Ljetni kamp mladih matematičara 2023.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI

Marin Getaldić

Kaštel Štafilić,

9.-16. kolovoza 2023.

Sadržaj Knjige predavanja

1. Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći sva predavanja koja su se održala na Ljetnom kampu mladih matematičara 2023. godine, zajedno s većinom hintova i rješenja.

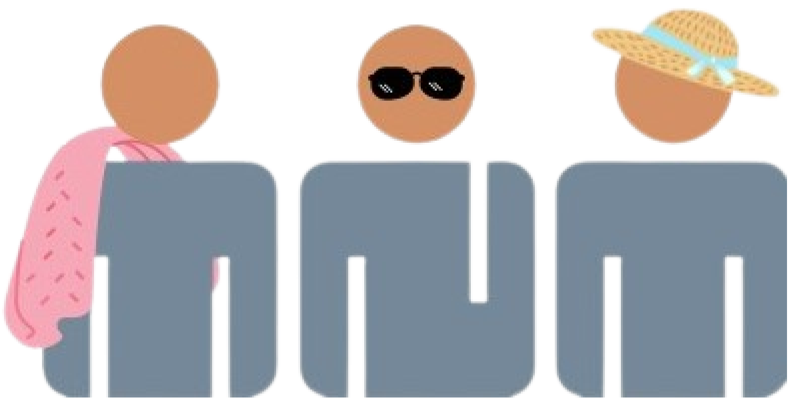
Glavni razlog izrade ovih materijala je činjenica da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a za primjenu istih potrebna je i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi.

Dodatno, knjiga sadrži opis Kampa i projekata koji su se održali na njemu kako bismo čitatelja ove knjige zainteresirali da možda i sam sudjeluje na istome.

S druge strane, ne smije se zaboraviti važnost povezanosti mladih nadarenih matematičara iz cijele Hrvatske i šireg područja – Kamp služi kao izvrstan način za upoznavanje mladih ljudi sličnih interesa i stvaranje novih prijateljstava među učenicima koji će jednog dana biti pozitivna promjena u svijetu. Nadamo se zato nematematičkim dijelovima ove knjige prenijeti barem djelić atmosfere s Kampa.

Bilo bismo zahvalni kad biste se za bilo kakve uočene pogreške u knjizi javili na našu email adresu mnm@mnm.hr ili kamp@mnm.hr.

Autori,
1. rujna 2023.



U sjećanje na Martina Filipčića (2007. - 2023.) *Sad neki novi klinci dolaze, a sve se teže prave riječi nalaze.*

2. Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama.

U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.

Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše.

Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".

Sastanak na kojem se formirala udruga

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema u Zagrebu, no s vremenom se djelovanje udruge proširila i na druge aktivnosti poput zimskih škola, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima, školama diljem Hrvatske u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama, natjecanjima i sajmovima. . .

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, a članovi Udruge dolaze iz dvadesetak različitih srednjih škola iz svih dijelova Hrvatske, a studiraju na gotovo desetak fakulteta širom svijeta.

Važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerenje u organiziranje važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija godišnjeg matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" već deset godina u kojem sudjeluje više od 25 država diljem svijeta!

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti sve svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te vjerujemo da kampovi svake godine postaju sve bolji. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Nakon nekoliko godina uspješne organizacija Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Zimska škola jako je slična Ljetnom kampu, no uvijek je manja po svojoj veličini, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta.

Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce, kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa, u kojoj su projekti zauzeli i jutro i popodne svakog dana trajanja. Nažalost, organizacija konferencije zamrla je tijekom pandemije, no ponovno je obnovljena ovoga ljeta i jedva čekamo sljedeće izdanje iduće ljeto!

Jedan od ciljeva svih kampova jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele iste interese. Stoga, uz matematičke, na kampu se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

Ovogodišnji, 14. po redu Ljetni kamp održan je u Kaštel Štafiliću. Gotovo svi učenici i mentori bili su smješteni u Učeničkom domu srednje škole "Braća Radić" u kojem su održane večernje aktivnosti, a predavanja i projekti su se održavali u Srednjoj školi "Braća Radić" smještenoj pored doma.

Učenički dom Srednje škole "Braća Radić" [1]

Srednja škola "Braća Radić" u Kaštel Štafiliću [2]

[1]Izvor fotografije: Web stranica Srednje škole "Braća Radić"
[2]Izvor fotografije: Portal grada Kaštela

2.4. Aktivnosti na kampu

Kao i inače, glavne su aktivnosti na kampu bile jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici su slušali detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u sedam grupa ovisno o uzrastu i predznanju, te u "MEMO grupu" koja se pripremala za predstojeće natjecanje. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Nakon predavanja, učenici su se uz ručak imali priliku odmoriti i zabaviti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz natjecateljsku, primijenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki je polaznik kampa na početku kampa odabrao jedan od ponuđenih raznovrsnih projekata te na njemu radio tijekom četiri popodneva do kraja kampa, učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije o odabranoj temi.

Svaki dan su se dan nakon večere odvijale raznovrsne aktivnosti, kao što su Q&A, Pub kviz i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi su sudionici imali slobodno vrijeme tijekom kojeg su se mogli družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, Blotto, bela, Resistance, Exploding kittens, kockice ...

Jutarnja predavanja jedan smo dan zamijenili Radionicom lijepog pisanja rješenja, a drugi dan slobodnim jutrom. Zato su se to popodne, umjesto projekata, učenici mogli okušati u već tradicionalnom ekipnom natjecanju Reli, dok su ozbiljniji natjecatelji sudjelovali na još jednom izdanju ELMO-a.

2.5. Radionica lijepog pisanja rješenja

Ove smo godine organizirali Radionicu lijepog pisanja rješenja, u sklopu koje smo učenike podijelili u tri veće grupe. Prva grupa (koju je činila i uobičajena prva grupa) slušala je predavanje na temu "Logika i što je to dokaz?" kako bi se učenici upoznali s osnovama logike i kako sve mogu dokazati zadanu tvrdnju, a imali su priliku naučiti i što nisu dobri dokazi. Druga grupa (koju su činili učenici u uobičajenim grupama od druge do pete) slušala je predavanje na kojem su im prezentirane česte greške, kako izgledaju marking sheme na domaćim natjecanjima i zašto je takav raspored bodova, a dali smo im priliku da i sami budu ispravljači nekih *upitnih* rješenja. Za posljednju grupu (koju su činili učenici šeste, sedme i MEMO grupe) prezentirala su se razna rješenja s IMO-a, objašnjeno je zašto je nešto više ili manje komentirano u njima, te kako konkretno izgledaju marking sheme na međunarodnim natjecanjima.

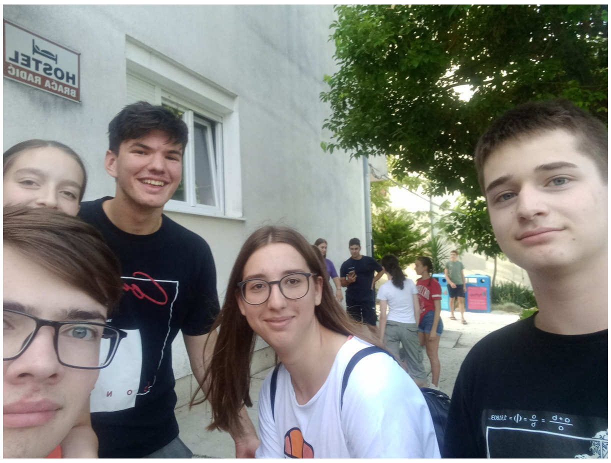
2.6. Popis mentora

Namik Agić	Krunoslav Ivanović	Boris Stanković
Borna Banjanin	Ivan Novak	Simeon Stefanović
Mislav Brnetić	Petar Orlić	Andrija Tomorad
Janko Bušelić	Mislav Plavac	Emanuel Tukač
Vedran Cifrek	Ivan Premuš	Nika Utrobičić
Stella Čolo	Hrvoje Radoš	Katja Varjačić
Patricija Dovijanić	Lucija Relić	Ivan Vojvodić
Paula Horvat	Adian Anibal Santos Sepčić	Matej Vojvodić

2.7. Ovaj kamp - u slikama

Organizirani dolazak na kamp iz Zagreba

Igre upoznavanja



Jedan od zadataka na igrama upoznavanja bio je i skupiti što više selfija s mentorima!

Super smo se zabavili i na popularno-znanstvenom predavanju!

Zatvaranje kampa ☹

Pobjednici blottoa

Pobjednički tim relija

Nagrađeni na ELMO-u

Fleksagoni

MMUM i ja

Na zatvaranju su učenici imali priliku prezentirati naučeno svim ostalim sudionicima!
Ako vas zanima što se radilo na kojem projektu, svakako pogledajte Projekte 25 (kasnije u knjizi).

I. Predavanja

3. Predavanja za prvu grupu

3.1. C1: Paula Horvat - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Dirichletov princip jedan je od najjednostavnijih kombinatornih principa, a pokazat će se kao vrlo koristan alat prilikom rješavanja zadataka raznih težina. Bitno je dobro savladati kako primijeniti Dirichletov princip prilikom rješavanja zadataka jer ćete se često susretati s njim u nadolazećoj natjecateljskoj karijeri.

Osnovna formulacija glasi:

Teorem 3.1.1: Dirichletov princip

Ako $n+1$ kuglicu rasporedimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dvije kuglice.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Dakle, ne postoji kutija u kojoj se nalazi više od jedna kuglica. S obzirom da imamo n kutija, nemoguće je smjestiti više od n kuglica u te kutije. Naša je pretpostavka kriva pa vrijedi osnovna formulacija Dirichletovog principa. □

Napomena 3.1.2

Dirichletov princip očito vrijedi i ako imamo više od n+1 kuglica. Može u više kutija biti po dvije kuglice, može u proizvoljno mnogo kutija biti po tri i više kuglica ili neka kombinacija toga, također može postojati i prazna kutija. Navedene situacije samo su **mogućnosti**, ali ono što je sigurno je da postoji **barem jedna** kutija s **barem dvije** kuglice.

U većini će zadataka neki drugi pojmovi zamijeniti "kuglice" i "kutije". Izazov će biti odrediti što predstavlja što. Uglavnom će biti očito što su "kuglice", no da bismo otkrili "kutije" često ćemo trebati razmišljati izvan jedne ;).

Primjer 1. Dokažite da u skupini od 5 ljudi postoje barem dvije osobe koje su rođene u isto godišnje doba.

Rješenje 1. Uočimo da u ovom primjeru "kuglice" predstavljaju ljudi, a "kutije" godišnja doba. Tvrdnja sada direktno slijedi iz Dirichletovog teorema.

□

Korisnija formulacija glasi:

Teorem 3.1.3: Dirichletov princip

Ako $nk + 1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k + 1$ kuglica.

Primjer 2. U razredu je 25 učenika. Postoje li 3 učenika koja su rođena u istom mjesecu?

Rješenje 2. Uočimo da u ovom primjeru "kuglice" predstavljaju učenici, a "kutije" mjeseci u godini, te da je n = 12 i k = 2. Dakle, po Dirichletovom principu postoji skup od tri učenika koji su rođeni u istom mjesecu u godini. □

Promotrimo sada problem gdje primjena Dirichletovog principa nije očita, no korisno ga je zapamtiti. Naime, Dirichletov princip primjenjiv je i u zadacima gdje promatramo različite geometrijske likove, dužine, točke...

Primjer 3. Dokažite da je nemoguće izabrati 5 točaka unutar jednakostraničnog trokuta duljine stranice 2 tako da je udaljenost svakog para točaka veća od 1.

Rješenje 3. Podijelimo trokut na 4 manja jednakostranična trokuta duljine stranice 1. Po Dirichletovom pristupu postoji jedan trokut koji sadrži dvije od odabranih točaka (ili unutar sebe ili na stranicama). Te dvije točke su sigurno udaljenje za najviše 1. □

Lakši zadaci

1. Dokažite drugu formulaciju Dirichletovog principa.

2. Ivan je neuredan matematičar, ima 3 para plavih, 2 para crnih i 6 parova žutih čarapa, ali sve su čarape nesparene i razbacane po ormaru. Rano jutro, pola šest, Ivan u mraku izvlači čarape iz ormara. Koliko čarapa najmanje mora izvući da bude siguran da ima barem jedan par iste boje?

3. U učionici ima 15 računala, a u razredu ima 33 učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.

4. Dirichletovim principom pokažite da je nemoguće smjestiti 9 topova na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju.

5. Franjo izabire 7 različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, ..., 11\}$. Dokaži da je izabrao 2 broja koja zbrojena daju broj 12.

6. Ana je na ploču napisala 15 prirodnih brojeva. Dokažite da se među njima mogu odabrati dva čija je razlika djeljiva s 14.

Umjereni zadaci

7. U košari se nalaze jabuke, naranče i banane. Maja ne vidi košaru, ali želi biti sigurna da je u njoj ili barem 8 jabuka ili barem 6 banana ili barem 9 naranči. Odredi minimalan broj voća u košari takav da u njoj sigurno bude ili barem 8 jabuka ili barem 6 banana ili barem 9 naranči.

8. Pokaži da u grupi od 20 ljudi postoji barem dvoje ljudi koji imaju isti broj prijatelja. Prijateljstva su uzajamna.

9. Škola ima 1000 učenika i 30 razreda. Neka je m broj učenika u razredu s najviše učenika. Odredite najmanji mogući m.

10. U svako polje 5×5 tablice upisujemo jedan od brojeva $-1, 0, 1$ te zbrajamo brojeve po stupcima, retcima i dijagonalama. Dokažite da će među tim zbrojevima dva biti jednaka.

11. Unutar kvadrata duljine stranice 3 Leonardo je nacrtao deset obojanih točaka. Dokažite da postoje 2 od tih 10 točaka takve da je udaljenost među njima manja ili jednaka $\sqrt{2}$.

12. Gabriel i Mate igraju igru. Gabriel je na ploču napisao 5 cijelih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 kojih je netom prije nasumično izgenerirao pomoću računala te je otišao iz učionice. Zatim je došao Mate, obrisao ih i napisao ponovo u drugačijem poretku. Sada na ploči pišu Gabrielovi brojevi, ali u nekom drugom redoslijedu b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Ne znajući koji su brojevi b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, Gabriel mora pogoditi koje je parnosti broj $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$. Može li Gabriel sa sigurnošću pobijediti igru?

13. Odabrano je 25 točaka u ravnini tako da za bilo koje 3 vijedi da su 2 od te 3 udaljene manje od 1. Dokažite da postoji kružnica radijusa 1 koja sadrži barem 13 od tih 25 točaka.

14. Dano je 27 točaka, raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Svaka točka je obojana crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su svi vrhovi iste boje.

15. Ovog ljeta u Kaštel Štafiliću održao se šahovski turnir u kojem je sudjelovalo 10 šahista. Turnir se igrao tako da je svaki sudionik igrao sa svakim. Pobjeda je donosila 1 bod, gubitak -1, a remi 0 bodova. Ako je poznato da je više od 70% igri bilo remi, dokažite da postoje barem dva sudionika koji su završili s istim brojem bodova.

16. Zoe je vrlo ekološki osviještena te je odlučila svaki dan posaditi barem jedno drvo. Tijekom 365 dana posadila je čk 700 sadnica drva. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je Zoe ukupno posadila 29 drva.

Teži zadaci

17. Neka je 101 pozitivnih brojeva čija je suma jednaka 300 poredano u krug. Dokažite da možete izabrati niz brojeva čija je suma jednaka 200.

18. (IMO, 1972/1). Neka je $X \subseteq 1, 2, ..., 99$ te $|X| = 10$. Dokažite da postoje 2 disjunktna prava podskupa Y, Z od X takva da vrijedi $\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z$

3.2. G1: Nika Utrobičić - Sukladnost i sličnost

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

U mnogim geometrijskim zadatcima korisno je prisjetiti se poučaka o sličnosti i sukladnosti.

Teorem 3.2.1: Poučci o sukladnosti

- **SSS poučak** Ako su trokutima sve 3 stranice jednake duljine, oni su sukladni.
- **SKS poučak** Ako su trokutima 2 para stranica jednaka i kutevi između njih isti, oni su sukladni.
- **SSK> poučak** Ako su trokutima 2 para stranica jednaka i kutevi nasuprot većima , oni su sukladni.
- **KK poučak** Ako su trokutima 2 kuta i jedna stranica ista, oni su sukladni.

Teorem 3.2.2: Poučci o sličnosti

- **SSS poučak** Ako su trokutima sve 3 stranice proporcionalne, oni su slični.
- **SKS poučak** Ako su trokutima 2 para stranica proporcionalna i kutevi između njih isti, oni su slični.
- **SSK> poučak** Ako su trokutima 2 para stranica proporcionalna i kutevi nasuprot većima , oni su slični.
- **KK poučak** Ako su trokutima 2 kuta ista, oni su slični.

Oni nam pomažu i pri dokazivanju mnogih korisnih činjenica koje ćemo za vježbu dokazati na ovom predavanju.

Teorem 3.2.3: Poučak o obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.

Napomena: Neka je k kružnica sa središtem u S te A, B i C međusobno različite točke na toj kružnici. Tada kut $\angle ACB$ nazivamo **obodnim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$ u točki C, a kut $\angle ASB$ **središnjim kutom** nad tetivom $\overline{AB}$.

Teorem 3.2.4: Poučak o tetivi i tangenti

Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut izmedu tangente t i tetive AB jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Definicija 3.2.5

Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.

Lema 3.2.6: Tetivni četverokuti

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je 180°
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
  - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$

Teorem 3.2.7: Poučak o simetrali kuta

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.

Lema 3.2.8: Lema o trozupcu

Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D sjecište BI (simetrala kuta $\angle ABC$) i opisane kružnice trokuta ABC. Lema o trozupcu kaže da je

$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte trokutu pripisane kružnice koja dira AB, BC i $\overline{AC}$.

Lema 3.2.9: Preslike ortocentra

1. Preslika ortocentra trokuta preko stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.
2. Preslika ortocentra trokuta preko polovišta stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.

Teorem 3.2.10: Eulerov pravac

Ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta leže na istom pravcu kojeg zovemo Eulerov pravac. Vrijedi $|HT| : |TO| = 2 : 1$

Teorem 3.2.11: Feuerbachova kružnica

Polovišta stranica trokuta, polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta i nožišta visina nalaze se na jednoj kružnici koju nazivamo kružnica 9 točaka ili Feuerbachova kružnica. Središte te kružnice leži na Eulerovom pravcu i polovište je $|OH|$.

Zadaci

1. Dokažite Poučak o obodnom i središnjem kutu!
2. Dokažite da se simetrala stranice i simetrala pripadnog kuta sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
3. Dokažite da je površina trokuta jednaka umnošku radijusa upisane kružnice i njegovog poluopsega.
4. Dokažite Poučak o tetivi i tangenti.
5. Dokažite Lemu o trozupcu.
6. Dokažite Lemu o preslikama ortocentra.
7. Dokažite Poučak o simetrali kuta.
8. Neka je H ortocentar, O središte opisane kružnice trokuta ABC, M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je P sjecište pravaca HM i AO. Vrijedi da P leži na opisanoj kružnici trokuta - dokažite!
9. Dokažite da postoji Eulerov pravac i da omjer iz teorema vrijedi.
10. Dokažite Teorem o Feuerbachovoj kružnici.
11. Neka je dužina AD promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine AC i BD sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokaži da je trokut ΔBCS jednakostraničan.
12. U jednakokračnom trokutu ΔABC visina na osnovicu AB i visina na krak BC sijeku se u točki E tako da je $|CE| = |AB|$. Odredi kutove trokuta ΔABC.
13. U jednakokračnom trokutu ΔABC simetrala kraka AC i simetrala kuta BAC sijeku se u točki D koja pripada kraku BC. Odredi veličinu kuta CDA.
14. Zadan je jednakokračni trokut ΔABC. Nad krakom AC nacrtan je kvadrat $ACDE$, a nad krakom BC jednakostranični trokut ΔBFC. Dijagonale kvadrata EC i AD sijeku se u točki S, a pravac AF siječe krak BC u točki G. Pravac SG siječe krak AC u točki H. Ako je $\angle$DAF=85°, kolika je veličina kuta $\angle AHS$?
15. Zadan je tupokutni trokut ΔABC s tupim kutom u vrhu B. Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C siječe pravac AB u točki D, a simetrala vanjskog kuta pri vrhu A siječe pravac BC u točki E. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako vrijedi $|AE| = |AC| = |CD|$.
16. U tupokutnom trokutu ΔABC s tupim kutom u vrhu A, kut γ u vrhu C je dvostruko veći od kuta β. Pravac p, koji prolazi vrhom A i okomit je na pravac AB, siječe pravac BC u točki D. Pravac s, koji je usporedan s pravcem p, prolazi polovištem P stranice AB i siječe pravac BC u točki E. Dokaži da su dužine BE, ED i AC jednakih duljina.
17. Zadan je jednakostranični trokut ΔABC. Na produžetku stranice AB preko vrha B odabrana je točka D, a na produžetku stranice CB preko vrha B odabrana je točka E tako da je $|CD| = |DE|$. Dokaži da je $|AD| = |BE|$.
18. U trokutu ΔABC, gdje je kut $\angle BAC$ dvostruko veći od kuta $\angle ABC$, simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu BC u točki D, tako da je $|BD| = 5cm$ i $|DC| = 4cm$. Izračunaj opseg tog trokuta.
19. Zadana je kružnica k i njene tetive AB, BE, EC, BD. Ako je $AB \parallel EC$ i BE simetrala kuta $\angle ABD$, dokaži da je $|EC| = |BD|$.
20. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

21. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

22. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu. $\overline{AB}$.

23. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

24. Dokažite da ako je H ortocentar, a O centar opisane kružnice trokuta ABC tada je

$$\angle BAC = 60^\circ \Leftrightarrow AH = AO.$$

25. Dan je šiljastokutni trokut ABC. Tangente u točkama A i B na kružnicu opisanu tom trokutu sijeku se u točki M. Paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz točku M siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki N. Dokaži da je $|BN| = |CN|$.

26. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

27. Dan je trokut ABC. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom BC siječe dužinu LM u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

3.3. A1: Patricija Dovijanić - Faktorizacije

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Faktorizirati neki broj znači zapisati ga u obliku umnoška, npr. $6 = 2 \cdot 3$. Susreli ste se i s npr. rastavom na proste faktore koji je često najkorisnija faktorizacija nekog broja.

Danas se ne bavimo faktoriziranjem brojeva, već *algebarskih izraza*. To na površini samo znači da će se pojaviti neka slova koja ćete tretirati kao brojeve. U algebarskim izrazima nailazimo na potencije koje ćemo objasniti na ploči za one koje se nisu susreli s njima. Evo par primjera algebarskih izraza, a sigurna sam da ih znate zbrajati, oduzimati i množiti:

$$3a \qquad 7x + y \qquad 90a + 80b + 4c + d \qquad 10k + 10l \qquad \sqrt{z+1}$$
$$20x^2 + 4x + 1 \qquad b \qquad 89x^5 + 98y^4 \qquad (a+b)^2 + 1$$

Neke algebarske izraze jako je jednostavno zapisati u obliku umnoška, primjerice: $3a + 3$ možemo faktorizirati tako da zajednički faktor 3 izlučimo iz svakog od pribrojnika i dobijemo $3(a + 3)$. Jako je bitno da izraz faktoriziramo "do kraja", tj. da se ne može faktorizirati dalje (slično kao kada broj rastavljamo na proste faktore).

Što mislite, koji se od sljedećih algebarskih izraza mogu faktorizirati, a koji ne mogu?

$$2x + 6 \qquad 2x + 3 \qquad x^2 - 1 \qquad 2x - 3y \qquad a - 1 \qquad a^3b^{12} - 27a^2$$
$$t^2 + 4 \qquad 5x + 7 \qquad 3x - 9 \qquad 15x - x^2 \qquad 9x - 81y \qquad abc - 3a^2b^2c^2$$
$$4 - y^2 \qquad x + xy \qquad a^7 - b^7 \qquad c^2 + d^2 \qquad 2a + 2b + 2c$$

Zagrijavanje

U ovom odjeljku naučit ćemo sve alate potrebne za rješavanje zadataka. Ako ste već upoznati s gradivom iz zagrijavanja, slobodno odmah krenite na zadatke :)

Primjer 1. Faktorizirajmo sljedećih nekoliko algebarskih izraza:

a) $3 + 6x$ b) $4a - 16$ c) $17x + 17$ d) $12a + 3b$
e) $12a + 3a^2$ f) $15y^2 + 5y$ g) $3x^3 + 3x^2$

Rješenje 1. (a) $3 + 6x = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2x = 3(1 + 2x)$

(b) $4a - 16 = 4 \cdot a - 4 \cdot 4 = 4(a - 4)$

(c) $17x + 17 = 17 \cdot x + 17 \cdot 1 = 17(x + 1)$

(d) $12a + 3b = 3 \cdot 4a + 3 \cdot b = 3(4a + b)$

(e) $12a + 3a^2 = 3 \cdot 4a + 3 \cdot a^2 = 3(4a + a^2) = 3(a \cdot 4 + a \cdot a) = 3(a(4 + a)) = 3a(4 + a)$

(f) $15y^2 + 5y = 5y \cdot 3y + 5y \cdot 1 = 5y(3y + 5)$

(g) $3x^3 + 3x^2 = 3x^2 \cdot x + 3x^2 \cdot 1 = 3x^2(x + 1)$

□

Primjer 2. I još nekoliko...

a) $x^2y^2 + xy^2$ b) $a^2b^3 + a^3b^2$ c) $12a + 18b - 24c$
d) $7abc + 14ab$ e) $3ax + 3bx$ f) $22a^3b^2c^3 - 33a^2b^2c^4 + 44a^3bc^4$

Rješenje 2. (a) $x^2y^2 + xy^2 = x(xy^2 + y^2) = x(y^2(x + y)) = xy^2(x + y)$

(b) $a^2b^3 + a^3b^2 = a^2b^2(b + a)$

(c) $12a + 18b - 24c = 6(2a + 3b - 4c)$

(d) $7abc + 14ab = 7(abc + 2ab) = 7(ab(c + 2)) = 7ab(c + 2)$

(e) $3ax + 3bx = 3x(a + b)$

(f) $22a^3b^2c^3 - 33a^2b^2c^4 + 44a^3bc^4 = 11a^2bc^3(2a - 3bc + 4ac)$

□

Primjer 3. I zagrade su faktori:

a) $(4x + y)(7z + w) + 3(4x + y)$ b) $(2a - 1)(2a + 2) + (2a - 1)(4a + 3)$
c) $(3a + 6)(4b + 7) + (a + 3)(b + 5)$ d) $(a + b - 1)(7a + 3) - (a + b - 1)(3a + 4)$

Rješenje 3. (a) $(4x + y)(7z + w) + 3(4x + y) = (4x + y)(7z + w + 3)$

(b) $(2a - 1)(2a + 2) + (2a - 1)(4a + 3) = (2a - 1)((2a + 2) + (4a + 3)) = (2a - 1)(6a + 5)$

(c) $(3a+6)(4b+7)+(a+3)(b+5) = 3(a+3)(4b+7)+(a+3)(b+5) = (a+3)(3(4b+7)+(b+5)) = (a + 3)(12b + 21 + b + 5) = (a + 3)(13b + 26) = 2(a + 3)(b + 13)$

(d) $(a+b-1)(7a+3)-(a+b-1)(3a+4) = (a+b-1)((7a+3)-(3a+4)) = (a+b-1)(7a+3-3a-4) = (a + b - 1)(4a - 1)$

□

Primjer 4. Korak po korak...

a) $8ax + 12bx + 2a + 3b$ b) $km + kn + lm + ln$
c) $3ax - 6ay - 4bx + 8by$ d) $3by + 6z + b^2y + 2bz$

Rješenje 4. (a) $8ax + 12bx + 2a + 3b = 4x(2a + 3b) + (2a + 3b) = (4x + 1)(2a + 3b)$

(b) $km + kn + lm + ln = k(m + n) + l(m + n) = (k + l)(m + n)$

(c) $3ax - 6ay - 4bx + 8by = 3a(x - 2y) - 4b(x - 2y) = (x - 2y)(3a - 4b)$

(d) $3by + 6z + b^2y + 2bz = by(3 + b) + 2z(3 + b) = (by + 2z)(3 + b)$

□

Razlika kvadrata

Pri faktorizaciji izraza često je korisno napamet znati nekoliko formula koje ćemo proći na današnjem predavanju. Prva od njih je formula o razlici kvadrata:

Teorem 3.3.1: Razlika kvadrata

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Provjerite da ova formula zaista vrijedi!

Primjer 5. Faktorizirajte:

a) $4a^2 - 9$ b) $25x^2 - 81$ c) $121 - 16b^2$
d) $x^2y^2 - 16$ e) $0.01a^4 - 0.25b^2$ f) $100k^{10} - l^{12}$
g) $(a^2+1)^2 - (b+3)^2$ h) $4a^2b^2 - b^2 - a^2 + 1$ i) $x^2 - xy - y - 1$

Rješenje 5. (a) $4a^2 - 9 = (2a)^2 - 3^2 = (2a-3)(2a+3)$

(b) $25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x-9)(5x+9)$

(c) $121 - 16b^2 = 11^2 - (4b)^2 = (11-4b)(11+4b)$

(d) $x^2y^2 - 16 = (xy)^2 - 4^2 = (xy-4)(xy+4)$

(e) $0.01a^4 - 0.25b^2 = (0.1a^2)^2 - (0.5b)^2 = (0.1a^2 - 0.5b)(0.1a^2 + 0.5b)$

(f) $100k^{10} - l^{12} = (10k^5)^2 - (l^6)^2 = (10k^5 - l^6)(10k^5 + l^6)$

(g) $(a^2+1)^2 - (b+3)^2 = ((a+1)-(b+3))((a+1)+(b+3)) = (a-b+2)(a+b+4)$

(h) $4a^2b^2 - b^2 - a^2 + 1 = 4b^2(a^2-1) - a^2 + 1 = 4b^2(a^2-1) - (a^2-1) = (a^2-1)(4b^2-1) = (a-1)(a+1)(2b-1)(2b+1)$

(i) $x^2 - xy - y - 1 = y(-x-1) + x^2 - 1 = -y(x+1) + (x-1)(x+1) = (x+1)(x-1-y)$

□

Zašto nemamo poglavlje o zbroju kvadrata? Nažalost, zbroj kvadrata ne može se faktorizirati :(kao utjehu nudim formule za razliku potencija te za zbroj neparnih potencija koje vam možda posluže nekad kasnije u životu, kao podskup možda vam posluže već i danas, a nalaze se u popisu formula.

Priča o kvadratnom trinomu

Često trebamo faktorizirati izraze oblika

$$4x^2 + 2x + 6 \qquad 7x + 1 + 2x^2 \qquad x^2 - x - 1 \qquad 5a^2 - 3a + 4 \qquad 12y^2 - 17 + 4y$$

tj. izraze koji imaju tzv. *kvadratni član*, *linearni član* te *slobodni koeficijent.*

Zapišimo ih u zajedničkom obliku

$$ax^2 + bx + c$$

gdje su a, b, c neki realni brojevi koji redom stoje uz drugu potenciju, prvu potenciju i "nultu potenciju". Takve izraze nazivamo **kvadratnim trinomima** - kvadratni jer je to najviša potencija koja se pojavljuje u izrazu, a trinom jer postoje tri pribrojnika.

Glavni razlog zašto ih faktoriziramo obično je da pronađemo rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ - jednom kad ju zapišemo u obliku $(mx-n)(kx-l) = 0$, znamo da su jedine mogućnosti $mx - n = 0$ ili $kx - l = 0$, što su dvije linearne jednadžbe po x koje znamo riješiti.
Postoji puno načina kako faktorizirati kvadratni trinom, a mi ćemo proći one najčešće.

1. način: Rastaviti linearni član (Metoda srednjeg člana)

Proučite kako ću faktorizirati sljedećih nekoliko izraza rastavljanjem linearnog člana na pogodne pribrojnike:

$$x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x-2) + 3(x-2) = (x-3)(x-2)$$

$$6x^2 + 11x + 4 = 6x^2 + 3x + 8x + 4 = 3x(2x+1) + 4(2x+1) = (3x+4)(2x+1)$$

Srećom, ne morate napamet pogađati kako rastaviti linearni član:

1. zapišite kvadratni trinom u standardnom obliku $ax^2 + bx + c$
2. izračunajte ac
3. pronađite brojeve m i n za koje vrijedi $m + n = b$ i $mn = ac$
4. linearni član bx rastavite kao $mx + nx$
5. spremni ste za faktorizaciju!

Primjer 6. Faktorizirajte:

a) $x^2 + 7x + 6$ b) $x^2 - 9 + 20$ c) $6x^2 - 17x + 12$ d) $3x^2 - 7x - 6$

Rješenje 6. (a) $x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x + 1) + 6(x + 1)(x + 6)(x + 1)$

(b) $x^2 - 9 + 20 = x^2 - 5x - 4x + 20 = x(x - 5) - 4(x - 5) = (x - 5)(x - 4)$

(c) $6x^2 - 17x + 12 = 6x^2 - 8x - 9x + 12 = 2x(3x - 4) - 3(3x - 4) = (2x - 3)(3x - 4)$

(d) $3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 - 9x + 2x - 6 = 3x(x - 3) + 2(x - 3) = (3x + 2)(x - 3)$

□

Primjer 7. Riješite sljedeću kvadratnu jednadžbu: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Rješenje 7.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \quad \text{ili} \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ili} \quad x = -3$$

Dakle, rješenja su -2 i 3. □

2. način: Prepoznati kvadrat zbroja/razlike binoma

Prvi način funkcionira za sve kvadratne trinome, no u nekim slučajevima možemo i brže. Jedan takav slučaj je kad njihova faktorizacija nije umnožak dviju različitih zagrada kao gore, već dviju istih, npr. $x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + x + 1 = x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$.

Nije greška da i tada provodimo gornji postupak, no postoji lakši način, a to je uz pomoć sljedeće dvije formule.

Teorem 3.3.2: Kvadrat zbroja i kvadrat razlike

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Primjer 8. Razvijte sljedeće izraze u kvadrate zbroja/razlike. Zatim odaberite jedan od njih i uvjerite se da dobijete isti rezultat ako izmnožite dvije zagrade.

a) $(7a + 3)^2$ b) $(10x^3 - y)^2$ c) $(24abc + 5cd)^2$ d) $(7x + y - 4)^2$

Rješenje 8. (a) $(7a + 3)^2 = (7a)^2 + 2 \cdot 7a \cdot 3 + 3^2 = 49a^2 + 42a + 9$

(b) $(10x^3 - y)^2 = (10x^3)^2 - 2 \cdot 10x^3 \cdot y + y^2 = 100x^6 - 20x^3y + y^2$

(c) $(24abc + 5cd)^2 = (24abc)^2 + 2 \cdot 24abc \cdot 5cd + (5cd)^2 = 24a^2b^2c^2 + 240abcde + 25c^2d^2$

(d) $(7x+y-4)^2 = ((7x+y)-4)^2 = (7x+y)^2-2\cdot(7x+y)\cdot 4+4^2 = ((7x)^2+2\cdot 7x\cdot y+y^2)-8(7x+y)+16 = 49x^2 + 14xy + y^2 - 56x - 8y + 16 = 49x^2 + 14xy + y^2 - 56x - 8y + 16$

□

Primjer 9. Faktorizirajte:

a) $4a^2 + 4ab + b^2$

b) $49a^6b^6c^6 - 14a^3b^3c^3 + 1$

c) $5 + 10\sqrt{a} + a$

d) $2x^6 + 2y^6 - 4x^3y^3$

Rješenje 9. (a) $4a^2 + 4ab + b^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = (2a + b)^2$

(b) $49a^6b^6c^6 - 14a^3b^3c^3 + 1 = (7a^3b^3c^3)^2 + 2 \cdot 7a^3b^3c^3 \cdot 1 + 1^2 = (7a^3b^3c^3 - 1)^2$

(c) $5 + 10\sqrt{a} + a = (\sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{a} + (\sqrt{a})^2) = (\sqrt{5} + \sqrt{a})^2$

(d) $2x^6 + 2y^6 - 4x^3y^3 = (x^3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x^3\sqrt{2} \cdot y^3\sqrt{2} + (x^3\sqrt{2})^2 = (x^3\sqrt{2} - y^3\sqrt{2})^2$

□

Razlomci

Faktorizacija je glavni alat za skraćivanje razlomaka koji su sastavljeni od algebarskih izraza. Baš kao pri kraćenju razlomaka kad imamo samo brojeve, izlučujemo zajedničke faktore brojnika i nazivnika te ih kratimo. Jedino na što trebamo paziti je da ne dijelimo s nulom. U praksi to znači da ono čime kratimo razlomak ne smije biti nula.

