokazati da isto vrijedi i za y.

9. Hintovi za treću grupu

9.1. G3: Borna Banjanin - Fantomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Dokažite da se sjecište dvije kružnice nalazi na trećoj.
2. Neka je M' presjek TH i BC.
3. Uzmite tetivni četverokut kojem je suma manja ili veća od 180.
4. Dokažite da se je to sjecište tetivno s ABC.
5. Fantomiraj D i E i dokaži da su na kružnici s promjerom $\overline{BC}$. Što je ekvivalentno s tom tvrdnjom ?
6. Dokažite da je presjek od BM i CN tetivno s ABC.

9.2. C3: Paula Horvat - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Oboji ploči u crno i bijelo šahovskim bojanjem, no tako da crna ibijela polja budu dimenzija 2×2.

2. Oboji ploču u crno i bijelo tako da svaka pločica zauzima točno jedno crno polje.

3. Oboji kutiju tako da, kada staviš jednu ciglu unutra, ona će pokriti 1 crnu kocku i 3 bijele kocke.

4. Oboji ploču u crno i bijelo tako da različite pločice zauzimaju različiti broj crnih i bijelih polja.

5. Oboji ploču po stupcima u crno i bijelo.

6. Princip komplementa, funkcija uključivanja i isključivanja.

7. Za n paran tvrdnja vrijedi, a n neparan ne.

8. Prvi dio se lako konstruira. Hint za drugi dio je Dirichletov princip.

9. Koji će biti ukupan broj susjeda na ploči?

10. Matematička indukcija.

11. Fiksiraj jednu obojanu nit i promatraj koliko barem parova različitih boja mora postojati.

12. Ako je N djeljiv s 3, moguće je, u suprotnom nije. Promatraj prvi red i probaj doći do traženog bojanja. Zašto ne možeš?

13. Odgovor je $2016^2 + 1$. Neparne redove oboji u dvije boje nasumično, parne oboje s druge dvije boje nasumično.

14. Koliko maksimalno lovaca može biti na jednoj dijagonali? Nacrtaj si lovac kao točku na polju iz koje izlaze 3 strelice, svaka u smjeru koji napada. Koliko maksimalno strelica može biti na ploči?

9.3. A3: Borna Banjanin - Polinomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Ispiši sve jednakosti.
2. Supstitucija.
3. Odredi slučajeve s obzirom na veličinu od n.
4. Što se može reći za nultočke polinoma.
5. Neki teorem za polinome u Z.
6. Neki teorem za polinome u Z.
7. Kvadratna.
8. Gledaj nultočke.

9.4. N3: Mislav Plavac - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

1. Modulo 10
2. Razlika kvadrata. Faktoriziraj. Rastavi na slučajeve.
3. Promatrajte ostatke pri dijeljenju brojem 3.
4. Modulo 7
5. Kvadratna
6. Nađite dva spomenuta rješenja. Kakva mora biti parnost od a, b, c i d?
7. Raspiši i faktoriziraj
8. Pametno razvrstaj na lijevu i desnu stranu i faktoriziraj
9. Znamo jedno rješenje, nejednakosti.
10. Uvedi poredak i slučajevi

Umjereni zadaci

11. Suma kvadrata desno smeta, treba ju nekako preoblikovati.
12. Ograniči skup potencijalnih rješenja.
13. Smještanje među kvadrate.
14. AG nejednakost.
15. Pažljivo odaberi n te gledaj jednadžbu modulo n (sjeti se malog Fermatovog teorema).
16. Faktoriziraj
17. Uvedi supstituciju, Viete

Teži zadaci

18. Raspišite par malih slučajeva, promatrajte parnosti.
19. Faktorizacija.
20. Modulo 4, modulo 3
21. Modulo 3, modulo 5
22. Pitagorejske trojke

10. Hintovi za četvrtu grupu

10.1. G4: Namik Agić - Uvod u projektivnu geometriju

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Dokažite da je AD zapravo polara od S
2. Koristite onu lemu s pravim kutem i simatralom
3. Definirajte dva presjeka NF, jedan sa GM i jedan sa DE. Zatim, nađite dva dvoomjera koji su oba -1 i koji se razlikuju samo na mjestu ta 2 presjeka.
4. Raspišite neke harmonike po definiciji i potencija točke
5. Igrajte se s dvoomjerima
6. Možete ili preko Pappusa na neki pravac nakon što uvedete neke presjeke, ili Brianchona nakon što vidite da taj peterokut ima upisanu kružnicu.
7. Dodajte točke i namjestite Brokarda. Iskoristite neku od lema od ranije
8. Uvedite neke presjeke i dobijte neke polare

10.2. C4: Andrej Čizmarević - Olimpijski zadaci

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Dokazi da jedan zeton "radi" krug; dakle, da su mu svi skokovi u istom smjeru pa razmisli koji brid se tada ne bi smio odigrati.
2. Dokazite prvo da postoji raznobojan ciklus pa probajte "popraviti" do raznobojnog neparnog ciklusa.

10.3. A4: Ivan Vojvodić - Nizovi u algebri

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Odredi koliko je $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$ i teleskopiraj.

2. Promotri nizove $\frac{1}{a_n+1}$ i $\frac{1}{b_n+1}$.

3. Zapiši prvih par članova niza. Što uočavaš? koji član je "daleko" najudaljeniji od nule? Uzmi izraz za n i $n+1$ te ih oduzmi tako da eliminiraš tog najvećeg. I naravno, INDUKCIJA.

4. eliminiraj niz $(a_k)_{k=1}^{n-1}$ u potpunosti i sumiraj.

5. Podijeli na slučajeve $a_0 > 0$ i $a_0 < 0$. Promotri niz $\lfloor a_n \rfloor$. To je niz *cijelih* brojeva.

6. za $r = 2$ podijeli na slučaj $a_n \leq< a_{n+1}$ i $a_{n+1} \leq a_n$ i pogledaj što je s a_{n+2}. Zatim pretpostavi $a_m < a_{m+2}$ i pogledaj što se dalje događa.

7. Uzmi neki $\frac{a}{b}$ i radi duplu indukciju po svima $\frac{c}{d}$ za koje vrijedi $c \leq a-1$, $d \leq b$ ili $c \leq a$, $d \leq b-1$

10.4. N4: Namik Agić - Vp načini razmišljanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Dokažite da 2 i 3 dijele n
2. Kad pogodite odgovor igrajte se s malim primjerima i pokušajte naći općeniti način kako odabrati odgovarajući n.
3. Koristite ograde da dobijete $a = p$, odaberite odgovarajući prost i primijenite LTE.
4. Uzmite nešto slabiji uvjet, da je razlika svaka dva susjedna eventualno prirodna, analizirajte što se događa s v_p
5. Zbog lijeve strane ima smisla gledati proste manje od n. Dokažite da su a, b, c manji od $n/2$ i dokažite da su $a+b, b+c, c+a$ potencije od 2.
6. Jasno je da treba naći odgovarajuću karakterizaciju a-dobrih brojeva. Uzmite neki p i pokušajte namjestiti da djeljivost ne vrijedi. Što uočavate?
7. Stariji brat zadatka iz primjera iznad, samo blago modificirajte dokaz.

III. Rješenja s predavanja

11. Rješenja za prvu grupu

11.1. G1: Nika Utrobičić - Angle chasing

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Poučak o obodnom i središnjem kutu
2. Poučak o tetivi i tangenti
3. Označimo $\angle ABC = \beta$. Tada je iz pravokutnog trokuta $\triangle BAN$ $\angle BAN = 90^\circ - \beta$. S druge strane, po poučku o obodnom i središnjem kutu $\angle COA = 2\angle CBA = 2\beta$, pa iz jednakokračnog trokuta $\triangle COA$ izračunamo $\angle CAO = 90^\circ - \beta$.
4. Državno natjecanje 2017. OŠ 7.5.
5. Državno natjecanje 2016. OŠ 7.5.
6. Državno natjecanje 2015. OŠ 8.3.
7. Državno natjecanje 2010. OŠ 8.5.
8. Školsko/gradsko natjecanje 2014. SŠ A-1.7.
9. Općinsko natjecanje 2010. SŠ-A 2.7.
10. Županijsko 2015. 3. razred
11. Županijsko 2016. 1. razred
12. Lema o trozupcu
13. Županijsko 2017. 1. razred
14. Državno 2012. 4.r.

Jadan Namik :(

15. G2 2015
16. G4 2013
17. G7 2017

11.2. C1: Marija Ćorić - Prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. 4 slijeda možemo izabrati na $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$ načina (nijedan izbor ne ovisi o drugom).
2. Kako se u svakom redu nalazi točno jedan top, tako ga u prvom redu možemo postaviti na jedno od 8 mjesta, u drugom redu na jedno od preostalih 7 (koje nenapadnuto dodavanjem prvog), itd. Ukupno imamo 8! načina za postaviti tih 8 topova.
3. Označimo s p broj penzionera, a sa s broj šahista. Mi smo na dva načina izbrojali penzionere i šahiste, a po principu dvostrukog prebrojavanja, njihov broj mora biti isti. Tada vrijedi $\frac{p}{3} = \frac{s}{4} \implies s = \frac{4}{3}p$, pa je više šahista.
4. Razlikujemo dva disjunktna slučaja. Ili su oba odabrana broja bila parna, ili su oba bila neparna. U danom skupu, parnih brojeva ima 1000, dok neparnih ima 1001. U prvom slučaju biramo 2 od 1000 parnih brojeva na $\binom{1000}{2}$ načina, a u drugom 2 neparna na $\binom{1001}{2}$ načina. Po principu sume ih zbrajamo i konačan rezultat je 1000000.
5. Općinsko 2001 SŠ1 2
6. Primjer 1.3
7. Primjer 2.4
8. Primjer 2.9
9. Primjer 3.2
10. Županijsko 2009 SŠ1 4
11. Primjer 3.8
12. Primjer 2.8
13. Primjer 2.3
14. Primjer 2.6
15. Primjer 3.5
16. 3. zadatak
17. 4. zadatak
18. Imamo ukupno $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7$ parova djece. Svaki dan među troje učenika imamo $\binom{3}{2} = 3$ para. Dakle, potreban broj dana k da bi svaki par zajedno čistio točno jednom je takav da $3k = 15 \cdot 7$. Dakle, $k = 35$.
19. Državno 2006 SŠ1 4
20. Državno 2014 SŠ2 5
21. Primjer 4.
22. Državno 2007 SŠ4 3
23. Državno 2012 SŠ4 5

11.3. A1: Hrvoje Radoš - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadatci

1. rješenje slijedi direktno iz A-H nejednakosti gdje je A aritmetička sredina od a i b

2.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Sređivanjem se dobije tvrdnja koju želimo

3.

$$\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1$$

Sada jednostavno slijedi

4.

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}} = 1$$

Sada slijedi jednostavno tvrdnja zadatka

5.

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$$

$$\frac{a^2+c^2}{2} \geq ac$$

Kada sve to zbrojimo dobije se tražena nejednakost.

6. Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

$$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Kada pomnožimo sve 3 nejednakosti dobijemo traženi izraz

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

što je trebalo dokazati.

Umjereni zadatci

7. državno 1994. sš1

8. link

9. link

10. županijsko 1997. sš1.

11. Kvadrirajmo zadanu jednakost:

$$a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 2ac = 16$$

Znamo da po A-G vrijedi:

$$\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$$

Primijetite da ovo smijemo napraviti jer su kvadrati od a i c NENEGATIVNI!!!
Sada kombiniranjem navedene jednakosti i navedene nejednakosti dobijemo:

$$4b^2 + 4(ab + bc + ac) \leq 16$$

I s obzirom da je $4b^2$ pozitivan vrijedi:

$$4(ab + bc + ac) \leq 16$$

$$ab + bc + ac \leq 4$$

Ovo micanje $4b^2$ je malo traljavo, ali može se pokazati da se postiže jednakost. (MORATE U SVAKOM ZADATKU S EKSTREMIMA POKAZATI DA SE JEDNAKOST POSTIŽE). Koristili smo A-G za a^2 i c^2, pa onda stavimo $a^2 = c^2$ (tada se postiže jednakost za KAGH), stoga vrijedi $a = c$ (a i c očito moraju biti pozitivni jer tražimo maksimum). Uvrštavanjem u originalan uvjet zadatka imamo:

$$2(a + b) = 4$$

Sada znamo da smo izbacili $4b^2$ i stoga bi bilo pokušati $b = 0$. Dobije se $a = 2$ i $c = 2$. I vidimo onda:

$$ab + bc + ac = 4$$

Teži zadatci

12. link

13. link

14. 1999. drž SŠ1 ili ovdje link preciznije ovdje link (naučite koristiti školjku!)

15. link

16. link

17. link

11.4. N1: Marija Ćorić - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Ovo je ekvivalentno tvrdnji da, za $p > 3$ 2 i 3 ne dijele p pa p ne može biti oblika $6k+2$, $6k+3$ ni $6k+4$.

2. Zapišimo proizvoljan prirodan broj m kao $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$, tj. $m = \overline{a_n \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$. Znamo $10 \equiv 1 \pmod 9$, pa znamo po svojstvima s početka i da vrijedi $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$, za svaki k prirodan broj. Tada imam $m \equiv a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n \cdot 1 + \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 \equiv a_n + \dots + a_1 + a_0 \pmod 9$, pa smo dokazali da je broj djeljiv s 9 ako i samo ako je to i zbroj njegovih znamenki.

   Po uzoru na gornji primjer, želimo naći karakterizaciju za djeljivost s 11, pa koristeći usklađene oznake i imajući na umu $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$, pišemo: $m \equiv a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n \cdot (-1)^n + \dots + a_1 \cdot (-1)^1 + a_0 \cdots (-1)^0 \equiv a_n \cdot + \dots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}$. Dakle, broj je djeljiv s 11 ako i samo je razlika zbroja znamenaka na parnim i zbroja znamenaka na neparnim mjestima tog broja također djeljiva s 11.

3. Za proizvoljan prirodan broj n znamo da vrijedi $n \equiv 0, 1$ ili $2 \pmod 3$. Iz predzadnjeg svojstva u Teoremu 1.2 znamo da tada slijedi $n^2 \equiv 0^2, 1^2$ ili $2^2 \pmod 3$, to jest, $n^2 \equiv 0, 1$ ili $4 \pmod 3$. Kako je $4 \equiv 1 \pmod 3$, onda je $n^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$. Analognim zaključivanjem za djeljivost sa 4 dobivamo $n^2 \equiv 0, 1, 4$ ili $9 \pmod 4$, a kako je $4 \equiv 0 \pmod 4$ i $9 \equiv 1 \pmod 4$, znači da je $n^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 4$, što smo i trebali pokazati.

4. Označimo ta tri uzastopna broja s $n-1, n$ i $n+1$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n \times (2n^2 + 1)$, pa je dovoljno pokazati $3 | n(2n^2+1)$. Sada dijelimo na slučajeve u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju s 3.

   (a) $n \equiv 0 \pmod 3$, to jest $3|n$, pa trivijalno vrijedi $3|n(2n^2+1)$

   (b) $n \equiv 1 \pmod 3$, tada imamo $n^2 \equiv 1 \pmod 3 \implies 2n^2 \equiv 2 \pmod 3 \implies 2n^2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$, dakle $3 | 2n^2 + 1$, pa $3 | n(2n^2+1)$

   (c) $n \equiv 2 \pmod 3$, u kojem slučaju $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$, zaključivanje dalje ide analogno prethodnom slučaju.

5. Pretpostavimo da nijedan od brojeva a,b,c nije djeljiv s 3. Tada mora vrijediti $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 3$, jer $1^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$. No, onda dobivamo: $a^2 + b^2 = c^2 \implies 1 + 1 \equiv 1 \pmod 3$, što je nemoguće. Znači, jedan od brojeva a,b,c mora biti djeljiv s 3.

6. Kako bismo dobili osjećaj, promotrimo zadnje znamenke potencije broja 3, do one četvrte. Imamo $3 \equiv 3 \pmod{10}$, $3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$, $3^3 \equiv 7 \equiv -3 \pmod{10}$ i $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Sada naslućujemo, slično kao u prethodnim zadatcima, da će se ostatci ponavljati ciklički u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju s 4, pa pokažimo to formalno. Imamo $3^{n+4} \equiv 3^n \cdot 3^4 \equiv 3^n \cdot 1 \equiv 3^n \pmod{10}$. Ovime je dokazano da je se uzorak posljednjih znamenki ponavlja svake 4 potencije broja 3, a kako je jedini broj među prve 4 koji ima posljednju znamenku 1 upravo 3^4, svi ostali koji imaju posljednju znamenku 1 moraju biti potencija višekratnika broja 4, što znači da je n djeljiv sa 4.

7. Promotrimo male slučajeve. Za $r = 2$, očito nemamo rješenja. Dakle, r je kao prost broj koji nije jednak 2 nužno neparan, tj $r \equiv 1 \pmod 2$. Tada $r - 1 \equiv 0 \pmod 2$, a kako je $p^q = r - 1$, imamo i $p^q \equiv 0 \pmod 2$, iz čega slijedi $p \equiv 0 \pmod 2$ (inače bismo bili u kontradikciji s predzadnjim svojstvom iz Teorema 1.2). Tada je naravno $p = 2$. Prvo promotrimo slučaj kada je $q = 2$. Tada imamo eksplicitno, $2^2 = r - 1$, dakle $r = 5$, pa imamo jedno rješenje: $p = 2, q = 2, r = 5$. Za slučaj

kada je q neparan, tj. jednak $2q_0+1$, za neki q_0. Prebacivanjem jedinice na drugu stranu jednadžbe imamo $2^q+1=r$, i možemo primijetiti da $2^q+1=2^{2q_0+1}+1\equiv(-1)^{2q_0+1}+1\equiv-1+1\equiv 0 \pmod 3$, a kako je izraz 2^q+1 ujedno jednak prostom broju r, imamo $2^q+1=r=3$. Iz zadnjeg izraza bi slijedilo da je $q=1$, ali to nije prost broj, pa nema više rješenja.

8. Tražimo m, takav da $3^{400}\equiv m \pmod{100}$. Znamo da nam je najzgodnije koristiti Eulerov teorem pa računamo $\phi(100)$, a kako vrijedi $100=2^2\cdot 5^2$, imamo $\phi(100)=100\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{5})=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=40$, pa iz Eulerovog teorema slijedi $3^40\equiv 1 \pmod{100}$. Tada imamo $(3^{40})^{10}\equiv 1^10\equiv 1 \pmod{100}$, pa su zadnje dvije znamenke broja 3^{400} 01.

9. Zadatak 5.

10. Primjetimo da je potencija u oba slučaja $2014\cdot 2015$, kako je $\phi(11)=10$ imat ćemo

$$7^{2014\cdot 2015}\equiv 7^{2014\cdot 2015 \pmod{10}}\equiv 7^0=1$$

istim postupkom dobijemo da je $7^{2014\cdot 2015}\equiv 1$ pa je ostatak pri dijeljenju $1+1=2$.

11. Želimo pokazati $n\cdot 2^n+1\equiv 0 \pmod{n+2}$. Kako jasno vrijedi $n\equiv -2 \pmod{n+2}$, imamo $n\cdot 2^n\equiv(-2)\cdot 2^n\equiv -2^{n+1} \pmod{n+2}$. Iz Malog Fermatovog teorema, jer je $n+2$ prost broj, znamo da vrijedi $2^{n+1}\equiv 1 \pmod{n+2}$. Tada jasno da vrijedi $n\times 2^n+1\equiv -1+1\equiv 0 \pmod{n+2}$.

12. Zadatak 1.a)

13. Državno 2009. SŠ1 1.

14. Ako su p,q oba neparni onda je cijeli izraz paran i >4 pa ne može biti prosti broj. Neka je nadalje, bez smanjenja općenitosti, $p=2$. Sada imamo izraz $2^q q^2+1$. Za $q=2$ dobivamo rješenje 17, a za $q=3$ dobivamo rješenje 73, što su oboje prosti brojevi. Neka je nadalje $q>3$. Pokažimo da je tada izraz uvijek djeljiv s 3. Kako je q prost i veći od 3 sigurno je relativno prost s 3, to jest, vrijedi $q\equiv 1 \pmod 3$, pa imamo i $q^2\equiv 1 \pmod 3$. Sada imamo $2^q q^2+1\equiv(-1)^q\cdot 1+1\equiv -1+1\equiv 0 \pmod 3$ pa za $q>3$ nemamo rješenja. Jedina rješenja su $(2,2),(2,3),(3,2)$.