Primjer 10. Pojednostavnite, tj. skratite razlomke do kraja.

a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

b) $\dfrac{(a - b)^2 + 4ab}{a^2 - a - b - b^2}$

Rješenje 10. (a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

(b) $\dfrac{(a - b)^2 + 4ab}{a^2 - a - b - b^2} = \dfrac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{(a - b)(a + b) - (a + b)} = \dfrac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b - 1)} = \dfrac{a + b}{a - b - 1}$

□

Faktorizacija se također često koristi i za *racionalizaciju nazivnika*. To znači micanje korijena iz nazivnika razlomaka kako bismo si olakšali račun, a obično se radi množenjem tog razlomka s jedan. To ne mijenja vrijednost razlomka, ali jedinicu možemo zapisati na puno zgodnih načina jer je svaki razlomak s jednakim brojnikom i nazivnikom zapravo jednak jedan. Ovo baš i ne stignemo danas obraditi, ali evo primjera za znatiželjne:

Primjer 11. *** Racionalizirajte nazivnike sljedećih razlomaka:

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\dfrac{5}{3 - \sqrt{2}} = \dfrac{5}{3 - \sqrt{2}} \cdot \dfrac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \dfrac{5 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \dfrac{15 + 5\sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \dfrac{15 + 5\sqrt{2}}{7}$

Formule

Slijedi podsjetnik na do sada spomenute formule te nekoliko novih (obratite pažnju na kvadrat trinoma, kub zbroja i razlike te zbroj i razliku kubova). Po ostatku ove stranice pišite si tips and tricks koje naučite na predavanju :)

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, za $a \neq 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- metoda srednjeg člana: $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c$, za $m + n = b, mn = ac$
- **kvadrat trinoma**: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- **kub zbroja**: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- **kub razlike**: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- **zbroj kubova**: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- **razlika kubova**: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- zbroj neparnih potencija: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- razlika potencija: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Lakši zadaci

1. Zapišite izraze u obliku umnoška:

(a) *2013. Š8.3* $(x+1)(x+6)+4$

(b) *2015. Š1B.2* $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+1-x$

2. Izračunajte:

(a) *2023. Š8.1* $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

(b) *2021. Š8.1* $\dfrac{202120212019\cdot 202120212021\cdot 202120212023}{100010001\cdot(202120212021^2-4)}$

(c) *2020. Š8.1* $a^2-c^2+b^2+2ab$, za $a=786, b=389, c=175$.

3. *2020. D8.1* Za izlet grupe učenika unajmljen je autobus po cijeni od 2 880 kn. U zadnji tren troje učenika je odustalo zbog odlaska na pripreme svog sportskog kluba. Zbog toga se cijena izleta svakom učeniku povećala za 4 kn. Koliko je učenika trebalo ići na izlet?

4. *2013. Ž8.2* Postoje li cijeli brojevi x i y za koje vrijedi da je $x^2+2012=y^2$? Obrazloži svoju tvrdnju. Ako postoje takvi brojevi, odredi ih sve.

5. Faktorizirajte izraz a^4+4b^4 (identitet Sophie Germain) i odredite za koje prirodne brojeve a, b je taj izraz prost.

6. *2017. D8.2* Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}(x+y)^2-z^2&=1,\\(y+z)^2-x^2&=5,\\(z+x)^2-y^2&=10.\end{aligned}$$

7. Brza TB runda:

(a) Dokažite da je n^3-n djeljivo sa 6 za svaki prirodan broj n.

(b) Dokažite da je zbroj kubova 3 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv s 9.

(c) Dokažite da je izraz 2021^n-1 djeljiv s 2020, za svaki prirodni n.

(d) Odredite sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da je izraz x^3+y^3 prost.

(e) *2021. Š8.6* Dokažite da je razlika četvrtih potenciju dvaju neparnih prirodnih brojeva djeljiva sa 16.

8. Uvrsti me nježno...

(a) *2022. Ž8.1* Ako je $x+y=1$ i $x^2+y^2=2$, kolika je vrijednost izraza x^4+y^4?

(b) *2012. Ž8.1* Ako je $x+y=0$ i $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, odredi x^8+y^8.

(c) *2015. Š1A.2* Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3+b^3=2ab(a+b)$. Odredi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$.

(d) *2012. Š1A.3* Ako je $a+b=4$ i $a^2+b^2=14$, odredi a^3+b^3.

(e) *2016. Š1A.4* Ako je $a^2+b^2=8$, $a^6+b^6=416$, $a, b>0$, odredi ab.

Teži zadaci

9. Malo sporija TB runda:

(a) *2012. Ž8.2* Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva : $x^2 - xy - 2y^2 = 27$.

(b) *2020. Ž8.6* Dokažite da je $n^3 + 6n^2 + 8n$ djeljivo s 3 za sve prirodne n.

(c) *2016. Š2A.2* Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3 - 2a^2 - 3a$. Dokaži da je N djeljiv s 540.

(d) *2015. Š3A.3* Odredite najveći prirodan broj n takav da je $n^4 + 1395$ djeljivo s $n + 5$.

10. *2016. Ž2B.4* Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x^8 + y^{2016} = 32x^4 - 256$.

11. Jednadžbe, jednadžbice...

(a) *2014. ŠB2.1* Odredite sva rješenja jednadžbe $(x + 1)^2(x - 4)^2 + 4(x^2 - 3x - 4) = 0$.

(b) *2012. Š1A.2* Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

12. *2016. Ž1A.2*

(a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654.

(b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

13. *2018. Š2A.4* Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + xy - 4y^2 = -1$$

$$4x^2 + xy - 11y^2 = -2.$$

14. *2015. Ž1A.* Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \text{ i } B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Odredi koji je broj veći, A ili B.

15. Fizički rad (Za dobra stara vremena):

(a) *1994. Š1.2* Pojednostavnite: $(b - c)(b + c)^3 + (c - a)(c + a)^3 + (a - b)(a + b)^3$.

(b) *1995. Š1.3* Pojednostavnite: $\dfrac{a^3}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^3}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3}{(c - a)(c - b)}$.

(c) *2004. D2.2* Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{(a + b)(a + c)} + \frac{b^2}{(b + c)(c + a)} + \frac{c^2}{(c + a)(c + b)} \geq \frac{3}{4}.$$

(d) *2002. D1.3* Nađite sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576.$$

3.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Djeljivost je jedan od najosnovnijih, ali i najvažnijih pojmova u teoriji brojeva.

Definicija 3.4.1

Za brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, kažemo da a *dijeli* b i pišemo $a \mid b$ ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ak$. Kažemo da je a *djelitelj* od b, odnosno da je b *višekratnik* od a.

Ako su a, b, d, m, n prirodni brojevi, vrijede sljedeća svojstva:

- Ako $d \mid m$ i $d \mid n$, onda $d \mid (am + bn)$
- Ako $d \mid n$, onda $ad \mid an$
- Ako $ad \mid an$, onda $d \mid n$
- Ako $d \mid n$, onda $(n/d) \mid n$

Prisjetimo se i osnovnih pravila djeljivosti:

Teorem 3.4.2: Djeljivost s $2, 3, 4, 5, 8$ i 9

- Broj je djeljiv s 2 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 2.
- Broj je djeljiv s 3 ako mu je zadnja zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- Broj je djeljiv s 4 ako su mu posljednje dvije znamenke djeljive s 4.
- Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 5.
- Broj je djeljiv s 8 ako su mu posljednje tri znamenke djeljive s 8.
- Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Teorem 3.4.3: Teorem od dijeljenju s ostatkom

Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, $0 \leq r < a$

U zadacima je često korisno promatrati zajedničke djelitelje brojeva, a pogovoto najveći zajednički djelitelj.

Definicija 3.4.4: Zajednički djelitelj i najveći zajednički djelitelj

Neka su a i b cijeli brojevi. Cijeli broj d takav da $d \mid a$ i $d \mid b$ zovemo *zajednički djelitelj* od a i b. Najveći takav d zovemo *najveći zajednički djelitelj (mjera)* i označavamo ga s $\mathrm{M}(a, b)$.

Sljedeći teorem omogućuje nam efikasno računanje mjere dvaju brojeva.

Teorem 3.4.5: Euklidov algoritam

Za cijele brojeve a i b vrijedi:

$$\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(a, b - a)$$

Primjer 1. Izračunaj $\mathrm{M}(252, 198)$.

Rješenje 1. $\mathrm{M}(168, 48) = \mathrm{M}(120, 48) = \mathrm{M}(72, 48) = \mathrm{M}(24, 48) = 24$ □

Primjer 2. Dokaži da je razlomak $\frac{12n+3}{9n+2}$, gdje je n prirodan broj, neskrativ.

Rješenje 2. Pokažimo da brojnik i nazivnik nemaju zadjeničkih djelitelja osim 1, odnosno da su **relativno prosti**. Koristit ćemo se Euklidovim algoritmom.

$$\mathrm{M}(12n + 3, 9n + 2) = \mathrm{M}(3n + 1, 9n + 2) = \mathrm{M}(3n + 1, 6n + 1) = \mathrm{M}(3n + 1, 3n) = \mathrm{M}(1, 3n) = 1$$

□

U zadacima koji se tiču djeljivosti često je zanimljivo i korisno promatrati proste brojeve.

Definicija 3.4.6: Prosti brojevi

Za prirodan broj $p > 1$ kažemo da je *prosti* ako nema ni jednog djelitelja d, $1 < d < p$.

Teorem 3.4.7: Osnovni teorem aritmetike

Svaki se prirodan broj može na jedinstven način rastaviti na proste faktore, odnosno za svaki prirodni broj n postoje (različiti) prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i eksponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ takvi da vrijedi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Završimo s jednim jednostavim rezultatom kojeg je ipak vrlo dobro imati na umu.

Lema 3.4.8: Euklidova lema

Neka je p prosti broj i $p \mid ab$. Tada $p \mid a$ ili $p \mid b$.

Posebno, ako je $\mathrm{M}(a, b) = 1$, p dijeli samo jedan od brojeva a i b.

Lakši zadaci

1. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

2. Dokaži da je za prirodni broj n razlomak $\frac{8n+5}{6n+4}$ neskrativ.

3. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva 1122.

4. Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{a2017b}$ bude djeljiv s 72.

5. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 16 oblika $\overline{abab}$.

6. Odredi sve moguće vrijednosti od

$$\mathrm{M}(12, 3n+2)$$

7. Kažemo da je prirodni broj N zanimljiv ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \ldots k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.

8. Za prirodan broj m neka je $m?$ umnožak prvih m prostih brojeva. Odredite postoje li prirodni brojevi m i n takvi da je $m? = n(n+1)(n+2)(n+3)$?

9. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn^2 = 100(n+1)$$

10. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) Ako su p i $8p-1$ prosti brojevi onda je $8p+1$ složen broj.

b) Ako su p i $8p^2+1$ prosti brojevi onda je $8p^2-1$ prost broj.

11. Dokažite da ne postoji broj oblika $4^n + \frac{5+(-1)^n}{2}$ koji je kvadrat nekog prirodnog broja za $n \in \mathbb{N}$.

12. Dokažite da je za svaki prirodan broj n izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.

Teži zadaci

13. Pronađi sve parove (p, n) gdje je p prosti broj, a n prirodni broj takve da je vrijedi $p^3 + 1 = n^2$.

14. U skupu prostih brojeva rješite jednadžbu $2p^3 - q^2 = 2(p+q)^2$.

15. Dokaži da je za svaku četvorku prirodnih brojeva a, b, c, d broj $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ djeljiv s 12.

16. Postoji li prirodni broj n takav da $4^n - 1$ dijeli $5^n - 1$?

17. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodni broj n takav da p dijeli $n^2 + 3$ i $(n+1)^2 + 3$.

18. Nađi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da razlomci $\frac{2m-1}{n}$ i $\frac{2n-1}{m}$ budu cijeli brojevi.

19. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da $4 \mid (a+b)(a+3b)$, ali $8 \nmid (a+b)(a+3b)$. Dokaži da tada $8 \mid (a+b)(a+3b)(a+5b)$, ali $16 \nmid (a+b)(a+3b)(a+5b)$.

20. Pronađi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva tako da su brojevi $\frac{a^3b-1}{a+1}$ i $\frac{b^3a+1}{b-1}$ također prirodni brojevi.

4. Predavanja za drugu grupu

4.1. C2: Andrija Tomorad - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Zagrijavanje

1. Na ploči su zapisani brojevi $41, 3, 22, 29, 15$. Potez se sastoji od odabira tri broja x, y, z koja mijenjamo s $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Možemo li u konačno mnogo poteza dobiti sljedeće brojeve (ne nužno tim redoslijedom)?

a) $17, 12, 42, 9, 30$

b) $23, 50, 7, 17, 15$

2. Hercules se bori protiv hidre sa 100 glava. Može joj odsjeći neke glave, ali tada joj narastu nove. Ako joj odsječe 3 glave, naraste joj 12. Ako joj odsječe 5 glava, narastu joj 2 glave. Ako odsječe 9, nijedna ne naraste. Ako joj odsječe 13 glava, naraste 7 glava, a ako joj odsječe 11, naraste ih 17. Može li Hercules odsjeći sve hidrine glave?

3. Zadana je 8×8 ploča kojoj moramo ukloniti jedno polje. Koja sve polja smijemo ukloniti kako bismo mogli opločiti ostatak ploče oblicima 1×3?

4. Zraka svjetlosti ulazi u mračnu sobu kroz malu rupu u jugozapadnom kutu pod kutom od 45^0. Soba je duga 49 m u smjeru sjever-jug i 78 m u smjeru istok-zapad. Zraka se normalno odbija od svakog zida. U koji će kut dospjeti zraka?

5. Zadan je mnogokut $A_1A_2A_3...A_n, n \geq 3$. Svakom vrhu je pridružen cijeli broj, na početku A_1 i A_3 imaju broj 1, a ostali 0. U potezu je dozvoljeno odabrati dva susjedna vrha i povećati njihove brojeve za 1. Za koje n je takvim postupkom moguće postići da svi vrhovi imaju jednake brojeve?

6. Na otoku živi p plavih, z zelenih i c crvenih kameleona. Kad se susretnu dva kameleona različite boje, oni mijenjaju boju u treću. Kakvi trebaju biti p, c, z da bude moguće postići da nakon nekoliko susreta svi kameleoni budu istobojni?

7. Na mnogokut u ravnini primjenjujemo sljedeću transformaciju. Odaberemo dvije točke A i B na njegovoj konturi takve da dužina $\overline{AB}$ ne siječe mnogokut u niti jednoj točki osim A i B. Zatim jedan dio zrcalimo po simetrali od $\overline{AB}$. Možemo li tim postupkom od kvadrata dobiti jednakostranični trokut?

8. Imamo n crnih i n bijelih točaka u ravnini, nikoje 3 nisu kolinearne. Crne točke su bijektivno dužinama povezane s bijelima. U potezu možemo odabrati dvije crne točke čije dužine se sijeku te im zamijeniti bijele partnere. Može li se dogoditi da se nikoje dvije dužine ne sijeku? Mora li se to dogoditi?

Zadaci za samostalan rad

9. Zadana je ploča 10×10. Možemo li ju opločiti oblicima 4×1?

10. Na školskoj ploči zapisani su svi prirodni brojevi manji ili jednaki n. U potezu brišemo dva broja (a, b) i biramo prozivoljni k te pišemo $(a + k, b + k)$. Za koje n možemo postići da svi brojevi na ploči budu jednaki?

11. Čarobnjak pretvara patke u guske i obratno. Za okruglim stolom sijedi 5 pataka i jedna guska. Čarobnjak svake minute promijeni tri susjedne ptice. Ako se opet dogodi da za stolom sjedi pet pataka i jedna gusta, na kojim sve mjestima može biti guska? (Slobodno istražite i općenitiji problem, koji sve rasporedi su mogući...)

12. Zadan je skup $\{2, 3, 4\}$. U jednom potezu biramo dva broja a, b i mijenjamo ih s $0.6a + 0.8b$, $0.8a - 0.6b$. Možemo li doći do skupa $\{1, 3, 5\}$?

13. Na svakom polju 5×5 ploče je žeton. Možemo u potezu premjestiti dva bilo koja žetona u susjedno polje (polje sa zajedničkom stranicom). Želimo postići da svi žetoni budu na istom polju. Na kojim poljima mogu biti?

14. U svakom polju 4×4 ploče je žarulja koja može biti upaljena ili ugašena. Na početku je samo žarulja na polju B1 ugašena. U potezu možemo promijeniti stanje svim žaruljama u nekom retku, stupcu, pravcu paralelnom dijagonali (uključujući pravce koji imaju samo jedno kutno polje) ili 2×2 kvadratu. Je li moguće postići da sve žarulje budu upaljene.

15. Marin Getaldić je na ploču zapisao broj 2023^{2024}. Sada ponavlja sljedeći postupak dok ne dobije 10-znamenkasti broj. Briše prvu znamenku i taj (jednoznamenkasti) broj pribroji onome što ostane. Dokaži da su u dobivenom 10-znamenkastom broju neke dvije znamenke iste.

16. Među n ljudi svaki ima tri neprijatelja (neprijateljstva su uzajammna). Dokaži da se ljudi mogu smjestiti u dvije sobe tako da je svaka osoba u sobi s najviše jednim svojim neprijateljem.

17. U kvadratnoj mreži se nalazi 9 žetona smještenih u 3×3 kvadrat. U potezu je dozvoljeno odabrati dva žetona x i y na poljima koja dijele stranicu te x prebaciti na polje sa suprotne strane y (samo ako je to polje prazno) zatim ukloniti y s ploče i nikad ga više ne vratiti. Možemo li postići da ostane samo 1 žeton?

18. Imamo 5×10 zemljište na kojem je n polja obraslo u korov. Polja koja dijele stranicu s dvaju obraslih u korov, sama obrastu u korov za jedan dan. Nakon nekoliko dana znamo da je cijelo zemljište obraslo u korov. Odredi najmanju moguću vrijednost broja n.

4.2. G2: Namik Agić - Angle chase

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

Angle chasing je najčešće prva metoda koju mladi upoznaju na početku avanture u pravoj geometriji. Zaista, ljepota lovljenja kuteva je upravo ta što je najčešće jako bitan dio zadatka na svim razinama natjecanja od školskog do olimpijada. U ovom predavanju dotaknut ćemo se nekih osnovnih strategija vezanih za angle chase. Na početku ćemo istaknuti nekoliko bitnih stvari koje treba uvijek imati na umu:

- Zbroj kutova u trokutu je 180
- Svaka 2 obodna kuta nad istim lukom su jednaka i dvostruko manja od središnjeg kuta
- Kutovi uz presječnicu 2 paralelna pravca jednaki su
- Obodni kut nad promjerom je pravi

Ovo na prvu ne zvuči pretjerano korisno, ali postoji objekt koji će nam jako puno pomagati u rješavanju zadataka:

Definicija 4.2.1: Tetivni četverokut

Tetivni četverokut je onaj četverokut kojem sva 4 njegova vrha leže na jednoj kružnici

Za početak, lako možete vidjeti da definicija ima smisla i nije bezazlena jer jako puno četverokuta ne zadovoljava to svojstvo. Kad imamo (konveksni) četverokut $ABCD$ koji je tetivan, znamo:

$$\angle ACB = \angle ADB$$

(jednaki obodni kutovi nad tetivom AB). Isto je i za ostale tetive BC, CD, DA. Nadalje,

$$\angle ABC + \angle ADC = 180$$

(slično kao i gore, gornji kutevi odgovaraju obodnim kutevima nad lukovima AC i CA, a oni zajedno čine puni krug. Isto je i za kutove BCA i BDA. Bitna stvar je da vrijedi i obrat, ako za četverokut vrijedi jedna od gornjih relacija tada je on tetivan. Iako djeluje bezazleno, postoje teški zadaci koji ne trebaju veću teoriju od ovoga. Neki će tetivni četverokuti biti lakši za prepoznati od drugih, a ovo je jedna od dobrih vježbi za prepoznavanje istih:

Zadatak 1. U trokutu ABC, D, E, F su nožišta visina iz A, B, C na BC, CA, AB redom. Neka je H ortocentar tog trokuta. Nađite sve tetivne četverokute kojima su vrhovi među tih 7 točaka.

Još jedna bitna stvar je:

Teorem 4.2.2: Tetiva i tangenta

Za kružnicu Ω i njenu tangentu, kut koji tetiva kružnice Ω zatvara s tangentom jednak je obodnom kutu te tetive nad Ω

Zadatak 2. Dokažite taj teorem

Ovaj teorem ne trebate dokazivati, možete ga koristiti zdravo za gotovo:

Teorem 4.2.3

U trokutu ABC s opisanom kružnicom Γ, simetrala kuta BAC i simetrala stranice BC sijeku se u polovištu luka BC koji ne sadrži A

Kad imate geometrijski zadatak, često je korisno da označite kutove početnog trokuta (ili četverokuta ili bilo koje referentne kutove) i onda preko njih doslovno izračunate sve ostale kutove ako je to moguće.

Primjer 3. Uzmimo oznake iz prvog zadatka. Dokažite da je H centar upisane kružnice trokutu DEF

Dokaz. Kako bismo si uštedili vrijeme, dokazat ćemo samo da je DH simetrala kuta $\angle FDE$, uočite da ako to vrijedi nema razloga da H nije sa simetrali preostala 2 kuta jer su definirani simetrično, odnosno isti bi dokaz radio i za druga 2 kuta.
Sad kad znamo da nam treba samo $\angle FDH = \angle EDH$, bacamo se na posao. Ako se sjećate tetivnih četverokuta iz prvog zadatka, uočit ćete da su među njima $ADHF, BDHE, ABEF$ i oni su nam zapravo dovoljni jer:

$$\angle EDH = \angle EBH = \angle EBF = \angle EAF = \angle HAF = \angle HDF$$

pa je H na simetrali $\angle EDF$, a analogno je i na ostalim simetralama pa mora biti centar upisane. □

Sljedeći je primjer podosta teži, riječ je o zadatku s državnog natjecanja za prvi razred srednje:

Zadatak 4. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E, a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H.
Dokaži da je $CF \parallel HG$.

Dokaz. Nakon što ste nacrtali skicu ravnalom i šestarom, gledate uvjete zadatka. Za dokazivanje paralelnosti nema puno metoda, a kako je zadatak sa srednjoškolskog državnog ne treba znanje opskurnih stvari pa možete pretpostaviti da je zadnji korak uočavanje kutova uz neku presječnicu. Presječnica ima nekoliko, uzet ćemo sve recimo BF (sve će nas odvesti na dokazivanjeg istog ekvivalentnog uvjeta). Sada, pretpostavimo da znamo da su ti pravci paralelni i idemo vidjeti što će nam to dati. Uz presječnicu imamo jednakost kutova $\angle HGF$ i $\angle BFD$. To je ekvivalentno jednakosti kuteva $\angle HGB$ i $\angle BAH = \angle BAD$. Ovo bi trebalo upaliti alarm: vidimo 2 ista kuta nad dužinom BH i to nam upravo daje da je $ABGH$ tetivan. Primijetimo da je svaki korak reverzibilan, odnosno da dokažemo zadatak dovoljno je pokazati tu tetivnost.

Nadalje možemo vidjeti da su A i B jednostavno zadane točke (još važnije, simetrične u odnosu na kružnice) pa vjerojatno želimo obodne kuteve nad dužinom AB. $\angle AGB$ možemo izraziti iz trokuta AGB na sljedeći način:

$$\angle AGB = \angle ABF - \angle CAB$$

Na sličan način,

$$\angle AHB = \angle ABE - \angle DAB$$

Još trebamo provjeriti da su ti kutovi zapravo isti. Vidimo:

$$\angle ABF - \angle ABE = \angle EBF$$

$$\angle CAB - \angle DAB = \angle CAD$$

Dodatno,

$$\begin{aligned} \angle CAD &= \angle CAE - \angle DAB - \angle BAE \\ &= 180 - \angle CBE - \angle DFB - \angle BCE \\ &= \angle BEC - \angle BFD = \angle EBF \end{aligned}$$

i gotovi smo.
Pouka ovog zadatka je: kad imate neki neobičan uvjet probajte malo krenuti unazad i rekonstruirati drugi prirodniji uvjet koji je ekvivalentan i potencijalno lakši za dokazati i nemojte se bojati malo uprljati ruke kad računate neke kuteve. Ovaj račun djeluje malo nezgodno ali s vremenom ćete shvatiti da je svaki korak dosta prirodan, izražavamo dva kuta preko ostalih i tako pokušavamo od jednog doći do drugog.

□

Također bitna stvar, pokušajte iz skica naslutiti što bi moglo vrijediti, često te "naslijepo" stvari mogu voditi do rješenja možda i brže nego ostale metode (pogotovo na težim zadacima, probajte procijeniti koje 4 točke izgledaju konciklično ili koje 3 izgledaju kolinearno.
Za kraj, nemam nešto posebno što bih napomenuo, vježba je ključ svega i jedino se tako može postati vješt s baratanjem novim i starim stvarima. Zadatke sam podijelio u grupe kako sam mislio da im je težina, ali međusobno u grupi nisu poredani. Ako na nekom zadatku zapnete, nemojte se bojati pitati za pomoć.

Zadaci

1. U trokutu ABC H, O su redom ortocentar i centar opisane kružnice ABC. Dokažite da je $\angle BAH = \angle CAO$

2. (Miquelov teorem) Na stranicama BC, CA, AB trokuta ABC dane su točke D, E, F. Dokaži da se kružnice AEF, BDF, CDE sijeku u jednoj točki.

3. (Preslika ortocentra pt1) Neka je ABC trokut, H njegov ortocentar. Dokaži da preslika H preko bilo koje stranice trokuta ABC leži na njemu opisanoj kružnici.

4. (Preslika ortocentra pt2) Neka je ABC trokut, H njegov ortocentar i M polovište neke stranice trokuta ABC. Dokaži da preslika H preko M leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.

5. (Reimov teorem) Neka su ω_1 i ω_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama X i Y. Pravac l_1 prolazi kroz X i siječe ω_1 opet u A i ω_2 opet u C. Pravac l_2 prolazi kroz Y i siječe ω_1 opet u B i ω_2 opet u D. Dokaži da je $AB \parallel CD$. Dokažite da zadatak vrijedi i ako je jedan pravac tangenta na jednu od kružnica (tad će drugi presjek biti zapravo isti).

6. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku BC odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB. Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

7. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokaži da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

8. (Trozubac) U trokutu ABC I je centar upisane kružnice, M je polovište luka BC koji ne sadrži A. Dokaži da je M centar opisane kružnice trokutu BIC

9. Zadan je trokut ABC, I je centar upisane kružnice, a D, E, F dirališta upisane s BC, CA, AB redom. BI siječe EF u X. Dokaži $\angle BXC = 90$

10. Točka N je nožište visine na hipotenuzu AB pravokutnog trokuta ABC. Simetrale kutova $\angle NCA$ i $\angle ABN$ sijeku dužinu AB redom u točkama K i L. Ako su S i T redom središta kružnica upisanih trokutima BCN i NCA, dokaži da je četverokut $KLST$ tetivan.

11. Neka je ABC s nožištima visina iz A, B, C redom D, E, F. Jedna od točaka presjeka kružnice ABC i EF je P. Pravci BP i DF sijeku se u Q. Dokaži $AP = AQ$.

12. Neka je Ω opisana kružnica trokuta ABC i O njeno središte. Kružnica Γ sa središtem A siječe dužinu $\overline{BC}$ u točkama D i E, tako da su točke B, D, E i C u parovima različite i leže na pravcu BC tim redom. Neka su F i G sjecišta kružnica Γ i Ω takva da točke A, F, B, C i G leže na kružnici Ω tim redom. Neka je K drugo sjecište opisane kružnice trokuta BDF i dužine $\overline{AB}$. Neka je L drugo sjecište opisane kružnice trokuta CGE i dužine $\overline{CA}$. Pretpostavlja se da su pravci FK i GL različiti i da se sijeku u točki X. Dokaži da točka X leži na pravcu AO.

13. Neka je ABC trokut u kojemu je $\angle ABC > \angle BCA$. P i Q su dvije različite točke na AC takve da $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ i A je između P i C. Pretpostavimo da postoji točka D na dužini BQ za koju $PD = PB$. Polupravac AD siječe ABC još u $R \neq A$. Dokaži da je $QB = QR$

14. Konveksni četverokut $ABCD$ ima upisanu kružnicu sa središtem u I. Neka I_a, I_b, I_c i I_d predstavljaju centre upisanih kružnica DAB, ABC, BCD and CDA, redom. Neka se zajedničke vanjske tangente kružnica AI_bI_d i CI_bI_d sijeku u X, a analogno neka se zajedničke vanjske tangente kružnica BI_aI_c i DI_aI_c sijeku u Y. Dokaži $\angle XIY = 90°$.

a) Prvo dokažite sljedeće: Neka su ω_1 i ω_2 kružnice od kojih ω_2 ima veći radijus, te su odgovarajući centri O_1 i O_2. Neka se kružnice sijeku u A i B te neka je X presjek njihovih zajedničkih vanjskih tangenti. Tada je $\angle AXB = \frac{\angle AO_1B - \angle AO_2B}{2}$

b) Iskoristite lemmu na parove kružnica iz zadatka i izrazite kut $\angle I_bXI_d$ i $\angle I_aYI_c$ preko kutova četverokuta $ABCD$.

c) Izrazite $\angle I_bII_d$ i $\angle I_aII_c$ preko kuteva početnog četverokuta. Ako ste to dobro napravili mogli biste uvidjeti da su II_bXI_d i II_aYI_c tetivni.

d) Promotrimo I_bI_d: X je na simetrali te dužine jer je X na spojnici središta kružnica koje prolaze kroz obje točke, a one čine simetralu te dužine. Zaključite da je $XI_b = XI_d$ pa je IX simetrala $\angle BID$. Analogno je IY simetrala $\angle AIC$

e) Chaseajte da vidite da su simetrale ta 2 kuta zaista okomite jedna na drugu i završite.

4.3. A2: Mislav Plavac - Teleskopiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Među često korištenim algebarskim manipulacijama pojavljuje se takozvana ideja teleskopiranja. U ovom predavanju susrest ćemo se s različitim primjerima istoga kao metode rješavanja zadataka.
Općenito, teleskopiranje je ideja, odnosno metoda, koju koristimo kako bismo pojednostavili kompliciraniji izraz drugačijim zapisivanjem dijelova tog izraza.
Za to nije potrebno nikakvo posebno predznanje, već samo malo algebre i prava ideja za drugačiji zapis dobivenog izraza koja će omogućiti "lijepo" pojednostavljivanje.

Definicija 4.3.1: Korisne formule

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Lema 4.3.2: Rastav na linearne komponente

Svaki složeni razlomak može se rastaviti na linearne komponente.

$$\frac{1}{xy} = \frac{A}{x} + \frac{B}{y} \qquad (\text{za neke } A, B \in \mathbb{R})$$

Primijetimo da lemu možemo proširiti i na razlomke s više komponenata u nazivniku (pa onda svaku možemo rastaviti). Također, nije nužno da je broj 1 u brojniku (onda možemo obje strane pomnožiti s nekim izrazom).

Primjer 1. Odredi zbroj: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{99\cdot 100}$.

Rješenje 1. Zapišimo neki općeniti član tog niza: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Taj razlomak želimo rastaviti na neke razlomke $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Rješavanjem sustava jednadžbi za konkretne vrijednosti n (npr. $n = 1$ i $n = 2$) dobivamo $A = 1$, $B = -1$. Sada samo trebamo izračunati zbroj:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{99\cdot 100} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

□

Primjer 2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 10$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2-1}{2^2+3\cdot 2+2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2+3\cdot 3+2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-1}{n^2+3n+2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2+3k+2}$$

Rješenje 2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^2-1}{k^2+3k+2} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k-1}{k+2}$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2}\cdot\frac{3-1}{3+2}\cdot\frac{4-1}{4+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, tako da ostaje

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

□

Oprez 1

Uvjet $n>10$ nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer, za $n=3$ ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, pa treba zasebno argumentirati takav slučaj.

Primjer 3. Izračunajmo sljedeću sumu

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

Rješenje 3. Odmah napominjemo da rješenje, iako je malo dulje, zapravo nije teško. Opći član sume rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

Dobivamo

$$2n+1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

Riješimo ovu jednadžbu:

$$\begin{aligned}2n+1&=An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn\\2n+1&=An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn\\0\cdot n^2+2\cdot n+1&=(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+(2A)\end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}&0=A+B+C \qquad 2=3A+2B+C \qquad 1=2A\\&\Longrightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}\\&\Longrightarrow 0=\frac{1}{2}+B+C \qquad 2=3\cdot\frac{1}{2}+2B+C\\&\Longrightarrow B+C=-\frac{1}{2} \qquad 2B+C=\frac{1}{2}\\&\Longrightarrow \boxed{B=1} \qquad \boxed{C=-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Zato se početna suma zapisuje kao

$$\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\ldots$$

$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right]\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$

U ovoj se sumi član s istim nazivnikom nalazi na tri mjesta: posljednjem u prvom pribrojniku, u sredini drugog i na početku trećeg. Ako je taj nazivnik k, onda ti članovi u sumi daju:

$$\frac{-\frac{3}{2}}{k}+\frac{1}{k}+\frac{\frac{1}{2}}{k}=0$$

dakle, međusobno se krate. Zato se ova suma na koncu postupka svodi na šest pribrojnika, po dva iz prvog i posljednjeg sumanda i po jedan iz drugog i pretposljednjeg. To su:

$$\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}\right]+\left[\frac{-\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+2}\right]=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}+\frac{\frac{3}{2}}{n+2}$$

□

Lakši zadaci

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{n(n+x)}=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte umnožak

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}.$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}.$$

5. Izračunajte sumu

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}\ldots+\frac{1}{9700}.$$

Napomena. Ne morate svoditi konačan rezultat na zajednički nazivnik.

6. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+1}{k^2-1}=\frac{5}{3}+\frac{10}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte umnožak

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Definiramo $n!$ kao $0! = 1, 1! = 1$ te $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$.
Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k! = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!.$$

Umjereni zadaci

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \ldots + \frac{n-1}{n!}.$$

11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

12. Izračunajte sumu

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{24\sqrt{25}+25\sqrt{24}}.$$

13. (HJMO 2017.) Izračunajte sumu

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^2+3^2}{2\cdot 3} + \frac{3^2+4^2}{3\cdot 4} + \ldots \frac{99^2+100^2}{99\cdot 100}.$$

14. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1)k! = 3 + 14 + \ldots + (n^2+n+1)\cdot n!.$$

15. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Dokažite da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_1-x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

16. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

17. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \ldots + \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Teži zadaci

18. Neka je niz $(F_n)_{n\geq 0}$ Fibonaccijevi brojevi, odnosno $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ za svaki prirodan broj k. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{F_1F_3} + \frac{1}{F_2F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} < 1.$$

19. Izračunajte vrijednost izraza

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}.$$

20. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\frac{6}{(3-2)(3^2-2^2)} + \frac{6^2}{(3^2-2^2)(3^3-2^3)} + \cdots + \frac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}.$$

21. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 100$. Odredite produkt

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{k^3-8}{k^3+8} = \frac{19}{35} \cdot \frac{56}{72} \cdots \frac{n^3-8}{n^3+8}.$$

22. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 100$. Izračunajte umnožak

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{(k^3+3k)^2}{k^6-64} = \frac{(3^3+3\cdot 3)^2}{3^6-64} \cdot \frac{(4^3+3\cdot 4)}{4^6-64} \cdot \ldots \cdot \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

23. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{7k+32}{k(k+2)} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

24. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

25. Definiramo funkciju $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ takvu da je

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}, xy \neq 1$$

Izračunajte

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

4.4. N2: Simeon Stefanović - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

U ovome predavanju bavit ćemo se raznim metodama rješavanja jednadžbi u 2 ili više nepoznanica čija rješenja su u N ili Z. Jasno, u svakome zadatku biti će više nepoznanica nego što je dostupnih jednaždbi jer u protivnom postoje razne algebarske metode za rješavanja i one nam nisu zanimljive. Jednadžbe koje promatramo zovu se Diofantske po grčkome matematičaru Diofantu, koji se njima prvi bavio. Predavanje sadrži mnoštvo trikova od kojih je neke čitatelj možda već vidio, no ne sumnjam da će neke koje ovdje vidi imati stalno urezano u sjećanje kada se sljedeći put bude bavio Diofantskim jednadžbama na natjecanjima.