15. Zadatak 1.b)

16. 11.

17. 10.

18. Promotrimo djeljivost ovog izraza brojem 3. Zašto? Prvo, lakše nam je pretpostaviti suprotno i pokušati naći kontradikciju s 4.-im zadatkom, a kako nam poredak brojeva nije fiksan, ostale djeljivost bismo teško ustvrdili. Ostatak pri dijeljenju s 3 (kao i s 9) jednoznačno ovisi o ostatku pri dijeljenju sa 3 zbroja znamenaka (možete dokazati za vježbu, a dokaz je analogan dokazu prvog zadatka), koji opet **ne** ovisi o poretku brojeva koje spajamo. Neka je n neki broj nastao takvim spajanjem, tada bi nam bilo zgodno pokazati da je on kongruentan 2 modulo 3, jer bi to odmah impliciralo da ono nije kvadrat nijednog prirodnog broja ni za kakav poredak brojeva koje spajamo. Označimo sa $S(n)$, sumu znamenaka broja n, tada imamo $n\equiv S(n)\equiv S(1^1)+S(2^2)+S(3^3)+\ldots+S(2008^{2008})\equiv 1^1+2^2+3^3+\ldots+2008^{2008} \pmod 3$. Gdje smo u prvoj i zadnjoj kongruenciji iskoristili spomenutu karakterizaciju djeljivosti s 3. Primjenom svojstava iz Teorema 1.2, dobivamo $n\equiv 1^1+2^2+0+1^4+2^5+0\ldots+1^{2008} \pmod 3$. Tada računamo čemu je kongruentno 2^m modulo 3, u ovisnosti o parnosti od m. Ako je $m=2m_0$, za neki m_0 prirodan broj, tada je $2^m\equiv 2^{2m_0}\equiv 4^{m_0}\equiv 1^{m_0}\equiv 1 \pmod 3$. S druge strane, analognim zaključivanjem, kada je $m=2m_0+1$ za neki m_0 prirodan broj imamo $2^m\equiv 2 \pmod 3$. Još samo moramo izračunati koliko ima kakvih sumanada u našoj sumi, čime konačno dobijemo $n\equiv 2 \pmod 3$, dakle takav n ne postoji.

12. Rješenja za drugu grupu

12.1. G2: Ivan Vojvodić - Radikalno centriranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Vietnam 2017 problem 3 a)
2. Službeno rješenje: IMOSL 2008 G1
2. *(Alternativno rješenje)* AoPS: IMO 2008/1
3. Službeno rješenje: IMOSL 2009 G2
3. *(Alternativno rješenje)* AoPS: IMO 2009/2
4. IMO 1995/1
5. Sharygin First Round 2013, Problem 16

Bonus: kružnica radijusa 0

6. Iran TST 2011/1
7. Neka su U i V preslike A preko X i Y redom. Uočavamo $AU = AV = 2 = \frac{o(ABC)}{2}$, što znači da su U i V dirališta $A-$pripisane kružnice s AB i AC, redom. Nazovimo tu kružnicu ω i neka ω dira BC u T. Neka je Γ kružnica radijusa 0 s centrom u A. Tada je XY radikalna os ω i Γ, i vrijedi $MA = MT$. Tada sumiranje stranica trokuta AMB i AMC daje da jedan mora imati opseg 2.
8. Službeno rješenje: IMOSL 2009 G3
8. *(Alternativno rješenje)* AoPS: IMOSL 2009 G3

12.2. C2: Mislav Brnetić - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Dovoljno je riješiti (b) dio zadatka, jer je time dokazan i (a) dio.

   Promotrimo parnost broja crnih polja.

   U svakom opisanom koraku parnost broja crnih polja ostaje ista (promatrajmo slučajeve u kojima se u izabranom retku/stupcu/kvadratu nalazi paran, odnosno neparan broj crnih polja, u kojima lako zaključujemo da parnost broja crnih polja ostaje ista). Dakle, parnost broja crnih polja je invarijanta.

   Kako na početku imamo paran broj crnih polja, nije moguće na kraju postići da točno jedno polje bude crno.

2. Ilko Brnetić, Invarijante i monovarijante, 1. zadatak

3. Županijsko natjecanje 2012., SŠ A-1.5.

4. Brojevi plavih, crvenih i zelenih kuglica na početku čine potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3. Nakon svake zamjene, broj plavih, crvenih i zelenih kuglica će ponovno činiti potpun sustav ostataka pri dijeljenju s 3, pa stoga nije moguće da sve kuglice postanu istobojne.

5. Primijetimo da se svakim skokom umnožak koordinata na kojima se mačka nalazi ne mijenja (dodatno primijetimo da uopće nije bitno jesu li te koordinate cjelobrojne ili ne).

   Dakle, umnožak koordinata na kojima se mačka nalazi je invarijanta.

   Zato lako zaključujemo da je odgovor za (b) dio zadatka ne, odnosno mačka ne može doći na poziciju $(1, 4)$.

   Međutim, pomoću navedene invarijante ne možemo ništa zaključiti o (a) dijelu zadatka, no uvrštavanjem $n = 4$ za prvi skok, dobivamo upravo da je moguće skočiti na $(1, 3)$, dakle odgovor za (a) dio zadatka je da.

6. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Example E4

7. Promotrimo parnost zbroja brojeva zapisnanih na ploči.

   Nakon što Ivan izabere brojeve a i b, bez smanjenja općenitosti $a \geq b$, na ploču će umjesto njih zapisati $a - b$.

   Neka je A zbroj brojeva na ploči prije obavljene zamjene, a A' nakon.

   Vrijedi $A' = A + (a - b) - a - b = A - 2b$.

   Dakle, zbroj brojeva će, nakon provedene zamjene, ostati iste parnosti.

   Sada možemo zaključiti da će posljednji broj napisan na ploči biti iste parnosti kao i zbroj svih brojeva na početku.

   Početni zbroj računamo po Gaussovoj dosjetci, te iznosi $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n + 1)$.

   Sada, kako su i n i $2n + 1$ neparni, slijedi da je početni zbroj neparan, iz čega po prethodnoj argumentaciji zaključujemo da je posljednji broj napisan na ploči neparan.

8. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Problem 46

9. Državno natjecanje 2017. SŠ A-1.5.

10. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.4.

11. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Problem 42 - rješenje generaliziranog problema

12. Ilko Brnetić, Invarijante i monovarijante, 7. zadatak

13. Državno natjecanje 2012., SŠ A-3.5.

14. Dokažimo da Božica može ostvariti svoj naum.

    Neka Božica napiše brojeve $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2$ (bitno je da se parno mnogo puta ponavlja najveći broj).

    Sada lako dokažemo da će se, bez obzira na Aničine poteze, najveći broj uvijek ponavljati parno mnogo puta (dokaz analizira mogućnosti najveći-najveći, najveći-neki drugi i neki drugi-neki drugi za Aničin izbor brojeva te u svakom slučaju dolazimo do traženog zaključka).

    No, tada je nemoguće postići da su svi brojevi jednaki, jer bi tada bilo nužno da se najveći ponavlja neparno mnogo puta čime je dokaz završen.

15. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Example E8

16. Ilko Brnetić, Invarijante i monovarijante, 15. zadatak

17. Arthur Engel: Problem solving strategies, The Invariance Principle, Example E5

12.3. A2: Mislav Plavac - How to Viète

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci

1. $3x^5 - x^4 + 7x^2 + 2x - 6 = (3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 27x + 56)(x-2) + 106$

2. $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2 - x + 1)$

3. Pomnožimo obje strane s x

$$\frac{2003}{2004}x^2 + x + 1 = 0$$

Prema Vieteovim formulama imamo

$$\begin{aligned} a + b &= -\frac{2004}{2003} \\ ab &= \frac{2004}{2003} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{-\frac{2004}{2003}}{\frac{2004}{2003}} = -1$$

4. Koristimo Vieteove formule. Znamo da je kubni polinom čije nultočke zadovoljavaju dani sustav ima oblik $f(t) = t^3 - d, d \in \mathbb{R}$, odnosno nultočke su tada $t_{1,2,3} = \sqrt[3]{d}$. Dakle, $\mid a \mid = \mid b \mid = \mid c \mid = \mid \sqrt[3]{d} \mid$

5. Vieteove formule nam govore

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2x_1 + x_3x_1 + x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1x_2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

6. Vieteove formule nam govore:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma &= -3 \\ \alpha\beta\gamma &= 1 \end{aligned}$$

Sada, koristeći $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + xz)$, imamo

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2) \\ &= ((\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma))^2 - 2((\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)) \\ &= (0^2 - 2(-3))^2 - 2((-3)^2 - 2 \cdot 1(0)) = 18 \end{aligned}$$

7. α, β su rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} + 2 &= 0 \quad / \cdot x \\ x^2 + 2x + 4 &= 0 \quad / \cdot (x-2) \\ x^3 - 8 &= 0 \implies x^3 = 8 \end{aligned}$$

Dakle, $\alpha^3 = \beta^3 = 8$

$$\frac{\alpha^{100} + \beta^{100}}{\alpha^{98} + \beta^{98}} = \frac{\alpha^{99}\alpha + \beta^{99}\beta}{\alpha^{96}\alpha^2 + \beta^{96}\beta^2} = \frac{8^{33}(\alpha + \beta)}{8^{32}(\alpha^2 + \beta^2)} = 8\frac{\alpha + \beta}{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta} = 8\frac{-2}{(-2)^2 - 2 \cdot 4} = 4$$

8. Neka je $y = \dfrac{1}{x+3}$, tada je $x = \dfrac{1-3y}{y}$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 1 &= 0 \\ \left(\frac{1-3y}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{1-3y}{y}\right)^2 + 1 &= 0 \quad / \cdot y^3 \\ (1-3y)^3 - 3y(1-3y)^2 + y^3 &= 0 \\ 53y^3 - 45y^2 + 12y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

9. a, b su nultočke polinoma $x^2 + 3x + 1 = 0$, tj vrijedi

$$\begin{aligned} a + b &= -3 \\ ab &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = 7$$

Umjereni zadaci

10. AoPS

11. AoPS

12. AoPS

13. AoPS

14. Vieteove nam govore

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ ab + bc + ac &= -2007 \\ abc &= -2002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right) &= \frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= \frac{abc + -ab - ac - bc + a + b + c - 1}{abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1} = -\frac{2}{2005} \end{aligned}$$

15. Pretpostavimo da je $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ racionalan.

$$x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$x^2 = 2-\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} = 2-x^2$$

Kada bi $x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ bio racionalan onda bi x^2 pa i $2-x^2$ bio racionalan, što implicira da je $\sqrt{3}$ racionalan, što je kontradikcija. Dakle, $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ nije racionalan broj.

16. Kako su a, b, c različiti znamo da su onda to 3 nultočke polinoma $t^3 + tx + y$, kako je koeficijent uz x^2 jednak 0 po Vieteovima znamo da im je suma jednaka 0.

17. AoPS

18. AoPS

19. AoPS

20. AIME 2008 P7

21. a) dio kod Vieta's Formula Problem Solving - Basic, a b) dio kod Generalization to Higher Degree Polynomials

22. AoPS

23. AoPS

Teži zadaci

24. Neka su a, b, c, d ta četiri korijena. Po općenitim Vieteovim formulama:

$$abcd = -1984$$

. Neka su a i b takve da je njihov produkt -32 (možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti). Tada je $cd = 62$ Još iz Vietea imamo:

$$a+b+c+d = 18$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = k$$

$$abc+abd+acd+bcd = -200$$

Iskoristimo poznati trik:

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd = k-62+32 = k-30$$

Iz posljednje napisane Vieteove formule uz $ab = -32$ i $cd = 62$ dobivamo

$$-32c+62b+62a-32d = -200$$

što je

$$31(a+b)-16(c+d) = -100$$

Množenjem $a+b+c+d = 18$ s obje strane sa 16 imamo

$$16(a+b)+16(c+d) = 288$$

Iz posljednje dvije jednadžbe imamo

$$47(a+b)=188$$

pa dobivamo $a+b=4$ i $c+d=18-4=14$. Tada je

$$k-30=(a+b)(c+d)=4*14=56$$

pa je

$$k=86$$

25. Uvedimo $y_n=\dfrac{1}{1-x_n}$, tj. $x_n=1-\dfrac{1}{y_n}$.

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{10}+\left(1-\frac{1}{y}\right)^{9}+\ldots+\left(1-\frac{1}{y}\right)+1$$

Sada prema Vieteovima slijedi

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{1-x_n}=\sum_{n=1}^{10}y_n=-\frac{-1-\binom{2}{1}-\binom{3}{1}+\ldots+-\binom{10}{1}}{11}=\frac{10\cdot(10+1)}{2\cdot 11}=5$$

26. Neka su r_1, r_2, ... , r_n ti realni korijeni od polinoma $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Iz općenitih Vieteovih formula imamo

$$r_1+\ldots+r_n=-a_{n-1}r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_{n-1}r_n=a_{n-2}$$

iz čega slijedi

$$r_1^2+\ldots+r_n^2=(r_1+\ldots+r_n)^2-2(r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_{n-1}r_n)=a_{n-1}^2-2a_{n-2}\leq 3$$

Vidimo da je lijeva strana pozitivna pa je $a_{n-1}^2-2a_{n-2}\geq 0$. Kako je $a_{n-1}=\pm 1$ slijedi da je $a_{n-2}=-1$. Također, opet iz Vieteovih formula je $(r_1r_2...r_n)^2=1$. Iz A-G nejednakosti imamo $r_1^2+\ ...\ +r_n^2\geq n$ pa je $n\leq 3$. Sada lako nađemo sva rješenja: $x\pm 1$, $x^2\pm x-1$ i $x^3-x\pm(x^2-1)$.

27. $xy+yz+xz=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2\right)=-1$

$x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=3xyz+1(3+1)=3xyz+4$

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}&=-2\\ \frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}&=-2\\ \frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}+\frac{1-x}{x}&=-2\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}&=1\\ \frac{xy+yz+xz}{xyz}&=1\\ xyz&=-1\end{aligned}$$

Sada prema Vieteovima dobivamo da su x,y,z nultočke jednadžbe $t^3-t^2-t+1=0 \iff (t-1)^2(t+1)=0$. Dakle sva rješenja su $(1,1,-1)$ i sve permutacije.

28. Neka su r, s, t nultočke polinoma f te r^2, s^2, t^2 nultočke od g. Vieteove za f nam govore

$$\begin{aligned} r+s+t &= -a \\ rs+st+rt &= b \\ rst &= -c \end{aligned}$$

te Vieteove za g nam govore

$$\begin{aligned} -b = r^2+s^2+t^2 &= (r+s+t)^2 - 2(rs+st+rt) = a^2 - 2b \\ c = r^2s^2+s^2t^2+r^2t^2 &= (rs+st+rt)^2 - 2rst(r+s+t) = b^2 - 2ac \\ c = (rst)^2 &= -a \end{aligned}$$

Dakle, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} a^2 &= b \\ b^2 &= 2ac + c \\ c^2 &= -a \\ f(1) &= 1+a+b+c = 0 \end{aligned}$$

29. Definiramo funkciju $f(x) = -x^4+2x^3-5x^2+7x+1$. Primjetimo da su njene nultočke $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ pa također vrijedi

$$f(x) = -\left(x-\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{b}\right)\left(x-\frac{1}{c}\right)\left(x-\frac{1}{d}\right)$$

Sada lako slijedi

$$\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\left(1-\frac{1}{d^2}\right) = f(1)\cdot f(-1) = 4\cdot(-14) = -56$$

30. INMO 2021. Problem 2

31. Brilliant, Vieta's Formula Problem Solving - Advanced

32. Neka su $\alpha > \beta > \gamma$ nultočke polinoma. Uvrštavanjem vrijednosti dobivamo da su $\alpha \in (2,3)$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ te $\gamma \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Tvrdnja 1. $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$

Dokaz. Iz Vieteovih formula imamo

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 3 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma &= 0 \\ \alpha\beta\gamma &= -1 \end{aligned}$$

te kako su ovo elementarni simetrični polinomi za 3 varijable, $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ se može zapisati preko njih jer je i sam simetrični polinom. □

Tvrdnja 2. Za dovoljno velike n je $\beta^{2n} + \gamma^{2n} \in (0,1)$.

Dokaz.

$$0 < \beta^{2n} + \gamma^{2n} < \beta^4 + \gamma^4 < \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{128} < 1$$

□

Koristeći ove dvije tvrdnje dobivamo da je $\lfloor \alpha^{2n} \rfloor = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n} - 1$. Primjetimo dalje $x^3 - 3x^2 + 1 \equiv (x-4)(x-5)(x-11) \pmod{17}$ Dakle, $\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n} \equiv 4^{2n} + 5^{2n} + 11^{2n}$.

Uvrštavanjem $2n = 1988$ lako dobivamo

$$\lfloor \alpha^{1988} \rfloor \equiv \alpha^{1988} + \beta^{1988} + \gamma^{+1988} - 1 \equiv 4^{1988} + 5^{1988} + 11^{1988} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

33. Vidimo da za $a = b = c = 1$ dobijemo $m = 12$. Pomnožimo početnu jednadžbu s $abc(a + b + c)$ te nakon preslagivanja dobivamo

$$a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + a + b + c - 9abc = 0$$

Možemo sada BSO pretpostaviti da postoji neko rješenje (a, b, c) takvo da su $a < b < c$. Promatrajući ovu jednadžbu kao kvadratnom u a vidimo preko Vieteovih da i $b, c, \frac{bc + 1}{a}$ zadovoljava jednadžbu. Definiramo niz $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ s $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ te

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-2}}, \quad \forall n > 2$$

Tvrdimo da je a_n niz prirodnih brojeva. Promatrajmo relaciju za n i $n - 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n-2} &= a_n a_{n-1} + 1 \\ a_n a_{n-3} &= a_{n-1}a_{n-2} + 1 \end{aligned}$$

Zbrajanjem i dijeljenjm s $a_n a_{n-2}$ dobivamo

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \cdots$$

iz čega slijedi

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{a_2 + a_0}{a_1} = 2 & n \text{ neparan} \\ \frac{a_3 + a_1}{a_2} = 3 & n \text{ paran} \end{cases}$$

Sada lako slijedi da je a_n prirodan za svaki $n \in \mathbb{N}$, također znači da je (a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) rješenje početne jednadžbe. Kako je a_n strogo rastući niz dobivamo beskonačno mnogo rješenja.

12.4. N2: Mislav Brnetić - Mali Fermatov i Eulerov teorem

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Prema Malom Fermatovom teoremu, kako su 7 i 5 relativno prosti, a 7 prost, vrijedi:

$$5^6 \equiv 1 \pmod 7$$

Kako je $500 = 6 \cdot 86 + 2$, imamo:

$$5^500 \equiv 5^{6 \cdot 86 + 2} \equiv (5^6)^86 \cdot 5^2 \equiv 1^86 \cdot 25 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7.$$

2. Primijenimo Eulerov teorem:
Imamo $\phi(100) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$.
Zato po Eulerovom teoremu imamo (s obzirom da su 7^k i 100 relativno prosti):

$$7^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$

odnosno

$$7^{40k} \equiv 1 \pmod{100}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$.
Sada odredimo ostatak pri dijeljenju eksponenta 7^{100} sa 40.
Imamo $\phi(40) = 40(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 16$.
Dakle, po Eulerovom teoremu, kako su 7 i 40 relativno prosti, imamo,

$$7^{16} \equiv 1 \pmod{40}$$

odnosno

$$7^{16k} \equiv 1 \pmod{40}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$.
Kako je $100 = 6 \cdot 16 + 4$, imamo:

$$7^{100} \equiv 7^{16 \cdot 6 + 4} \equiv 7^4 \equiv 49 \cdot 49 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{40}$$

No to znači kako je

$$7^{7^{100}} \equiv 7^1 \equiv 7 \pmod{100})$$

3. Ilko Brnetić, Eulerova funkcija, Eulerov teorem, zadatak 1.

4. Po Malom Fermatovom teoremu, kako su p i q različiti prosti brojevi, vrijedi:

$$q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$
$$\implies p|q^{p-1} - 1 \implies p|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$$
$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$
$$\implies q|p^{q-1} - 1 \implies q|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$$

Kako su p i q različiti prosti brojevi pa su zato i relativno prosti, zaključujemo

$$pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$$

što je ekvivalentno s tvrdnjom zadatka.