Lakši zadaci

1. Riješite u skupu prirodnih brojeva sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{13}$$

2. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe: $xy-y+2x=4$

3. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe: $x^2-4y=1995$

4. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu: $a+b+c=abc$

5. Odredite sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi: $2x^2-4x+y^2+1=(x-1)^2$

6. Odredite sva prirodna rješenja jednadžbe: $n^2+n+7=m^2$

Umjereni zadaci

7. Odredi koliko postoji rješenja jednadžbe u skupu cijelih brojeva: $x^2-xy-2y^2=18$.

8. Riješite u skupu prirodnih brojeva sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{xy}$$

9. U cijelim brojevima riješi jednadžbu: $(m^2+n)(m+n^2)=(m+n)^3$.

10. Riješite u skupu prirodnih brojeva sljedeću jednadžbu:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

.

11. Dokaži da jednadžba $19x^3-84y^2=1984$ nema rješenja u cijelim brojevima.

12. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $10x^3+20y^3+8xyz=1999z^3$

Teži zadaci

13. Nađi sve prirodne brojeve x i y takve da vrijedi $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$

14. Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da je $x^3 + y^3 = (x + y)^2$

15. Odredi sve nenegativne parove cijelih brojeva (x, y) za koje je: $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$

16. Pronađi sva cjelobrojna rješenja od: $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$

17. Pronađi sva prirodna rješenja za $x^3 + (x + 1)^3 + ... + (x + 7)^3 = y^3$. (Teža verzija: pronađi sva cjelobrojna rješenja)

18. Dokaži da ako je n prirodan broj t.d. jednadžba:

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

ima rješenja u cijelim brojevima, tada ima barem 3 različita rješenja. Dokaži da jednadžba nema cjelobrojna rješenja za n = 2981.

5. Predavanja za treću grupu

5.1. C3: Vedran Cifrek - Indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Princip matematičke indukcije koristan je alat kod dokazivanja tvrdnji $T(n)$ koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj n pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $n+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi). Ako tvrdnju pokazujemo za sve prirodne brojeve, tada moramo provjeriti tvrdnju za $n = 1$, a onda pokazati da ako vrijedi za neki n, mora vrijediti i za $n+1$. Budući da smo na početku pokazali da tvrdnja vrijedi za 1, zbog indukcije vrijedi i za $1+1 = 2$ pa za $2+1 = 3$, $3+1 = 4$, itd. dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.
Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** ($T(1)$): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **pretpostavka** ($T(n)$): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $n \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** ($T(n+1)$): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama, zamislimo da smo ih složili u red i cilj nam je sve ih srušiti jednim potezom. Za početak provjerimo možemo li direktno srušiti prvu pločicu (baza indukcije). Onda provjeravamo za svaki par uzastopnih domina jesu li dovoljno blizu, da ako jedna padne(prepostavka indukcije) da će i ona sljedeća pasti(korak indukcije). Kad smo se u to uvjerili kad pogurnemo prvu dominu, znamo da je druga dovoljno blizu pa će i ona pasti, pa će i sljedeća pasti i na kraju će sve pasti.

Skup prirodnih brojeva se standardno definira tako da kažemo da je:

- 1 prirodan broj
- svaki prirodan broj ima sljedbenika
- prirodni brojevi su točno oni brojevi do kojih možemo doći uzastopnom primjenom operacije sljedbenika na 1

Vidimo da je ovo zapravo preformulirani princip matematičke indukcije, jer ona kaže da ako tvrdnja vrijedi za 1 te ako vrijedi za neki prirodni broj vrijedi i za sljedeći, onda uzastopnom operacijom sljedbenika možemo doći do svakog prirodnog broja, pa i dokazati tvrdnju za njega.

Lako se vidi da nema nekog posebno razloga zašto bi indukcija morala krenuti od 1, može krenuti od 0 ili od bilo kojeg drugog prirodnoj broja, samo trebamo pripaziti da je baza onda onaj prvi broj, te da tvrdnja onda vrijedi za sve cijele brojeve koji su veći jednaki tom prvom. Usput, nekad je potrebno i u koraku indukcije koristiti da su brojevi za koje dokazujemo veći jednaki tom početnom.

Zadaci

1. Dokažite da je $2^n \geq n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 4$.

2. Dokažite da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Fibonaccijevi brojevi F_n za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definirani su rekurzivno na sljedeći način: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za svaki prirodan broj $n \geq 2$. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi $F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

4. Koliko je

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}?$$

5. Neka je x realan broj takav da je $x + \dfrac{1}{x}$ cijeli broj. Dokažite da je $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodni broj n.

6. Na koliko najviše područja n pravaca dijeli ravninu?

7. Dokažite da je $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 2$ za svaki prirodan broj n.

8. Neka je m neparan prirodan broj. Zadano je m planeta(možemo ih promatrati kao točke u ravnini) i na svakom od planeta je jedan astronom koji promatra najbliži planet tom planetu (ne gleda planet na kojem se sam nalazi). Udaljenosti između svih parova planeta su međusobno različite. Dokažite da postoji planet kojeg ne promatra niti jedan astronom.

9. Promotrimo sve neprazne podskupove od $\{1, 2, ..., n\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva. Za svaki od njih pogledamo kvadrat produkta svih njegovih elemenata. Dokažite da je zbroj tih brojeva jednak $(n+1)! - 1$.

10. Neka je n prirodan broj. Dokažite da je za svaki cijeli broj $0 \leq N \leq 2^n$ moguće pobojati sve podskupove od $\{1, 2, .., n\}$ u jednu od dvije boje (crvenu ili plavu) tako da vrijede sljedeća svojstva:

- Unija svaka dva crvena skupa je crvena.
- Unija svaka dva plava skupa je plava.
- Crvenih skupova ima točno N.

11. Dokažite da vrijedi $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$ za svaki prirodan broj n.

12. Dokažite da se svaki prirodan broj n može na jedinstven način (do na poredak sumanada) prikazati kao suma Fibonaccijevih brojeva u kojoj se svaki broj pojavljuje najviše jednom te nema uzastopnih Fibonaccijevih brojeva (Ako se pojavljuje F_n, ne mogu se pojaviti F_{n-1} i F_{n+1}).

13. Neka je n prirodan broj. U pravokutnoj tablici dovoljno velikog formata je odabrano nekih n ćelija. Dokaži da se tih n ćelija može obojati u dvije boje(crvenu i plavu), tako da za svaki redak i svaki stupac vrijedi: apsolutna razlika broja crvenih i broja plavih ćelija u tom retku/stupcu je najviše 1.

14. U sobi se nalazi n lampi, od kojih su neke povezane žicama (Ako je lampa A spojena s lampom B, lampa B je spojena s lampom A). Svaka lampa u nekom trenutku može biti upaljena ili ugašena, a na početku su sve ugašene. U svakom koraku možemo pritisnuti gumb na bilo kojoj lampi i to mijenja stanje te lampe i svih s kojima je ona direktno povezana žicom (sve koje su upaljene od njih postaju ugašene, a sve ugašene upaljene). Dokažite da postoji niz koraka nakon kojeg su sve lampe upaljene.

5.2. G3: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Definicija 5.2.1: Tetivni četverokut

Četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut.

Znamo otprije da svakom trokutu možemo opisati kružnicu, no isto ne vrijedi i za četverokute. Tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Vrlo često pokaže se korisnim u zadacima prepoznati tetivne četverokute i koristiti njihova svojstva s kojima ćemo se danas upoznati. Prisjetimo se najprije nekih važnih teorema vezanih za kružnicu:

Teorem 5.2.2: O obodnom i središnjem kutu

Središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta.

Teorem 5.2.3: Obodni kutovi

Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni.

Teorem 5.2.4: Talesov teorem

Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.

Vrijedi i **obrat Talesovog teorema**: ako je AB proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$.

Teorem 5.2.5: O kutu između tetive i tangente

Kut izmedu tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Također, vrijede ove (vrlo) korisne tvrdnje:

Teorem 5.2.6: Neke korisne tvrdnje o trokutu i kružnici

1. Simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku se na opisanoj kružnici tog trokuta.
2. Polovišta stranica trokuta i nožišta visina trokuta leže na istoj kružnici. (Na toj kružnici još leže i polovišta dužina AH, BH i CH, gdje je H ortocentar trokuta ABC. Ta kružnica zove se Feuerbachova kružnica ili kružnica 9 točaka.).
3. Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
4. Centralnosimetrične slike ortocentra s obzirom na polovišta stranica trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Dokazi ovih tvrdnji jako su lijepo objašnjeni u obliku videa u sklopu MNM on-line predavanja *Tetivni četverokuti*, zadaci 4, 5, 6 i 7. Znam da nitko ne voli zadaće, ali zaista vam toplo savjetujem da ih proučite za domaću zadaću jer vam neće oduzeti puno vremena, a znaju se koristiti u zadacima, pogotovo u kombinaciji s tetivnim četverokutima. Nećemo se baviti ovim tvrdnjama na današnjem predavanju, ali dobro je susresti se s njima što ranije bar na informativnoj razini i da vam potaknu znatiželju :)

Sada smo spremni krenuti s tetivnim četverokutima!

Teorem 5.2.7: Karakterizacije tetivnog četverokuta

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne (dakle, ako vrijedi bilo koja od njih, tada vrijede i sve ostale):

- četverokut $ABCD$ je tetivan
- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\angle ABC + \angle ADC = 180°$
- $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
- $\angle ABD = \angle ACD$
- $\angle ADB = \angle ACB$
- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle CAD = \angle CBD$
- $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$. (**Ptolomejev poučak**)

Sada ćemo zajedničkim snagama riješiti par uvodnih zadataka, a onda se bacamo na posao :)

1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

2. Neka je S središte kružnice k, a $\overline{AB}$ jedan njen promjer. Neka su P i Q točke na istom luku AB. Označimo s M sjecište pravaca AP i BQ, te s N sjecište pravaca AQ i BP. Dokažite $MN \perp AB$.

   Hint: Talesov teorem o obodnom kutu.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da je trokut ABD jednakostraničan. Dokažite da je $|AC| = |BC| + |CD|$.

   Hint: Ptolomejev poučak.

Lakši zadaci

1. Dokažite teorem o kutu između tetive i tangente: neka je dan trokut ABC u ravnini i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B. Treba dokazati da je tada kut između tangente i tetive BC jednak obodnom kutu $\angle BAC$.

2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

3. Neka se simetrale kutova četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama E, F, G i H. Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.

4. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

5. Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AC}$. Dokažite da je četverokut $BCFE$ tetivan.

6. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

Teži zadaci

7. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

8. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E. Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici, tj. te točke su *konciklične*.

9. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

10. U trokutu ABC vrijedi $\angle CAB = 50°$ i $\angle ABC = 60°$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30°$. Izračunajte mjeru kuta $\angle CDE$.

11. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

12. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka M nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je F polovište dužine $\overline{BC}$, te neka je točka H na $\overline{AF}$ tako da su MH i AF međusobno okomiti. Dokažite da tada vrijedi $\angle BHF = \angle ABC$.

13. Točka M dana je kao sjecište dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$, pri čemu je kut $\angle AMB$ šiljast. Neka je točka K izvan četverokuta $ABCD$ takva da je trokut BCK jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$ i da vrijedi $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Dokažite da su pravci KM i AD međusobno okomiti

14. U trokutu ABC, udaljenost vrha A od ortocentra H jednaka je udaljenosti vrha A od središta trokutu opisane kružnice O. Odredite veličinu kuta u vrhu A.

5.3. A3: Lucija Relić - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Definicija 5.3.1: Sredine za n brojeva

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada definiramo

- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 5.3.2: KAGH nejednakost

Za gore definirane sredine vrijedi
$$K \geq A \geq G \geq H$$
Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Napomena 5.3.3

Najčešće se koristi nejednakost $A \geq G$, dok su ponekad korisne $K \geq A$ i $A \geq H$.

Primjer 1. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Rješenje 1. Primjenjujemo A-G nejednakost na x i $\frac{1}{x}$.
$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$
□

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Rješenje 2. Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

$$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Kada pomnožimo sve 3 nejednakosti dobijemo traženi izraz

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

što je trebalo dokazati. □

Teorem 5.3.4: CSB nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i i y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $k > 0$ takav da je $y_i = kx_i, \ \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$).

Lakši zadaci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

2. Dokažite da za svaki realan broj a vrijedi

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geq 0$$

3. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$$

4. Neka su x, y realni brojevi takvi da vrijedi $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da za takve brojeve vrijedi

$$-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$$

5. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

6. Dokaži da za sve pozitivne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

7. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

8. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b vrijedi:

$$ab^3 + a^3 b \leq a^4 + b^4.$$

9. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$(a + b + c)abc \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

10. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

11. Dokažite nejednakost:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Umjereni zadaci

12. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y za koje vrijedi $x + y = 1$ vrijedi i nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

13. (Nesbittova nejednakost) Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

14. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$$

15. Neka su $a, x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi i $n \geq 2$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1+...+x_n)}.$$

16. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze. Dokaži da vrijedi

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2\sqrt{2}.$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Teži zadaci

18. Dokaži da za trokut sa stranicama a, b, c i površinom S vrijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

19. (IMO Shortlist 2001.) Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ po volji odabrani pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

20. (IMO 2001. Zad 2.) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

5.4. N3: Adian A. Santos Sepčić - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Modularna aritmetika je drugačiji način razmišljanja o tome što su jednadžbe. U njoj definiramo odnos koji je sličan odnosu jednakosti u kojem promatramo sve prirodne brojeve koji daju isti ostatak pri dijeljenju s nekim brojem n kao da su na neki način jednaki (kažemo da su *kongruentni* modulo n). Razlog zašto ovo činimo je zato što se pri korištenju operacija poput zbrajanja i množenja u ovom sustavu svi brojevi koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa n ponašaju potpuno jednako, što može biti korisno u svrhu dokazivanja mnogih tvrdnji u teoriji brojeva i u svrhu bržeg izračunavanja prije navedenih ostataka.

Definicija 5.4.1: Kongruencija dva cijela broja

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{n}}$
Za cijele brojeve a,b i prirodan broj n, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{n}}$ označava tvrdnju da a i b daju isti ostatak pri dijeljenju sa n, to jest tvrdnju da postoji neki cijeli broj k takav da $a = kn + b$.

npr. $23 \equiv 7 \pmod 4$, jer 23 i 7 oboje daju ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. Zbog toga postoji k takav da $23 = 4k + 7$. Konkretno, vrijedi $23 = 4 \cdot 4 + 7$.

Lema 5.4.2: Pravilo zbroja

Ako $a \equiv c \pmod n$ i $b \equiv d \pmod n$, tada vrijedi $a + b \equiv c + d \pmod n$

Dokaz. Po definiciji 1.1, $a = k_1 n + c$, $b = k_2 n + d$ za neke cijele brojeve k_1, k_2.
$\Longrightarrow a + b = (k_1 n + c) + (k_2 n + d) = (k_1 + k_2)n + (c + d)$
$\Longrightarrow$ Kako je $(k_1 + k_2)n$ djeljiv sa n, $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju sa n, to jest $a + b \equiv c + d \pmod n$. □

Lema 5.4.3: Pravilo umnoška

Ako $a \equiv c \pmod n$ i $b \equiv d \pmod n$, tada vrijedi $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod n$

Dokaz. $a = k_1 n + c$, $b = k_2 n + d$ za neke cijele brojeve k_1, k_2.
$\Longrightarrow a \cdot b = (k_1 n + c)(k_2 n + d) = k_1 n \cdot d + c \cdot k_2 n + k_1 n \cdot k_2 n + cd$
$\Longrightarrow a \cdot b = (k_1 d + c k_2 + k_1 k_2 n)n + c \cdot d$
$\Longrightarrow$ Kako je $(k_1 d + c k_2 + k_1 k_2 n)n$ dijeljiv sa n, desna strana daje isti ostatak pri dijeljenju sa n kao $c \cdot d$, to jest $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod n$. □

Lakši zadaci

1. Broj n nije djeljiv niti s 2 niti s 3. Dokaži da $24|n^2-1$.

2. Za prirodne brojeve a,b,c vrijedi $a^2+b^2=c^2$. Dokaži da je jedan od ta 3 broja djeljiv s 3.

3. Neka je n prirodan broj. Ako je zadnja znamenka broja 3^n jednaka 1, dokaži da je n djeljiv sa 4.

4. Odredi posljednju znamenku broja 7^7.

Umjereni zadaci

5. Ivan i Novak igraju igru u kojoj naimjenično zapisuju brojeve na ploču. Ivan je prvi na potezu i svaki put kad je na redu zapiše zbroj posljednja 2 zapisana broja $(x+y)$, a nakon toga Novak zapiše umnožak posljednja dva zapisana broja uvećan za 1 $(xy+1)$. Na početku je na ploči zapisan broj 0, a nakon toga 1 $(0 \to 1 \xrightarrow{Ivan} 1 \xrightarrow{Novak} 2 \xrightarrow{Ivan} 3 \xrightarrow{Novak} 7 \xrightarrow{Ivan} 10 \xrightarrow{Novak} ...)$.

(a) Dokaži da će posljednja znamenka svakog broja koji Ivan zapiše biti 0, 1 ili 3.

(b) Dokaži da Novak nikada neće zapisati broj djeljiv s 3.

6. Odredi sve prirodne brojeve n takve da $11|3^n+4^n$.

7. Odredi sve prirodne brojeve n takve da $7 \nmid 1+3^n+2^n+6^n+4^n+5^n$.

8. Odredi posljednju znamenku broja 7^{7^7} (**Napomena:** $7^{7^7}=7^{(7^7)}, 7^{7^7} \neq (7^7)^7$).

9. Za svaki pojedinačan cijeli broj a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m vrijedi da je ili djeljiv s 4 ili neparan i vrijedi:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2=h^2+i^2+j^2+k^2+l^2+m^2$$

Dokaži da a,b,c,d,e,f,g nisu svi neparni.

Teži zadaci

10. Odredi sve prirodne brojeve n takve da $31|4^n+7^n+20^n$.

11. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x,y,z) takve da $45^x-6^y=2019^z$.

12. Neka za prirodne brojeve a,b,c vrijedi $a^2+b^2=2^c$. Dokaži da je c neparan.

13. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a,b,c takvi da $a^2+b^2=7^c$.

14. Odredi sve trojke nenegativnih cijelih brojeva (a,b,c) takve da $a!+5^b=7^c$.

15. Odredi sve prirodne brojeve n takve da postoje prirodni brojevi a i b takvi da $2^n+3^a=5^b$. (**Pazi:** Traže se samo brojevi n za koje postoje takvi a i b, a ne nužno sve trojke (n,a,b).)

6. Predavanja za četvrtu grupu

6.1. C4: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Osnovna ideja dvostrukog prebrojavanja je prebrojati broj elemenata istog skupa na dva različita načina. S obzirom da se radi o istom skupu, dobiveni rezultat mora biti jednak neovisno o načinu brojanja, pod pretpostavkom da smo ispravno brojali.
Tako, primjerice, možemo dokazati jednakost neka dva izraza ili dokazati da neka konstrukcija nije moguća (u slučaju kada jednakost koju dobijemo prebrojavanjem na dva različita načina ne može vrijediti - riječ je zapravo o metodi dokazivanja kontradikcijom).

Primjer 1. Zbrajamo li brojeve u tablici, dobit ćemo isti rezultat zbrojimo li prvo brojeve po svim retcima te zatim zbrojimo dobivene sume, kao i ako prvo zbrojimo brojeve po stupcima.

Primjer 2. Na nekom natjecanju svaki učenik riješio je točno tri zadatka, a svaki zadatak riješilo je točno troje učenika. Dokaži da su broj učenika i broj zadataka jednaki.

Rješenje 2. Prebrojimo broj ukupnih točnih rješenja zadataka. Ta vrijednost jednaka je zbroju broja učenika koji su riješili neki zadatak (za svaki zadatak), kao i zbroju broja zadataka koji su riješili učenici (za svakog učenika).
Označimo broj učenika sa x, broj zadataka s y, a broj točnih rješenja sa S.
Tada imamo:

$$S = 3x \text{ svaki učenik je točno riješio po 3 zadatka}$$

$$S = 3y \text{ svaki zadatak je točno riješilo 3 učenika,}$$

iz čega slijedi:

$$3x = 3y \implies x = y$$

što je i trebalo dokazati.

$\square$

Lakši zadaci

1. Na zabavi od 11 ljudi svatko tvrdi da se rukovao s točno 5 drugih ljudi. Pokaži da netko laže.

2. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

3. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane).

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

(c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

4. 15 učenika sudjeluje na ljetnom kampu. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Kamp traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k.

5. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

6. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane)

(a) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(c) Izračunajte sumu: $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}$

Teži zadaci

7. Na matematičkom natjecanju sudjeluje 200 učenika. Natjecanje se sastoji od 6 zadataka, i svaki zadatak riješilo je barem 120 učenika. Dokaži da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio barem jedan od njih.

8. Označimo s p_k broj permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ sa točno k fiksnih točaka (i je fiksna točka ako se broj i nalazi na i-tom mjestu u permutaciji). Dokaži da vrijedi $p_1 + 2p_2 + ... + np_n = n!$.

9. Dana je 3×7 ploča u kojoj je svako polje obojano plavo ili crveno. Dokaži da postoje 2 reda i 2 stupca (ne nužno za redom) čiji presjeci daju 4 polja iste boje.

6.2. G4: Borna Banjanin - Potencija točke

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Meni se zaista ne da pisati neki poseban uvod, a vjerujem i da se vama ne da čitati, tako da odmah krećemo na formalnu definiciju potencije točke:

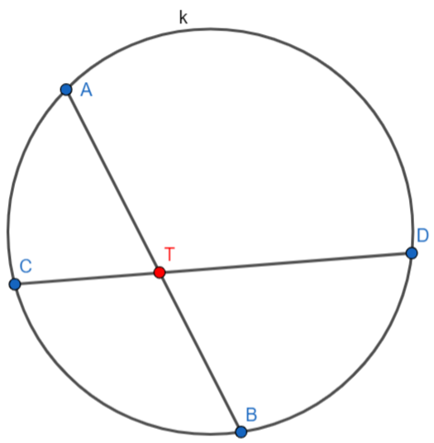
Teorem 6.2.1: Potencija točke na kružnicu

Dana je kružnica k i proizvoljna točka T.

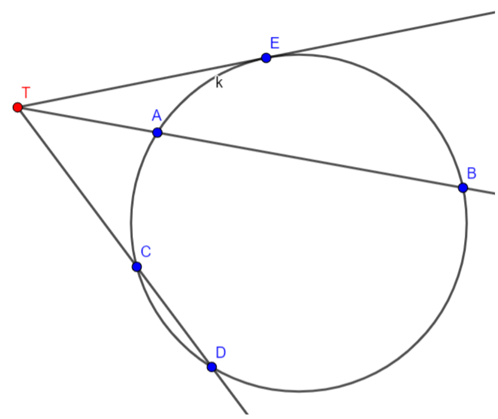
1. Vrijednost $Pow_k(T)$ je pozitivna, jednaka nuli ili negativna ovisno o tome nalazi li se točka T izvan kružnice, na njoj ili unutar nje.
2. Ako pravac p, na kojem se nalazi točka T, siječe kružnicu k u dvije različite točke (A i B), onda vrijedi:
$$Pow_k(T) = |TA| \cdot |TB|$$
3. Ako je točka T izvan kružnice k, a pravac p, na kojem se se nalazi točka T, je tangenta na kružnicu k u točki A, onda vrijedi:
$$Pow_k(T) = |TA|^2$$

Što to zapravo znači?

Napomena 6.2.2: Potencija točke na kružnicu (neformalno)



$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$$



$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD| = |TE|^2$$

Sve ovo se može dokazati jednostavnom sličnošću trokuta tako da to prepuštam čitatelju.

Teorem 6.2.3: Obrat

Neka su A, B, C i D različite točke u ravnini i neka je točka T presjek pravaca AB i CD. Ako vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ onda su A, B, C i D konciklične.

Obrat je (očito) jako koristan u dokazivnaju tetivnosti. Ako u nekom zadatku treba dokazati da 4 (ili više) točaka leži na istoj kružnici, a angle chase-om se to ne može dobiti, obrat poučka o potenciji točke na kružnicu će vjerojatno biti zadnji korak u dokazu.

Definicija 6.2.4: Radikalna os

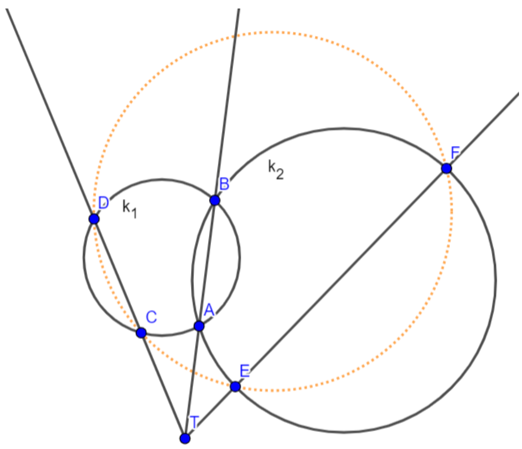
Za dvije nekoncentrične kružnice, k_1 i k_2, radikalna je os skup svih točaka P za koje vrijedi:
$$Pow_{k_1}(P) = Pow_{k_2}(P)$$

Teorem 6.2.5: Radikalna os

Za dvije nekoncentrične kružnice, k_1 i k_2, čija su središta S_1 i S_2, radikalna je os pravac okomit na dužinu $\overline{\mathrm{S_1S_2}}$. Za kružnice koje se sijeku u točkama A i B, radikalna os je pravac AB, a za kružnice koje se diraju u točki C, radikalna os je njihova zajednička tangenta u C.

Gornji se teorem dokazuje smještanjem skice u koordinatni sustav. To neću pokazati ovdje, ali možete probati dokazati nekad kasnije.

Korisnu primjenu radikalne osi možemo vidjeti na ovom primjeru:



Primjer 1 (Radikalna os)**.**
Pravac AB je radikalna os kružnica k_1 i k_2. To znači da točka T, koja je na pravcu AB ima jednaku potenciju na obje kružnice. Odnosno:

$$Pow_{k_1}(T) = Pow_{k2}(T)$$
$$|TC| \cdot |TD| = |TE| \cdot |TF|$$

I sada, prema Teoremu 1.3., možemo zaključiti da točke C, D, E i F leže na istoj kružnici.

Iz ovog jednostavnog primjera se lijepo vidi na koji način možemo koristiti poučak o potenciji točke na kružnicu, njegov obrat i radikalne osi.

Teorem 6.2.6: Radikalno središte

Za tri kružnice, takve da svake dvije imaju radikalnu os i sve tri radikalne osi su različite i nisu usporedne, vrijedi da se sve tri radikalne osi sijeku u jednoj točki, a ta se točka naziva radikalno središte.

Gornji teorem se ne pojavljuje toliko često u natjecanjima organizacije AZOO-a, ali svakako ga je bitno zapamtiti. Uglavnom se koristi kada želimo dokazati da neka tri pravca prolaze istom točkom.

Pregame

1. U kvadrat $ABCD$, stranice duljine 10, upisana je kružnica k. Neka je M polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je E presjek dužine $\overline{MC}$ i k, različito od M. Koliko iznosi duljina dužine $\overline{CE}$?

2. Zadana je kružnica k sa središtem u točki O i tetiva $\overline{BD}$ te kružnice duljine 8. Na toj tetivi odabrana je točka E takva da vrijedi $|DE| = 3$. Točka C leži na pravcu OE i kraćem luku $\overset{\frown}{BD}$, a vrijedi $|EC| = 1$. Koliko iznosi polumjer kružnice?

3. Neka je ABC trokut za kojeg vrijedi $|AB| < |AC|$ i $|\angle BAC| = 45°$. Tangente na opisanu kružnicu tog trokuta u točkama B i C sijeku se u točki D. Točka E je presjek pravaca AC i BD te vrijedi $|EA| = 3$ i $|AC| = 8$. Odredi $|DB|$.

4. Točke E, F i G su redom polovišta stranica $|CD|$, $|DA|$ i $|AB|$ paralelograma $ABCD$. Kružnica opisana trokutu EDF dira pravac AB u točki G. Odredi omjer stranica danog paralelograma.

Visoki start

5. Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T dirালište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi $|PT|$.

6. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u P i Q. Zajednička tangenta od k_1 i k_2 ih dira u točkama A i B redom. Dokaži da pravac PQ prolazi kroz polovište dužine $\overline{AB}$.

7. Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k siječe q u točkama B i C, a dodiruje p u točki A. Neka je T točka na p takva da TB i TC sijeku kraći luk $\overset{\frown}{AC}$ u točkama K i L redom. Dokaži da KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

8. Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka su T, Q' i P' redom sjecišta: k_1 i k_2, k_1 i AQ te k_2 i AP. Kružnica k_3 prolazi kroz T, P i P', a k_4 prolazi kroz T, Q i Q'. Dokaži da je A na radikalnoj osi od k_3 i k_4.

9. Dokaži, uz pomoć znanja o radikalnim osima i radikalnom središtu, da postoji ortocentar trokuta.

Mid

10. Točka C je odabrana na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$. D je polovište luka $\overset{\frown}{AC}$, a E je nožište okomice iz D na BC. Točka F je presjek pravca AE i polukružnice. Dokaži da se polovište dužine $\overline{DE}$ nalazi na pravcu BF.

11. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe $\overline{BD}$ u F, a kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe $\overline{CE}$ u G i CE ponovno u H. Ako je $|\angle GHF| = 12°$, koliko iznosi $|\angle FGA|$?

12. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ šiljastokutnog trokuta ABC nalaze se točke P i Q redom, tako da su pravci BC i PQ paralelni. Dokaži da se kružnice s promjerima $\overline{BQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku na pravcu kroz A, okomitom na BC.

13. Dan je šiljastokutan trokut ABC s težištem T. Neka je $\overline{CN}$ njegova visina, $\overline{CP}$ njegova težišnica, a K polovište te težišnice. Simatrala dužine $\overline{CP}$ siječe AB u L. Opisana kružnica trokuta LNT siječe CP u T i M. Dokaži da AK raspolavlja dužinu $\overline{BM}$.

14. Neka upisana kružnica trokuta ABC dira BC, AC i AB redom u D, E i F. Neka je Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 i M polovišta dužina $\overline{BF}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CE}$ i $\overline{BC}$ redom. Konačno, neka je X presjek Y_1Y_2 i Z_1Z_2. Dokaži da je XM okomito na BC.

SZM

15. Točka H je ortocentar trokuta ABC. Definiramo točke A_1 i A_2 kao sjecišta pravca BC s kružnicom koja prolazi kroz H, a središte joj je povište dužine $\overline{BC}$. Analogno definiramo B_1, B_2, C_1 i C_2. Dokaži da tih 6 točaka leži na istoj kružnici.

16. Neka su A, B, C i D kolinearne točke koje leže na pravcu u tom poretku. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Točka Z je dana kao presjek pravaca XY i AB. Neka je P točka na dužini $\overline{XZ}$ različita od X i Z. CP siječe kružnicu promjera $\overline{AC}$ u M, a BP siječe kružnicu promjera $\overline{BD}$ u N. Dokaži da se AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

17. Neka je $ABCD$ paralelogram s $|AC| = |BC|$. Neka je P točka na pravcu AB takva da B leži između A i P. Opisana kružnica trokuta ACD siječe dužinu $|PD|$ u točki Q, različitoj od D. Opisana kružnica trokuta APQ siječe dužinu PC u točki R, različitoj od P. Dokaži da se pravci CD, AQ i BR sijeku u istoj točki.

18. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje pravce AB i AC u točkama Z i Y, redom. Neka je G točka u kojoj se sijeku pravci BY i CZ i neka su R i S takve da $BCYR$ i $BCSZ$ paralelogrami. Dokaži da je $|GR| = |GS|$.

6.3. A4: Adian A. Santos Sepčić - CSB

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Cauchy Schwarz Bunyakovsky nejdnakost ili skraćeno CSB nejednakost je nejednakost koja je ozloglašena kao jedan od najkorištenijih matematičkih alata u natjecateljskoj matematici. No, zašto kažem ozloglašena? Zato što ono što se dogodi kada neki malo napredniji teorem bude koristan za natjecanja je to da ga natjecatelji uzimaju zdravo za gotovo, bez da uistinu razumiju njegov dokaz i posebnost istoga.
Moje mišljenje je da ovakve stvari ne treba uzimati zdravo za gotovo, jer kada god primjenjujem neki komadić matematike iza kojeg ne razumijem ideju, rješavanje postane nekako demotivirajuće (naprimjer u natjecateljskoj geometriji). Zato vam želim pokazati ljepotu jednog od mnogih dokaza ove moćne nejednakosti.
No, ako želite samo odmah rješavati zadatke, to je isto u redu. Ovaj uvodni dio sa apstraktnim dokazima je samo za one koji stvarno to žele, a ostali mogu samo iskoristiti označene teoreme kao šalabahter pri rješavanju.

Preporučeni način rada
Preporučam da si date između pola sata i sat da riješite zadatke iz uvoda (drugi zadatak je standardan, prvi je teži i zanimljiviji) i da onda krenete na natjecateljske zadatke. Dio koji dublje objašnjava inspiraciju dokaza *Iz vedra neba* možda pročitajte kasnije, jer zahtjeva dosta vremena i koncentracije za kvalitetno razumijevanje. To pročitajte ako vas zanima ideja iza strukture zadatka 1 i dublji razlog zašto je CSB nejednakost toliko primjenjiva koliko jest.

Napomena: Čitanje dijela *Iz vedra neba* pretpostavlja funkcionalno razumijevanje zadatka 1 koje je najbolje steći vlastitim rješavanjem.

Zadatak 1. Neka su $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ realni brojevi. Promotrimo iduću kvadratnu jednadžbu:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2 = 0$$

a) Dokaži da diskriminanta ove kvadratne jednadžbe nije pozitivna

b) Dokaži da vrijedi:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2$$

c) Dokaži da jednakost lijeve i desne strane navedene nejednadžbe vrijedi jedino ako $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ ili ako za neki realan broj t vrijedi:

$$a_1t + b_1 = a_2t + b_2 = ... = a_nt + b_n = 0$$

Napomena: Svaku jednadžbu oblika $ax^2+bx+c = 0$ gdje su a, b, c realni brojevi u kontekstu zadatka smatramo kvadratnom, čak i ako $a = 0$, a diskriminantu uvijek definiramo kao $b^2 - 4ac$.

Rješenje 1.

a) • **Ako $\mathbf{a_1 = a_2 = ... = a_n = 0}$**
Sada se kvadratna jednadžba svodi na:

$$b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2 = 0$$

Kako su prve dvije konstante ove kvadratne jednadžbe jednake nula, tako je i sama diskriminanta jednaka nula.

- **Ako postoji neki $a_i \neq 0$**
  Pretpostavimo sada da je diskriminanta pozitivna. To znači da postoje dva različita realna rješenja x_1, x_2:
  $$(a_1x_1 + b_1)^2 + (a_2x_1 + b_2)^2 + ... + (a_nx_1 + b_n)^2 = 0$$
  $$(a_1x_2 + b_1)^2 + (a_2x_2 + b_2)^2 + ... + (a_nx_2 + b_n)^2 = 0$$
  Kako je riječ o zbroju kvadrata realnih brojeva, svaki od članova zbroja mora biti jednak nula, pa tako i članovi $(a_ix_1 + b_i)^2$ i $(a_ix_2 + b_i)^2$. Stoga dobivamo:
  $a_ix_{12} + b_i = 0 \implies x_{12} = -\frac{b_i}{a_i} \implies x_1 = x_2 = -\frac{b_i}{a_i}$
  No, $x_1 = x_2$ dovodi do kontradikcije, što znači da diskriminanta doista ne može biti pozitivna.

b) Ovu kvadratnu jednadžbu možemo napisati na idući način:
$$(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) = 0$$
To znači da je diskriminanta ove kvadratne jednadžbe jednaka:
$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2)$$
Kako iz (a) dijela zadatka znamo da diskriminanta ne može biti pozitivna, iz ovoga slijedi:
$$(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2$$

c) Ova nejednakost trivijalno vrijedi ako $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, stoga je dovoljno riješiti slučaj gdje postoji neki $a_i \neq 0$. Tada će diskriminanta $4(a_1b_1+a_2b_2+...a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+...a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...b_n^2)$ biti jednaka nula ako i samo ako početna kvadratna jednadžba ima točno jedno realno rješenje t:
$$(a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2 + ... + (a_nt + b_n)^2 = 0$$
No, kako je riječ o zbroju kvadrata realnih brojeva, da bi njihov zbroj bio nula, oni svi moraju biti jednaki nula, to jest
$$a_1t + b_1 = a_2t + b_2 = ... = a_nt + b_n = 0$$

□

Teorem 6.3.1: CSB nejednakost

Za sve realne brojeve $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ vrijedi:
$$(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2$$
Jednakost se postiže jedino ako:

a) $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

b) Postoji neki realan broj t takav da $a_1t + b_1 = a_2t + b_2 = ... = a_nt + b_n = 0$

Ako su varijable različite od nula, možemo izbjeći komplikacije nemogućnosti dijeljenja s nulom i svesti uvjet jednakosti na puno praktičniju tvrdnju, jer vrijedi iduće:
$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n} = -t$$
Znači, vrijedi $a_1 : a_2 : ... : a_n = b_1 : b_2 : ... : b_n$.
Kada tako raščistimo uvjet jednakosti, ono što dobivamo je zapravo dolje naveden teorem.