5. Primijetimo kako vrijedi:

$$3^{105} = (3^3)^{35} \equiv 1^{35} \equiv 1 \pmod{13}$$

Prema Malom Fermatovom teoremu vrijedi:

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\implies 4^6 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$4^{105} = 4^{102} \cdot 4^3 = (4^6)^{17} \cdot 4^3 \equiv 1^{17} \cdot 4^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 12 \pmod{13}$$
$$3^{105} + 4^{105} \equiv 1 + 12 \equiv 0 \pmod{13}$$

čime smo dokazali traženu tvrdnju.

6. Ilko Brnetić, Eulerova funkcija, Eulerov teorem, zadatak 4.

7. Ilija Ilišević, Wilsonov teorem, Teorem 1.

8. Primijetimo:

$$4mn - m - n = x^2 \implies (4m-1)(4n-1) = (2x)^2 + 1$$

.

Međutim, vrijedi da za cijeli broj x, broj $x^2 + 1$ nema djelitelja oblika $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}_0$) (*ako niste upoznati s ovom tvrdnjom, dokažite ju*), odakle slijedi da ne postoje traženi brojevi m i n.

9. Primijetimo kako vrijedi $ord_{(a^n-1)}(a) = n$.
Kako je $\gcd(a^n - 1, a) = 1$, prema Eulerovom teoremu vrijedi:

$$a^{\phi(a^n-1)} \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$$

Sada prema teoremu o orderima iz predavanja vrijedi:

$$ord_{(a^n-1)}(a) \mid \phi_{(a^n-1)}$$

odnosno

$$n \mid \phi_{(a^n-1)}$$

10. Pretpostavimo da postoji traženi n.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja n. (Cilj nam je stvoriti kontradikciju tako da nađemo manji prosti djelitelj broja n.)

Vrijedi:

$$p \mid n$$

$$n \mid 2^n - 1$$

Dakle, $ord_p(2) \leq p$, no također vrijedi:

$$p \mid 2^{\phi(p)} - 1$$

Iz toga slijedi da $ord_p(2) \leq \phi_{(p)} \leq p-1$. Prema teoremu o orderu iz predavanja znamo da vrijedi $ord_p(2) \mid n$. Međutim, sada imamo da je $ord_p(2)$ manji od p i dijeli n, što je u kontradikciji s definicijom od p.

11. Ilko Brnetić, Eulerova funkcija, Eulerov teorem, zadatak 9.

12. IMO 2005 Problem 4.

13. IMO Shortlist 1993. N2

14. IMO shortlist 2006, N2

13. Rješenja za treću grupu

13.1. G3: Borna Banjanin - Fantomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Neka je S sjecište od AZY i BXZ. U ta dva tetivna četverokuta su onda kutevi nasuprot A i B jednaki $180 - \angle A$ i $180 - \angle B$ pa je u zadnjem četverokutu kut nasuprot C jednak $360 - 180 + \angle A - 180 + \angle B = 180 - \angle C$.

2. We define a phantom point D' as the intersection of ray AO with BC. If we can show that $KD||AB$, then this will prove $D' = D$, because there is only one point on BC with $KD||AB$. Odavde je samo neki chase.

3. Jedan smjer je trivijalan drugi imamo chase preko obodnih kuteva i onda činjenica da je suma nasuprotnih kuteva 180.

4. Neka su A, B i C vrhovi trokuta, a D sjesište simetrale kuta i kružnice. Slijedi $\angle DBC = \angle DAC = \angle BAD = \angle BCD$ (tetivnost i simetrala kuta AD) iz čega slijedi jednakokračnost trokuta BCD, dakle $|BD| = |CD|$, D je na simetrali stranice $\overline{BC}$

5. Izvor.(2.4.)

6. Neka je X presjek od BM i CN. AQP i ANM su slični prema $S-K-S$ pa je i BC paralelno s MN. Osim toga, imamo $\angle AQP = \angle APQ = \angle ANM = \angle AMN = \angle A$. Zbog $\angle BAP = \angle C$ imamo da je AB tangenta na APC pa iz toga i iz sličnosti ABC i ABP dobijemo $BP \cdot BC =$

13.2. C3: Paula Horvat - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Koristimo "šahovsko bojanje" ali tako da i crno i bijelo obojamo 2×2 polja. Tako dobijemo šahovsko polje veličine 5x5. Ako u jednom kutu imamo crni kvadrat, tada ćemo u svakom kutu imati crni kvadrat. Vidimo da crnih kvadrata ima više, točnije imamo 52 polja obojana u crno, a 48 obojanih u bijelo. Na isti način kao u početnom primjeru zaključimo da ne postoji traženo bojanje jer svaka 1x4 pločica će zauzeti 2 bijela i 2 crna polja.

2. Ne može. Obojimo ploču tako da je svako treće polje u pojedinom retku i stupcu crno, pri čemu su polja koja dijele brid s izrezanim poljem oba obojena crno. Lako sada izbrojimo da je crnih polja 22, a preostalih 41. No, budući da svaka pločica pokriva točno 1 crno polje, zaključujemo da ovakvo popločavanje nije moguće.

3. Oboji kutiju tako da, kada staviš jednu ciglu unutra, ona će pokriti 1 crnu kocku i 3 bijele kocke. Kada bi bilo moguće posložiti 53 cigle u tako obojanu kutiju, one bi pokrivale 53 crne kocke od ukupno 60 i 159 bijelih kocka od ukupno 156 što je nemoguće.

4. 1. zadatak, str. 28

5. Str. 31, zadatak 12.

6. Zadatak 3.

7. Str. 31, zadatak 9.

8. Državno 2007., SŠ1-A 3. zadatak

9. Županijsko 2012., SŠ A-3.5

10. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Baza za $n = 1$ je očita. Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k moguće popločati ploču $2^k \times 2^k$ na traženi način. Ploču $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ možemo podijeliti na 4 ploče dimenzija $2^k \times 2^k$ od kojih jednoj fali jedno polje. Tu manju ploču kojoj fali jedno polje možemo popločati prema pretpostavci indukcije. Ostaje pokazati da preostale 3 manje ploče kojima ne fali nijedno polje možemo popločati danim pločicama.

    Tu tvrdnju također ćemo dokazati indukcijom. Dakle, sada ćemo indukcijom dokazati da se ploča dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj npr. fali gornja desna četvrtina može popločati danim pločicama. Baza je identična kao i na početku. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki k. U koraku indukcije nije se teško uvjeriti da ploču dimenzija $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ kojoj fali jedna četvrtina možemo podijeliti na 4 istovjetne ploče dimenzije $2^k \times 2^k$ koje možemo popločati po pretpostavci indukcije. Ovime je dokaz gotov.

11. JBMO, 2012. Zadatak 3.

12. Državno 2017., SŠ A-1.5

13. Državno 2017. - SŠ A-4.5

14. HMO 2017., MEMO test

13.3. A3: Borna Banjanin - Polinomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. izvor
2. izvor
3. izvor
4. izvor
5. izvor
6. izvor
7. izvor
8. izvor

13.4. N3: Mislav Plavac - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci

1. Kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od $x^2 + 10y$ može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

2. Uočimo kako m ne može biti negativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj.

   Ako je $m = 0$, onda je $n = \pm 2$.

   Neka je $m > 0$. Ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći sva rješenja za koja je $n \geq 0$.

   Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$(n-1)(n+1) = 3 \cdot 2^m.$$

   Brojevi $n-1$ i $n+1$ su iste parnosti pa oba moraju biti parna. Osim toga, kako je $n \geq 0$, oba moraju biti pozitivna.

   zato imamo dvije mogućnosti:

   (a) $n - 1 = 2^k, n + 1 = 3 \cdot 2^l$, pri čemu je $k, l \geq 1, k + l = m$. Iz $2 = (n + 1) - (n - 1)$ slijedi kako je $l = 1$ ili $k = 1$

   (b) $n - 1 = 3 \cdot 2^k, n + 1 = 2^l$. Na isti način ponovno slijedi kako je $l = 1$ ili $k = 1$.

   Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 7), (4, -7), (3, 5), (3, -5)\}$.

3. Zadatak 5.

4. Promatramo ostatke pri djeljenju s 7. kada je $y \geq 7$, tada je $y! \equiv 0 (\text{mod} 7)$, pa bi trebali imati $x^2 \equiv -1 (\text{mod} 7)$. Ipak, kvadratni ostatci pri djeljenju s 7 su $0, 1, 2, 4$. Dakle, $y < 7$.

   Sada promatramo slučajeve. Najmanji potpuni kvadrat veći od 2001 jest $2025 = 45^2$, i ovdje odmah uočavamo kako su $(x, y) = (45, 4)$ i $(x, y) = (-45, 4)$ dva rješenja. Uočimo kako ovo pokriva sve slučajeve za $y \leq 4$. Za $y = 5$ dobivamo $x^2 = 2001 + 5! = 2121$, ali ova jedndžba nema cjelobrojnih rješenja budući da je 2121 djeljiv s 3, ali ne i s 9. Ako je $y = 6$, tada je $x^2 = 2001 + 6! = 2721$, pa opet nemamo cjelobrojnih rjšenja iz istog razloga kao i maloprije. Dakle, jedina rješenja su $(x, y) = (45, 4)$ i $(x, y) = (-45, 4)$.

5. Dijeljenjem obje strane s y te uvođenjem supstitucije $t = \dfrac{x}{y}$ dobivamo jednadžbu

$$t^2 - 2zt - 1 = 0$$

   Diskriminatna ove jednadžbe je $D_t = 4z^2 + 4$ dakle trebalo bi vrijediti $z^2 + 1 = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$ što je nemoguće. Dakle, ne postoje rješenja.

6. Jedina rješenja su $(0, 0, 0, 2^{1002})$ te $(2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001})$. Prisjetimo se da za neparni $a = 4n \pm 1$ znamo kako a^2 daje ostatak 1 pri djeljenju s 8.

Dakle, mora vrijediti kako je $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, t = 2t_1$ za neke cijele brojeve x_1, y_1, z_1, t_1 za koje je $0 \leq x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq t_1$ te $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2 = 2^{2002}$. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do toga da mora biti $x = 2^{2001}a, y = 2^{2001}b, z = 2^{2001}c$ te $t = 2^{2001}d$ pri čemu su a, b, c, d cijeli brojevi za koje vrijedi $a \leq b \leq c \leq d$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

7.

$$\begin{aligned} (m^2+n)(m+n^2) &= (m+n)^3 \\ \iff m^2n^2 - 3m^2n - 3mn^2 + mn &= 0 \\ \iff mn(mn - 3m - 3n + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dakle ili je $m = 0, n \in \mathbb{Z}$ ili $n = 0, m \in \mathbb{Z}$ ili je

$$\begin{aligned} mn - 3m - 3n + 1 &= 0 \\ \iff mn - 3m - 3n + 9 &= 8 \\ \iff (m-3)(n-3) &= 8 \end{aligned}$$

što lako dobijemo još rješenja (m, n) da su $(-5, 2), (-1, 1), (1, -1), (2, -5), (4, 11), (11, 4), (7, 5), (5, 7)$.

8. Županijsko natjecanje 2010. Zadatak A-1.1

9. Očito je $x = 2$ jedno rješenje ove jednadžbe. Dijeljenjem zadane jednadžbe s 5^x dobivamo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Za $x < 2$ je

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

a za $x > 2$ je

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

Stoga, ne postoji rješenje za $x \neq 2$.

10. Neka je BSO $a \leq b \leq c$, tada i imamo $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ Sada, ako je $a > 4$ imamo

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

što je nemoguće, dakle $a \in \{1, 2, 3\}$ Neka je $a = 3$. Tada imamo jednadžbu

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$$

Ponovno za $b > 4$ dobivamo da nema rješenja pa je $b = 3$ (jer je $a \leq b \leq 3$ u ovom slučaju) i zato $c = 3$. Analogno druge slačjeve rješavamo i dobivamo rješenja $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ i sve permutacije.

Umjereni zadaci

11. MSE skica rješenja

12. Zbog simetrije možemo pretpostaviti $2 \leq x \leq y \leq z$. Ovo povlači nejednakost $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$, dakle $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.

$x = 2$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$ pri čemu je $y \in \{11, 12, \ldots, 20\}$. Slijedi da je $z = 10 + \frac{100}{y-10}$ pa su rješenja $(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)$.

$x = 3$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{15}$ pri čemu je $y \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ i rješenja su $(3, 4, 60), (3, 5, 15), (3, 6, 10)$.

$x = 4$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$ pri čemu je $y \in \{4, 5\}$ i rješenja su $(4, 4, 10)$.

$x = 5$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5}$ i $y = z = 5$ što daje rješenje $(5, 5, 5)$.

13. Neka je (x, y) neko rješenje. Tada,

$$y^2 = x(x + 8)(x + 1)(x + 7) = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = z^2 + 7z$$

gdje je $z = x^2 + 8x$.
Ako je $z > 9$ imamo

$$(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9 < z^2 + 7z = y^2 < z^2 + 8z + 16 = (z + 4)^2.$$

što je nemoguće.
Dakle, $x^2 + 8x = z \leq 9$ što implicira $-9 \leq x \leq 1$.
Dolazimo do rješenja:
$(-9, -12), (-9, 12), (-7, 0), (-4, -12), (-4, 12), (-1, 0), (-8, 0), (0, 0), (1, 12), (1, -12)$.

14. Iz AG nejednakosti dobivamo kako je

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^m \geq (2xy)^m > (xy)^m,$$

dakle, mora vrijediti kako je $n > m$. Neka je p zajednički prosti djelitelj od x i y te neka je $p^\alpha || x, p^\beta || y$. Slijedi kako je $p^{(\alpha+\beta)n} || (xy)^n = (x^2 + y^2)^m$. Pretpostavimo da je $a > b$. Zbog $p^{2\alpha} || x^2, p^{2\beta} || y^2$ tada mora vrijediti $p^{(2\alpha)n} || x^2 + y^2$ te $p^{2am} || (x^2 + y^2)^m$. Slijedi kako je $2am = (a + b)n > 2an$ iz čega dobivamo kako je $m > n$ pa dolazimo do kontradikcije.

15. Promatramo jednadžbu modulo 11. Budući je $(x^5)^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod{11}$ za sve x.Dakle, desna strana je kongruentna $6, 7$ ili 8 modulo 11. Ipak, kvadratni ostaci modulo 11 su $0, 1, 3, 4, 5, 9$, pa zaključujemo kako jednadžba $y^2 = x^5 - 4$ nema rješenja.

16.

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x + 1)(x + 2)$$

Kako je $x + 1$ relativno prost s $x, x + 2$ mora biti kvadrat, također je onda $x(x + 2)$ kvadrat, tj. $x + 1 = a^2, x(x + 2) = b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}$.

$$b^2 = x(x + 2) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1 = a^4 - 1 \iff a^4 - b^2 = 1$$

iz čega lako dobijemo $b = 0$ pa stoga i $y = 0$. Dakle, $x(x + 1)(x + 2) = 0$ pa su sva rješenja $(0, 0), (-1, 0), (-2, 0)$.

17. Državno natjecanje 2011. Zadatak A-3.2

Teži zadaci

18. Školsko 2021. - 3. razred, 7. zadatak

19. Očitu su $(x, y, p) = (1, 1, 3)$ te $(x, y, p) = (2, 2, 7)$ rješenja. Imamo

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - (x^3 - 1) = x^3(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

Stoga polaznu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = p^y.$$

Neka je $d = \gcd(x^2 + x + 1, x^3 - x + 1)$. Tada d dijeli

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x^3 - x + 1) = x - 2$$

. Nadalje, d dijeli $x^2 + x - 1 - (x - 2)(x + 3) = 7$. Dakle, $d = 7$ za $x > 1$ pa mora biti $p = 7$. Slijedi kako za $x > 2$ imamo $x^2 + x + 1 = 7^a$ i $x^3 - x + 1 = 7^b$ za neke prirodne brojeve $a \geq 2$ i $b \geq 2$. Ovo znači da 49 dijeli $x^2 + x + 1$ i $x^3 - x + 1$, što je u kontradikciji s $d = 7$. Dakle, $(1, 1, 3)$ i $(2, 2, 7)$ su jedina rješenja.

20. Primjetimo ako su x, y negativni da jednadžba sigurno ne bude imala rješenja. Sluačejeve kada je $x = 0$ ili $y \in \{0, 1\}$ lako provjerimo da nema rješenja. Neka su sada $x \geq 1, y \geq 2$ Promatranjem modulo 4 i modulo 3 dobivamo da su x, y oba parni. Dakle $x = 2m, y = 2n$ jednadćba postaje

$$\begin{aligned} 3^{2m} - 2^{2n} &= 5 \\ (3^m - 2^n)(3^m + 2^n) &= 5 \end{aligned}$$

Kako su m, n prirodni znamo da je $3^m + 2^n > 3^m - 2^n$ te kako je $3^m + 2^n > 0$ mora biti i $3^m - 2^n > 0$. Dakle dobivamo

$$\begin{aligned} 3^m + 2^n &= 5 \\ 3^m - 2^n &= 1 \end{aligned}$$

te zbrajanjem i oduzimanjem jednadžbi dobijemo $(m, n) = (1, 1)$ pa je jedino rješenje $(x, y) = (2, 2)$.

21. Promatranjem modulo 5 dobivamo $3p^4 + r^2 \equiv 1 \pmod 5$. Za $p = 5$ imamo $r^2 \equiv 1 \pmod 5$ dok za $p \neq 5$ prema malom Fermatovom teoremu dobivamo $r^2 \equiv -2 \pmod 5$ što je nemoguće. Dakle, ako postoji rješenje mora vrijediti $p = 5$. Nadalje, promatranjem modulo 3 dobivamo izraz $q^4 - r^2 \equiv 2 \pmod 3$. Kada bi q, r oba bila različita od 3 imali bismo $0 \equiv 2 \pmod 3$.

(a) $q = 3$ te uz $p = 5$ dobivamo $r = 19$

(b) $r = 3$ Jednadžba postaje

$$3p^4 - 5q^4 = 62$$

te vidimo da je lijeva strana dijeljiva s 5 (jer je $p = 5$), a desna strana nije. Dakle ovaj slučaj nema rješenja.

Jedino rješenje je uređena trojka $(5, 3, 19)$.

22. Posebni slučaj Fermatovog posljednjeg teorema

14. Rješenja za četvrtu grupu

14.1. G4: Namik Agić - Uvod u projektivnu geometriju

Predavanje Hintovi Rješenja

14.2. Izvori

1. je urbana legenda, 3. je EMC 2023. za juniore, 6. je ISL 2017 G1, 7. je ISL 2004 G8, 8. je 2019 G6. Ostali su zadaci preuzeti iz predavanja Matije Bucića i Domagoja Ćevida "projektivna geometrija" koje se nalazi na natjecanja.math.hr

14.3. C4: Andrej Čizmarević - Olimpijski zadaci

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Oba zadatka su s natjecanja Romanian Masters in Mathematics. Prvi zadatak iz 2013. godine, a drugi iz 2020.

14.4. A4: Ivan Vojvodić - Nizovi u algebri

Predavanje Hintovi Rjешenja

Rješenja

1. Alexander Remorov, Sequences, Warm-up problem 1
2. Russia 2008, 10th grade P4
3. Službeno rješenje: IMOSL 2006 A2
3. *(Alternativno rješenje)* AoPS: IMOSL 2006 A2
4. Za ovaj zadatak je službeno rješenje poprilično komplicirano, stoga pogledajte AoPS link (specifično, post #10 je posebno elegantno rješenje koje je hintirano u hintu): IMOSL 2013 A1

   Za one koje zanima, imate i službeno rješenje: IMOSL 2013 A1
5. Službeno rješenje: IMOSL 2006 A1
5. *(Alternativno rješenje)* AoPS: IMOSL 2006 A1
6. Službeno rješenje: APMO 2020/2
6. *(Alternativno rješenje)* AoPS: APMO 2020/2
7. Alexander Remorov, Sequences, Warm-up problem 2

14.5. N4: Namik Agić - Vp načini razmišljanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Izvori

1. Vojtech Jarnik 2013 p4
2. ISL 2012 N3
3. ISL 2020 N4
4. ISL 2018 N4
5. ISL 2021 N5
6. ISL 2019 N5
7. ISL 2014 N7

IV. Ostalo

15. Natjecanja

15.1. O natjecanjima

Kao i svake godine, tijekom Zimske škole sudionici su se imali prilike i natjecati iz matematike. Kao i inače, jedno poslijepodne održala su se natjecanja Reli i ELMO u organizaciji mentora MNM-a.