Teorem 6.3.2: Slučaj jednakosti u CSB za brojeve različite od nula

Ako za realne brojeve $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ različite od nula vrijedi jednakost:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n)^2$$

Tada vrijedi:

$$a_1 : a_2 : ... : a_n = b_1 : b_2 : ... : b_n$$

Iz vedra neba.
...Promotrimo iduću kvadratnu jednadžbu: $(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2 = 0$*...*

Ako ste riješili ovaj zadatak ili čak ako ste ga samo pročitali, vjerojatno ćete primijetiti da je upravo ovaj dio zadatka nekako trn u oku. Ujedno je potpuno suvišan, a potpuno neizostavan. Ključ rješenja je promotriti svojstva upravo ove kvadratne jednadžbe i upravo iz njih izvući svojstva varijabli kojih ih definiraju. No, s druge strane, ovaj dio zadatka je potpuno suvišan, zato što konačno dokazane tvrdnje (rješenje b i c dijela) nemaju nikakve veze s tom kvadratnom jednadžbom. Recimo, rješavanjem b dijela, tamo navedena nejednakost je dokazana za sve realne brojeve.

Znači, ideja promatranja diskriminante ove kvadratne jednadžbe je zapravo prvi i najveći korak dokazivanja CSB nejednakosti. Ostalo je sve dokazivačka akrobatika. No, ako je to slučaj, zašto trebamo promatrati baš ovu kvadratnu jednadžbu, a ne neku drugu? Jesmo li promatrajući diskriminantu neke druge kvadratne jednadžbe mogli dobiti jače tvrdnje (to jest tvrdnje koje ne slijede iz CSB nejednakosti, ali CSB nejednakost slijedi iz njih)?

Prisjetimo se sada na što se oslanjao dio rješenja koji je bio usredotočen na kvadratnu jednadžbu i njenu diskriminantu. Ono što je proizvelo naše zaključke su dvije stvari:

a) **odabrana kvadratna jednadžba ima najviše jedno realno rješenje**

b) predznak diskriminante u potpunosti opisuje broj rješenja kvadratne jednadžbe

Da bi podebljani uvjet vrijedio, naša kvadratna jednadžba mora biti takva da lijevi izraz uvijek bude pozitivan (ili uvijek negativan, ali taj slučaj je simetričan). Ovo će možda biti jasnije ako zamislite kako slika kvadratne funkcije izgleda (zamislite parabolu koja ne siječe x-os). Način na koji je to osigurano je tako da je lijeva strana zbroj kvadrata linearnih faktora oblika $(a_ix + b_i)^2$ gdje a_i i b_i mogu biti proizvoljni realni brojevi.
Sada napokon mogu objasniti zašto je kvadratni izraz dizajniran točno onako kako jest. Stvar je u tome što se svaka kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ koja ima svojstvo $ax^2 + bx + c \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ može zapisati u idućem obliku ($a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ su proizvoljni realni brojevi):

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2 = 0$$

Dokaz.
Dokažimo da postoje neki a_1, a_2, b_2 takvi da $ax^2 + bx + c = (a_1x)^2 + (a_2x + b_2)^2$.
Primijetimo da je odabir a_2 i b_2 potpuno određen varijablama b i c. Ovaj odabir možemo provesti tako da rastavimo a tako da dopunimo kvadrat. Znači, odaberemo neke $k_1 + k_2 = a$ takve da je $k_1x^2 + bx + c$ kvadrat linearnog člana, znači oblika $(a_2x + b_2)^2$.
Ako $k_2 < 0$, tada neka $k_2 = -t^2$, gdje t sada mora biti realan broj različit od nula. Tada dobivamo:
$ax^2 + bx + c = (a_2x + b_2)^2 - t^2x^2 = (a_2x + b_2 - t)(a_2x + b_2 + t)$
No, najdesniji izraz očito ima dvije realne nultočke, što je nemoguće ako $ax^2 + bx + c \geq 0$ za sve realne brojeve x. Znači, $k_2 \geq 0$, pa se može zapisati kao $k_2 = a_1^2$, gdje a_1 mora biti realan broj. Stoga, dobivamo:

$$ax^2 + bx + c = (a_1x)^2 + (a_2x + b_2)^2$$

□

Stoga, ovaj naizgled nasumičan, ali zapravo pomno optimiziran odabir početne kvadratne jednadžbe je najopćenitiji koji smo mogli izabrati.

Ukratko, upravo zato što zahtjeva maksimalno poopćavanje matematičkih alata koje koristimo za njen dokaz i zahtjeva prilično dosljetljiv dokaz, CSB nejednakost ima iznimno općenitu primjenu. Ovo u kombinaciji s njenom jednostavnosti učinilo je CSB nejednakost jednu od najšire korištenih nejednakosti tijekom vremena, pa tako i u natjecateljskoj matematici.

Zadatak 2. Promotrimo iduću nejednadžbu:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ...a_n)^2}{b_1 + b_2 + ...b_n}$$

a) Dokaži ovu nejednadžbu za sve nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$.

b) Vrijedi li nužno ova nejednadžba ako dopustimo da neki od brojeva $a_1, a_2, ...a_n$ budu negativni?

c) Vrijedi li nužno nejednadžba ako dopustimo da neki od brojeva $b_1, b_2, ...b_n$ budu negativni?

Rješenje 2.

a)
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ...a_n)^2}{b_1 + b_2 + ...b_n}$$
$$\iff (\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n})(b_1 + b_2 + ...b_n) \geq (a_1 + a_2 + ...a_n)^2$$

Posljednji red je CSB nejednakost primjenjena na varijable $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, ... \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ... \sqrt{b_n}$.

b) Iz opažanja iz rješenja a) dijela zadatka slijedi da nejednakost vrijedi za sve realne brojeve $a_1, a_2, ...a_n$, kako je CSB nejednakost primjenjiva na sve realne brojeve, pa vrijedi sve dok su $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, ... \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ... \sqrt{b_n}$ realni brojevi.

c) Isto neće vrijediti ako su neki od brojeva $b_1, b_2, ...b_n$ negativni, kako $\sqrt{b_i}$ ne može biti realan broj ako je b_i negativan. Ovo je primjer kada nejednadžba neće vrijediti:

$$\frac{2^2}{-1} + \frac{1^2}{2} \geq \frac{(1+2)^2}{-1+2} \iff -\frac{7}{2} \geq 9 \implies \textit{krivo}$$

□

Teorem 6.3.3: CSB - Engel forma

Za sve realne brojeve $a_1, a_2, ...a_n$ i pozitivne realne brojeve $b_1, b_2, ...b_n$ vrijedi:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ...a_n)^2}{b_1 + b_2 + ...b_n}$$

Lakši zadaci

1. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c dokaži:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

2. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c dokaži:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

3. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c dokaži:

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a} \geq 1$$

Umjereni zadaci

4. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c dokaži:

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \geq \frac{3(a+b+c)}{3+a+b+c}$$

5. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c takve da $ab+bc+ca=1$ dokaži:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Za sve nenegativne realne brojeve a_1, a_2, b_1, b_2 dokaži:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

Teži zadaci

7. Neka za trokut ABC kojemu su unutarnji kutevi α, β, γ, poluopseg s i polumjer upisane kružnice r vrijedi:

$$(\cot\frac{\alpha}{2})^2+(2\cot\frac{\beta}{2})^2+(3\cot\frac{\gamma}{2})^2=(\frac{6s}{7r})^2$$

Dokaži da su svi trokuti koji zadovoljavaju ovo svojstvo slični najmanjem trokutu sa cjelobrojnim stranicama koji zadovoljava ovo svojstvo i odredi duljine stranica tog najmanjeg trokuta.

8. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d koji zadovoljavaju $abc=1$ dokaži:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

9. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d koji zadovoljavaju $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ dokaži:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geq 4$$

10. Za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d koji zadovoljavaju $a+b+c+d=4$ dokaži:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

6.4. N4: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. - Carl Friedrich Gauss

Potrebna teorija

Definicija 6.4.1: kongruencije

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je a kongruentno b modulo n ako vrijedi $n|a-b$.
Pišemo $a \equiv b \mod n$

Teorem 6.4.2: svojstva kongruencija

Za $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ Vrijedi:
$a \equiv b \mod n \implies a \equiv kn + b \mod n$
$a \equiv b \mod n, c \equiv d \mod n \implies a + c \equiv b + d \mod n$
$a \equiv b \mod n, c \equiv d \mod n \implies ac \equiv bd \mod n$
$a \equiv b \mod n \implies a^k \equiv b^k \mod n$
$gcd(c, n) = d, a \equiv b \mod n \implies \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \mod \frac{n}{d}$

Nakon uvođenja kongruencija sljedeći logičan korak bi bio da razvijemo tehniku njihova računanja, konkrentnije zanima nas računanje ostataka potencija nekih brojeva.

Definicija 6.4.3: Eulerova funkcija

Eulerova funkcija ($\phi_{(n)}$) je funkcija koja za argument n vraća broj brojeva iz skupa {1,2,...,n} koji su relativno prosti s n.

Teorem 6.4.4: Svojstva Eulerove funkcije

$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_l})$ za $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$

$\phi_{(mn)} = \phi_{(m)}\phi_{(n)}$ za $gcd(m, n) = 1$
$\phi_{(p)} = p - 1$ gdje je p prost.
$\phi_{(p^k)} = p^k - p^{k-1}$

Sada možemo uvesti jedan veoma važan teorem.

Teorem 6.4.5: Eulerov teorem

$$gcd(a, n) = 1 \implies a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$$

⚠ Oprez

Kada primijenjujete Eulerov teorem pazite da je $gcd(a, n) = 1$. Česta greška je da se ovaj uvjet ne provjerava.

Korolar 6.4.6: Mali Fermatov teorem

Ovo je zapravo samo poseban slučaj Eulerovog teorema gdje je p prost.

$$gcd(a,p)=1 \implies a^{p-1}\equiv 1 \mod p$$

I za kraj. Jedna korisna ideja.

Lema 6.4.7

$gcd(a,n)=1 \implies a^b \equiv a^{b \pmod{\phi(n)}} \mod n$

Dokaz. $a^b = a^{k\phi_{(n)}+r} \equiv a^r \mod n$ i vrijedi $r \equiv b \mod \phi_{(n)}$ □

Ova lema je dosta "čudna" odnosno treba vremena da se na nju naviknete, ali je jako korisna u zadatcima koje ćete sada rješavati.

Primjer 1. Odredite zadnju znamenku broja 7^{7^7}

Rješenje 1. Tražimo:

$$7^{7^7} \mod 10$$

Po lemmi 1.7 znamo:

$$7^{7^7} \equiv 7^x \mod 10$$

Gdje je $x = (7^7 \mod 4)$ odnosno $x = 3$

$$7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 3 \mod 10$$

□

Dokaz Eulerovog teorema

Za one koji žele znati više dajem dokaz Eulerovog teorema. Prvo ćemo dokazati jedan jednostvniji teorem

Teorem 6.4.8

$gcd(a,m)=1$, Definirajmo skup S koji sadrži sve brojeve relativno proste s m koji su i manji od m $S=\{a_1,a_2...a_{\phi(m)}\}$, ako promatramo svaki član skupa $R=\{aa_1,aa_2...aa_{\phi(m)}\}$ modulo m onda su ta dva skupa jednaka.

Dokaz Znamo da skup R ima jednako članova kao skup S. Također znamo da je svaki element skupa R relativno prost s m, stoga će i svaki element skupa R biti relativno prost s m kada ih promatramo modulo m. Ovo ću sada nabrzaka pokazati:
Neka je $aa_i = km+r$

$$\gcd(aa_i,m)=\gcd(km+r,m))=\gcd(r,m)=1$$

Znači kada promatramo skup R modulo m svaki član će biti relativno prost s m i biti će ih jednako mnogo kao i skupu S. Sada treba samo dokazati da su svi elementi skupa R modulo m različiti. Pretpostavimo suprotno:

$$aa_i \equiv aa_j \mod m \implies aa_i - aa_j \equiv 0 \implies a(a_i-a_j)\equiv 0 \mod m \tag{1}$$

znamo da $(a \not\equiv 0 \mod m)$, $(a_i - a_j \not\equiv 0 \mod m)$ i da su a i m relativno prosti. Znači (1) je kontradikcija.

Sada možemo dokazati Eulerov teorem:
Promatramo skupove S i R iz prethodnog teorema iz kojeg slijedi:

$$a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv a a_1 a a_2 \dots a a_{\phi(n)} \equiv a^{\phi(n)} a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \mod n$$

$$a^{\phi(n)} a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} - a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv 0 \mod n$$

$$a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} (a^{\phi(n)} - 1) \equiv 0 \mod n$$

Iz $a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \not\equiv 0 \mod n$ slijedi $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Order

S obzirom da je nekima na predavanju sve do sada već poznato, predstvljam vam jednu novu ideju koju možete imati na umu pri rješavanju zadataka.

Definicija 6.4.9: Order

Za broj $x \in \mathbb{N}$ kažemo da je order broja a modulo m ($\gcd(a, m) = 1$) ako je to najmanji broj za koji vrijedi:

$$a^x \equiv 1 \mod m$$

Order označavamo s $ord_m a$

Teorem 6.4.10: Najbitniji teorem za order

$$a^n \equiv 1 \mod m \iff ord_m a \mid n$$

Dokaz. Implikacija u lijevo "trivijalno" vrijedi iz $a^{ord_m a} \equiv 1 \mod m$.
Implikacija u desno je nešto kompliciranija.
Neka $n = k \cdot ord_m a + r$ Znači $r < ord_m a$

$$a^{k \cdot ord_m a + r} \equiv a^r \equiv 1 \mod m$$

Ali je kontradikcija zbog definicije ordera (order je mora biti najmanji broj za kojeg vrijedi ona kongruencija, ali mi smo sad našli da r to zadovoljava) □

Zagrijavanje

Izračunajte:

- $\phi(1234)$
- $\phi(2023)$
- $\phi(1695)$

Lagani zadaci

1. Nađite ostatak pri dijeljenju 3^{100} s 11,25.

2. Pronađite zadnje dvije znamenke broja $7^{7^{7^7}}$

3. Izračunajte zadnje dvije znamenke broja $7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}$. (Ima 2023 sedmica)

4. Neka je $a, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Odredite $ord_{a^n - 1}(a)$

5. Neka je p prost broj, a x cijeli broj. Dokažite da $x^2 \equiv 1 \mod p$ ako i samo ako $x \equiv \pm 1 \mod p$.

Umjereni zadatci

6. Neka su p i q različiti prosti brojevi. Pokažite da za svaki cijeli broj a vrijedi:

$$a^{pq-q-p+2} \equiv a \mod pq$$

7. Dokažite da za sve $a \in \mathbb{N}, a > 1, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$n \mid \phi_{(a^n-1)}$$

8. Pokažite da ako su a i b relativno prosti onda postoje cijeli brojevi m i n takvi da:

$$a^m + b^n \equiv 1 \mod ab$$

9. Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dokažite da $n \nmid 2^n - 1$

10. Za bilo koji prosti broj p i $\gcd(ab, p) = 1$ dokažite da vrijedi:

$$(a^p \equiv b^p \mod p) \implies (a^p \equiv b^p \mod p^2)$$

Teški zadaci

11. Neka je $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Pokažite da je

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

djeljivo s 1989.

Nee... niste ovo vidjeli prije...

12. Neka su a i $b > 2$ prirodni brojevi. Pokažite da $2^b - 1 \nmid 2^a + 1$

13. Pokažite da za svaki prosti broj p možemo pronaći $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi:

$$p \mid 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

14. Pronađite sve proste parove p, q takve da $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

7. Predavanja za petu grupu

7.1. C5: Mislav Brnetić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Na današnjem predavanju bavit ćemo se primarno zadacima u kojima je potrebno odrediti te dokazati je li određenu ploču moguće popločati na zadani način, odnosno je li moguće ostvariti neku konfiguraciju na ploči.

Ako je odgovor potvrdan, dovoljno je pronaći odgovarajuću konstrukciju.

Ako dokazujemo da ploču nije moguće popločati na određeni način, postoji više mogućih pristupa. Jedna korisna ideja je bojanje ploče, kada polja ploče dijelimo u disjunktne skupove (kažemo da smo ih obojali istom bojom) te pritom potražiti invarijantu pomoću koje možemo dokazati željenu tvrdnju.

Za početak, promotrimo jedan klasičan primjer.

Primjer 1. Može li se šahovska ploča kojoj su odstranjena 2 nasuprotna kutna polja prekriti s pločicama 2×1 tako da se pločice ne preklapaju?

Rješenje 1. Ukoliko pokušamo prekriti ploču na traženi način, brzo naslućujemo kako to neće biti moguće.
Primijetimo kako se na ploči nalazi 30 crnih i 32 bijela polja, a da svaka pločica prekriva 1 crno i 1 bijelo polje.
Dakle, kada bi bilo moguće prekriti ploču na traženi način, na ploči bi se nalazilo jednako bijelih i crnih polja, što na zadanoj ploči nije slučaj.
Stoga zaključujemo kako ploču nije moguće prekriti na traženi način. □

Napomena 7.1.1

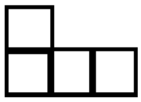
Često je jednostavnije, umjesto bojanja ploče bojama, označiti polja ploče brojevima. Naime, brže je i jednostavnije zapisati brojeve umjesto bojanja polja bojama, a također je moguće i korištenje naprednijih tehnika (poput promatranja zbroja brojeva na poljima koje pločica prekriva i sl,).

Lakši zadaci

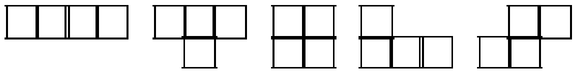
1. Može li se ploča dimenzije 10×10 popločati s 25 pločica dimenzija 1×4?

2. Pravokutni pod prekriven je pločicama 2×2 i 1×4. Jedna se pločica razbila, no umjesto nje dostupna nam je pločica drugog oblika. Može li se pod ponovno popločati razmještanjem ovih pločica?

3. Je li moguće ploču dimenzije 10×10 prekriti pločicama oblika kao na slici (L-tetromine)?



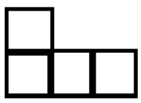
4. Je li moguće sastaviti pravokutnik korištenjem sljedećih oblika (svakog jednom):



Umjereni zadaci

5. Ploča dimenzije 8×8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

6. Zadana je ploča dimenzije $n \times n$ s koje su odstranjena sva 4 vrha. Za koje vrijednosti n je ploču moguće popločati oblicima kao na slici?



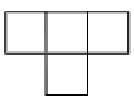
7. Polja ploče 2×50 potrebno je obojati u dvije boje, crvenu i plavu, tako da budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:

   - na ploči se pojavljuju obje boje
   - uklanjanjem svih crvenih polja ploča ostaje povezana
   - uklanjanjem svih plavih polja ploča ostaje povezana

   Ploča je povezana ako se od svakog polja može doći do svakog drugog, prelazeći u svakom koraku s polja na njemu susjedno polje. Polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.

   Na koliko je načina moguće obojati ploču?

8. Može li se ploča 10×10 pokriti T-tetrominima?



9. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima.

   Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

10. Ploča dimenzija 6×6 popločana je dominama. Dokažite da uvijek možemo pronaći pravac duž kojeg ćemo prelomiti ploču tako da ne prelomimo niti jednu dominu.

11. U svakom polju ploče 9×9 sjedi po jedna žaba. U nekom trenutku svaka žaba skače dijagonalno u neko od četiri polja koja su imaju zajednički vrh s poljem u kojem se prvotno nalazila (može se dogoditi da se više žaba nađe u jednom polju). Odredite koliko najmanje polja ostane prazno nakon takvog skoka.

Teži zadaci

12. *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh.

Odredite najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

13. Zemljište dimenzija $n \times p$ podijeljeno je na np čestica - jediničnih kvadratića. Svaka je čestica u početnom stanju ili obrasla u korov ili je očišćena, Na početku je m čestica obraslo u korov. Korov se širi na susjedne čestice na sljedeći način: svake godine one čestice koje su imale dvije susjedne čestice (sa zajedničkom stranicom) obrasle u korov i same obrastu u korov.

Odredite najmanji m za koji postoji početni raspored u korov obraslih čestica takav da, nakon konačnog broja godina, cijelo zemljište mora obrasti u korov.

14. Dokažite da je ploču dimenzije $a \times b$ moguće popločati pločicama dimenzije $1 \times n$ ako i samo ako $n|a$ ili $n|b$.

7.2. G5: Stella Čolo - Upisana i pripisana kružnica

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Definicija 7.2.1: Upisana kružnica trokuta

Upisana kružnica trokuta je kružnica koja dira sve tri stranice trokuta iznutra, njezino središte nalazi se na simetralama unutarnjih kutova trokuta

Definicija 7.2.2: Pripisana kružnica trokuta

A-pripisana kružnica trokuta je kružnica koja dira stranicu a i produžetke stranica b i c, njezino središte nalazi se na simetrali unutarnjeg kuta kod vrha A i na simetralama vanjskih kutova kod vrhova B i C.

Nadalje ćemo koristiti ove oznake u zadacima, osim ako nije naznačeno drukčije:
I_A, I_B, I_C – središta redom A-pripisane, B-pripisane, C-pripisane kružnice $\triangle ABC$.
I – središte upisane kružnice $\triangle ABC$
s – poluopseg trokuta, $\frac{a+b+c}{2}$

Primjer 1. Izrazi duljine dužina BD, CE, AF preko stranica $\triangle ABC$.

Rješenje 1. Promatramo stranice trokuta kao tangente iz vrhova trokuta na upisanu kružnicu pa su odjsečci tangente iz istog vrha jednaki.
Slijedi $AF = AE = x$, $BD = BF = y$, $CE = CD = z$. Sada imamo 3 sustava jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ x + z &= b \end{aligned}$$

Iz toga dobijemo:

$$\begin{aligned} BD = y &= \frac{a+c-b}{2} \\ CE = z &= \frac{a+b-c}{2} \\ AF = x &= \frac{b+c-a}{2} \end{aligned}$$

□

Primjer 2. Neka su D i D_1 redom dirališta upisane i A-pripisane kružnice $\triangle ABC$ sa stranicom BC, dokaži da su D i D_1 simetrične preko polovišta stranice BC.

Rješenje 2. Neka su E_1, F_1 redom dirališta A-pripisane kružnice s pravcima AC i AB. Promatramo stranice trokuta kao tangente iz vrhova $\triangle ABC$ na A-pripisanu kružnicu, slijedi: $BD_1 = BF_1 = x_1$, $CD_1 = CE_1 = y_1$
$AF_1 = AE_1$
$\iff c + X_1 = b + Y_1 \iff x_1 - y_1 = b - c$ znamo da $x_1 + y_1 = BC = a$ pa dobijemo
$x_1 = \frac{a+b-c}{2}$
$\iff BD_1 = \frac{a+b-c}{2} = CD$ (po primjeru 1.)
Iz toga slijedi da su točke D i D_1 simetrične preko polovišta stranice BC. □

Primjer 3 (Lema o trozubcu). Dokaži da se simetrala $\angle BAC$, simetrala stranice BC i kružnica opisana $\triangle ABC$ sjeku u jednoj točci. Neka je to točka M, dokaži da točke B,C, I i I_A leže na kružnici čije je središte M.

Rješenje 3. Neka je točka M' prejsek opisane kružnice $\triangle ABC$ i simetrale stranice BC, dokazat ćemo da točka M' leži na simetrali $\angle BAC$, odnosno da $M' = M$. Točka P je polovište stranice BC.
$MC = MB \implies \triangle BMP$ i $\triangle PMC$ su sukladni, slijedi $\angle MBP = \angle MCP = 90 - \frac{\angle BMC}{2} = 90 - \frac{180-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \implies \angle MAC = \angle MBC = \frac{\alpha}{2}$, tj. M leži na simetrali $\angle BAC$. Nadalje, $\angle BIM = \angle IBA + IAB = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \angle MBC + \angle CBI = \angle MBI \implies MB = MI$ analogno $MI = MC$
$\angle MI_AC = 180 - \angle I_AIC - \angle I_ACI = 180 - \angle(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} - 90 = 90 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \angle ICI_A - \angle ICM = \angle MCI_A \implies MC = MI_A \implies$ točke B, C, I i I_A leže na kružnici sa središtem M. □

Lakši zadaci

1. Dan je tetivan četverokut $ABCD$, I_1 i I_2 su redom središta upisanih kružnica $\triangle ABC$ i $\triangle DBC$, dokaži da je četverokut I_2I_1BC tetivan.

2. Dokaži da je I ortocentar $\triangle I_aI_bI_c$.

3. Dan je šiljastokutni $\triangle ABC$ kojem upisana kružnica dira stranicu AB u točci F. D_1 i E_1 su dirališta upisane kružnice $\triangle BCF$ s BF i BC. D_2 i E_2 su dirališta upisane kružnice $\triangle AFC$ redom s AF i AC. Dokaži da je četverokut $D_1E_1E_2D_2$ tetivan.

4. Dokaži da se pravci AD,BE, CF sjeku u jednoj točci.

5. O je središte opisane kružnice $\triangle IBC$, dokaži da $\angle OFB = \angle OEC$

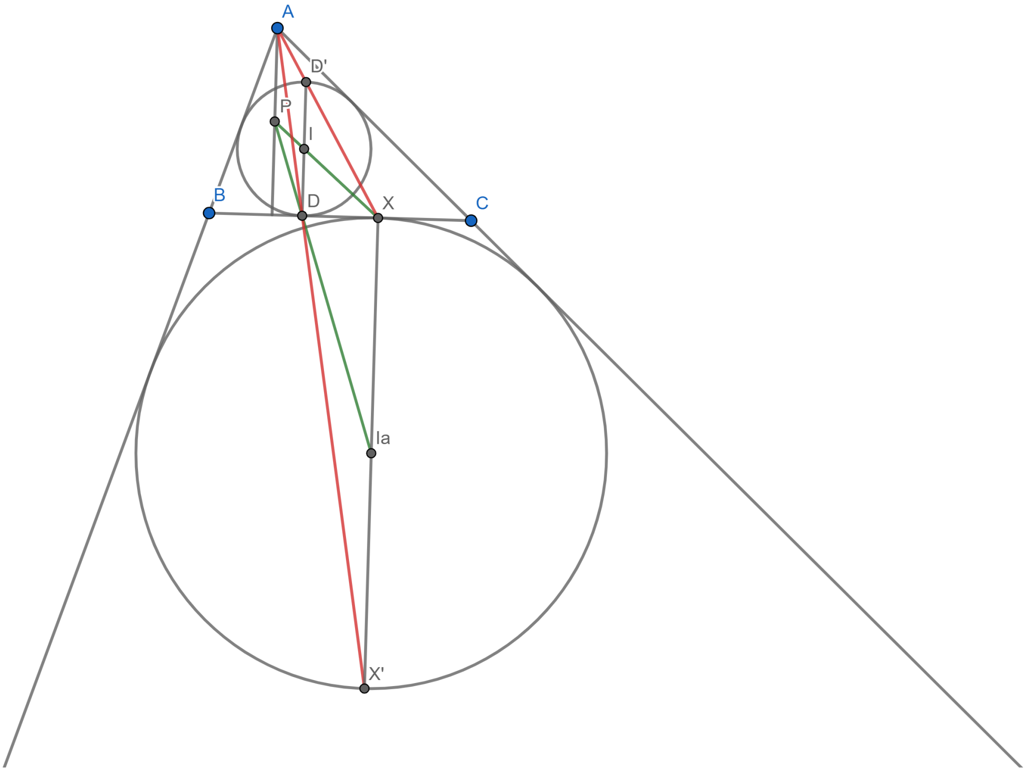
"Poznate stvari"

Ove stvari nije nužno naučiti napamet, ali često se pojavljuju u zadacima s upisanim i/ili pripisanim kružnicama pa ih nije loše znati prepoznati.

6. M i N su redom polovišta BC i AC, K je presjek BI i EF. Dokaži da je BK okomito na CK i da K leži na pravcu MN.

7. Neka je P presjek dužine EF i pravca ID, a M polovište stranice BC, dokaži da su točke A, P i M kolinearne.

Sljedeća četiri zadatka odnose se na konfiguraciju na skici. D, X su redom dirališta upisane i A-pripisane kružnice s BC, točka P je polovište visine iz vrha A, D' je presjek upisane kružnice i pravca ID, X' je presjek A-pripisane kružnice i pravca XI_A.



8. Dokaži da su točke A, D' i X kolinearne.

9. Dokaži da su točke A, D i X' kolinearne.

10. Dokaži da su točke P, I i X kolinearne.

11. Dokaži da su točke P, D i I_A kolinearne.

Bonus zadatak

12. $\triangle ABC$ ima opseg 4, točke X i Y leže redom na polupravcima AB, AC tako da $AX = AY = 1$. Presjek dužina BC i XY je točka M. Dokaži da je opseg $\triangle ABM$ ili $\triangle ACM$ jednak 2.

7.3. A5: Vedran Cifrek - Uvod u funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Definicija 7.3.1

Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija $f : A \to B$ svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B. Ako je $x \in A$ onda element koji funkcija njemu pridružuje nazivamo $f(x)$. Skupa A se naziva domena funkcije f, a skup B kodomena.

Funkcija je potpuno zadana kada joj znamo domenu, kodomenu i vrijednost $f(x)$ za sve brojeve $x \in A$. Funkcijska jednadžba je tip zadatka u kojem je zadana neka tvrdnja koja vrijedi za funkciju i treba odrediti sve funkcije za koje vrijedi ta tvrdnja i dokazati da ne postoje druge funkcije osim onih koje smo pronašli.
Najčešći način za dokazati da su to jedina rješenja (način na koji se i rješavaju funkcijske) je promatrati različite slučajeve od kojih jedan sigurno mora vrijediti za funkciju i u svakom slučaju dokazati da funkcija mora biti nekog oblika. $f(x) = 0\ \forall x$ je često rješenje jednadžbe koje moramo dobiti u nekom posebnom slučaju.

⚠ Oprez 2: MORAMO PROVJERITI RJEŠENJA

Većina tvrdnji koje dokažemo za funkciju su implikacije iz početne jednadžbe tako da uvijek moramo provjeriti da to što smo dobili zapravo vrijedi za sve brojeve za koje je zadano da vrijedi. Provjeru treba obavezno negdje napisati na papiru (koliko god ona bila trivijalna), da se ne izgubi bod na natjecanju.

Pogađanje rješenja

Na početku ili tijekom rješavanja zadatka je korisno iskoristiti malo vremena za pogledati koje funkcije zapravo traženu jednažbu kako bismo znali koja svojstva možemo očekivati dokazati za funkciju f. Npr. ako je jedno od rješenja jednadžbe $f(x) = x^2$ onda ne možemo dokazati da je f injekcija kad to ne vrijedi.
Također, ako vidimo da funkcija ima više različitih rješenja, onda znamo da se tijekom rješavanja mora pojaviti neko rastavljanje na slučajeve. Npr. ako vidimo da su moguća rješenja $f(x) = 0$ i $f(x) = x$, jedna od mogućih tvrdnji koje se mogu pojaviti je $f(1)^2 = f(1)$ iz čega imamo dva slučaja i u jednom trebamo dokazati da je rješenje $f(x) = 0$, a drugom $f(x) = 1$.
Najčešća rješenja funkcijskih su $f(x) = 0, f(x) = x, -x$ ili neka druga linearna funkcija, te ponekad neki polinomi 2. stupnja tipa $f(x) = x^2$.

Uvrštavanje u početnu jednadžbu

S $P(x, y)$ označimo da tvrdnja funkcijske jednadžbe vrijedi za realne brojeve x i y, te kako znamo da vrijedi za sve brojeve, možemo umjesto proizvoljnih uvrstiti neke konkretne brojeve:

- Pogađanje koja bi mogla biti rješenja funkcije prije ili tijekom rješavanja zadataka, da lakše usmjerimo razmišljanje i znamo kakvi bi tvrdnje mogli očekivati da ćemo dokazati.
- Uvrštavanje konkretnih vrijednosti, koje se lijepo ponašaju, u neku ili sve nepoznanice za koje znamo da vrijedi tvrdnja: Najčešće 0, 1 i -1, ponekad 2, -2 i još neki "jednostavniji" brojevi ako se čini kao da nam je potrebno odrediti $f(0)$, $f(1)$ ili slično.

- Uvrštavanje jedne varijable u zavisnosti na ostale, npr. ako funkcija vrijedi za sve x i y možemo u y uvrstiti x, $-x$, $2x$, $f(x)$ ili nešto kompliciranije.
- Ako jednadžba koju rješavamo više izraza u sebi oblika f (nešto) možemo promatrati za kakve x i y će ti izrazi biti jednaki, te ih uvrstiti.
- Ako smo uvrštavanjem dobili na jednostavniji način neku specifičnu vrijednost od f, možemo probati uvrstiti nešto u početnu jednadžbu da primijenimo tvrdnju. Npr. ako pomoću uvrštavanja dobijemo $f(f(x)+x) = x$ korisno je probati dobiti izraz $f(f(x)+x)$ nekim drugim uvrštavanjem.

Ako želimo napraviti uvrštavanje takvo da je x bilo koji realni broj, a $y = 0$, onda napišemo $P(x, 0)$: i pokraj toga kako izgleda jednažba nakon tog uvrštavanja. Ovo je jedna dosta dobar način za brzo i pregledno napisati koje uvrštavanje promatramo što je korisno i za rješavanje zadataka, a pomaže i ljudima koji trebaju ispravljati.
Nerijetko treba uvrstiti neki izraz u neku drugu jednažbu koju smo dobili kroz rješavanje zadatka, a onda moramo nekako posebno naznačiti da smo baš u tu uvrstili, a ne u početnu.

Definicija 7.3.2

Funkcija je injektivna ako se u svaku vrijednost u kodomeni slika najviše jedna vrijednost iz domene odnosno $\forall x_1, x_2\ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$.

Ova tvrdnja se ovako i dokazuje, pretpostavimo da neka dva broja imaju iste vrijednost funkcije i iz tvrdnji koje imamo za funkciju dokažemo da ti brojevi moraju biti jednaki.To najčešće radimo tako da uočimo neki izraz koji ima varijablu x izvan svih funkcija, a u ostatku izraza se x pojavljuje samo kao $f(x)$.Npr. u $f(f(x) + f(f(x))) = f(x) + x$ uvrstimo x_1 i x_2 iz gornje definicije.
Ako smo dokazali injektivnost onda ako dobijemo jednakost f (prvi izraz) = f(drugog izraza) znamo da je prvi izraz = drugi izraz.

Definicija 7.3.3

Funkcija je surjektivna ako se u svakog elementa kodomene slika barem jedan element domene odnosno, $\forall y\ \exists x\ (f(x) = y)$.

Surjektivnost ovisi o izboru kodomene za funkciju, no kada promatramo funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ pod surjektivnom funkcijom smatramo onu koja poprima sve realne vrijednosti.
Surjektivnost ćemo najćešće dokazati tako da dobijemo da je f (neki izraz) = nekom surjektivnom izrazu. A surjektivni izraz će najćešće biti neka linearna funkcija $ax + b$ gdje je $a \neq 0$. Kada smo dokazali surjektivnost smijemo za bilo koji y reći da postoji neki a takav da je $f(a) = y$ i uvrstiti takav a u neku tvrdnju. Češće se koristi surjektivnost za broj 0, ali može biti bitno i za druge brojeve i izraze. Također, nekad je bitno znati točan oblik broja a, a nekad nije.

Forsiranje skraćivanja

Jedna od prvih stvari koje trebamo napraviti kada počinjemo rješavati funkcijsku jednadžbu je pogledali lijevu i desnu stranu i provjeriti postoje li x i y takvi da je neki izraz unutar znaka funkcije s lijeve strane jednak nekom takvom s desne strane, jer će uvrštavanjem takvih x i y se dosta pojednostaviti jednadžba.
Ako je moguće, bolje je uvrstiti samo jednu od varijabli x i y u ovisnosti o drugoj, a preostalu varijablu ostaviti da "trči" po svim realnim brojevima.

Primjer 1. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x^2 + y) = f(x^3 + 2y) + f(x^4),$$

za sve realne brojeve x i y.