Reli je već tradicionalno ekipno natjecanje u kojem timovi od četiri do pet učenika raznih uzrasta i predznanja imaju priliku rješavati između šest i devet zadataka iz svakog od četiri glavna područja olimpijske matematike.
Ove godine najbolje rezultate ostvarile su ekipe:

1. Da – s osvojenih 234 boda!
2. Tim 4 – s osvojenih 229 bodova!
3. Čuvari ključeva – s osvojenih 227 bodova!

Svim sudionicima velike čestitke jer su svi timovi bili jako blizu i svi su uspjeli osvojiti preko 200 bodova!

ELMO (Ekstremno loša matematička olimpijada) je pojedinačno natjecanje na kojem natjecatelji rješavaju test od pet olimpijskih zadataka sličnih zadacima na državnim natjecanjima. Ove godine prvo mjesto uvjerljivo je osvojio Fabijan Cikač s 40 bodova. Drugu nagradu osvojili su Emanuel Bajamić, Lara Semeš, Petra Grubišić, Borna Čizmarević, David Lang, Kristijan Šimović s 31 ili 30 bodova. Za treću nagradu bilo je dovoljno 26 bodova i osvojili su ju Marko Hrenić, Mila Maretić i Jurica Špoljar, a natjecanju je pristupilo sveukupno 19 sudionika.

Također, na poticaj učenika Kristijana Šimovića održan je i ~~prvi~~ drugi KFMO (Kristijanova funkcijska matematička olimpijada)! Kristijan je sam osmislio zadatke, a natjecanju su mogli pristupiti svi koji su htjeli, što je uključilo i neke mentore (koji nisu bili preblizu punim bodovima!). Najbolje rezultate ostvarili su Jurica Špoljar s 37 bodova, David Lang s 34, a zatim i Emanuel Bajamić i Patrik Cvetek sa po 30 bodova. Natjecanju je pristupilo sveukupno 13 sudionika.

U nastavku donosimo zadatke i rješenja ovogodišnjih ELMO-a i KFMO-a.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

9. Ekstremno loša matematička olimpijada
Ogulin, 5. siječnja 2024.

1. Niz $\{a_n\}$ zadan je rekurzivno s:

$$a_1 = 1 \tag{15.1}$$
$$a_{2k} = 2a_k \tag{15.2}$$
$$a_{2k+1} = 2k + 1 + 2a_k + \frac{a_k}{k} \tag{15.3}$$

a) Dokaži da $k \mid a_k$ za svaki prirodan k
b) Dokaži da za svaki z postoji beskonačno prirodnih k takav da je $a_k = kz$

2. 25 lampi postavljeno je u 5×5 kvadratnu tablicu. Dozvoljen potez je odabrati lampu i promijeniti njeno stanje i stanje svih njenih susjeda, odnosno promijeniti iz upaljene u ugašenu i obratno. Na početku je lampa u gornjem lijevom kutu upaljena, a ostale su ugašene. Može li se primjenom konačnog broja poteza postići da je lampa u središtu kvadrata upaljena, a ostale ugašene? Dvije lampe se smatraju susjednima ako njihova polja dijele brid.

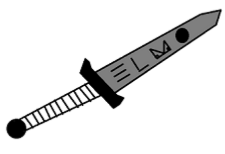
3. Zadan je trokut ABC u kojem $AB < AC$. Neka su M, N, P polovišta stranica BC, CA, AB te neka je ω opisana kružnica trokutu MNP. T je drugi presjek AM i ω, a ℓ je tangenta na ω u T. ℓ siječe MP u D. Dokaži da su kružnica s promjerom AB, kružnica ATP i BD konkurentni ako i samo ako je $BD \perp BC$.

4. Neka je n prirodan broj i P polinom stupnja n kojem nedostaju koeficijenti. Igrači A i B naizmjenice dopisuju prirodne brojeve kao koeficijente onim monomima koji još nemaju koeficijent uza sebe. Nakon što se uz sve monome napišu koeficijenti, zapisuje se polinom P. Igrač A pobjeđuje ako postoji prirodan $d > 1$ takav da za sve prirodne x, $d \mid P(x)$, a igrač B pobjeđuje inače. U ovisnosti o n, tko ima pobjedničku strategiju?

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da $a^2 + b^2 + c^2 = 6(a + b + c) + 48$. Dokaži:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b+8}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c+8}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a+8}} \leq 6\sqrt[3]{4}$$

Odredi sve slučajeve jednakosti.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

15.2.1. Rješenja

Zadatak 1. (Namik Agić)
Niz $\{a_n\}$ zadan je rekurzivno s:

$$a_1 = 1 \tag{15.4}$$
$$a_{2k} = 2a_k \tag{15.5}$$
$$a_{2k+1} = 2k + 1 + 2a_k + \frac{a_k}{k} \tag{15.6}$$

a) Dokaži da $k \mid a_k$ za svaki prirodan k
b) Dokaži da za svaki z postoji beskonačno prirodnih k takav da je $a_k = kz$

Rješenje.
Ako definiramo niz $\{b_n\}$ sa $b_n = \frac{a_n}{n}$, nakon sređivanja dobivamo sljedeću rekurziju:

$$b_1 = 1 \tag{15.7}$$
$$b_{2k} = b_k \tag{15.8}$$
$$b_{2k+1} = b_k + 1 \tag{15.9}$$

Sada je vidljivo da su svi članovi niza $\{b_n\}$ zaista prirodni što dokazuje a) dio. Za b) dio, laganom indukcijom se može pokazati da je b_n zapravo broj jedinica u binarnom zapisu broja n, pa za $n = 2^b(2^a - 1)$ zaista vrijedi $b_n = a$. Kako je b proizvoljan, imamo beskonačno članova niza koji su jednaki a što dokazuje b) dio.

Zadatak 2. (Ivan Vojvodić)
25 lampi postavljeno je u 5×5 kvadratnu tablicu. Dozvoljen potez je odabrati lampu i promijeniti njeno stanje i stanje svih njenih susjeda, odnosno promijeniti iz upaljene u ugašenu i obratno. Na početku je lampa u gornjem lijevom kutu upaljena, a ostale su ugašene. Može li se primjenom konačnog broja poteza postići da je lampa u središtu kvadrata upaljena, a ostale ugašene? Dvije lampe se smatraju susjednima ako njihova polja dijele brid.
Rješenje.
Tvrdimo da je nemoguće.
Promotrimo polja označena slovom A na slici dolje:

A		A		A
A		A		A
A		A		A
A		A		A

Uočavamo da svaki potez mijenja stanje parnom broju označenih polja, odnosno parnost broja upaljenih lampi na označenim poljima je konstantna. Početno stanje ima jednu upaljenu lampu na označenim poljima, a završno stanje ima nula upaljenih lampi na označenim poljima, stoga je nemoguće doći u završno stanje iz početnog.

Zadatak 3. (Namik Agić)

Zadan je trokut ABC u kojem $AB < AC$. Neka su M, N, P polovišta stranica BC, CA, AB te neka je ω opisana kružnica trokutu MNP. T je drugi presjek AM i ω, a ℓ je tangenta na ω u T. ℓ siječe MP u D. Dokaži da su kružnica s promjerom AB, kružnica ATP i BD konkurentni ako i samo ako je $BD \perp BC$.

Rješenje.

Dokazat ćemo sljedeće: Kružnica ATP i kružnica s promjerom AB sijeku ne na okomici iz B na BC, to implicira početni zadatak jer je pravac kroz B i presjek te dvije kružnice jedinstven.
Neka je X presjek kružnice promjera AB a okomicom iz B na BC. Lagani chase daje
$\angle AXP = \angle XAB = \angle MNP = \angle MTP = 180 - \angle ATP$, pa je $AXTP$ tetivan i gotovi smo.

Zadatak 4. (Namik Agić)

Neka je n prirodan broj i P polinom stupnja n kojem nedostaju koeficijenti. Igrači A i B naizmjenice dopisuju prirodne brojeve kao koeficijente onim monomima koji još nemaju koeficijent uza sebe. Nakon što se uz sve monome napišu koeficijenti, zapisuje se polinom P. Igrač A pobjeđuje ako postoji prirodan $d > 1$ takav da za sve prirodne x, $d \mid P(x)$, a igrač B pobjeđuje inače. U ovisnosti o n, tko ima pobjedničku strategiju?

Rješenje.

Za parne n pobjeđuje A, a za neparne pobjeđuje B.

Strategija za A ako je n paran je sljedeća: prvo stavlja $a_0 = 2$. Zatim, ostale koeficijente grupira u parove i ako B igra k na nekom mjestu, A igra k na njegovom paru. Trivijalno A uvijek može odigrati potez. Tvrdimo da za ovako dobiveni polinom P možemo uzeti $d = 2$. Za bilo koji k, polinom P je linearna kombinacija izraza oblika $k^u + k^v$ za neke u, v prirodne brojeve, BSO $u < v$, te je toj kombinaciji dodan 2 . Svaki taj izraz može se zapisati kao $k^u(k^{v-u} + 1)$, a to je uvijek parno (slučajevanje s obzirom na k mod 2). Zato 2 dijeli $P(k)$ za svaki k.

Za n neparan, B igra nasumično sve do svog zadnjeg poteza. Neka su $c_1, ..., c_n$ brojevi koji su zapisani do tad (nebitno na kojoj poziciji). U svom zadnjem potezu B odabire prost p takav da je $P - \sum c_i$ pozitivan. Vrijedi da je $P(1) = p$ uvrštavanjem. Dodatno, $P(p)$ ima ostatak a_0 pri dijeljenju s p a kako je $p > a_0$, slijedi da taj ostatak nije 0. Međutim, posljedica toga je da su $P(1), P(p)$ relativno prosti pa takav d ne može postojati.

Zadatak 5. (Namik Agić i Ivan Vojvodić)
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da $a^2 + b^2 + c^2 = 6(a + b + c) + 48$. Dokaži:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b+8}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c+8}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a+8}} \leq 6\sqrt[3]{4}$$

Odredi sve slučajeve jednakosti.