Rješenje 1. Ideja je da se prvi izraz na lijevoj strani pokrati s drugim izrazom na desnoj strani. Pogledajmo kada to vrijedi:
$x^2 + y = x^3 + 2y \iff x^2 = x^3 + y \iff y = x^2 - x^3$
Pa uvrstimo $P(x, x^2 - x^3)$ i dobivamo $f(2x^2 - x^3) = f(2x^2 - x^3) + f(x^4) \implies f(x^4) = 0$ za sve realne brojeve x. Za proizvoljan nenegativan realan broj y možemo u to uvrstiti $x = \sqrt[4]{y}$ i dobiti $f(y) = 0$ za sve nenegativne brojeve.
Sada ako uvrstimo $P(x, 0)$, članovi $f(x^2 + 0)$ i $f(x^4)$ su jednaki 0 pa ostaje $f(x^3) = 0$ za sve realne brojeve x, pa uvrštavanjem 3. korijena imamo da je $f(y) = 0$ za sve realne brojeve y. □

Zamjena x i y

Uvijek je dobro provjeriti možemo li nešto zaključiti o funkcijskoj jednadžbi uvrštavanjem (y, x) i izjednačavanjem početne i dobivene jednaždbe jer se tada simetrični izrazi pokrate.

Primjer 2. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(f(x)+f(y)) = f(x)+y$ za sve realne brojeve x i y.

Rješenje 2. Uočavamo da se desna strana uopće ne promijeni kada zamijenimo x i y, a lijeva strana se promjeni pa uvrstimo $P(y, x)$ i dobijemo $f(f(y) + f(x)) = f(y) + x$.
Kako su lijeve strane jednake za svse x i y moraju biti i desne strane pa imamo $f(x) + y = f(y) + x$.
Pogledamo npr. $P(x, 0)$ i dobijemo $f(x) = x + f(0)$ za sve realne brojeve x, tj f je linearna funkcija s vodećim koeficijentom 1. Ionako na kraju moramo provjeriti da dobivena funkcija zadovoljava početnu jednadžbu pa možemo uvrstiti rješenje $x + c$ gdje je c proizvoljna konstanta i odrediti za koje c ima rješenja.
Lijeva strana: $f(f(x) + f(y)) = f(x + c + y + c) = x + y + 3c$
Desna strana: $f(x) + y = x + y + c$
$x + y = 3c = x + y + c$ za sve realne brojeve x i y
Pa vidimo da je jedini mogući $c = 0$ i on zadovoljava jednadžbu za sve x i y. □

Definicija 7.3.4

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je parna ako je $f(x) = f(-x)$ za sve realne brojeve x.
Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neparna ako je $f(x) = -f(-x)$ za sve realne brojeve x, tj u obliku u kojem se češće koristi $f(-x) = -f(x)$.

Ponekad je korisno dokazati i koristiti ova svojstva funkcije (ako ih posjeduje).

Zadaci

1. Odredite za koje a i b je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ bijekcija, te za njih u ovisnosti o proizvoljnom broju y odredite x takav da je $y = f(x)$.
2. Za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi $f(f(x)) = x$. Dokažite da je f bijekcija.
3. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x+y) + f(x-y) = x^2 + y^2$ za sve realne brojeve x.
4. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ za sve realne brojeve x.
5. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) + xf(1-x) = x$ za sve realne brojeve x.
6. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(x) + f(x + f(y)) = 2x + y$ za sve realne brojeve x i y.

7. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(y^2 f(x)) = xyf(y)$ za sve realne brojeve x i y.

8. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(f(x)+f(y)+y) = f(x)+2y$ za sve realne brojeve x i y.

9. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2+y$ za sve realne brojeve x i y.

10. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(xf(y)-y^2) = (y+1)f(x-y)$ za sve realne brojeve x i y.

11. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $(y+1)f(x)+f(xf(y)+f(x+y)) = y$ za sve realne brojeve x.

7.4. N5: Emanuel Tukač - CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Za početak, niz stvari koje neće nužno biti potrebne za ovo predavanje, ali je poželjno da ste upoznati s njima.

Definicija 7.4.1: Eulerova funkcija

$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi(n)$ je broj brojeva realitivno prostih s n manjih jednakih n

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:

$$\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_l})$$

- ϕ je multiplikativna, tj. vrijedi $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ ako su n i m relativno prosti.
- Ako je p prost broj, onda je $\phi(p) = p - 1$
- Općenitije za prost broj p je $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$
- Alternativno za $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:

$$\phi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_l^{\alpha_l} - p_l^{\alpha_l - 1})$$

Teorem 7.4.2: Eulerov teorem

Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi:

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Napomena 7.4.3: MFT

Kao posljedica Eulerovog teorema za prost broj p i cijeli broj a koji nije djeljiv s p vrijedi:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

⚠ Oprez 3

Eulerov teorem vrijdi isključivo ako $gcd(a, n) = 1$

Definicija 7.4.4: Inverz modulo n

Ako $gcd(a, n) = 1$, postoji m (jedinstven po mod n) takav da $am \equiv 1 \pmod{n}$
Taj m nazivamo inverz od a modulo n

Napomena 7.4.5

Česte oznake su a^{-1} i $\frac{1}{a}$, ali najsigurnije je definirati oznaku na samom natjecanju Iz Eulerovog teorema vidimo da je $m \equiv a^{\phi(n)-1} \pmod n$
To nam uz brzo potenciranje daje efikasan način za pronalaženje točnog broja.

CRT

Teorem 7.4.6: Kineski teorem o ostacima / CRT

Neka su $m_1, m_2, \dots, m_k$ prirodni brojevi takvi da su svaka dva međusobno relativno prosti te neka je $M = m_1 m_2 \dots m_k$. Tada sustav:

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv x_2 \pmod{m_2}$$
$$\dots$$
$$x \equiv x_k \pmod{m_k}$$

ima jedinstveno rješenje modulo M.

Dokaz. Prvo nađimo rješenje za sustav gdje k=2:

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv x_2 \pmod{m_2}$$

gdje $gcd(m_1, m_2) = 1$.
Neka je a_1 modularni inverz od m_1 modulo m_2 i a_2 modularni inverz od m_2 modulo m_1. Primjetimo da je onda :

$$a_1 m_1 x_2 \equiv 0 \pmod{m_1}$$
$$a_1 m_1 x_2 \equiv x_2 \pmod{m_2}$$
$$a_2 m_2 x_1 \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$a_2 m_2 x_1 \equiv 0 \pmod{m_2}$$

Jasno je da iz toga slijedi:

$$a_1 m_1 x_2 + a_2 m_2 x_1 \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$a_1 m_1 x_2 + a_2 m_2 x_1 \equiv x_2 \pmod{m_2}$$

Stoga je $x \equiv a_1 m_1 x_2 + a_2 m_2 x_1$ jedno rješenje.
Preostaje dokazati da je jedinstveno. Recimo da y neko rješenje početnog sustava sustava, imamo:

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$y \equiv x_1 \pmod{m_1}$$

Slijedi: $x - y$ je djeljivo s m_1 i analogno $x - y$ je djeljivo s m_2 pa je dijeljivo i s $m_1 m_2$. Stoga $x \equiv y \pmod M$.
Slučaj $k = 2$ koristimo kao bazu indukcije.
Pretpostavimo da za $k = n$ teorem vrijedi.
Za $k = n+1$ iskoristimo dokazanu tvrdnju za $k = 2$ i "spojimo" kongruencije modulo m_1 i m_2 u jednu kongruenciju modulo $m_1 m_2$.Sada imamo sustav n kongruencija modulo relativno prostih brojeva i po pretpostavci indukcije teorem vrijedi.

$\square$

Napomena 7.4.7

CRT govori da je:

$$x \equiv x_M \pmod{M}$$

ekvivalentan samo jednom sustavu :

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv x_2 \pmod{m_2}$$
$$\dots$$
$$x \equiv x_k \pmod{m_k}$$

ako $m_1 m_2 \dots m_k = n$ i $gcd(m_i, m_j) = 1$.
Drugim riječima: ne moramo se bojati da smo dodali ili izgubili rješenja, ako smo rastavili kongruenciju na više ovakvih.

Oprez

Sustav u kojem $m - ovi$ nisu relativno prosti može i ne mora imati riješenje, ali o njima nam CRT ništa ne govori bez nekih dodatnih koraka.

Zadaci koje možemo rješiti i bez da znamo CRT

1. Nađi sva rješenja sustava:

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$
$$x \equiv 2 \pmod{11}$$

2. Nađi sva rješenja sustava:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$
$$x \equiv 2 \pmod{11}$$

3. Nađi sva rješenja sustava:

$$x \equiv 1 \pmod{10}$$
$$x \equiv 2 \pmod{11}$$

4. Nađi sva rješenja sustava:

$$x \equiv 1 \pmod{10}$$
$$x \equiv 2 \pmod{11}$$
$$x \equiv 10 \pmod{13}$$

Tipični CRT zadaci

5. Dokaži da za svaki n postoji n uzastopnih složenih brojeva.

6. Dokaži da za svaki n postoji n uzastopnih brojeva tako da nijedan od njih nije potencija prostog broja.

7. Dokaži da za svaki n postoji n uzastopnih brojeva djeljivih s kvadratom nekog prirodnog broja.

8. Dokaži da za svaki n postoji n uzastopnih brojeva takvih da nijedan od njih nije potpun kvadrat.

9. Dokaži da za svaki n postoji n uzastopnih brojeva takvih da je svaki od njih djeljiv s kvadratom nekog prirodnog broja, a nijedan od njih nije potpun kvadrat.

10. Dokaži da za svaki n postoji n-člani aritmetički niz takav da su svaka dva člana relativno prosta i da je svaki član složen broj.

11. All in one: Dokaži da za svaki n postoji n-člani aritmetički niz takav da su svaka dva člana relativno prosta, svaki član djeljiv s kvadratom nekog prirodnog broja, nije potpun kvadrat i nije potencija prostog broja.

12. Dokaži da za sve n i m u ravnini postoji $n \times m$ kvadrat koji ne sadrži točku (a, b) takvu da je $gcd(a, b) > 1$.

Skriveni CRT

13. Koliko rješenja ima kongruencija $x^2 \equiv x \pmod{n}$

14. Neka je n prirodan broj te su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (gdje je $k \geq 2$) različiti prirodni brojevi iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da n dijeli $a_i(a_{i+1} - 1)$ za $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Dokaži da n ne dijeli $a_k(a_1 - 1)$.

15. Dokažite da za svaki prirodni broj n postoji n prirodnih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$ većih od jedan takvih da su svaka dva međusobno relativno prosti te da je $k_1 k_2 \ldots k_n - 1$ jednak umnošku dva uzastopna prirodna broja.

16. Dokažite da za bilo koji prirodni k postoji aritmetički niz.

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

gdje su a_i i b_i relativno prosti. Svi članovi $a_1, a_2 \ldots, a_k, b_1, b_2 \ldots, b_n$ su međusobno različiti.

8. Predavanja za šestu grupu

8.1. C6: Emanuel Tukač - Konstrukcije u kombinatorici

Predavanje Hintovi Rješenja

Često se dešava da natjecatelji na kombinatornim zadacima nađu konstrukciju, ali nemaju ideje za dokaz maksimalnosti/minimalnosti. Obrnuta situacija je nešto rijeđa, ali jednako frustrirajuća. Cilj ovog predavanja je pokazati zadatke u kojima jedna strana motivira dokaz druge strane. Povezanost ta dva dijela dokaza korisna je i prije nego nađemo dokaz jedne strane, jer nam sama činjenica da su obje strane dokazive može pomoći u "pogađanju" rješenja. Način razmišljanja koji će biti opisan kroz predavanje primjenjiv je i na neke teže zadatke, ali se od njega mora na vrijeme odustati ako ne pomaže jer takva povezanost dviju strana dokaza ne mora nužno postojati.

Lakši zadaci

1. U 5×100 tablici n polja je označeno. Svako polje tablice ima najviše dva označena susjeda (susjedna polja dijele stranicu). Koja je najveća moguća vrijednost za n?

2. Promotrimo 2019×2019 tablicu sastavljenu od 2019^2 jediničnih kvadratića. Neka od njenih polja su označena, i vrijedi da za svako označeno polje postoji točno jedno označeno polje različito od njega koje je u istom retku ili stupcu. Koji je najveći mogući broj označenih polja u tablici?

3. Dan je jednakostraničan trokutna čijoj je svakoj stranici označeno po 9 točaka koje dijele tu stranicu na 10 sukladnih dijelova. Te su točke spojene s ukupno 27 dužina paralelnih stranicama trokuta. Na taj način trokut je podijeljen na 100 malih jednakostraničnih trokuta. Područje između dvije susjedne paralelne mdužine nazivamo *prugom*. Koliko najviše malih trokuta možemo odabrati tako da unutar nijedne pruge ne budu dva odabrana trokuta?

4. Neka je $n \geqslant 4$ prirodan broj. Promotrimo skup od n bakterija, takav da svaka bakterija osim jedne, koju ćemo zvati *Kraljica*, ima točno jednu majku (također bakteriju iz skupa). Kraljica nema niti jednu majku te je predak svim drugim bakterijama. Nijedna bakterija nije majka sama sebi. Kažemo da je bakterija U *tetka* bakterije V ako U nije majka od V i majka od U je majka majke od V. Odredi maksimalan broj parova bakterija (U, V) takvih da je U tetka od V.

   (Napomena: Kažemo da je bakterija A *predak* bakterije B ako postoji niz bakterija $x_1, x_2, \dots x_k$ takav da $x_1 = A$, $x_k = B$ te je x_i majka x_{i-1} za svaki $i \in \{2, 3, \dots k\}$)

Umjereni zadaci

5. Dan je povezan graf s 2023 čvora. Svaki čvor ima stupanj veći ili jednak 42. Koja je najveća moguća udaljenost dva čvora?

6. Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja n tako da vrijede sljedeći uvjeti: Svaki natjecatelj poznaje najviše n ostalih

natjecatelja i za svaki prirodni broj m takav da je $1 \leq m \leq n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno m ostalih natjecatelja.

7. A i B imaju 2014 karata označenih brojevima od 1 do 2014. A ima sve karte s parnim, a B sve karte s neparnim brojevima. A je poredao svoje karte ukurug redom, od 2 do 2014, u smjeru kazaljke na satu tako da se brojevi na kartama ne vide. B zna da su karte poredane tim redom i u tom smjeru, ali ne zna gdje se nalazi karta s brojem 2. Nakon toga , B na svaku A-ovu stavi po jednu od svojih karata i tako nastane 1007 parova karata. Za svaki se par usporedi brojeve na kartama i dodijeli jedan bod onom igraču na čijoj je karti veći broj. Odredi najveći mogući N tako da B može biti sigran da će ostvariti barem N bodova.

8. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Za prirodan broj $m \geq n+1$ kažemo da je *n-obojiv* ako je m kamenčića postavljeno na kružnici moguće obojati u n boja tako da se među bilo kojih $n+1$ uzastopnih kamenčića pojavljuje svih n boja.
Dokaži da postoji konačno mnogo prirodnih brojeva $m \geq n+1$ koji nisu *n-obojiv* i odredi najveći od njih.

9. Za prirodne brojeve raspoređene ukrug kažemo da su u *cik-cak* rasporedu ako je svaki broj ili veći ili manji od oba svoja susjeda. Za par susjednih brojeva kažemo da je dobar ako su nakon njegovog uklanjanja preostali brojevi također u cik-cak rasporedu.
Brojevi od 1 do 300 raspoređeni su u cik-cak raspored. Koliko je najmanji mogući broj dobrih parova susjednih brojeva?

Težak zadatak

10. Neka je n pozitivan cijeli broj. *Japanski trokut* sastoji se od $1+2+...+n$ krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta tako da za svaki $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi da i-ti redak sadrži i krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninja put* u japanskom trokutu je niz od n krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak.
U ovisnosti o n, nađi najveći k takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem k crvenih krugova.

8.2. G6: Krunoslav Ivanović - Spiralna sličnost i sl.

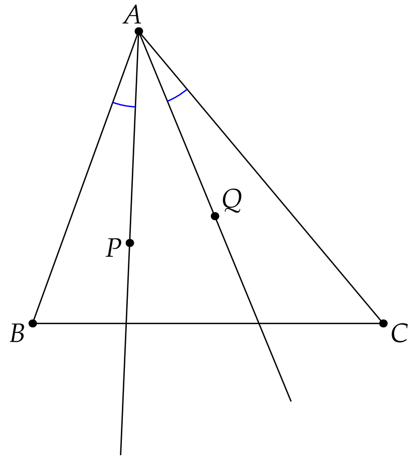
Predavanje

Hintovi

Rješenja

Kratki uvod u izogonalnost

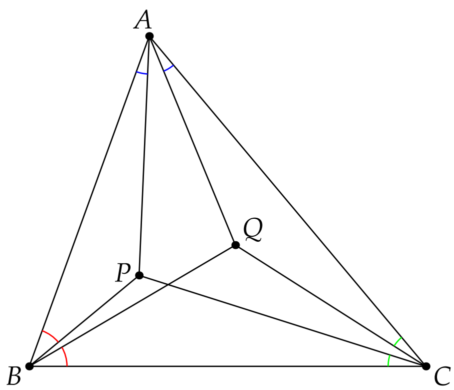
Važan koncept u geometriji trokuta je izogonalnost. Iako postoji puno tog što se može reći o izogonalosti, mi ćemo samo zagrebati površinu.



Pravci AP i AQ na slici gore su izogonalni s obzirom na kut pri vrhu A trokuta $\triangle ABC$. To znači da je simetrala kuta $\angle BAC$ ujedno i simetrala kuta $\angle PAQ$. Najprirodniji primjer izogonalnih pravaca u trokutu je visina iz nekog vrha i spojnica tog vrha sa središtem opisane kružnice, a u ovom predavnaju ćemo vidjeti još jedan poznat izogonalan par pravaca.
Također, koristan je i sljedeći koncept.

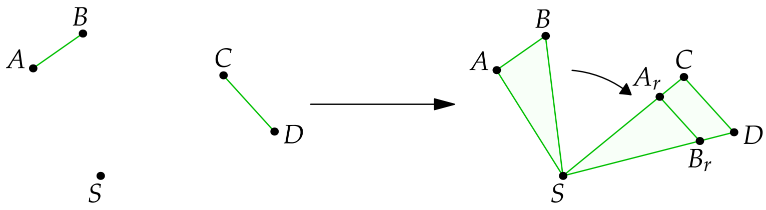
Definicija 8.2.1

Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i točka P u njegovoj ravnini. Neka su r_a, r_b i r_c pravci koje dobijemo preslikavanjem pravaca PA, PB i PC preko simetrala unutrašnjih kuteva pri vrhovima A, B i C. Tada se pravci r_a, r_b i r_c sijeku u jednoj točki koju nazivamo *izogonalnom konjugatom* točke P s obzirom na trokut $\triangle ABC$.



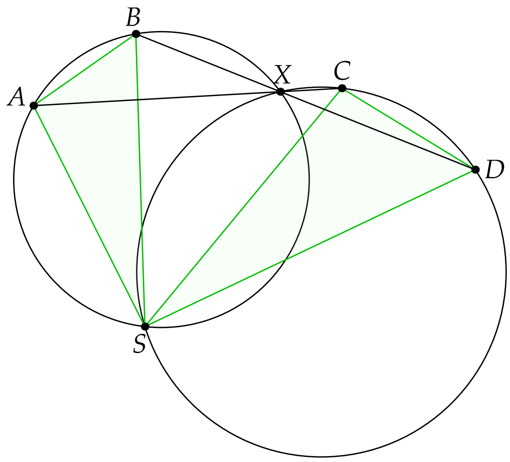
Dokaz da su pravci r_a, r_b i r_c kopunktalni u slučaju kada je P unutar trokuta $\triangle ABC$ (što nas načelno jedino i zanima) slijedi direktno iz trigonometrijske verzije Cevinog teorema te nije pretjerano pametan pa ga nećemo navoditi. Također, uočimo da ako je Q izogonalna konjugata točke P s obzirom na trokut $\triangle ABC$, tada je i P izogonalna konjugata točke Q (zato se i zovu konjugate!).
Naravno, uočimo da je središte upisane izogonalna konjugata samom sebi, a također uočimo da su ortocentar i središte opisane kružnice izogonalne konjugate, kao što smo gore spomenuli.

Spiralna sličnost



Prvo napravimo rotaciju, a onda homotetiju[1].

Naravno, pitanje koje se postavlja je kako zapravo odrediti to središte spiralne sličnosti te zašto je ono jedinstveno. Pitanje jedinstvenosti ćemo riješiti kasnije, no pitanje egzistencije je riješeno kroz sljedeću skicu.



Naime, središte spiralne sličnosti koja šalje dužinu $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$ se nađe tako što uvedemo $X = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ te presiječemo kružnice (ABX) i (CDX). Drugo sjecište tih kružnica označimo sa S i laganim angle chaseom dobivamo da su trokuti $\triangle SAB$ i $\triangle SCD$ slični. Naravno, onda je jasno da rotacijom i homotetijom iz S možemo transformirati $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$.
Također, sada vidimo da u slučaju kada je $ABCD$ paralelogram, ne možemo naći spiralnu sličnost koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$. Osim toga, daljnim angle chaseom vidimo da je S također središte spiralne sličnosti koja šalje $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$.
Sada kada smo pokazali da postoji jedno, dokažimo da je to središte spiralne sličnosti jedinstveno.

Teorem 8.2.2

Središte spiralne sličnosti koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$ je jedinstveno i dano je presjek kružnica (ABX) i (CDX) pri čemu je $X = \overline{BD} \cap \overline{AC}$. To središte je jedinstveno.

Dokaz. Neka je S središte spiralne sličnosti i neka je X presjek kružnica (ABS) i (CDS). Želimo pokazati da je $X = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, odnosno, da su AXC i BXD kolinearne. Uočimo da zbog sličnosti imamo

$$\angle SAB = \angle SCD, \angle SBA = \angle SDC, \angle BSA = \angle CSD.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}\angle BXD &= \angle BXA + \angle AXS + \angle SXD \\ &= \angle BSA + \angle SBA + \angle SCD \\ &= \angle BSA + \angle SBA + \angle SAB = 180^\circ\end{aligned}$$

[1] naravno, ove dvije transformacije komutiraju pa nam je potpuno svejedno što ćemo raditi prvo, a što drugo

pri čemu dane jednakosti vrijede zbog tetivnosti. Uočimo da to znači da su točke B, X i D kolinearne, a potpuno analogno dobijemo da su točke A, X i C kolinearne. Dakle, za bilo koju točku S koja je centar spiralnih sličnosti, sjecište kružnica (SAB) i (SCD) je u biti presjek dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Zbog toga dobivamo da je točka S jedinstvena.

□

Simedijane

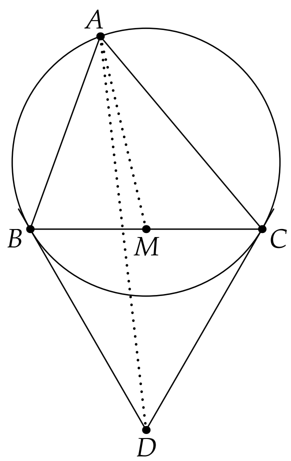
Definicija 8.2.3

Simedijana je izogonala težišnice u nekom trokutu.

Ključna je sljedeća lema.

Lema 8.2.4

Neka je dan trokut $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom Γ. Neka se tangente na Γ u B i C sijeku u D. Tada je AD simedijana iz vrha A trokuta $\triangle ABC$.



Dokaz. Neka je O središte opisane kružnice i neka je ω kružnica sa središtem u D i radijusem DB. Neka pravci AB i AC sijeku ω u P i Q, redom. S obzirom da je $\angle BAC = \angle AQP$, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle AQP$ su slični. Ideja je da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle AQP$, do na homotetiju, preslike jedan drugo preko simetrale kuta $\angle A$.
S obzirom da je

$$\angle PBQ = \angle BQC + \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BDC + \angle BOC) = 90^\circ,$$

vidimo da je PQ promjer kružnice ω pa prolazi kroz D. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. S obzirom da je D polovište dužine $\overline{QP}$, gore spomenuta sličnost trokuta povlači da je $\angle BAM = \angle QAD$, odakle slijedi izogonalnost.

□

Jedna posebna spiralna sličnost

Naposljetku, dolazimo do ključne ideje predavanja, koja će povezati sve koncepte koje smo do sada spomenuli. Naime, vratimo se u slučaj spiralne sličnosti koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$ i zanima nas što se događa u slučaju kada je $B = C$ ili $A = D$.

Lema 8.2.5

Neka je dan trokut $\triangle ABD$ i neka je točka E drugo sjecište simedijane iz B s opisanom kružnicom. Tada je M, polovište tetive $\overline{BE}$, središte spiralne silčnosti koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$.

Dokaz. Pravac BE je simedijana u trokutu $\triangle ABD$ pa je AD simedijana u trokutima $\triangle EAB$ i $\triangle EDB$, dakle,

$$\angle MAB = \angle DAE = \angle DBE = \angle DBM; \qquad \angle BDM = \angle ADE = \angle ABE = \angle ABM$$

pa su trokuti $\triangle AMB \sim \triangle AED \sim \triangle BMD$ slični. Zbog jedinstvenosti središta spiralne sličnosti, slijedi zaključak.

□

Štoviše, kako je BE također simedijana u trokutu $\triangle AED$, analogno se pokaže da su i trokuti $\triangle AME$, $\triangle ABD$ i $\triangle EMD$ u parovima slični, pa je M središte spiralne sličnosti koja šalje $\overline{AE}$ u $\overline{ED}$. Da zaključimo, dokazali smo sljedeće.

Lema 8.2.6

Neka su AB i BD dvije dužine takve da A, B i D nisu kolinearne. Neka je M središte spiralne sličnosti koja šalje $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$ i E preslika od B preko M. Vrijedi:

- ME je B-simedijana trokuta $\triangle ABD$ (dakle, također i E-simedijana trokuta $\triangle AED$);
- četverokut $ABDE$ je tetivan;
- M šalje dužinu AE u dužinu ED;
- A šalje $\overline{BM}$ u $\overline{DE}$, a D šalje $\overline{BM}$ u $\overline{AE}$.

Daljnje čitanje

Predavanje je načelno sastavljeno prema sljedećim materijalima, gdje možete detaljnije pročitati o temama koje smo prošli danas:

- Yufei Zhao, Three geometry lemas (Rješenja)
- Yafet Baca, On a special center of spiral similarity
- Anant Mudgal; Gunmay Handa, A special point on the median

Zadaci

1. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{i} \quad \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA.$$

Dijagonale BD i CE sijeku se u P. Dokažite da pravac AP raspolavlja dužinu CD.

2. Neka je $ABCD$ četverokut, i neka su točke E i F na stranicama AD i BC, redom, takve da je $AE/ED = BF/FC$. Polupravac FE siječe polupravce BA i CD u točkama S i T, redom. Dokaži da se opisane kružnice trokuta SAE, SBF, TCF i TDE sijeku u jednoj točki.

3. Točke X i Y su na produžecima stranica AB i AC preko vrhova B i C takve da je $BX = CY$. Kružnice (AXC) i (AYB) se sijeku u A i Z. Dokaži da točka Z leži na simetrali kuta $\angle CAB$

4. $ABCD$ je jednakokračan trapez takav da je $AB \parallel CD$. ω je kružnica koja prolazi kroz C i D te siječe CA i CB u točkama A_1 i B_1. Točke A_2 i B_2 su simetrične točkama A_1 i B_1 s obzirom na polovišta stranica CA i CB. Dokaži da su točke A, B, A_2 i B_2 konciklične.

5. Neka je N polovište luka ABC opisane kružnice trokuta ΔABC i neka su NP i NT tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC(P i T su na upisanoj kružnici). Pravci BP i BT sijeku kružnicu (ABC) u točkama P_1 i T_1. Dokaži da je $PP_1 = TT_1$.

6. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ takav da je $AC = BC$ i točka P unutar njega takva da je $\angle PAB = \angle PBC$. Ako je M polovište dužine AB, dokažite da je tada $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

7. U ravnini, dvije kružnice se sijeku u točkama A i B, a zajednička tangenta ih dira u točkama P i Q, redom. Neka se tangente u točkama P i Q na opisanu kružnicu trokuta APQ sijeku u S, a neka je H preslika točke B preko pravca PQ. Dokažite da su točke A, S i H kolinearne.

8. Dana je kružnica k sa središtem O. Nekaj e AB tetiva te kružnice i M njeno polovište. Tangente na kružnicu k u točkama A iB sijeku se u T. Pravac ℓ prolazi točkom T, siječe kraći luk AB u točki C, a dulji luk AB U točki D i rpitom je $|BC| = |BM|$. Dokaži da je središte kružnice opisane trokutu ADM osnosimetrično točki O u odnosu na pravac AD.

9. Neka su R i S različite točke na kružnici Ω takve da RS nije promjer. Neka je ℓ tangenta na Ω u R. Točka T je takva da je S polovište dužine $\overline{RT}$. Točka J je odabrana na kraćem luku RS kružnice Ω tako da Γ, opisana kružnica trokuta $\triangle JST$ siječe ℓ u dvije različite točke. Neka je A presjek pravca ℓ s kružnicom Γ bliži točki R. Pravac AJ siječe Ω opet u K. Dokažite da je KT tangenta na Γ.

8.3. A6: Janko Bušelić - Algebra mix

Predavanje

Hintovi

Rješenja

1. Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of positive real numbers with the property that

$$(a_{n+1})^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2}$$

for all positive integers n. Show that $a_{2022} \leq 1$.

2. Let $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ be pairwise different positive real numbers such that

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

is an integer for every $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Prove that $a_{2023} \geqslant 3034$.

3. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an infinite sequence of real numbers, for which there exists a real number c with $0 \leq a_i \leq c$ for all i, such that

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j} \quad \text{for all } i,\ j \text{ with } i \neq j.$$

Prove that $c \geq 1$.

4. Define the function $f : (0, 1) \to (0, 1)$ by

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } \ x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{if } \ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Let a and b be two real numbers such that $0 < a < b < 1$. We define the sequences a_n and b_n by $a_0 = a, b_0 = b$, and $a_n = f(a_{n-1})$, $b_n = f(b_{n-1})$ for $n > 0$. Show that there exists a positive integer n such that

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

5. For a sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of real numbers, we define its *price* as

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_1 + \cdots + x_i|.$$

Given n real numbers, Dave and George want to arrange them into a sequence with a low price. Diligent Dave checks all possible ways and finds the minimum possible price D. Greedy George, on the other hand, chooses x_1 such that $|x_1|$ is as small as possible; among the remaining numbers, he chooses x_2 such that $|x_1 + x_2|$ is as small as possible, and so on. Thus, in the i-th step he chooses x_i among the remaining numbers so as to minimise the value of $|x_1 + x_2 + \cdots x_i|$. In each step, if several numbers provide the same value, George chooses one at random. Finally he gets a sequence with price G.

Find the least possible constant c such that for every positive integer n, for every collection of n real numbers, and for every possible sequence that George might obtain, the resulting values satisfy the inequality $G \leq cD$.

6. Niz realnih brojeva $x_0, x_1, x_2, \ldots$ zadan je s $x_0 = x_1 = 1$ i

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{2} + x_{n-1}x_{n-2}}, n \geq 2$$

Postoji li realan broj A takav da je

$$An < x_n < An + 1, \forall n \in \mathbb{N}?$$

8.4. N6: Ivan Vojvodić - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Poznato je da se na zadnji dan kampa ujutro stavljaju sva najkvalitetnija predavanja, stoga ste danas zapeli sa mnom.
Otkada je Ivan Novak završio natjecateljsku karijeru, funkcijske jednadžbe u teoriji brojeva su tema koja se nerijetko pojavljuje na shortlistu, a zna tu i tamo doći na MEMO i HMO.

Tips and tricks

Prvo i najvažnije kao i kod svih funkcijskih jednadžbi je pogoditi koja bi bila očita rješenja (najčešće su to i jedina), dakle konstante, $f(x) = x$, $f(x) = cx$ za neki c i slično.

Oprez: Obligatorna napomena u svakom mogućem predavanju iz funkcijskih

Za svako rješenje funkcijske jednadžbe se mora **PROVJERITI** da li zadovoljava jednadžbu jer ćete inače izgubiti najdebilniji bod na svijetu.

Glavna taktika specifična za funkcijske u teoriji brojeva je naći nekakve djeljivosti (najčešće su i zadane u obliku nešto dijeli nešto) i pokušati uvrštavanjima namjestiti da djeljenik ima što manje prostih faktora (najbolje je da sam bude prost) jer onda znamo da djelitelj ima jako malo opcija. Osim toga, najčešća taktika dovršavanja zadatka je da uspijemo fiksirati djeljenik i "pustiti" djeljitelj da bude proizvoljno velik, jer onda znamo da djeljenik mora biti 0 (i npr ako je djeljenik $f(n) - n$, već smo gotovi). Ovo možda zvuči apstraktno onima koji se prvi put susreću s ovom temom, stoga ćemo proći kroz primjer na kojem vidimo o čemu se radi.

Primjer 1 (APMO 2019/1). Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (a, b) vrijedi

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

Rješenje 1. je na ploči $\square$

Lakši zadaci

1. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

2. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

3. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(a) + f(b) \mid (a + b)^2$$

za sve $a, b \in \mathbb{N}$

4. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (a, b) vrijedi

$$f(a) + f(b) \mid 2(a + b - 1)$$

5. Neka je $\mathbb{P}$ skup svih prostih brojeva. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takve da za svaki par prostih brojeva (p, q) vrijedi

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća 2 uvjeta:

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(a, b) + a + b = f(a, 1) + f(1, b) + ab.$$

- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a + b$ i $a + b - 1$ djeljiv s prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a, b)$ djeljiv s p.

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da $f(n!) = f(n)!$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te $m - n \mid f(m) - f(n)$ za sve različite $m, n \in \mathbb{N}$.

8. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi

$$f(mn) = \operatorname{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n))$$

9. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ koje zadovoljavaju sljedeća 3 uvjeta:

- postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $f(n) \neq 0$
- $f(xy) = f(x) + f(y)$ za svaki $x, y \in \mathbb{N}$
- Postoji beskonačno $n \in \mathbb{N}$ takvih da za svaki $k < n$ vrijedi $f(k) = f(n - k)$

9. Predavanja za sedmu grupu

9.1. C7: Matej Vojvodić - Igre za zaigrane

Predavanje Hintovi Rješenja

Za početak, predstavit ćemo dvije lagane igre kako bismo na njima analizirali strategije.

Primjer 1. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je umnožak brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 1. Jednostavno možemo zaključiti da je odgovor Matej — on može napisati broj 2 (ili bilo koji paran broj), pa će umnožak brojeva na ploči u svakom slučaju biti paran. □

Strategija koju Matej koristi u ovom slučaju je **konstantna**: ona u obzir ne uzima što bi Patricija mogla igrati. U ovakvom je zadatku najbitniji dio dokazati da je strategija pobjednička bez obzira na to što igra drugi igrač. Kada bismo zamijenili uvjete pobjede igrača, tj. kada bi Matej pobjeđivao ako je na ploči neparan broj, a Patricija ako je na ploči paran broj, pobjednica bi bila Patricija jer u tom slučaju može koristiti istu strategiju.
Ovakvim strategijama se uglavnom nećemo baviti u ovom predavanju jer se izrazito mali broj igara može dobiti koristeći konstantnu strategiju; takve igre su najčešće prekrivene invarijante.

Primjer 2. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je zbroj brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 2. Sada je pak odgovor Patricija, ali njena strategija ovisi o tome što će Matej zapisati.

- Ako Matej napiše paran broj, Patricija mora napisati neki neparan broj.
- Ako Matej napiše neparan broj, Patricija mora napisati neki paran broj.

Poznato je da je zbroj parnog i neparnog broja neparan, pa Patricija može pobijediti u oba slučaja. □

Budući da je strategija dovoljno jednostavna, umjesto rastavljanja na slučajeve mogli smo jednostavnije reći: "Patricija piše broj suprotne parnosti od Matejevog".
Ovo je primjer **reaktivne** strategije jer se strategija velikim dijelom temelji se upravo na tome što će napraviti drugi igrač. Većina zadataka u ovom članku zasnivat će se upravo na traženju reaktivne strategije i dokazivanju da je ona pobjednička.

Simetrija

Pošto smo izgradili osjećaj za pojam strategije na laganim primjerima, promotrimo nešto zahtjevnije primjere (ali i dalje relativno lagane) u kojima igrač koji ima pobjedničku strategiju mora paziti kako će reagirati na poteze protivnika. Često će nam motivacija za strategiju biti traženje neke simetrije s obzirom na poteze drugog igrača, a najčešće ćemo iskoristiti neku geometrijsku simetriju, poput osne ili centralne simetrije, ili neki način sparivanja.

Primjer 3. Na ploči je redom napisano n minusa. Mislav i Mislav naizmjence prepravljaju jedan ili dva susjedna minusa u plus. Pobjednik je onaj igrač koji prepravi posljednji minus. Koji igrač pobjeđuje ako Mislav igra prvi?

Rješenje 3. Prvi Mislav želi prepraviti "sredinu niza". Ako je n neparan, prepravlja srednji minus u plus, a ako je n neparan, onda prepravlja dva srednja minusa u plus. Nakon prvog poteza, prvi Mislav zrcali poteze drugog Mislava na suprotnoj strani s obzirom na sredinu niza, što ga dovodi do pobjede. Jasno se vidi da kako je prvi potez podijelio niz na dvije simetrične polovice, bez obzira na to što Mislav odigra, Mislav može osigurati da nakon njegovog poteza niz minuseva i pluseva ostane simetričan. Dakle, igra može stati jedino ako Mislav nema što igrati, pa zaključujemo da Mislav pobjeđuje. $\square$

Kopiranje poteza drugog igrača zbog neke postojeće simetrije u igri i dopuštenim potezima jedan je od najčešćih načina stvaranja reaktivne strategije. Tako će biti i u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Borna i Janko naizmjence postavljaju po jednog skakača na šahovsku ploču. Skakača se ne smije postaviti na već zauzeto polje ili polje koje neki drugi skakač napada, a gubitnik je onaj tko ne može odigrati potez. Koji igrač pobjeđuje ako Janko igra prvi?

Rješenje 4. Pretpostavimo da je prvi igrač postavio svog skakača na dopušteno polje. Drugi igrač može staviti svog skakača osnosimetrično položaju posljednje postavljenog skakača s obzirom na pravac koji leži između 4. i 5. stupca. Sada je drugi igrač taj koji nakon svog poteza održava simetriju ploče!
Ako je prvi igrač postavio svog skakača, možemo garantirati dvije stvari: to je polje bilo slobodno i nije ga napadao niti jedan od ranije postavljenih skakača. Zbog simetrije, polje na koje drugi igrač želi postaviti skakača zasigurno je također prazno i ne napada ga niti jedan od skakača, osim možda upravo postavljenog jer je taj jedini postavljen u međuvremenu. Budući da je stanje na ploči simetrično u odnosu na os simetrije, osnosimetrična polja su u istom redu, a kako skakač sigurno ne napada niti jedno polje u istom redu, drugi igrač sigurno može postaviti skakača na željeno polje. Dakle, Borna uvijek može igrati ako Janko može igrati, a kako igra mora završiti jer je moguće postavit pa po ranijem dokazanom Borna pobjeđuje jer sigurno ima potez koji može igrati. $\square$

Ostavljam sljedeće primjere kao vježbu:

Zadatak 5. Nina i Ines imaju 10 žetona: 2 bijela, 2 crna, 2 crvena, 2 plava i 2 zelena. Naizmjence stavljaju žetone na vrhove konveksnog deseterokuta. Ines želi napraviti niz od 5 žetona različitih boja, a Nina ju ometa u tome. Koji igrač pobjeđuje ako Nina počinje? A što ako Ines počinje?

Zadatak 6. Viktor i Emil igraju igru koristeći okrugle žetone istog radijusa na pravokutnoj ploči. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ranije postavljenima i da se u cijelosti nalazi na ploči. Gubi onaj koji više ne može postaviti žeton na ploču. Tko dobiva ako Viktor ide prvi?

Zadatak 7. U gornjem desnom kutu pravokutne šahovske ploče dimenzije $m \times n$ nalazi se kamen. Jurica i Tin naizmjence pomiču kamen proizvoljan broj polja prema dolje ili ulijevo. Pobjeđuje igrač koji kamen pomakne u donji lijevi kut. Ako je Tin prvi na potezu, pronađi sve parove (m, n) za koje on ima pobjedničku strategiju.

Pobjedničke i gubitničke pozicije

Osim traženja konkretne pobjedničke strategije, često ima smisla promatrati pobjedničke i gubitničke pozicije. Pozicija je općenito neko stanje igre, npr. položaj figura na ploči, broj i veličina hrpa, brojevi na ploči itd.
Za poziciju kažemo da je pobjednička za nekog igrača ako se točno u njoj ostvaruje uvjet pobjede za tog igrača, a za drugog igrača kažemo da je ta pozicija gubitnička. Inače poziciju zovemo pobjedničkom ako vodi u barem jednu gubitničku, a gubitničkom ako vodi isključivo u pobjedničke za drugog igrača. Kako bismo približili ovu ideju, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 8. Na stolu se nalazi 10 šibica. Ana i Banana sa stola uzimaju 1, 2 ili 3 šibice naizmjence. Pobjednik je onaj koji uzme zadnju šibicu. Ako Ana igra prva, tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 8. Lako vidimo da ako je na stolu samo 1, 2 ili 3 šibice, pobjeđuje onaj igrač koji je na potezu. Zato su pozicije s 1, 2 i 3 šibice pobjedničke. Jednako tako, lako se vidi da je pozicija sa 4 šibice gubitnička jer svaki potez vodi u pobjedničku poziciju za drugog igrača.
S obzirom na to da je na stolu relativno malo šibica, možemo do kraja raspisati koje su pozicije pobjedničke, a koje gubitničke. Vrlo brzo vidimo da Ana dobiva. Konkretno, pozicije s 5, 6 i 7 šibica su ponovo pobjedničke jer je moguće protivnika dovesti u poziciju s 4 šibice koja je gubitnička za njega. Pozicija s 8 šibica je ponovo gubitnička jer vodi samo u pobjedničke, a iz pozicija s 9 i 10 šibica moguće je doći do 8 šibica, pa su zato pobjedničke. Dakle, Ana može pobijediti. □

Zadatak 9. Na stolu se nalazi n šibica. Kruno i Kraljević mogu u jednom potezu uzeti bilo koji broj šibica između 1 i k uključivo, s tim da Kruno igra prvi. Odredite kako n ovisi o k kada Kraljević dobiva.

Rješenje 9. Ostavljeno čitatelju za vježbu. :) □

U sljedećem primjeru neće biti moguće na toliko izravan i lijep način odrediti pobjednika. Vrijeme je da vidimo kako možemo težak zadatak riješiti gotovo bez ikakvog pametnog uvida.

Primjer 10. Na stolu se nalazi 20 šibica. Mare i Maša naizmjence sa stola uzimaju po 2, 3, 5 ili 8 šibica. Gubi ona koja ne može igrati (tj. broj šibica je manji od 2). Ako Mare igra prva, tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 10. Raspišimo pobjedničke i gubitničke pozicije po broju preostalih šibica:

- Pozicije 0 i 1 su očito gubitničke pozicije za igrača koji je na potezu.
- Pozicije 2, 3, 5 i 8 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 0.
- Pozicije 4, 6 i 9 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 1.
- Pozicija 7 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3 ili 5) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (5, 4 ili 2).
- Pozicije 10, 12 i 15 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 7.
- Pozicija 11 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (9, 8, 6 ili 3).
- Pozicije 13, 14, 16 i 19 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 11.

- Pozicija 17 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (15, 14, 12 ili 9).
- Pozicija 18 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (16, 15, 13 ili 10).
- Pozicija 20 je pobjednička jer igrač može uzeti 2 šibice i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 18.

Dakle, ako Mare igra prva, pobjeđuje jer je pozicija 20 pobjednička za onog igrača koji je na potezu. □

Nije najljepši način, ali radi, samo treba biti uporan. :)
Slijedi još jedan sličan zadatak (koji je ponovno najlakše riješiti ispisivanjem svih pozicija), i jedan ipak malo manje sličan primjer u kojem ćemo dublje ući u igru predstavljenu u prošlom zadatku.

Zadatak 11 (Žup 2021. SŠ1A). Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić. Koji igrač sigurno može pobijediti?

Primjer 12. Na stolu se nalazi 2023 šibice. Mare i Maša naizmjence sa stola uzimaju po 2, 3, 5 ili 8 šibica. Gubi ona koja ne može igrati (tj. broj šibica je manji od 2). Ako Mare igra prva, tko sigurno može pobijediti?

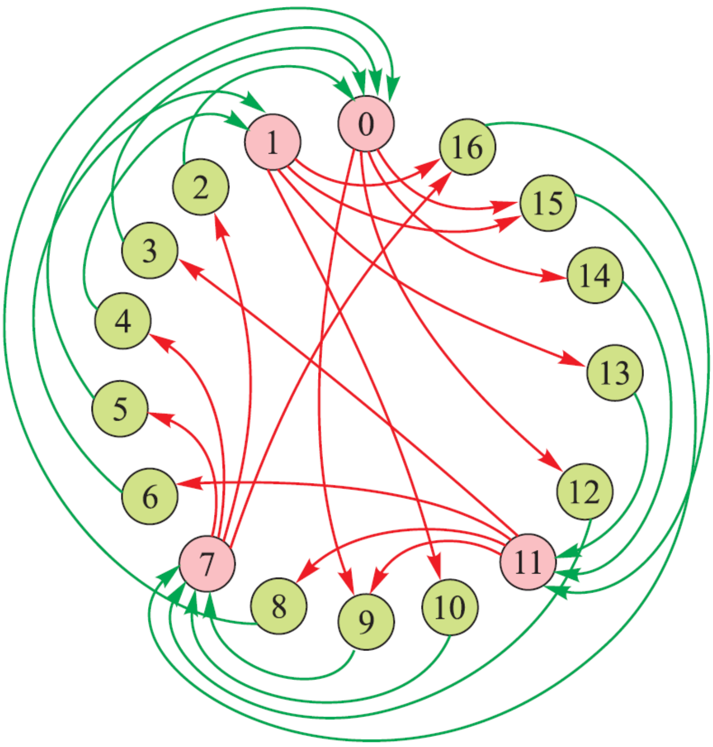
Rješenje 12. Pogledamo li prvih nekoliko pozicija (za male početne brojeve šibica), uočit ćemo sljedeće pobjedničke i gubitničke pozicije:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G	G	P	P	P	P	P	G	P	P	P	G	P
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	P	P	P	G	G	P	P	P	P	P	G	P
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P	P	G	P	P	P	P	P	G	G	P	P	P

Slika 9.1: Pobjedničke (P) i gubitničke (G) pozicije

Hm, ok, čini se da se pozicije dalje ciklički ponavljaju s periodom 17. Motivirati nas mogu dvije uzastopne gubitničke pozicije, a daljnim raspisivanjem se možemo uvjeriti da bi 17 zaista trebao biti period. **Ok... a kako ćemo to dokazati?!**

Na slici 9.2 su vrhovi 0, 1, 7 i 11 crveni jer su gubitničke pozicije i iz njih vode crvene strelice u pripadne pobjedničke pozicije. Ostali su vrhovi zeleni jer su pobjedničke pozicije te su zelenim strelicama istaknuti neki mogući potezi koji vode u pripadne gubitničke pozicije.



Slika 9.2: Graf strategija

Dapače, ovaj graf možemo koristiti i pri pravoj igri jer pokazuje i pobjedničku strategiju, tj. koji potez vodi u gubitničku poziciju za drugog igrača. *Inače, rigorozan matematički dokaz rješenja ovog zadatka se provodi jakom indukcijom tako da se pokrije svih 17 mogućnosti, ali se izostavlja ovdje jer ga se predavaču ne da zapisati.* Konačno, sada kada smo razvili svu potrebnu teoriju, možemo zaključiti da kako je 2023 djeljiv sa 17, pobjeđuje drugi igrač. □

Ukratko, ako nije odmah jasno koje su pobjedničke pozicije, korisno je ipak napasti zadatak, pa uz raspis probati uočiti uzorak i zatim ga dokazati.

Zadatak 13. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Mila i Karlo s hrpe naizmjence uzimaju neki broj kamenčića, a pobjeđuje onaj igrač koji uzme zadnji kamenčić. Ako Mila ide prva, za koje n ima pobjedničku strategiju ako broj kamenčića koji miču s hrpe ni u kojem potezu ne smije biti složen broj? Što ako pak ne smije biti prost broj?

Rješenje 13. Ostavljeno čitateljici za vježbu. :) □

Ovdje ističem još jedan zanimljiv primjer. Preporučam svima koji ga nikad nisu vidjeli da se zadrže na njemu i sam ga pokušaju riješiti prije nego što pročitaju rješenje na drugoj strani papira.

Primjer 14. Dvopotezni je šah po svim pravilima jednak običnom šahu, no svaki igrač, umjesto da odigra jedan potez, igra dva. Dakle, najprije bijeli odigra dva poteza, pa crni odigra dva poteza, pa bijeli dva poteza, itd. Uz optimalnu igru, koji igrač sigurno ne može izgubiti?

Rješenje 14. Bijeli ne može izgubiti, a dokaz provodimo kontradikcijom.
Pretpostavimo suprotno, tj. da bijeli može izgubiti uz optimalnu igru, pa zato početna pozicija mora biti gubitnička za bijeloga. Ukoliko je početna pozicija gubitnička, dobivena će pozicija biti pobjednička za crnoga neovisno o prva dva poteza bijeloga. Sada je kontradikciju najlakše pronaći tako da od svih mogućih načina na koje se mogu odigrati prva dva poteza odaberemo onaj za koji lagano možemo odrediti stavlja li zaista crnoga u pobjedničku poziciju.
Pozicija za koju je to najlakše odrediti je početna, zato jer smo o njoj već zaključili da je gubitnička za igrača na potezu. Uzmimo primjerice poteze skakača s B1 na C3, a zatim u drugom potezu nazad s C3 na B1. Razlog za ovakav potez je pustiti crnoga da igra iz početne pozicije.
Po pretpostavci, nakon tih odigranih poteza bijeloga, dobivena pozicija je pobjednička za crnoga (ali je on sada igrač na potezu). Sada kada je bijeli prepustio potez, uspio je natjerati crnoga da postane onaj koji mora vući poteze iz početne pozicije koja je po pretpostavci gubitnička. Dakle, crni je istvremeno u pobjedničkoj i gubitničkoj poziciji, što je kontradikcija. Zaključujemo da je pretpostavka da je početna pozicija gubitnička lažna, stoga prvi igrač ne može izgubiti. □

⚠ Oprez

Analizu pobjedničkih i gubitničkih pozicija može se napraviti **samo u igrama koje završavaju**! Ako bismo na primjer imali igru koja ne mora završiti, tada nije istina da ukoliko je početna pozicija gubitnička za sve osim jednog igrača, da on zaista i može dobiti!

Sad vi sami!

1. Na tri hrpe nalaze se žetoni, na prvoj hrpi 2 žetona, na drugoj 3, a na trećoj 4 žetona. Igraju dva igrača. Jednim potezom dozvoljeno je jednu hrpu razdvojiti na dvije manje hrpe žetona. Gubi igrač koji nema mogućnost odigrati potez. Tko pobjeđuje?

2. Na stolu su dvije hrpe žetona veličine n i m. Martin i Mislav igraju naizmjence, a u jednom potezu mogu uzeti proizvoljan broj žetona s hrpe koju odaberu. Pobjednik je onaj koji uzme zadnji žeton. Ako Martin igra prvi, tko sigurno može pobijediti u ovisnosti o n i m?

3. Brojevi od 1 do 6 napisani su jedan za drugim. Igrači naizmjence raspoređuju znakove plus i minus između tih brojeva. Kad se sva mjesta popune, izračunava se rezultat. Ako je rezultat paran broj, pobjednik je prvi igrač, a ako je neparan, pobjednik je drugi igrač. Tko pobjeđuje?

4. Dva igrača igraju križić-kružić na ploči 9x9. Za svaki red i za svaki stupac u kojem na kraju igre ima više križića nego kružića prvi igrač dobije jedan bod. Drugi igrač dobiva po jedan bod za svaki red i za svaki stupac u kojem ima više kružića nego križića. Koji će igrač imati više bodova?

5. Jurica i Mila igraju igru s čokoladom oblika pravokutnika dimenzija $m \times n$ koja se sastoji od jediničnih kvadratića. Igrači naizmjence biraju jedan od preostalih kvadratića te odlome (i pojedu) sve kvadratiće koji se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu niže od odabranog, kao i sve one koji su time ostali odvojeni od ostatka čokolade, pri čemu gornji lijevi kvadratić čokolade ostaje nepojeden. Gubi onaj igrač koji pojede zadnji kvadratić, tj. onaj u gornjem lijevom kutu. Ako Mila igra prva, tko pobjeđuje?

Zadaci

6. Viktor i Karlo igraju kartašku igru s $2n$ karata koje su numerirane s $1, 2, \ldots, 2n$. Na početku svaki igrač ima n karata. Nakon toga naizmjence bacaju karte sve dok zbroj bačenih karata ne bude djeljiv s $2n+1$. Ako je zbroj bačenih karata djeljiv s $2n+1$, pobjeđuje zadnja osoba koja je bacila kartu. Tko ima pobjedničku strategiju ako Viktor igra prvi?

7. Nick i Charlie igraju sljedeću igru. Najprije Charlie odabere bilo koju permutaciju prvih n prirodnih brojeva. Zatim naizmjence (tako da Nick ide prvi) izvode jedan od ova poteza:

(i) igrač napiše novu permutaciju.

(ii) iz permutacije makne najveći broj k i napiše dobivenu permutaciju $k-1$ brojeva.

Pritom igrač ne smije napisati već ranije napisanu permutaciju. Gubi onaj koji ne može zapisati nijednu permutaciju.

8. Nina i Jurica na ploču su napisali 2023 uzastopna prirodna broja počevši od nekog n. Nakon toga naizmjence brišu po jedan broj s ploče, sve dok na ploči ne ostanu samo dva broja. Nina dobiva ako su preostali brojevi relativno prosti, a Jurica ako imaju zajednički djelitelj.

a) Ako Nina igra prva, tko pobjeđuje?

b) Ako Jurica igra prvi, tko pobjeđuje?

9. Zadan je pravilni mnogokut s n vrhova. Ines i Viktor naizmjence crtaju dijagonale tog mnogokuta, ali gube ako nacrtaju dijagonalu koja bi sjekla neku od već nacrtanih dijagonala (osim u vrhovima). Ako Ines crta prva, tko ima pobjedničku strategiju?

10. Emil i Maša igraju naizmjence igru na setu S. S prije prvog poteza sadrži sve prirodne brojeve manje od 2023. U jednom potezu, igrač bira $k \in S$ i miče sve njegove djelitelje iz S. Gubitnik je onaj koji ne može napraviti potez. Emil ide prvi, tko pobjeđuje?

11. Nina i Jurica igraju sljedeću igru u 4×4 tablici. U svakom potezu, igrač bira polje i u njega upisuje neki realan broj koji se još nije pojavio. Nakon što se popune sva polja, oboje se polja s najvećim brojem u svakom redu. Nina dobiva ukoliko postoji put od bilo koje vanjske stranice tablice do nasuprotne preko obojanih polja, a Jurica ju ometa. Polja su susjedna ukoliko se dodiruju u vrhovima. Ako Nina ide prva, tko dobiva?

12. Na ploči je zapisan broj $2023!$. Mare i Emil igraju igru, tako da u svakom potezu igrač izabere prirodan broj s najviše 20 različitih prostih faktora koji je manji ili jednak broju na ploči. Tada broju na ploči oduzme se taj broj i na ploču se napiše dobivena razlika. Pobjednik je igrač koji može izabrati broj jednak broju na ploči. Tko ima pobjedničku strategiju?

13. Neka je N umnožak k različitih prostih brojeva ($k \geq 3$). Mila i Ines naizmjence pišu složene djelitelje od N na ploču po pravilima. Nitko ne smije zapisati N. Ne smiju zapisati broj kojim bi nastao bilo par relativno prostih brojeva, bilo par brojeva od kojih manji dijeli veći. Gubitnik je onaj koji ne može napisati sljedeći broj. Ako Mila kreće, tko dobiva?

14. Tin i Karlo igraju sljedeću igru na šahovskoj ploči: najprije Karlo stavi figuru na proizvoljno polje. Zatim Tin i on naizmjence vuku poteze tom figurom kao u šahu, ali ju ne smiju vratiti na već posjećeno polje. Tko pobjeđuje (ovisno o figuri)?

Riješite zadatak za sve figure: pijun, dama, top, lovac, kralj, skakač.

Komentar: *Uzmite da se pijun može kretati samo jedno polje naprijed prema unaprijed određenom smjeru, te ignorirajte ostala pravila šaha.*

15. Na stol je postavljeno 2023 karte pri čemu su sve okrenute na zlatnu stranu, a plava strana je na stolu. Tin i Maša igraju sljedeću igru: igrač koji je na potezu bira neku kartu koja trenutno pokazuje zlatnu stranu i okreće nju i 49 karata njoj s lijeva na drugu stranu (one koje su pokazivale zlatnu stranu sad pokazuju plavu, a one koje su pokazivale plavu stranu sad pokazuju zlatnu). Pobjednik je onaj koji odigra zadnji potez. Ako Tin ide prvi, tko će pobijediti?

16. Na beskonačnoj ploči je unutar kvadrata $n \times n$ postavljeno po jedan kamenčić na svako polje. Kamenčić može "preskočiti" drugi kamenčić ako je iza njega prazno polje, i tada se preskočeni kamenčić miče s ploče. Za koje n je moguće postići da preostane samo jedan kamenčić?

17. Ivan i Ivan igraju igru na ploči dimenzija 1×2023. U potezu, igrač izabire prazno polje i u njega stavlja ili S ili O. Pobjednik je onaj koji dovrši riječ SOS u tri uzastopna polja ploče. Tko dobiva ako Ivan ide prvi?

18. Maša, Mare i Mila nose redom majice crvene, plave i zelene boje. Također imaju kamenčiće, i to 31 crveni, 41 plavi i 59 zelenih. Naizmjence (u krug) rade neki od sljedećih poteza:

(i) Maknu tri kamenčića iste boje.

(ii) Maknu po jedan kamenčić dvije različite boje, i dodaju dva kamenčića treće boje.

Maša ide prva, zatim Mare, pa Mila. Igra završava kada ostanu kamenčići samo jedne boje, a pobjednica je ona čija je boja majice jednaka boji tih kamenčića. Tko pobjeđuje ukoliko sve tri igraju na pobjedu (tj. ne žele da druge dvije pobijede)?

19. Tomislav i Marko igraju igru s $N > n^2$ kamenčića. U potezu, igrač može maknuti k kamenčića gdje je $k \leq n$, ili može maknuti xn kamenčića gdje je x proizvoljan prirodan broj. Pobjednik je onaj koji uzme zadnji kamenčić. Tko dobiva ako Marko ide prvi?

20. Pet identičnih praznih posuda zapremnine 2L su raspoređene na vrhove pravilnog peterokuta. Matej i Mislav igraju igru u krugovima: na početku svakog kruga, Mislav uzme 1L vode iz obližnje rijeke i rasporedi vodu proizvoljno u posude. Zatim Matej izabere dvije susjedne posude, i isprazni ih nazad u rijeku. Zatim počinje sljedeći krug, a krugova ima proizvoljno puno. Mislav pokušava postići da se neka posuda prelije, a Matej to pokušava spriječiti. Tko dobiva?

9.2. G7: Boris Stanković - Geometrija ne mora biti bauk

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci

1. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kome je $AB = AC$, neka je D polovište stranice AC i neka je γ opisana kružnica trokuta ABD. Tangenta na γ u A siječe pravac BC u E. Točka O je središte kružnice opisane trokutu ABE. Dokaži da polovište AO leži na γ.

2. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kome je $AB < AC$ i D nožište visine iz vrha A. Neka su R i Q težišta trokuta ABD i ACD, respektivno. Točka P je na stranici BC tako da vrijedi $P \neq D$ i da su točke P, Q, R, D konciklične. Dokaži da su pravci AP, BQ i CR konkurentni.

3. Neka je $ABCD$ paralelogram takav da je $AC = BC$. Točka P je odabrana na polupravcu AB. Opisana kružnica trokuta ACD siječe dužinu PD u točki $Q, Q \neq P$. Opisana kružnica trokuta APQ siječe dužinu PC u R. Dokaži da su pravci CD, AQ, BR konkurentni.

4. U šiljastokutnom trokutu ABC u kome je $AC < BC$ točke M i N su redom nožišta visina iz vrhova A i B. Kružnica sa središtem O opisana trokutu ABC i kružnica sa središtem S opisana trokutu MNC sijeku se u točkama C i D. Ako je točka P polovište dužine AB, dokaži da točke P, O, S i D leže na istoj kružnici.

5. Točke M, N su dodiri upisane kružnice raznostraničnog trokuta ABC sa stranicama AB, AC redom, a točke P, Q su redom dodiri pripisanih kružnica trokuta ABC nasuprot vrhova B, C sa stranicom BC. Dokazati da je četverokut $MNPQ$ tetivan ako i samo ako je $\angle BAC = 90°$.

6. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut u kome je $\angle ABC > 90$, $CDA > 90$ i $\angle DAB = \angle BCD$. Neka su E i F refleksije točke A u odnosu na pravce BC i CD, respektivno. Pretpostavimo da dužine AE i AF sijeku pravac BD u točkama K i L, respektivno. Dokaži da su kružnice opisane trokutima BEK i DFL tangentne.

7. Neka je ABC raznostraničan šiljastokutni trokut. Neka su X i Y različite točke na dužini BC tako da važi $\angle CAX = \angle YAB$. Označimo sa:
   1) K i S nožišta okomica iz B na pravce AX i AY respektivno.
   2) T i L nožišta okomica iz C na pravce AX i AY respektivno.
   Dokaži da se pravci KL i ST sijeku na BC.

8. U $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ točke D, E, F su nožišta visina iz vrhova A, B, C redom. Točke P, Q su na pravcu EF takve da vrijedi $DP \perp EF$, $BQ = CQ$. Dokaži $\angle ADP = \angle PBQ$.

9. Neka je γ kružnica opisana oko trokuta ABC. Točke E, F izabrane su na stranicama AB, AC redom tako da važi $BE = CF$. Kružnica opisana oko trokuta AEF i kružnica γ sijeku se u točki $D, D \neq A$, dok se normala iz točke D na pravac EF i kružnica γ sijeku u točki $G, G \neq A$ a pravci AD i EF u točki P. Ako je sjecište PG i kružnice γ točka $J, J \neq G$ dokaži da vrijedi:
$$\frac{JE}{JF} = \frac{AE}{AF}$$

10. Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu Ω. Tangenta na Ω u D siječe polupravce BA i BC u E i F, respektivno. Točka T je odabrana unutar $\triangle ABC$ tako da vrijedi $\overline{TE} \parallel \overline{CD}$ i $\overline{TF} \parallel \overline{AD}$. Neka je $K \neq D$ točka na dužini DF takva da vrijedi $TD = TK$. Dokaži da su pravci AC, DT i BK konkurentni.

11. Trokut ABC u kome je $AB > BC$ upisan je u kružnicu Ω sa središtem O. Simetrala $\angle ABC$ siječe Ω u $M \neq B$. Neka je Γ kružnica sa promjerom BM. Simetrale $\angle AOB$ i $\angle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q respektivno. Točka R je odabrana na pravcu PQ tako da važi $BR = MR$. Dokaži $BR \parallel AC$.

12. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kome je $AB < AC$. Neka je Ω opisana kružnica trokuta ABC. Neka je S središte luka CB kružnice Ω koji sadrži A. Okomica iz A na BC siječe BS u D i siječe Ω ponovo u $E \neq A$. Pravac kroz D paralelan BC siječe pravac BE u L. Označimo opisanu kružnicu trokuta BDL sa ω. Neka se ω i Ω ponovo sijeku u $P \neq B$. Dokaži da sjecište tangente na ω u P i pravca BS pripada unutrašnjoj simetrali $\angle BAC$.

13. U trokutu ABC, točka A_1 leži na stranici BC i točka B_1 leži na stranici AC. Neka su P i Q točke na dužinama AA_1 i BB_1, respektivno, takve da je PQ paralelno AB. Neka je P_1 točka na pravcu PB_1, takva da se B_1 nalazi između P i P_1, te važi $\angle PP_1C = \angle BAC$. Slično, neka je Q_1 na pravcutočka QA_1, takva da se A_1 nalazi između Q i Q_1, te važi $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dokaži da su točke P, Q, P_1 i Q_1 konciklične.

14. Neka je ABC trokut u kome je $\angle BCA = 90°$ i neka je D nožište visine iz C. Točka X se nalazi na dužini CD. Neka je K točka na dužini AX takva da je $BK = BC$. Slično, neka je L btočka na dužini BX takva da je $AL = AC$. Točka M je sjecište AL i BK.

Dokaži $MK = ML$.

15. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kome je $AB > AC$. Neka je Γ njegova opisana kružnica, H njegov ortocentar i F nožište visine iz A. Neka je M polovište stranice BC. Neka je Q točka na Γ takva da je $\angle HQA = 90°$ i neka je K točka na Γ takva da je $\angle HKQ = 90°$. Pretpostavimo da su točke A, B, C, K i Q sve međusobno različite i da leže na Γ u ovom poretku.

Dokaži da su opisane kružnice trokutova KQH i FKM tangentne.

9.3. A7: Ivan Novak - Algebra mix

Predavanje

Hintovi

Rješenja

1. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ u parovima različiti pozitivni realni brojevi takvi da je broj

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

cijeli za svaki $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokaži da je $a_{2023} \geqslant 3034$.

2. Dano je $n \geq 3$ pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za svaki $1 \leq i \leq n$ neka je $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (ovdje smatramo da je a_0 jednak a_n i a_{n+1} jednak a_1). Pretpostavimo da za sve i, j od 1 do n vrijedi $a_i \leq a_j$ ako i samo ako je $b_i \leq b_j$. Dokaži da je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. Neka su a, b, c, d, e, f realni brojevi takvi da je

$$x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = \prod_{i=1}^{8}(x - x_i),$$

gdje su $x_i > 0$ za $i = 1, 2, \ldots, 8$. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti f.

4. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $(x-y)\big(f(x)+f(y)\big) \leqslant f\big(x^2-y^2\big)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Dan je prirodan broj c. Neka je $x_1, x_2, \ldots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva takav da

$$x_n \mid n^2 + c$$

za svaki prirodan broj n. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_n = n^2 + c$ za svaki $n \geq M$.

6. Dan je konačan skup realnih brojeva M koji ima bar 4 elementa. Pretpostavimo da postoji bijekcija $f : M \to M$ takva da je $f(a) \neq a$ za neki $a \in M$, te je

$$ab \leq f(a)f(b)$$

za sve $a \neq b \in M$. Dokaži da je zbroj elemenata skupa M jednak 0.

7. Dani su prirodni brojevi m i n. Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $f^n(x) = m$ i da za sve različite $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x - y \mid f(x) - f(y)$$

mora li vrijediti $f(x) = m$ za sve x?

9.4. N7: Borna Banjanin - Lema o podizanju eksponenata

Predavanje Hintovi Rješenja

LTE, ili lifting the exponent lemma, popularan je "alat" koji se koristi za rješavanje olimpijskih zadataka. Nakon ovog predavanja bit ćete sposobni riješiti golem niz genijalnih matematičkih problema. I sada, nakon što sam uspješno napisao ovaj predivan uvod, možemo preći na definicije te kasnije na samo rješavanje zadataka.

Definicija 9.4.1: $v_p(n)$

Neka je p prost, a n prirodni broj. Definiramo $v_p(n)$ kao nenegativni cijeli broj za kojeg vrijedi da $p^{v_p(n)}$ dijeli n, ali $p^{v_p(n)+1}$ ne dijeli n.

Ovu funkciju ste, vjerujem, svi koristili nekoliko puta neovisno o tome jeste li znali njenu formalnu definiciji ili ne. Korisna je u jako puno zadataka iz teorije brojeva, a ponajviše kod rješavanja diofantskih jednadžbi. Preporučam da prije nego krenete na LTE riješite ova dva primjera da se malo zagrijete i opustite uz $v_p(n)$.

0.33 Dokaži da je $\gcd(a,b,c) = \dfrac{abc \cdot \operatorname{lcm}(a,b,c)}{\operatorname{lcm}(a,b)\operatorname{lcm}(b,c)\operatorname{lcm}(a,c)}$, gdje je gcd najveći zajednički djelitelj a lcm najmanji zajednički višekratnik.

0.36 Neka su a i b prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$a \mid b^2 \mid a^3 \mid b^4 \mid a^5 \mid \dots$$

Dokaži da vrijedi $a = b$.

Lema 9.4.2: Lifting the exponent

Neka je p prost broj, a x i y prirodni brojevi koje p NE dijeli, ali dijeli njihovu razliku:

1. Za svaki prirodni n:

   (a) ako $p > 2$:
   $$v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$$

   (b) ako $p = 2$ i $4|x-y$:
   $$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$$

   (c) ako $p = 2$ i n paran:
   $$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1$$

2. Za svaki prirodni n kojeg 2 ne dijeli:
   $$v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n)$$

Kao što svi možete zaključiti, koristit ćemo LTE kod nekih zadataka s bolesnim potencijama. Nadam se da ćete tijekom ovog predavanja naučiti što je LTE i dobiti intuiciju u kojim zadacima ga je korisno primijeniti.

Početničko dizanje eksponenata

1. Odredi $v_2(19^{88}-1)$ i $v_3(19^{88}-1)$.

2. Neka je k prirodan broj. Pronađi sve prirodne n takve da 3^n dijeli 2^n-1

3. Neka je p prost broj, a n i a prirodni brojevi. Dokaži da ako vrijedi $2^p+3^p=a^n$ onda vrijedi $n=1$.

4. Neka su n i p prirodni takvi da je p prosti i da vrijedi $a^p \equiv 1 (\text{mod } p^n)$. Dokaži da vrijedi $a \equiv 1 (\text{mod } p^{n-1})$.

5. Riješi $a^p-1=p^k$ u skupu prirodnih brojeva.

6. Neka je $p \neq 3$ prost broj te neka su a, b prirodni brojevi takvi da $p \mid a+b$ i $p^2 \mid a^3+b^3$. Dokaži da $p^2 \mid a+b$ ili $p^3 \mid a^3+b^3$.

7. Odredi sve prirodne brojeve a takve da je

$$\frac{5^a+1}{3^a} \in \mathbb{Z}.$$

Naprednije dizanje eksponenata

8. Nađi sve prirodne brojeve k za koje postoje $a, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $n >= 2$ i

$$p_1 \cdot p_2 \dots p_k - 1 = a^n$$

gdje su $p_1, p_2, \dots, p_k$ redom prvih k prostih brojeva (2, 3, 5, ...).

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$ kvadratno slobodan (ne postoji prosti broj p za koji vrijedi $p^2 \mid n$). Dokažite da ne postoje relativno prosti prirodni brojevi x i y takvi da

$$(x+y)^3 \mid (x^n+y^n)$$

10. Odredi sve prirodne a i b i proste p za koje vrijedi $a^p=b!+p$.

11. Neka su a i b pozitivni realni brojevi i $a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, ... prirodni brojevi. Dokaži da su a i b prirodni brojevi.

12. Neka su $c, d \geq 2$ prirodni brojevi. Neka je $\{a_n\}$ niz definiran s $a_1=c, a_{n+1}=a_n^d+c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da za svaki $n \geq 2$, postoji prost broj p takav da $p|a_n$ i $p \nmid a_i$ za $i=1,2,\cdots n-1$.

II. Hintovi s predavanja

10. Hintovi za prvu grupu

10.1. C1: Paula Horvat - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Analogno dokazu osnovne formulacije.
2. Dirichletov princip.
3. Dirichletov princip.
4. Dirichletov princip.
5. Promotri parove koji u sumi daju 12.
6. Promatrajte ostatke pri djeljenju s 14.

Umjereni zadaci

7. Gledaj najgori slučaj.
8. Što je zanimljivo kada netko ima 20 prijatelja?
9. Dirichletov princip.
10. Koje su sve mogućnosti za zbroj?
11. Podijeli kvadrat na manje dijelove.
12. Promatraj parnost početnih brojeva te onih permutiranih.
13. Fiksiraj dvije točke i što se sve nalazi oko njih (kružnice radijusa 1).
14. Koliko postoji različitih trojki koje su obojane u ili crveno ili plavo?
15. Proučite koliko je bilo partija koje nisu završile remijom, te pretpostavite suprotno. Je li moguće postići toliko različitih bodova s toliko partija?
16. Promatrajmo brojeve a_1, a_2, ..., a_{365} koji predstavljaju ukupan broj posađenih drva zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \cdots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1+29, a_2+29, \ldots, a_{365}+29$.