Rješenje.
Po A-G nejednakosti vrijedi sljedeće

$$\frac{a^3}{a+8} + \frac{512}{b+8} + 2(a+8) \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3 \cdot 512 \cdot 2(a+8)}{(a+8)(b+8)}} \tag{15.10}$$

$$\frac{b^3}{b+8} + \frac{512}{c+8} + 2(b+8) \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3 \cdot 512 \cdot 2(b+8)}{(b+8)(c+8)}} \tag{15.11}$$

$$\frac{c^3}{c+8} + \frac{512}{a+8} + 2(c+8) \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3 \cdot 512 \cdot 2(c+8)}{(c+8)(a+8)}} \tag{15.12}$$

Sređivanjem desne strane i zbrajanjem jednadžbi (15.10),(15.11) i (15.12) dobivamo

$$\frac{a^3+512}{a+8} + \frac{b^3+512}{b+8} + \frac{c^3+512}{c+8} + 2(a+b+c) + 48 \geq 24\sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt[3]{b+8}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c+8}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a+8}}\right) \tag{15.13}$$

Uočavamo da je $\frac{a^3+512}{a+8} = a^2 - 8a + 64$ pa (15.13) postaje

$$a^2 + b^2 + c^2 - 6(a+b+c) + 240 \geq 24\sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt[3]{b+8}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c+8}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a+8}}\right) \tag{15.14}$$

Korištenjem uvjeta $a^2 + b^2 + c^2 = 6(a + b + c) + 48$ konačno dobivamo

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b+8}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c+8}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a+8}} \leq \frac{1}{24\sqrt[3]{2}}(48 + 240) = 6\sqrt[3]{4} \tag{15.15}$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako vrijedi jednakost u (15.10),(15.11) i (15.12). Tada imamo $\frac{512}{b+8} = 2(a+8)$ te $\frac{512}{c+8} = 2(b+8)$, odnosno $256 = (a+8)(b+8) = (b+8)(c+8)$, što daje $a = c$. Slično dobijemo $a = b = c$, a onda $\frac{a^3}{a+8} = \frac{512}{b+8}$ daje $a = b = c = 8$.
Uistinu, $(a, b, c) = (8, 8, 8)$ zadovoljava i uvjet zadatka te se lako provjeri da zadovoljava i jednakost, stoga je to jedini slučaj jednakosti.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

2. Kristijanova funkcijska matematička olimpijada
Ogulin, 4. siječnja 2024.

1. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(x)f(y) = xf(y) + y + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ takve da:

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

3. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da:

$$xf(x) + yf(y) = (x + y)f(x + y) - 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

4. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(xf(y)) + f(f(x^2)) = xy + f(x)f(f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je skup $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \sqrt[3]{17}\right\}$ konačan i neprazan te vrijedi:

$$f(f(x + y)) = f(f(x)) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Napomena. $\sqrt[3]{17}$ je iracionalan.

Natjecanje traje 2 sata. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

15.3.1. Rješenja

1. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(x)f(y) = xf(y) + y + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Rješenje.

$P(0, y)$;

$$f(0)f(y) = y + 1$$

Budući da desna strana poprima vrijednosti različite od nule $f(0) \neq 0$

$$f(y) = \frac{y+1}{f(0)}$$

gdje je f(0) konstanta. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu vidimo da je $f(0) = 1$ pa $f(x) = x + 1$

2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ takve da:

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Rješenje.

$P(1, 1)$:

$$f(1) = f(1)^2$$

1. slučaj: $f(1) = 0$

$P(a, 1)$:

$$f(a) = 0 \quad \forall a$$

2. slučaj: $f(1) = 1$

$P(a, 1/a)$ za $a \neq 0$:

$$1 = f(a)f(1/a)$$

Kako je $f(a)$ cijeli broj i dijeli 1

$$f(a) \in \{1, -1\}$$

$f(a)^2 = 1$ za $a \neq 0$

$P(a, a)$:

$$f(a^2) = f(a)^2 = 1$$

tj. $f(a) = 1$ za $a > 0$

$P(0, 0)$:

$$f(0) = f(0)^2$$

1. slučaj: $f(0) = 1$

$P(a, 0)$:

$$f(a) = 1 \forall a \in \mathbb{R}$$

Nadalje: $f(0) = 0$

$P(a, -1), a > 0$:

$$f(-a) = f(-1)$$

1. slučaj: $f(-1) = -1$:

Rješenje $f(a) = sign(a) \forall a \in \mathbb{R}$

2. slučaj: $f(-1) = 1$

Rješenje $f(a) = 1$ za $a \neq 0$ i $f(0) = 0$

To su sva 4 rješenja

3. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da:

$$xf(x) + yf(y) = (x+y)f(x+y) - 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju: $g(x) = x(f(x) - x)$

Jednadžba postaje

$$g(x) + g(y) = g(x+y)$$

Budući da je domena od $g(x)$ skup racionalnih brojeva poznato je da je $g(x) = cx$

$$x(f(x) - x) = cx$$

$$f(x) - x = c, \quad \forall x \neq 0$$

Ako uvrstimo $f(x) = x + c$ za x različit od 0 vidimo da funkcija zadovoljava uvjet pa je konačno rješenje:

$$f(x) = x + c_1, \quad \forall x \neq 0$$

$$f(0) = c_2$$

Gdje su c_1 i c_2 proizvoljni racionalni brojevi.

4. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(xf(y)) + f(f(x^2)) = xy + f(x)f(f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Rješenje.

$P(1, y)$:

$$f(f(y)) + f(f(1)) = y + f(1)f(f(1))$$

Iz ovoga lagano slijedi da je funkcija bjekcija. Budući da je surjekcija postoji realan a takav da $f(a) = 1$

$P(a, a)$:

$$1 + f(f(a^2)) = a^2 + f(1)$$

$P(1, a^2)$

$$f(f(a^2)) + f(f(1)) = a^2 + f(1)f(f(1)) = 1 + f(f(a^2)) - f(1) + f(1)f(f(1))$$

$$(f(1) - 1)(f(f(1)) - 1) = 0$$

Ako $f(f(1)) = 1$:

$P(1, 1)$:

$$2 = 1 + f(1)$$

pa je $f(1) = 1$

$P(1, y)$:

$$f(f(y)) = y$$

Pojednostavljivanjem početne jednadžbe dobije se:

$$f(xf(y)) + x^2 = xy + xf(x)$$

Ako u novu jednadžbu uvrstimo $y = 1$ dobijemo

$$f(x) + x^2 = x + xf(x)$$

$$f(x)(1 - x) = x(1 - x)$$

$$f(x) = x$$

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je skup $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \sqrt[3]{17}\right\}$ konačan i neprazan te vrijedi:

$$f(f(x+y)) = f(f(x)) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Napomena: $\sqrt[3]{17}$ je iracionalan.

Rješenje.

$P(0,0)$:

$$f(0) = 0$$

$P(0,y)$:

$$f(f(y)) = f(y)$$

Pojednostavljivanjem početne:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Tvrdnja 1.: 0 je jedina nultočka funckije

Dokaz

Pretpostavimo da je $k \neq 0$ i $f(k) = 0$

$P(x,k)$

$$f(x+k) = f(x)$$

To znači da je funkcija periodična s periodom k. Tada bi skup $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \sqrt[3]{17}\right\}$ bio ili prazan ili beskonačan što je u kontradikciji s pretpostavkom zadatka.

Tvrdnja 2.: funkcija je injektivna

Dokaz

Neka $f(a) = f(b)$

$P(a-b,b)$

$$f(a) = f(a-b) + f(b) = f(a-b) + f(a)$$

$$f(a-b) = 0$$

Iz Tvrdnje 1. slijedi $a - b = 0$ odnosno $a = b$ što smo i htjeli dokazati Znamo da je $f(f(x)) = f(x)$, a zbog injektivnosti vrijedi $f(x) = x \forall x, \in \mathbb{R}$

16. Završne riječi i zahvale

Organizacija Zimske škole bila je, kao i svake godine, zahtjevna i nepredvidljiva (doduše, bar nam je postalo predviljivo da će biti nepredvidljiva), no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jedne Zimske škole.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu Ogulin i Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Ogulinu. Svakako se nadamo i veselimo vratiti i dogodine!

Naša najveća zahvala ide našem glavnom spoznoru, Jane Streetu. Osim što financijski podupiru sve aktivnosti Udruge, a među njima i posebno Zimsku školu, također su poslali poklone za sve sudionike.

Jane Street is a quantitative trading firm with offices worldwide. We hire smart, humble people who love to solve problems, build systems and test theories. You'll learn something new every day in our office — whether it's connecting with a colleague to share perspectives, or participating in a talk, class, or game night. Our success is driven by our people and we never stop improving.

Jane Street has a number of opportunities available for students - from multi-day educational programs to learn how we apply Mathematics and Computer Science in our everyday work, through to our global internships as well as full-time roles. Take a look at www.janestreet.com to learn more!

Od srca zahvaljujemo i Ognjenu Stipetiću, zaposleniku Jane Streeta, koji je održao popularno-znanstveno predavanje koje je svim sudionicama približilo svakodnevni posao trgovanja dionicama i što se to točno događa iza zastora u Jane Streetu; te važnost vjerojatnosti, statistike i ostalih grana matematike u njegovom poslu. Isto tako mu zahvaljujemo što je održao i Estimathon - kratko ekipno natjecanje u procijenjivanju koje je u originalnom formatu osmislio upravo Jane Street.

Posebno želimo zahvaliti i Ministarstvu znanosti i obrazovanja na financijskoj potpori za organizaciju Zimske škole i Hrvatskom matematičkom društvu, našem glavnom partneru.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim ostalim donatorima i sponzorima: Stype CS, Span, Wiener osiguranje Vienna Insurance Group te Offertisima. Omogućili ste ne samo da se Zimska škola održi, već i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše Udruge.

Naravno, Škola ne bi bila moguća bez svih mentora. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima Škole pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i nakon što je Škola završila.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem i razvijanjem znanja u STEM području. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv potvrđuje da ono što radimo zaista čini razliku.

Veliko vam hvala svima na svemu!

17. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: mnm.hr

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **kontakti i društvene mreže**: mnm.hr

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata i rada Udruge.