Teži zadaci

17. Fiksirajte jedan broj, npr a_1. Promatraj sume $s_k = a_1 + \ldots a_k$. Promatraj zadnje znamenke brojeva s_k za k između 1 i 101.

18. Koliki je ukupan broj mogučnosti za kardinalitet nepraznog pravog podskupa od X? Kolika je maksimalna moguća suma brojeva iz X? Što možemo zaključiti iz toga?

10.2. G1: Nika Utrobičić - Sukladnost i sličnost

Predavanje Hintovi Rješenja

qq

1. Prvo dokaži jednostavniju tvrdnju - kada jedan krak obodnog kuta prolazi kroz središte kružnice. Možeš li ostale slučajeve svesti na to?
2. Označi s T sjecište kružnice i simetrale kuta i dokaži da visina iz T na stranicu baš mora biti simetrala stranice.
3. Prikaži površinu trokuta kao zbroj površina manjih trokuta.
4. Iskoristi činjenicu da je tangenta uvijek okomita na promjer i poučak o obodnom i središnjem kutu.
5. Promotri trokute $\triangle IMC$ i $\triangle IMB$ i izračunaj im kuteve. Primijeti da su A, I i M na istom pravcu.
6. Označi točku M' koja je preslika H preko stranice/polovišta i dokaži da je četverokut $ABM'C$ tetivan.
7. (Neka je trokut $\triangle ABC$ i simetrala kuta u A.) dodaj točku C' na pravcu AB takvu da je $\triangle CAC'$ jednakokračan. Što lijepo vrijedi za nju?
8. Označi sjecište HM i kružnice s X i dokaži da je obodni kut nad AX pravi.
9. Dokaži da su trokuti $\triangle POT$ i $\triangle THA$ slični. (T težište, H ortocentar, P polovište stranice, O središte opisane)
10. Za početak dokaži da nožište neke visine leži na kružnici kroz polovišta stranica.
11. Očito je da je trokut jednakokračan. Dovoljno je pokazati da mu je bilo koji kut jednak $60°$. Prisjeti se nekih trikova za određivanje kutova vezanih uz kružnicu.
12. Na koji način ćeš iskoristiti uvjet $|AB| = |EC|$
13. Što ti daje simetrala kraka AC?
14. Raspisuj kutove koristeći zbroj kutova u trokutu, uoči jednakokračne trokute. Što vrijedi za četverokut $ASCG$? Kako nazivamo takav četverokut.
15. Zadatak izgleda simetrično. Pokušaj sve kutove izraziti preko γ i α.
16. Prvi dio zadatka je $|BE| = |ED|$ i to je lakši dio zadatka koji koristi neku sličnost. Nakon toga se prisjeti jedne zanimljive tvrdnje koja uključuje polovište hipotenuze i jednakost nekih dužina (Možeš li pronaći još neku dužinu jednaku navedenima?).
17. Docrtaj neki element. Kako ćeš pokazati jednakost dviju dužina ako raspisivanje duljina očito nema smisla?
18. Iz jednakokračnosti i simetrale kuta očito slijedi neki angle-chasing, na koji način bi jednakosti nekih kutova mogao povezati s duljinama stranica?
19. Imaš tri uvjeta zadatka koji upućuju na angle-chasing. Od kojeg kuta treba početi? Nakon što raspišeš kutove, što znaš o četverokutu $CBED$?
20. Prikaži oba kuta preko kuta $\angle ABC$.
21. Iskoristi tetivne četverokute da kuteve izraziš preko kuteva istog trokuta.

22. Imaš puno pravih kuteva na skici - koje sve tetivne četverokute uočavaš i kako ti mogu pomoći?
23. Iskoristi formulu za površinu trokuta preko radijusa upisane kružnice!
24. Dokaži da trokut $\triangle OAH$ mora biti jednakokračan! Kako ti to pomaže?
25. Na kojoj kružnici leži M?
26. Dokaži da je $IKCP$ tetivan!
27. Dovoljno je dokazati da simetrale vanjskih kuteva sijeku pravac LM baš u P i Q!

10.3. A1: Patricija Dovijanić - Faktorizacije

Predavanje Hintovi Rješenja

1. U a) prvo izmnoži zagrade, a u b) prepoznaj zajednički faktor $(x-1)$.
2. a) Svedi prva dva te druga dva pribrojnika na njihov zajednički nazivnik pa iskoristi razliku kvadrata. b) Uvedi supstituciju $x = 202120212021$ pa pojednostavni izraz prije računanja. c) Prepoznaj kvadrat zbroja pa prvo pojednostavni izraz, onda tek uvrsti.
3. Postavi zadatak u obliku kvadratne jednadžbe pa ju riješi metodom srednjeg člana.
4. Prebaci x^2 na desnu stranu i iskoristi razliku kvadrata.
5. Izrazu zbroji i oduzmi $4a^2b^2$ pa iskoristi formulu za kvadrat zbroja i razliku kvadrata.
6. Iskoristi u svakoj od jednadžbi razliku kvadrata pa zbroji sve tri jednadžbe.
7. a) Izluči n i zatim prepoznaj razliku kvadrata. b) Razvij sva tri kuba uzastopnih brojeva po formuli za zbroj/razliku kubova te dobiveni izraz sredi do kraja. c) Razlika potencija. d) Zbroj kubova. e) Jedan od načina je prepoznati razliku četvrtih potencija kao razliku kvadrata dvaju izraza koji su i sami kvadrati.
8. a) Uoči da je $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$. b) Slično kao a), ali za x^8. c) Zbroj kubova. d) Uoči da se ab može izraziti kao $\frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2))$. e) Razvij kub zbroja $(a^2 + b^2)^3$.
9. a) $-xy = xy - 2xy$. b) Izluči n pa faktoriziraj $n^2 + 6n + 9 - 1$. c) Izluči a pa faktoriziraj kvadratni trinom metodom srednjeg člana. d) Izrazu $n^4 + 1395$ zbroji i oduzmi 5^4 pa faktoriziraj dvaput razliku kvadrata. Bit će lako pronaći najmanji jer postoji jedan jedini :)
10. Prebaci x^8 na desnu stranu pa je prikaži kao kvadrat razlike.
11. Odrediti rješenja jednadžbe zapravo znači faktorizirati izraz s lijeve strane na linearne faktore, a s desne strane ostaviti nulu. Tada ćemo izjednačavanjem svakog od faktora s nulom dobiti sva rješenja.
12. a) Iskoristi razliku kvadrata pa promatraj djeljivost sa 4. b) Iskoristi razliku kubova pa promatraj djeljivost s 9.
13. Gornju jednadžbu pomnoži s 2 pa joj oduzmite donju. Zatim faktoriziraj.
14. Pojednostavni oba razlomka do kraja pa promotri njihovu razliku.
15. Ovdje nema nikakve mudrosti, samo fizikala. Izraze skroz raspiši pa ih onda faktoriziraj. Sve što ćeš izgubiti je vrijeme. U d) si možeš olakšati traženje svih rješenja ako primijetiš da su svi dobiveni faktori parni.

10.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Probaj preurediti brojnik tako da dio s n bude djeljiv s nazivnikom.
2. Pogledaj primjer 2.
3. Koji je najmanji, a koji najveći djelitelj broja?
4. Kada je broj djeljiv sa 72 $(8 \cdot 9)$?
5. Raspiši pomoću potencija broja 10, može se rješiti bez pravila djeljivosti za 16.
6. Koje su moguće vrijednosti mjere na temelju broja 12? Koje mogućnosti za mjeru možeš eliminirati zbog $3n + 2$?
7. Gaussova dosjetka za zbroj znamenaka.
8. Promatraj djeljivost s 4.
9. $\mathrm{M}(n, n+1) = 1$.
10. U oba podzadatka promatraj neka tri uzastopna broja (koja?) i ostatke pri dijeljenju s 3.
11. Gledaj parnost od n. Ako dijelimo neki kvadrat prirodnog broja sa 4, koje ostatke možemo dobiti?
12. Faktoriziraj i promatraj nekoliko ključnih faktora za djeljivost s $2, 3$ i 5.
13. Kakva može biti $\mathrm{M}(n-1, n+1)$? Prisjeti se Euklidove leme.
14. Koja je parnost od q?
15. Promatraj ovisno o tome daju li neki brojevi iste ostatke pri dijeljenju s 3 i 4. Što znamo o parnosti razlika ako nikoja 2 broja ne daju isti ostatak pri dijeljenju s 4?
16. Osnovna ideja: $k - 1 \mid k^n - 1$.
17. Koristi prvo svojstvo djeljivosti, pokušaj oduzimanjem eliminirati n.
18. Pretpostavi BSO da je $m \leq n$.
19. Promatraj a i b po parnosti.
20. Probaj algebarskim manipulacijama doći do neke korisne djeljivosti, konkretno, želiš dobiti $b-1 \mid a$.

11. Hintovi za drugu grupu

11.1. C2: Andrija Tomorad - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Traži se nešto što je različito početnom slučaju i cilju, a da se ne mijenja u potezu.
2. Što je zajedničko promjenama u svakom mogućem potezu?
3. Bojanje s 3 boje i brojenje obojenih polja.
4. Smjesti sobu u koordinatni sustav, doći će se do invarijante vezane uz koordinate (cjelobrojnih) točaka kroz koje zraka prolazi.
5. Prouči nekoliko malih primjera tako da dobiješ ideju koji će biti odgovor ovisno o n. Ako je odgovor potvrdan, nije teško riješiti općeniti slučaj. Ako je odgovor negativan, razmišljaj o bojanju.
6. Jasno je da se može postići da svi budu istobojni ako su brojevi kameleona za neke dvije boje jednaki... za kakve p, c, z se to može postići?
7. Ovdje imamo neki geometrijski objekt... što može biti invarijanta?
8. Ovo je zadatak s monovarijantama. Što se mijenja nakon svakog poteza? Pomoću toga možemo sa strane definirati neku veličinu koja će biti monovarijanta.
9. Slično kao 3. zadatak
10. Isto kao hint za 5. zadatak, samo što je ovdje invarijanta vezana uz parnost.
11. Slično kao u 5. zadatku, iako zadatak nije na ploči, ima smisla promatrati bojanje (ali nije isto bojanje kao u 5 zadatku).
12. Slično kao u prvom zadatku b), tražimo neku funkciju tih brojeva koja čija se vrijednost ne mijenja u potezu (brojevi 0.8 i 0.6 mogu dati smjernice za tu funkciju)
13. Šahovsko bojanje i parnosti.
14. Bojanje koje nije baš jednostavno.
15. Djeljivost nekim brojem.
16. Slično kao u 8. zadatku, treba početi s nekim proizvoljnim slučajem, definirati neku veličinu sa strane te izvoditi poteze tako da ta veličina bude monovarijanta (samo što su djelovi toga postupka u 8. zadatku bili otkriveni u tekstu zadatka)
17. Bojanje s 3 boje.
18. Treba dokazati da ako broj polja na početku nije dovoljno velik, ne može se cijela ploča pokriti. Za to će naravno pomoći neka veličina sa strane, no ona ne mora biti invarijanta, može biti i monovarijanta koja se samo može smanjiti budući da bi isti zaključak vrijedio za manje početne brojeve polja.

11.2. G2: Namik Agić - Angle chase

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Izrazite oba kuta preko kuteva trokuta. Obodni i središnji kut.
2. Presijecite 2 kružnice i pokažite da taj presjek leži i na trećoj.
3. BSO neka je stranica BC u pitanju. Chaseajte $\angle BH'C$
4. Pronađite paralelogram
5. Chaseajte kuteve uz presječnicu
6. Tales, nađite kuteve od 45
7. Samo chaseajte sumu kutova 90 u odgovarajućem trokutu
8. Isto samo chase, sjetite se leme bez dokaza
9. Reverse-engineeraj koja ti tetivnost treba, chaseaj
10. Dokaži $SC = SK, CT = TL$
11. Dokaži da je $APQF$ tetivan
12. Uvjet je ekvivalentan da je X na simetrali FG. Dalje ubodite što više tetivnih i uhvatite se posla sa chaseom
13. Isto chase, nema ništa pametno
14. a) Presijecite XA, XB s manjom kružnicom, isto chaseajte (Malo nezgodno što treba homotetija argument za to, reći ću vam što je). Ostali podzadatci su više straightforward chase

11.3. A2: Mislav Plavac - Teleskopiranje

Predavanje   Hintovi   Rješenja

Lakši zadaci

1. Počenite od desne strane i pojednostavite tako da dobijete lijevu.

2. Svedite opći član na zajednički nazivnik.

3. Zapišite svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

4. Zapišite svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

5. Opći član je $\frac{1}{k(k+3)}$.

Zapišite svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

6. Izvucite jedinicu iz svakog razlomka i napišite ostatak kao razliku dva razlomka.

7. Preoblikujte svaki član u umnošku preko formule za razliku kvadrata.

8. Racionalizirajte sve razlomke.

9. Zapišite opći član sume kao razliku dva slična izraza.

Umjereni zadaci

10. Zapišite svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

11. Rastavite svaki razlomak na 3 jednostavnija.

12. Opći član je $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

Racionalizirajte sve razlomke.

13. Opći član je $\frac{k^2+(k+1)^2}{k(k+1)}$.

Rastavite opći član na nešto jednostavnije.

14. Zapišite opći član sume kao razliku dva slična izraza.

15. "Zakomplicirajte" izraz tako da dodajete i oduzimate istu stvar.

Primijenite A-G nejednakost.

16. Ogradite svaki razlomak odozgo s izrazom koji će se moći teleskopirati.

17. Zapišite svaki razlomak kao razliku 2 razlomka.

Teži zadaci

18. Izrazite svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.

19. Primjenite Sophie-Germain faktorizaciju.

20. Izrazite svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.

21. Faktorizirajte članove i rastavite na "jednostavnije" produkte.

22. Faktorizirajte članove i rastavite na "jednostavnije" produkte.

23. Rastavite opći član i namjestite na teleskopiranje.

24. Pojednostavite opći član.

25. Pokšuajte namjestiti nazivnik tako da sliči nečemu poput $1 - xy$

(a)

$$\frac{1}{k^2+k+1} = \frac{k+1-k}{1-(k+1)(-k)}.$$

(b)

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{2}{4k^2} = \frac{2}{1-1+4k^2} = \frac{2}{1-1+4k^2} = \frac{2}{1+(4k^2-1)} = \frac{2k+1-(2k-1)}{1+(2k-1)(2k+1)}.$$

11.4. N2: Simeon Stefanović - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Hint 1: Odredi vrijednost jedne nepoznanice u ovisnosti o drugoj.
2. Hint 1: Faktoriziraj izraz.
3. Hint 1: Promatraj cijeli izraz modulo neki broj.
   Hint 2: Traženi broj je 4.
4. Hint 1: Što ako je $min\{a, b, c\} \geq 3$?
5. Hint 1: Pojednostavi izraz pa faktoriziraj.
6. Hint 1: Primjeti da vrijedi $n^2 + n + 7 > n^2$
   Hint 2: Primjeti da vrijedi $n^2 + n + 7 \leq (n + 3)^2$ što ostavlja nekoliko mogućnosti za m.
7. Hint 1: Faktoriziraj lijevu stranu tako da rastavite srednji član.
8. Hint 1: Izrazi vrijednost y preko x.
9. Hint 1: Izmnoži obje strane, pojednostavi, faktoriziraj.
10. Hint 1: Može li vrijediti da je $min\{a, b, c\} \geq 4$?
11. Hint 1: Promotrite djeljivost s 2.
12. Hint 1: Promotrite djeljivost s 2.
    Hint 2: Pomaže li nam to što je jednadžba homogena?
    Hint 3: Promotri najmanje rješenje gdje nisu sva 3 broja jednaka 0.
13. Hint 1: Pokušaj odrediti donju i gornju granicu lijeve strane kao u zadatku 6.
    Hint 2: Donja granica je x^3. Gornja granica je $(x + 3)^3$.
14. Hint 1: Faktorizirajte, zatim probajte iskoristiti metodu zbroja kvadrata.
15. Hint 1: Iskoristi xy s lijeve strane kako bi desnu stranu nadopunio do kvadrata.
    Hint 2: Razlika kvadrata.
16. Hint 1: Preoblikuj izraz tako da na jednoj strani bude konstanta.
    Hint 2: Uoči dvojku. To nas podsjeća na potpune kvadrate.
17. Hint 1: Uoči da je $(2x + 7)^3 \leq P(x) \leq (2x + 10)^3$.
18. Hint 1: Pokušaj izraze nadopuniti do istog izraza, kao da supstituiraš nešto umjesto x i nešto drugo umjesto y.

12. Hintovi za treću grupu

12.1. C3: Vedran Cifrek - Indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

1. U koraku indukcije možemo više puta koristiti pretpostavku i isto možemo koristiti da je n za koji smo pretpostavili da vrijedi veći jednak 4.
2. Isto ko u uvodu.
3. Kad radite korak indukcije postupno primjenjujte rekurzivnu formulu za fibonaccijeve brojeve tako da dobijete izraz koji se nalazi u pretpostavci indukcije.
4. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
5. Dobiti $x^n + \frac{1}{x^n}$ kao dio izraza dobivenog kao produkt brojeva za koje znamo da su cijeli.
6. Na malim primjerima pogledajte što se dogodi kada na n pravaca dodamo $n+1$.
7. Vidimo da se ovo ne može direktno dokazati indukcijom, pa probajmo ubaciti neki član koji ovisi o n na lijevu stranu kako bi tvrdnja i dalje vrijedila, a kako bi onda ju onda mogli dokazati indukcijom tako kako piše. Znači želimo neki izraz koji ovisi o n za koji će razlika tog izraza za n i $n+1$ biti veća od $\frac{1}{n^2}$.
8. Pogledajte slučaj kad je $m = 3$, pa probajte nešto zaključiti za općenito
9. Pogledajmo kako izračunati sumu za skup $\{1, 2, ..., n+1\}$ tako da posebno gledamo podskupove koji sadrže $n+1$ i koji ne sadrže $n+1$.
10. Indukcija po n. Promotrimo skupove koji sadrže $n+1$.
11. Da bi indukcijom dokazali traženu tvrdnju treba nam još jedna slična (pomoćna) tvrdnja. Da bi odredili koja je, raspišimo korak indukcije kako bi inače pa pogledamo što nam nedostaje da dokažemo korak do kraja.
12. U pretpostavci ćemo pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $k \leq n$, umjesto samo za n i u koraku dokazati za $n+1$. Za korak uzmimo najveći fibonaccijev broj koji je manji jednak od $n+1$.
13. Slučaj kad neka ćelija ima susjednu samo u retku/stupcu se lako riješi.
    Kad koristimo indukciju smijemo uzeti da se neka ćelija koja nam je zadana zapravo nije zadana i za ćeliju koja nije bila zadana reć da je zadana kad koristimo indukciju.
14. Želimo puno puta koristiti pretpostavku indukcije pa ćemo pretpostaviti da ona vrijedi za bilo kojih n lampi u obliku da možemo svim lampama u nekom trenutku promijeniti stanje od tog trenutka(to je ekvivaletno kao da imamo niz poteza koji sve ugašene pretvara u sve upaljene). Također, pretpostavit ćemo da tvrdnja ne vrijedi za naših $n+1$ lampi, pa iz kontradikcije možemo dobiti tvrdnje za naše lampe.

12.2. G3: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Prisjetite se teorema o obodnom i središnjem kutu. Kakav je trokut CSB?

2. Promotrite trokut AOC.

3. Promotrite unutarnje kuteve tog četverokuta.

4. Prisjetite se Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom. Također, pronađite dva tetivna četverokuta i iskoristite što vrijedi za njihove kuteve.

5. Za koji četverokut znamo da je tetivan? Iskoristite da su obodni kutevi nad istim lukom jednaki.

6. Koji kutevi moraju biti jednaki da bismo dokazali tvrdnju zadatka? Pronađite ih promatrajući unutarnje i vanjske kutove dvaju tetivnih četverokuta.

Teži zadaci

7. Neka je H sjecište pravaca AD i FG. Koja dva četverokuta su tetivna? Promotrite trokut HDG.

8. Zapravo treba dokazati $\angle EAD = \angle EBD$. Kakav je trokut AOB? Uočite da na gotovo jednak način možemo riješiti zadatak ako dokažemo jednakost nekih drugih dvaju kuteva. Kojih?

9. Promotrimo trokut CHB. Središte njemu opisane kružnice upravo je polovište stranice $\overline{BC}$ (zašto?), označimo ga s P. Dakle, ekvivalentno je dokazati $|PC| = |PH| = |PB|$.

10. Opišite kružnicu trokutu ABC. Gdje se nalazi njezino središte?

11. Ekvivalentno je dokazati $\angle RSP = \angle MSP$.

12. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.

13. Promotrite kružnicu opisanu trokutu BMC. Gdje se nalazi njezino središte? Pomoći će vam slično razmišljanje kao u zadatku 10. Označimo li s E sjecište pravaca KM i AD, ekvivalentno je dokazati da je $\angle DEM = 90°$ promatrajući trokut DEM.

14. Iskoristite da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta. Zapravo vam tetivni četverokuti neće pomoći u ovom zadatku, ali odlučila sam ga zadati kao poticaj da riješite zadaću, jer je službeno rješenje dugačko i puno ružne trigonometrije, a koristeći jednu od tvrdnji koju smo naveli na početku predavanja zadatak se može riješiti vrlo jednostavno u par redaka.

12.3. A3: Lucija Relić - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Primjenite A-G nejednakost.
2. Prebacite $-4a^4$ na desnu stranu nejednakosti pa AG.
3. Pomnožite sve sa 2 $\rightarrow$ 3 puta primijenite AG i zbrojite dobivene nejednakosti.
4. Koristeći KG pokažite da je $(x+y)^2 \leq 2$.
5. Pomnožite sve sa 2 i više puta primijenite AG.
6. AG na lijevu stranu pa ponovno na $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$.
7. AG zasebno primjenite na svaku zagradu.
8. $ab^3 + a^3b = ab(a^2 + b^2)$, uočite da je ab geometrijska sredina brojeva a^2 i b^2, primijenite AG dva puta.
9. Primijenite prethodni zadatak.
10. Dodajte $2(a+b+c)$ na obje strane i više puta primijenite AG.
11. AG na $\left\{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}\right\}$ (sve skupa $n+1$ varijabli)
12. Izmnožiti zagrade, AH na $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
13. Zapisati na malo drugačiji način pa AG na 6 varijabli.
14. Napravite sličan trik kao u Nesbittovoj.
15. Supstitucija te A-G nejednakost.
16. Iskoristite Pitagorin poučak te primjenite A-G nejednakost.
17. Prvo primijeni A-G nejednokost, zatim A-H.
18. Heronova formula, zatim A-G nejednakost.
19. Neka je $y_0 = 1, y_i = 1 + x + ... + x^i$. Nađite rekurzivnu vezu između x_i i y_i.
20. Primijenite Jensenovu nejednakost te iskoristite zadatak iz uvoda.

12.4. N3: Adian A. Santos Sepčić - Kongruencije

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Promotri modulo 3 i 8.
2. Promotri modulo 3.
3. Promotri uzorak zadnjih znamenki 3^1,3^2,3^3...
4. Računaj modulo 10.
5. Uzorak ostataka će se u ovoj igri ponavljati
6. Uzorak ostataka pri dijeljenju s 11 će se ponavljati u nizu $3^1 + 4^1$, $3^2, 4^2$, $3^3 + 4^3$...
7. Možemo zapisati neke brojeve pomoću potencija drugih modulo 7.
8. Slično je kao 4. zadatak, ali se postupak ponavlja dvaput.
9. Promotri modulo 8.
10. Možemo zapisati neke brojeve pomoću potencija drugih modulo 31.
11. Primjeni više različitih modula direktno na jednakost i izvuci iz svakoga po nešto.
12. Podijeli s 2 puno puta.
13. Podijeli sa 7 puno puta.
14. Promatraj modulo 5 i modulo 7.
15. Pronađi negdje razliku kvadrata.

13. Hintovi za četvrtu grupu

13.1. C4: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Prebroji parove ljudi i rukovanja.
2. Označite broj šahista s x, a broj penzionera s y i zapišite uvjet zadatka u jednadžbu.
3. (a) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih n. Kako možemo interpretirati desnu stranu?
   (b) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih $n+1$, a na desnoj strani želimo isto brojanje nekako podijeliti na 2 slučaja.
   (c) Prebrojavanja na obe strane koriste sličnu ideju "izolacije pojedinca" kao i prebrojavanje na desnoj strani u (b) dijelu.
4. Prebrojite ukupan broj parova učenika koji čiste učionicu zajedno.
5. Prebrojimo ukupan broj parova kušača koji su kušali neko vino. Ne zaboravite konstrukciju za n koji mislite da je rješenje!
6. (a) Lijevu stranu možemo interpretirati kao da među n učenika biramo m-članu momčad, a zatim r članova momčadi koji započinju utakmicu. Što brojimo na desnoj strani?
   (b) Razmislite koje sve izbore momčadi među n učenika prebrojavamo na lijevoj strani.
   (c) Pogledaj ideju u 5.a) zadatku.
7. Pretpostavi suprotno i napravi incidencijsku matricu s 6 redaka, svaki predstavlja zadatak, i s 200 stupaca, svaki predstavlja učenika. Upišimo u matricu 1 ako učenik u tom stupcu **nije** riješio zadatak u tom retku. Sada brojimo na dva načina skup parova jedinica koje se nalaze u istom retku.
8. Razmislite zašto se p_k množi baš s k. Slična je ideja kao u 2.c) zadatku.
9. Prebrojite ukupan broj parova polja iste boje koji dijele redak/stupac.

13.2. G4: Borna Banjanin - Potencija točke

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Potencija točke C na kružnicu k.
2. Potencija točke E na kružnicu k.
3. Potencija točke E na kružnicu opisanu trokutu ABC.
4. Potencija točke A na kružnicu opisanu EDF.
5. Potencija iz A i sličnost.
6. Neka je točka M presjek pravaca PQ i AB. Treba gledati potenciju iz M na kružnice.
7. Neka je M presjek AT i KL. Treba gledati potencije iz M na k i na još jednu kružnicu.
8. Želimo dokazati da A ima jednaku potenciju na k_3 i k_4.
9. Radikalne osi od 3 kružnice se sijeku u radikalnom središtu. Zamisli visine kao radikalne osi od nekih kružnica.
10. Treba dokazati da su MD i ME tangente na neke dvije kružnice, ako je M polovište $\overline{DE}$.
11. Treba naći 3 točke koje se nalaze na nekoj kružnici sa središtem u A.
12. Treba dokazati 2 stvari. Prvo da je radikalna os ovih kružnica okomita na BC i drugo, da se A nalazi na radikalnoj osi od ovih kružnica (odnosno da ima istu potenciju na obje kružnice).
13. Težište dijeli težišnicu o mjeru 1:2. Probaj dokazati da je K težište trokuta AMB.
14. Kako bi izgledala kružnica radijusa 0 u točki B? To bi bila samo točka B. Kako bi izgledala radikalna os od te kružnice i neke druge?
15. Dovoljno je dokazati da samo 2 para tih točaka leže na kružnici (npr. A_1, A_2, B_1 i B_2) jer onda analogno možemo dokazati da su svih 6 na kružnici.
    Kako pomoću potencije točke dokazati da su neke 4 točke na istoj kružnici?
16. Opet zamišljamo ove pravce kao radikalne osi nekih triju kružnica.
17. Pronađi kružnice kojima su CD, AQ i BR radikalne osi.
18. Slično kao u 14. zadatku. Treba gledati ročke R i S kao kružnice radijusa 0.

13.3. A4: Adian A. Santos Sepčić - CSB

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Engel Chaseaj!
2. Proširi razlomke redom sa a,b,c.
3. Proširi razlomke redom sa a,b,c.
4. Namjesti brojnike.
5. Vjeruj u moć Engela i CSB.
6. Kvadriraj korijene za CSB rješenje (postoji jedno drugo, kreativnije rješenje bez CSB).
7. Geometrijom pokušaj svesti nejednakost na izraz na algebarsku nejednakost sa tri varijable.
8. Množi s 1 dok ne nađeš korisnog Engela.
9. Proširi sa a^2, b^2, c^2, d^2 i vjeruj.
10. Vjeruj u moć Engela!

13.4. N4: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Lagani zadaci

1. $\mathbb{TRIVIAL}$

2. Pogledajte primjer iz uvoda

3. Analogno prošlom zadatku

4. Može li order biti manji od n?

5. $\mathbb{TRIVIAL}$ (ima mala zamka tho)

Umjereni zadatci

6. $pq - q - p + 2 = (p-1)(q-1) + 1$

7. Riješite 4. zadatak i ovo bi trebalo biti lakše

8. Nisam siguran koji hint da dam, a da ne otkrije čitavo rješenje. Pokušajte pronaći :$m =?$ i $n =?$

9. Promatrajte najmanji prost djelitelj broja n

10. Binomni teorem bi bio koristan, ali ovo se da riješiti i faktorizacijom $a^p - b^p$

Teški zadaci

11. Rastavite 1989 na proste faktore i gledajte svaki faktor zasebno

12. napravite suptituciju $a = kb + r$

13. Pokušajte za n odbrati nešto tako da namjestite Mali Fermatov teorem.

14. Case work

14. Hintovi za petu grupu

14.1. C5: Mislav Brnetić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Dokažite da se ploča ne može popločati na traženi način. Pokušajte obojati ploču u 4 boje.
2. Dokažite da se ploča ne može popločati na traženi način. Pokušajte pronaći bojanje ploče takvo da pločice 2×2 i 1×4 ne prekrivaju jednak broj pločica neke boje.
3. Ploča se ne može popločati na traženi način. Koliko bi L-tetromina bilo potrebno za prekriti ploču?
4. Obojajte ploču šahovski.

Umjereni zadaci

5. Koliko crnih polja ukupno se nalazi na ploči nakon poteza?
6. Pokušajte popločati ploču za male vrijednosti n. Prisjetite se zadatka 3.
7. Kako izgleda ploča koja zadovoljava uvjete zadatka?
8. Pokušajte obojati ploču šahovski.
9. Koliko vrhova jediničnih kvadrata ploče pokriva svaka pločica?
10. Može li neki pravac presijecati samo jednu dominu? Može li više pravaca presijecati istu dominu?
11. Pokušajte obojati ploču u dvije boje po stupcima.

Teži zadaci

12. Označite smjerove napadanja lovaca strelicama. Koliko najviše strelica se može nalaziti na ploči?
13. U kojim slučjevima se korov može proširiti? Kako se tada mijenja opseg područja obraslog u korov?
14. Pretpostavite suprotno te obojite ploču po stupcima.

14.2. G5: Stella Čolo - Upisana i pripisana kružnica

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Dokaži da $\angle BI_1C = \angle BI_2C$

2. Što su visine u tom trokutu?

3. Dokaži da $\angle D_1D_2E_2 + \angle D_1E_1E_2 = 180$.

4. Cevin teorem.

5. Dokaži da su $\triangle OFI$ i $\triangle OEI$ sukladni.

6. Dokaži da je četverokut $ICKE$ tetivan.

7. Definirajmo P' kao presjek EF i AM. Dokaži da $\frac{FP}{PE} = \frac{FP'}{P'E}$

8. Uvedimo B', C' kao presjeke tangente na opisanu kružnicu $\triangle ABC$ u točci D' sa stranicama AC, AB. Sada promatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle AB'C'$.

9. Slično kao prošli zadatak, trebamo docrtati nešto da nađemo homotetiju iz A koja šalje točku D u točku X'.

10. Nađimo homotetiju iz X između dva trokuta na čijim se paralelnim stranicama nalaze točke I i P.

11. Slično kao prošli zadatak.

12. Promatrajmo A-pripisanu kružnicu i njena dirališta.

14.3. A5: Vedran Cifrek - Uvod u funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Vrijedi za sve parove a i b osim $a = 0$.
2. Pogledajte definiciju surjektivnosti i injektivnosti.
3. Probajte uvrstiti nešto da oba izraza unutar funkcija postanu jednaka.
4. Tražimo uvrštavanje takvo da dva izraza u funkciji postanu jednaka a treći postane 0.
5. Želimo u x uvrstiti nešto tako da opet dobijemo jednadžbu koja sadrži $f(x)$ i $f(1-x)$.
6. Ako dokažemo da je f surjekcija onda posebno postoji neki realan broj a takav da je $f(a) = 0$.
7. injektivnost
8. Želimo pametno iskoristiti surjektivnost.
9. Dokaži i pametno iskoristi $f(f(x)) = x$.
10. Dokaži i iskoristi da je ako je $f(a) = 0$, onda je $a = -1$.
11. $P(0, y)$, slučajevi je li $f(0) = 1$ ili $f(0) \neq 1$ za surjektivnost

14.4. N5: Emanuel Tukač - CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci koje možemo rješiti i bez da znamo CRT

1. Postoji jedno rješenje mod 55. Gruba sila je opcija.

2. Prva kongruencija ima dva slučaja.

3. Koristimo rješenje prvog.

4. Prvi zadatak s nešto više koraka ili korištenje ideja iz dokaza CRT-a.

Tipični CRT zadaci

5. Namjestimo prvi član niza pomoću CRT-a tako da ostali očito slijede.

6. Namjestimo prvi član niza pomoću CRT-a tako da ostali očito slijede.

7. Namjestimo prvi član niza pomoću CRT-a tako da ostali očito slijede.

8. Namjestimo prvi član niza pomoću CRT-a tako da ostali očito slijede.

9. kombiniramo rješenja za 7. i 8.

10. Po Euklidu znamo da $gcd(a_i, a_j)$ dijeli $a_i - a_j$. Stoga moramo pripaziti da a_i relativno prost s $a_i - a_j$ za sve j. Kada izaberemo d dodamo kongruenciju s njim i ostatak se rješava kao i prvi zadatak.

11. Pažljivo kombiniramo rješenja prethodnih zadataka u jedno

12. Proširimo ideju iz 10. u 2D.

Skriveni CRT

13. Rastavimo n na potencije prostih.

14. Pretpostavimo suprotno.

15. Dovoljno je pokazati da postoji beskonačno prostih koji imaju višekratnik oblika $x^2 + x + 1$.

16. CRT-om forsiramo da se u razlomcima:

$$\frac{x}{n}, \frac{x+1}{n}, \ldots, \frac{x+k-1}{n}$$

pokrate različite stvari.

15. Hintovi za šestu grupu

15.1. C6: Emanuel Tukač - Konstrukcije u kombinatorici

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Konstrukcija:
   Tablica je preduga za neku ružnu konstrukciju. Nalaže se pretpostavka da će se u većini stupaca ponavljati neki uzorak i da će se samo u par rubnih stupaca morati nešto promijeniti.
   Dokaz:
   Konstrukcija bi trebala imati označena sva polja na rubu. To nas motivira da prebrojimo koliko označena polja imaju susjeda zajedno i (jer po tome se razlikuju polja na rubu od ostalih polja) provjerimo koliko bi taj zbroj smio iznositi.

2. Isprobamo na 3×3 tablici. I konstrukcija i dokaz daju se proširiti na cijeli zadatak.

3. Dokaz:
   Podijelimo trokut na više područja u kojima je lakše dokazati granice
   Alternativno: Pogledamo koliko polja svako označeno polje "gađa" i koliko puta neko polje smije biti "pogođeno"
   Konstrukcija:
   Očekujemo neku simetriju u konstrukciji. Traženi broj daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, pa odmah označimo polje u sredini.

4. Prvo primjetimo da se zadatak interpretira kao graf
   Konstrukcija:
   sjetimo se svojstva bipartitnog grafa i pokušamo napraviti nešto dosta slično.
   Dokaz:
   1. Gledamo kako iz proizvoljnog grafa nizom promjena možemo doći u relativno sličan graf s većim brojem traženih parova.
   2. Primijetimo kako "spajanje" dviju "generacija" može povećati broj traženih parova.

Umjereni zadaci

5. Dokaz:
   1. Promatrajmo put tražene udaljenosti
   2. Pogledajmo koji čvorovi ne smiju biti povezani s istim čvorom.
   3. Sastavimo što duži niz čvorova koji ne smiju biti povezani s istim čvorom i svakom pridružimo onoliko čvorova koliko mu treba do 42.
   Konstrukcija:
   slijedi iz dokaza

6. Dokaz:
razmislimo koji broj bi voljeli kao riješenje tako da dokaz bude što jednostavniji.
Konstrukcija:
Podijelit ćemo učenike u tri grupe po sto, jedna u kojoj su poznanstva od jedan do sto, druga u kojoj su poznanstva od sto i jedan do dvjesto, i jedna koja služi samo kako bi postigli tražene brojke u prve dvije grupe.

7. Dokaz:
1.Uzmimo proizvoljni raspored i pogledajmo zbroj bodova kroz sve rotacije.
2.Moguće je dobiti točnu brojku koja je ista za sve rasporede.
Konstrukcija:
1.Želimo u svakoj rotaciji ostvariti jednako bodova.
2.Za svaku kartu (osim jedinice) koja u točno i pozicija ne nosi bod postoji karta koja u točno i pozicija nosi bod

8. Konstrukcija:
1. nađemo očite konstrukcije za n i $n+1$
2. kombinacijom tih dvoje moguće je sve dovoljno velike konstruirati
Dokaz:
1. pogledamo zadnji kod kojeg konstrukcije ne radi i promatramo boju koje ima najmanje.
2. podijelimo krug na disjunktne nizove od $n+1$ i pretpostavimo da se ta boja pojavljuje u svakom.

9. Dokaz:
1. mogu li dva uzastopna para biti ne-dobra?
2. konstrukcija u kojoj ih je točno pola ne radi, može li u krugu točno pola parova biti dobri?
Konstrukcija:
jedan dobar par koji sadrži jedinicu "prerežemo" tako da se ne moramo brinuti oko kruga, konstruiramo niz kojem je svaki drugi par dobar

Težak zadatak

10. Zadatak je s IMO-a
Konstrukcija:
isprobamo manje primjere i želimo takve konstrukcije da se za $n+1$ uzme konstrukcija za n i doda joj se jedan redak
Dokaz:
koristi se indukcija i ideje iz dinamičkog programiranja

15.2. G6: Krunoslav Ivanović - Spiralna sličnost i sl.

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Pronađite spiralnu sličnost.
2. Pronađite spiralnu sličnost.
3. Koja dva trokuta su spiralno slična?
4. Što nam daje spiralna sličnost?
5. $BPINT$ je tetivan. Što nam to daje?
6. Nađite simedijanu.
7. Dovoljno je dokazati da je H na simedijani.
8. Nađi simedijanu.
9. Promatrajte onu posebnu spiralnu sličnost koju spominjemo u predavanjima.

15.3. A6: Janko Bušelić - Algebra mix

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Broj 2022 je samo dovoljno velik. Prvo probajte dokazat da ne mogu svi bit veći od 1. Nakon toga ćete nešto skužit o tome kakav niz mora bit. Nakon toga probajte konstruirat niz koji zadovoljava to što ste otkrili, a ne zadovoljava tvrdnju zadatka. Kad u tom uspijete onda znate da vam treba još nešto. Probajte uvrstit konkretne brojeve koji neće zadovoljavat tvrdnju zadatka. To nećete moći napravit jer očito zadatak vrijedi, ali zbog toga ćete skužit zašto zadatak vrijedi.

2. Konstruirajte niz a_n tako da su svi članovi što manji, a da zadovoljavaju uvjet zadatka. Krenite od 1 i onda tako dalje gledate koliko mali može biti sljedeći broj. Što zapravo znači tvrdnja zadatka $a_{2023} \geqslant 3034$. 2023 možemo zamijeniti sa n, što je onda 3034?

3. Gledajte male slučajeve: uzmite a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i pokušajte odredit koliko mali može biti c za ta 4 člana. Npr. mogu li svi biti manji od 101/300? Vjerojatno ne probjate onda vidjet koje ograde možete dobit. Zapamtite da je dovoljno samo da kad uzmete beskonačan niz da će ograda koju ste dobili težiti u 1 tako da ograda ne mora biti previše jaka.

   2. hint:
   rješite se apsolutnih vrijednosti: poredajte proizvoljno brojeve i vidite koju ogradu možete dobit.

4. Tvrdnja zadatka zapravo znači da ne mogu zauvijek oba niza se isto ponašat odnosno: u jednom trenutku će se desit da je jedan niz $\geq 1/2$, a drugi $< 1/2$. To će se dogodit zato što se razlika između nizova povećava, ali to nije dovoljno.

5. Zadatak zapravo pita koliko će uvijek dobar biti greedy odabir odnosno koliko greedy odabir može biti loš za konkretan slučaj. Očito nam treba konstrukcija i ograda. Bitno je dovoljno vremena posvetiti i jednoj i drugoj strani problema jer često će nam rješavanje jedne strane puno pomoći kod druge strane, a obrnuti redoslijed će biti teži. Probajte radit s konkretnim brojevima i prvo skužit zašto nije $G = D$ uvijek. Kad nađete niz za koji $G \neq D$ onda pokušajte to još malo optimizirat da G bude još gori. Tako ćete moći pogodit c. Ako želite krenut od druge strane pokušajte razmišljat za koje vrijednosti c možete dokazat nejednakost.

6. Pretpostavite da znate vrijednost A, kako ćete dokazat da onda vrijedi nejednakost? Vjerojatno vam prvo pada na pamet indukcija, probajte pretpostavit nejednakost za $An < x_n < An + 1$ i onda vidjet koje ograde se dobije za x_{n+1}.

15.4. N6: Ivan Vojvodić - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Pogodi rješenje i uvrštavaj po redu, dobij $f(n) \geq n$.
2. Pretpostavi da postoji neki x takav da $f(x)$ nije x^2, dobij da je f ograničena i iz toga $f(n) = 1$ za svaki n (dakle postoje 2 rješenja, $f(n) = n^2$ te $f(n) = 1$).
3. Dobij što sve može biti $f(1)$, zatim gledaj $f(p-1)$ i onda uvrštavaj velike proste.
4. dobij što može biti $f(2)$, u jednom slučaju je lagano gotov, u drugom dobij injektivnost i gornju ogradu na $f(a)$ koji zajedno dovršavaju.
5. Traži $f(2)$ i onda uvrsti $(p, 2)$ te promotri funkciju $2^p - p^2$
6. hint za odrediti koje je rješenje: Kako je najlakše osigurati da je drugi uvjet zadovoljen (zadovoljiti i nešto jače od njega)? Na što to podsjeća? hint za dokaz: fiksiraj p i b i pusti a da divlja; tako odredi $f(1, b)$ za svaki b i iz toga dobij $f(a, b)$.
7. Koliko je $(p-2)! \mod p$ (teorem)? Nađi $f(p-2)$ i pomoću toga standardno $f(n)$.
8. $f(1) = a$, dobij $n \mid f(n)$ te $a \mid f(n)$, dovrši.
9. nađi rješenja, uzmi najmanji p takav da $f(p) \neq 0$ i pomoću toga p konstruiraj beskonačno "dobrih" n (oni koji zadovoljavaju treći uvjet). Dovrši uz MFT.

16. Hintovi za sedmu grupu

16.1. C7: Matej Vojvodić - Igre za zaigrane

Predavanje Hintovi Rješenja

Neriješeni zadaci iz uvoda

Zad 5. Ako Nina počinje, kako Ines može osigurati da se dva žetona iste boje neće naći u istom nizu od 5 uzastopnih žetona? Ako Ines počinje, kako Nina može osigurati da (čak jako brzo) pokvari sve moguće nizove od 5 uzastopnih žetona?

Zad 7. Kako se može osigurati da neki igrač uvijek može igrati ako može i onaj drugi? Rješenje je jako slično onom u Primjeru 3.

Zad 6. Tko dobiva za kvadratne ploče? Komentar (nakon što se prođe i sljedeće poglavlje): Kako izgledaju pobjedničke pozicije u igri?

Zad 9. Očito su pozicije od 1 do k pobjedničke jer je moguće pobijediti u potezu. Što je s pozicijom $k+1$? Indukcija.

Zad 11. Očito je pozicija 2 pobjednička, a 3 gubitnička. Koje su još gubitničke?

Zad 13. Raspiši pobjedničke i gubitničke pozicije za male brojeve (npr do 15 ili 20).

a) Koliki je razmak među gubitničkim pozicijama?

b) Zašto su to sve pozicije?

Zadaci

1. Postoji li uopće strategija? Probajte odigrati igru nekoliko puta

2. Što ako je $n = m$? A što ako nije? :)

3. Postoji li uopće strategija? Probajte odigrati igru nekoliko puta

4. Dovoljno je da je pobjednik samo malo bolji, tj. da uzme samo jedan stupac/red više od drugog igrača.

5. Prisjetimo se posljednjeg primjera (dvostruki šah).

6. Dovoljno je pokazati da pobjednik može dobiti u potezu, ili spriječiti drugog igrača da dobije.

7. Tko dobiva za jako male n?

8. Za kakve parove brojeva je najlakše garantirati da su relativno prosti? A za kakve da su složeni? U oba slučaja pobjeđuje onaj koji ide prvi.

9. Kako izgleda igra nakon zadnjeg mogućeg poteza? Koja svojstva ima ta "struktura"?

10. Raspis na pobjedničke i gubitničke pozicije.

11. Može li Jurica forsirati da maksimum bude u nekih odabranim poljima?

12. Koji brojevi su pobjedničke pozicije?

13. Najlakše je kao prvi potez uzeti neki složeni dijelitelj od N koji ima točno dva prosta faktora.

14. Pijun je trivijalan. Sve druge figure rješavaju se na isti način. Prisjeti se što kaže uvod o strategijama simetrijom.

15. Promatrajmo samo svaku 50. kartu.

16. Riješite zadatak za male n.

17. Tko dobiva u ako postoji blok SXXS (gdje su X prazna polja)?

18. Najprije treba naći invarijantu da se uvjerimo da dvije uopće nemaju šansu dobiti. Zatim, treba provjeriti da igra završava. :)

19. Pokažimo da je početna pozicija pobjednička. Nemoj zaboraviti iskoristiti $N > n^2$.

20. Matej može spriječiti prelijevanje ukoliko održava neke korisne uvijete. Također, može se pokazati da greedy ne radi.

16.2. G7: Boris Stanković - Geometrija ne mora biti bauk

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Skoro da nije potreban. Dokaži da je C polovište BE.

2. U kom omjeru BQ siječe CR? A AP?

3. Za najlakše rješenje definiraj $X = CD \cap AQ$ i dokaži da su B, R, X kolinearne. Dalje je sve samo angle chase i uočavanje tetivnih. Alternativno, razmisli o radikalnim osama ili Paskalovom teoremu nakon što uvedeš neku korisnu točku.

4. Prisjeti se poznatih lema za ortocentrične konfiguracije. Uvjeri se zašto su P, H, D kolinearne gdje je H ortocentar trokuta ABC. Što će ispasti četverokut $POSD$?

5. Prvo rješenje je dosta straightforward. Naime, zadatak možemo elementarno sračunati. Neka je $MN \cap BC = \{T\}$. Nađi gdje je T na BC i postavi izraz za potenciju iz T. Čemu je to ekvivalentno?
Za drugo rješenje razmisli što mora biti centar kružnice $MNPQ$ ako je on tetivan. Čemu je onda tetivnost ekvivalentna?

6. Generalna strategija za zadatke u kojima trebamo dokazati da se neke kružnice dodiruju je da prvo želimo otkriti zajedničku točku kružnica i onda dokazati da imaju zajedničku tangentu u toj točki. To se može tako što ili otkrijemo koji pravac bi trebao biti ta tangenta ili kad nam zadatak dopušta fino računanje kuteva da samo svedemo uvjet postojanja zajedničke tangente na neki uvjet s kutevima (najčešće da je zbroj neka dva kuta neki treći kut ili nešto slično)

7. Za najlakše rješenje nađi računski uvjet ekvivalentan tome da KL i ST sijeku BC u istoj točki. To što je potrebno može se dokazati uz malo trigonometrije ili sličnosti. Malo nezgodnije rješenje koristi da je $KLST$ tetivan, a možda i to da relativno lako možemo otkriti središte njemu opisane kružnice. U nekom trenutku ti možda zatreba Brokardov teorem ili Paskalov teorem.

8. Svedi zadatak na dokazivanje tetivnosti $BCPQ$. Tetivnost se može dokazati na više načina, sjecište EF sa BC će ti vjerojatno trebati.

9. D je središte luka BC kružnice ABC i luka EF kružnice AEF. Što je AP za $\angle EAF$? Ako je zadatak točan, što mora biti JP za $\angle EJF$. Što to znači za četverokut $JGEF$?

10. Uvedi presjeke TE i TF sa AC. Stvorit će se mnogo tetivnih, rješenje je blizu.

11. Svedi tvrdnju na primjenu teorema o radikalnom središtu. Za dokaz nekih tetivnosti bit će ti potrebna fora koja se javljala u prethodnim zadacima.

12. Zadatak nije pretjerano težak stoga bi ga definitivno trebali probati riješiti samostalno za dizanje samopouzdanja (a onda pogledati odakle je). Na slici je mnogo dosta skrivenih kolinearnosti i sjecišta koja se ispostave na nekoj od kružnica u zadatku. Neke od korisnih točaka za uvesti mogle bi biti drugo središte luka BC kružnice Ω, recimo T, sjecište PT sa visinom iz A i dijametralno suprotna točka točki A na Ω.

13. Ponovo zadatak kog ako riješite samostalno dobijate veliki boost samopouzdanja. Za najlakše rješenje razmisli koje pravce ima smisla produžiti do opisane kružnice trokuta ABC. Alternativno, za drugo najpopularnije rješenje uvedite sjecišta PB_1 i BC, odnosno QA_1 i AC. Šta trebamo dobiti za te nove točke da bi PQP_1Q_1 bio tetivan? To možemo dokazati uz pomoć Menelajevog ili Paposovog teorema.

14. Još jedan zadatak koji trebate uraditi sami da biste dobili veliki confidence boost. Ključ za rješenje je promatranje kružnica $k_1(A, AC)$ i $k_2(B, BC)$. Sjecišta raznih pravaca na skici s njima bi se mogla ispostaviti zgodno.

15. Vjerujem da većina vas može riješiti ovaj zadatak u 3 sata i to bi vam bio najveći mogući confidence boost. Postoje 2 elementarna rješenja koja nisu strašna. Jedno od njih svede tangentnost na uvjet s kutevima, a u drugom "pronađemo" zajedničku tangentu na ove dvije kružnice u K. U oba rješenja znanje o preslikama ortocentra će biti jako korisno, a možda nam zatrebaju i neke dodatne točke ili da uočimo neko radikalno središte. Alternativno, za one koji znaju inverziju postoji inverzija u H koja skoro ubije zadatak.

16.3. A7: Ivan Novak - Algebra mix

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Dokaži $a_{n+2} > a_n + 2$.

2. Promotri najveći element i najmanji element.

3. Vieta formule, neke nejednakosti.

4.

5. Uvedi niz $y_n = \frac{n^2+c}{x_n}$. Dokaži da on ne raste.

6.

7. Dokažimo da je $f^{n-1}(x) = m$.

16.4. N7: Borna Banjanin - Lema o podizanju eksponenata

Predavanje Hintovi Rješenja

1. $1^88 = 1$
2. Kada potencija od 2 daje ostatak 1 modulo 3?
3. Mod 5 i LTE na očitu stvar.
4. Mali F. prije toga da dobijemo da smijemo koristit LTE.
5. Kada ne smijemo iskoristit mnormalnu jednakost za LTE?
6. $(v_p(a^3 + b^3)$
7. Zapiši a kao $3^r s$ gdje s nije djeljiv s 3 i koristi nejednakosti.
8. dokaži da $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ne dijele n.
9. promatraj posebno parne i neparne n, i promatraj proste faktore od $x + y$
10. Uspoređuj a i p.
11. Prvo dokaži da su a i b racionalni, a onda cijeli.
12. promatraj a_n modulo a_k za $k < n$ da dobiješ koliko je $\gcd(a_n, a_k)$

III. Rješenja s predavanja

17. Rješenja za prvu grupu

17.1. C1: Paula Horvat - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga. Intuitivno: koliko god se mi trudili rasporediti sve kuglice tako da ne postoji bar jedna kutija s bar k + 1 kuglicom, ne možemo to postići

2. Ivan mora izvući 4 čarape. Budući da ima čarape u tri boje, treba mu 3 + 1 čarapa kako bi po Dirichletovom principu mogao biti siguran da ima dvije istobojne.

3. Po Dirichletovom principu slijedi tvrdnja.

4. Po D. p. znamo da će postojati barem jedan red koji sadrži 2 topa.

5. Podijelimo brojeve od 1 do 11 u 6 grupa: $(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6)$. Budući da Zoran mora izabrati sedam brojeva, po Dirichletovom principu postoji grupa iz koje će izabrati dva broja. Navedena dva broja daju zbroj 12.

6. Primjetimo da prirodni brojevi pri dijeljenju s 14 mogu davati ostatke 0, 1, 2, $\ldots$, 13, pa imamo 14 mogućnosti. Budući da imamo 15 brojeva, a 14 mogućih ostataka, po Dirichletovom principu znamo da postoje barem dva broja koja daju isti ostatak prije dijeljenju s 14. Upravo je njihova razlika djeljiva s 14.

Umjereni zadaci

7. Traženi broj dobijemo gledanjem "najgoreg slučaja" do ispunjavanja uvjeta. Kada bismo u košari imali 7 jabuka i 5 banana i 8 naranči tada još uvijek ne bi bio ispunjen uvjet zadatka. Međutim dodavanjem nekog voća u košaru u njoj bi se nalazilo ili dovoljno jabuka ili dovoljno banana ili dovoljno naranči, stoga zaključujemo da je traženi broj jednak $(7 + 5 + 8 + 1 = 21)$.

8. Svaka osoba može imati $0, 1, \ldots 19$ prijatelja. Primijetimo da ukoliko postoji osoba koja ima 0 prijatelja, ne može postojati osoba koja ima 19 i obrnuto. Dakle, ne može biti 20 različitih opcija, već maksimalno 19. Sada primjenimo Dirichletov princip.

9. Po Dirichletovom principu, sigurno postoji razred sa barem $\left\lfloor \frac{1000-1}{30} \right\rfloor = 34$ učenika pa samim time će u razredu s najviše učenika biti barem 34 učenika. Preostaje dokazati da je ta situacija moguća, odnosno da postoji slučaj kada u razredu s najviše učenika i jest 34 učenika. Jedan takav primjer su 20 razreda sa 33 učenika i 10 razreda sa 34 učenika pa možemo zaključiti da je traženi najmanji mogući m zaista 34.

10. U svakom stupcu/retku/dijagonali moguće je postići zbrojeve $-5, -4, \ldots, 5$ kojih ima 11 različitih. Kako imamo 5 stupaca, 5 redaka i 2 dijagonale, sigurno će se jedan zbroj ponoviti barem 2 puta.

11. Example 3.2.4.

12. Example 3.3.1.

13. Zadatak 11.

14. Školsko natjecanje 2013. A-3.5

15. Example 3.3.2.

16. Promatrajmo brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_{365} koji predstavljaju ukupan broj posađenih drva zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \cdots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1+29, a_2+29, \ldots, a_{365}+29$, jer ako je to slučaj, tj. ako za neke i i j vrijedi $a_i+29 = a_j$, onda vrijedi $j < i$ te da je u danima između Zoe posadila točno 29 drva. Brojevi $a_1, a_1+29, a_2, a_2+29, \ldots, a_{365}, a_{365}+29$ nalaze se između 1 i 729 uključivo. Kako tih brojeva ima 730 i $730 = 729 \cdot 1 + 1$, dva broja moraju biti jednaka. Kako su svi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ međusobno različiti jer je Zoe svaki dan posadila bar 1 drvo, različiti su i svi brojevi $a_1 + 29, \ldots, a_{365} + 29$. To znači da je neki broj a_i jednak nekom broju $a_j + 29$ i tvrdnja je dokazana.

Teži zadaci

17. Challenge, 3. zadatak

18. Example 3.3.4.

17.2. G1: Nika Utrobičić - Sukladnost i sličnost

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Poučak o obodnom i središnjem kutu

2. Neka u trokutu ABC simetrala kuta $\angle BAC = \alpha$ siječe opisanu kružnicu trokuta u točki T. Povucimo okomicu iz T na BC i označimo njeno nožište s N. Kad bi N bilo polovište stranice BC, TN bi morala biti simetrala stranice pa bismo bili gotovi. Kad bismo dokazali da su trokuti CTN i TNB sukladni, iz toga bi slijedilo $CN = BN$, pa bismo bili gotovi. Uočavamo obodne kuteve u tetivnom četverokutu $ABTC : \angle CBT = \angle CAT = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle BCT = \angle BAT = \frac{\alpha}{2}$. Iz toga zaključujemo da je $\angle NCT = \angle NBT$, a kako je $\angle TNC = \angle TNB = 90°$ te je TN zajednička stranica tih trokuta, trokuti TNC i TNB su sukladni po poučku KSK, stoga smo gotovi.

3. Označimo središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ sa I. Površina trokuta $\triangle ABC$ je očito suma površina $\triangle IBA$, $\triangle ICA$ i $\triangle IBC$. Kako je visina iz I na bilo koju od stranica trokuta jednaka radijusu upisane kružnice r, lako zaključujemo da su površine tih trokuta $\frac{c \cdot r}{2}$, $\frac{b \cdot r}{2}$ i $\frac{a \cdot r}{2}$ redom. Tvrdnju zadatka dobijamo zbrajanjem dobivenih površina.

4. Poučak o tetivi i tangenti

5. Lema o trozupcu

6. Preslike ortocentra (6. i 7. zad)

7. Poučak o simetrali kuta

8. Označimo s X sjecište pravca HM s kružnicom na luku BC. Kad bismo dokazali da je $ACX = 90°$, po obratu Talesovog poučka (korolara poučka o obodnom i središnjem kutu) vrijedilo bi da je AX promjer, stoga bi AX morao biti baš AO, pa bismo bili gotovi. Vrijedi $\angle ACX = \angle ACB + \angle BCX = \gamma + \angle BCX$. Iz leme o preslici ortocentra znamo da je M polovište i BC i HX, stoga je $BHCX$ paralelogram, pa je $BCX = CBH$. Označimo s N nožište visine iz B. Znamo da je trokut $\triangle BCN$ pravokutan, stoga $\angle CBN + \angle BCN = 90°$, a to je zapravo $\angle CBH + \gamma = \angle BCX + \gamma = \angle ACX = 90°$, pa smo gotovi.

9. Eulerov pravac

10. Kružnica devet točaka

11. 2017drz

12. 2014zup7

13. 2014drz

14. 2015drz

15. 2012drz

16. 2011drz

17. Označimo $\angle ABC = \beta$. Tada je iz pravokutnog trokuta $\triangle BAN$ $\angle BAN = 90° - \beta$. S druge strane, po poučku o obodnom i središnjem kutu $\angle COA = 2\angle CBA = 2\beta$, pa iz jednakokračnog trokuta $\triangle COA$ izračunamo $\angle CAO = 90° - \beta$.

18. Uočimo tetivni četverokut $ABCE$. Iz njega vidimo da je $\angle ABC = 180° - \angle AEC$. Iz tetivnog četverokuta $ACDE$ pak vidimo da je $\angle CDE = 180° - \angle CAE$, stoga $\angle ABC + \angle CDE = 180° - \angle AEC + 180° - \angle CAE = 360° - (\angle AEC + \angle CAE)$. Kako je trokut $\triangle AEC$ pravokutan jer je $\overline{AE}$ promjer, $\angle AEC + \angle CAE = 90°$, stoga je traženi zbroj $270°$.

19. Županijsko 2018. 4.r.
20. Županijsko 2009. 2.r.
21. Državno 2012. 4.r.
22. Županijsko 2017. 4.r.
23. Državno 2010. 2.r.
24. Državno 2017. 2.r.

17.3. A1: Patricija Dovijanić - Faktorizacije

Predavanje Hintovi Rješenja

Sva rješenja zadataka s natjecanja možete naći ovdje i ovdje.

1. a) 2013. Š8.3 b) 2015. Š1B.2

2. a) 2023. Š8.1 b) 2021. Š8.1 c) 2020. Š8.1

3. 2020. D8.1

4. 2013. Ž8.2

5. a) Izvor. b) Izraz se može faktorizirati u

$$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2),$$

dakle izraz $a^2 - 2ab + 2b^2$ mora biti jednak 1 jer je desni izraz veći od njega. Primjetimo da $a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2$, prema tome izraz je jednak 1 samo kad je $a = b$ i $b = 1$. Iz ovoga slijedi da je jedino rješenje $a = 1$ i $b = 1$, a prost broj je 5.

6. 2017. D8.2

7. a) $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$. Zbroj 3 uzastopna prirodna broja djeljiv je sa 6 jer je točno jedan djeljiv s 3 i bar jedan djeljiv s 2. b) $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = ... = 3n(n^2 + 2)$, još treba dokazati $n(n^2 + 2)$ djeljiv s 3. Ako je n djeljiv s 3, gotovi smo. Ako je n oblika $3k + 1$, imamo $n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(k^2 + 2k + 1)$ što je djeljivo s 3 i gotovi smo. Ako je n oblika $3k + 2$, imamo $n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6$ što je također djeljivo s 3 i gotovi smo. d) Uvrštavanjem u formulu za razliku potencija imamo $2021^n - 1 = 2021^n - 1^n = (2021 - 1)(...) = 2020 \cdot (...)$ što je očito djeljivo s 2020. d) Izraz se može faktorizirati u $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, dakle izraz $x^2 - xy + y^2$ mora biti jednak 1 jer je desni izraz veći od 1 i jer su x i y prirodni. Primijetimo da $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy$, prema tome izraz je jednak 1 samo kad je $y = x = 1$. Iz ovoga slijedi da je jedino rješenje $x = 1$ i $y = 1$, a prost broj je 2. e) 2021. Š8.6

8. a) 2012. Ž8.2 b) 2020. Ž8.6 c) 2016. Š2A.2 d) 2015. Š3A.3

9. 2016. Ž2B.4

10. a) 2014. Š2B.1 b) 2012. Š1A.2

11. 2016. Ž1A.2

12. 2018. Š2A.4

13. 2015. Ž1A.1

14. a) 1994. Š1.2 b) 1995. Š1.3 c) 2004. D2.2 d) 2002. D1.3

17.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. županijsko 2006. SŠ1A 1. zadatak
2. adaptacija P1 IMO 1959. Problem 2.
3. školsko SŠ1A 1. zadatak
4. školsko 2017. SŠ1A 3. zadatak
5. primjer 3.
6. Mjera mora dijeliti 12 pa su mogućnosti $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Odmah je jasno da $3, 6$ i 12 otpadaju jer ne dijele $3n + 2$. $1, 2, 4$ su točna rješenja, dovoljno je provjeriti $n = 2, 3, 4$.
7. školsko 2018. SŠ1A 3. zadatak
8. Kako je $m?$ umnožak prostih brojeva, a jedini paran prosti broj je 2, $m?$ je djeljiv s 2, ali nije djeliv nikojom drugom potencijom broja 2, pa tako ni s 4. S druge strane, među 4 uzastopna prirodna broja, sigurno postoji jedan koji je djelijv s 4, pa $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$, ali $4 \nmid m?$. Zaključujemo da ne postoje traženi prirodni brojeva.
9. školsko 2017. SŠ3A 4. zadatak
10. a) Promatramo brojeve $8p - 1, 8p, 8p + 1$. Zaključujemo da jedan od ta tri broja mora biti djelijv s 3. Ako je to $8p$, tada zbog toga što je p prost, on mora biti ili jednak 3 ili pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 ili 2. Ako je $p = 3$, onda je $8p - 1 = 23$, a $8p + 1 = 25$ i vidimo da tvrdnja vrijedi. U drugom slučaju, ako je $8p - 1$ djeljiv s 3, tada zbog toga što je prost mora biti upravo $8p - 1 = 3$, ali to nije moguće jer je $8p - 1 > 15$. U trećem slučaju, ako 3 dijeli $8p + 1$, a sigurno je $8p1+ > 3$, on mora biti složen i tvrdnja opet vrijedi.

    b) Promatramo brojeve $8p^2 - 1, 8p^2, 8p^2 + 1$. To su tri uzastopna broja, pa je jedan od njih djeljiv s 3. Kako je $8p^2 + 1 > 3$ i prost je, on ne može biti djeljiv s 3, pa ostaju samo dva slučaja. U prvom neka $3 \mid p^2$, tada $3 \mid p$, a iz toga je $p = 3$ i $8p^2 - 1 = 71$, odnosno tvrdnja vrijedi. U drugom slučaju vidimo da nije moguće ispuniti uvjete tvrdnje. Naime, ako $3 \mid 8p^2 - 1$, tada sigurno $3 \nmid p$. Nadalje, zbog kvadratnih ostatka znamo da u tom slučaju p^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, odnosno $8p^2 - 1$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. Time je zadatak gotov.
11. Kvadrati prirodnih brojeva daju pri dijeljenju s 4 ostatke 0 i 1. Ako je n paran, zadani brojevi su oblika $(2^n)^2 + 3$, a ako je neparan $(2^n)^2 + 2$. Jasno je sada da traženi n ne postoji.
12. županijsko 2008. SŠ1A 3. zadatak
13. link
14. državno 2016. SŠ1B 3. zadatak
15. županijsko 2007. SŠ2A 5. zadatak
16. 2020 Mock USAJMO Problem 1.
17. županijsko 2014. SŠ3A 4. zadatak
18. link

19. HJMO 2017. 1. zadatak

20. JBMO 2013. P1

18. Rješenja za drugu grupu

18.1. C2: Andrija Tomorad - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Zbroj brojeva na početku je 110, a u b) slučaju je 112. Zbroj brojeva je invarijanta jer je $x+y+z = (2x-y)+(2y-z)+(2z-x)$, pa se a) slučaje ne može postići. Na početku je jedan parni broj, a u a) slučaju su tri. Broj parnih brojeva je također invarijanta (x je paran ako i samo ako je $2z-x$ paran, analogno za y i z), pa se ni a) slučaj ne može postići.

2. Ne može jer je ostatak broja pri djeljenju s 3 invarijanta (na početku je 1, a na kraju bi trebao biti 0).

3. Obojimo ploču u tri boje (A, B, C) počevši s A u gornjem lijevom kutu i ponavljajući niz A, B, C nadolje i nadesno. Dobit će se 21 A i C polja, a 22 B polja. Odavde se zaključuje da uklonjeno polje treba biti B (svaka pločica uvijek pokriva jedno A, jedno B i jedno C polje, pa brojevi polja trebaju biti jednaki). Polja koja možemo ukloniti će biti C3, C6, F3 i F6. To su jedina polja koja će uvijek biti B, možemo početi iz drugih putova (to dokazuje da je nemoguće za ostala polja, ali da pokažemo mogućnost za ta četiri polja, treba naći konstrukciju... nije teško).

4. Smjestimo sobu u koordinatni sustav (u prvi kvadrant, SW kut je ishodište). Uočimo da zraka prolazi samo kroz točke čije su koordinate ili obje parne ili obje neparne (koordinate sljedeće točke kroz koju zraka prolazi razlikuju se za ±1 od prethodne), no to ne vrijedi za NW i NE kutove, samo za SE.

5. Ako je n neparan, odaberemo li dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, te dva puta $\overline{A_4A_5}$, ..., i $\overline{A_{n-1}A_n}$, postići ćemo da su svi brojevi jednaki 2.

   Ako je n neparan, obojimo vrhove neparnog indeksa u crno, a vrhove parnog indeksa u bijelo. U svakom potezu se i crna suma i bijela suma povećaju za 1, dakle njihova razlika uvijek ostaje ista. Na kraju (kad su svi brojevi jednaki), ta razlika bi trebala biti nula, ali na početku je 2.

6. Ako postoje dva broja među p, c, z koja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, možemo postići da ti brojevi postanu jednaki, to radimo na sljedeći način. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da p i c daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 i $p \geq c$. Uočimo da se nakon susreta plavog i zelenog, pa zatim dva plava i dva crvena p smanji za 3, z poveća za 3, a c ostaje isti. Taj slijed primjenjujemo nakon što na početku sve crvene susretnemo s nekim plavim (pa dobijemo $p-c$ plavih, 0 crvenih i $z+2c$ zelenih). Tada će svi kameleoni biti zeleni; crvenih očito nema, a plavih nema jer se taj broj počevši od $p-c$ (što je djeljivo s 3 jer p i c daju isti ostatak) smanjuje za 3 dok god može.

   Ako sva tri broja daju različit ostatak pri dj. s 3, opet će nakon bilo kojeg poteza (budući da se sva tri broja zajedno promjene za -1 ili +2, ostat će davati različite ostatke), to znači da nikoja dva broja nikad ne će biti jednaka.

7. Opseg i površina su invarijante pa bi početni kvadrat i završni trokut trebali imati isti opseg i površinu. Ako označimo stranicu kvadrata s a, pomoću invarijantnosti opsega dobijemo da bi stranica trokuta trebala biti $\frac{4a}{3}$, ali invarijantnost površine daje drugačiju stranicu.

8. Nacrtamo crne točke A i B, bijele točke C i D, dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ koje se sijeku, te označimo sjecište sa S. Iz nejednakosti trokuta slijede $|AD| < |AS| + |SD|$ i $|BC| < |BS| + |SC|$. Zbrojimo li te nejednakosti, dobijemo $|AD| + |BC| < |AC| + |BD|$. To pokazuje da se nakon svakog poteza zbroj duljina svih dužina (označimo ga s S) strogo smanjuje (monovarijanta). Budući da postoji samo konačno mnogo načina na se povežu točke, to daje konačno mnogo mogućnosti za S, što znači da će se nakon nekoliko poteza doći do povezivanja s najmanjim S. U tom slučaju se dužine ne sijeku jer ako bi se sjekle, primijenivši još jedan potez, dobili bismo povezivanje s manjim S. Dakle, mora se dogoditi da se dužine ne sijeku

9. Prvo rješenje: bojanje s 4 boje (analogno 3. zadatku).

Drugo rješenje: Opločimo ploču s 25 2×2 kvadrata pa šahovski obojamo dobivenu 5×5 ploču. Tada imamo 52 crna i 48 bijelih polja (ili obratno), ali svaka 1×4 pločica uvijek pokriva 2 bijela i 2 crna polja.

10. Ako je $n = 4k + 2$, onda nije moguće jer je parnost broja parnih brojeva na ploči invarijanta (na početku imamo $2k + 1$ parnih brojeva, a na kraju bi ih trebalo biti 0 ili $4k + 2$).

11. Ako je $n = 4k$, možemo prvo odabrati 1 i 3, 5 i 7, ... te $4k - 3$ i $4k - 1$, tako dobijemo 2, 2, 4, 4, ..., $4k$, $4k$. Sada možemo dva po dva jednaka broja povećavati dok ne dobijemo da su svi jednaki $4k$. Slučajevi $4k + 1$ i $4k - 1$ se lako konstruiraju preko $4k$.

12. Obojimo mjesta A i D (A je ono na kojem je na početku guska) u crno, a ostale u bijelo. Lako se vidi da je parnost broja gusaka na bijelim mjestima invarijanta pa na bijelim mjestima ne može biti točno jedna guska. Dakle ostaju samo mjesta A i D. Na D možemo dobiti gusku (odaberemo A,B,C pa B,C,D).

13. Ne možemo. Zbroj kvadrata je invarijanta (provjerite). Na početku je zbroj kvadrata 29, a na kraju bi trebao biti 35.

14. Obojimo ploču šahovski tako da su polja u kutu crna. Tvrdimo da svi žetoni mogu biti samo na crnim poljima. Parnost broja žetona na bijelim poljima je invarijanta (provjerite), Na početku imamo 12 žetona na bijelim poljima pa ne možemo postići da svi budu na bijelim poljima. Dakle ne mogu svi biti na istom bijelom polju.

Konstrukcija za crno polje. Odaberimo proizvoljno crno polje pa opločimo ploču dominima bez tog jednog polja (uvjerite se da je to moguće za svako crno polje). Zatim u prvih šest poteza postignemo da u svakom dominu budu žetoni na istom polju. Nakon toga u svakom potezu možemo odabrati dva žetona na istom polju i pomicati ih zajedno. Ponavljamo to dok svi žetoni ne budu na nepokrivenom polju (koje je na početku također već imalo jedan žeton).

15. Obojimo polja koja su uz stranicu kvadrata, ali nisu kutna. Parnost upaljenih žarulja na obojanim poljima je invarijanta (svaki potez promatra nijedan ili dva obojena polja).

16. Za zadani potez (brisanje i pribrajanje znamenke) ostatak pri djeljenju s 9 je invarijanta ($n + a \cdot 10^k$ daje isti ostatak modulo 9 kao $n + a$). Kad bi sve znamenke konačnog 10-znamenkastog broja bile različite, zbroj znamenaka bi mu bio $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, dakle djeljiv s 9. Međutim, početni broj nije djeljiv niti s 3 jer 2023 nije djeljiv s 3.

17. Smjestimo osobe na bilo koji način. Svaka osoba je u sobi sa 0,1,2 ili 3 svojih neprijatelja. Neka je S zbroj svih tih brojeva (za sve osobe). Nakon toga u svakom potezu odaberemo osobu koja je u sobi s 2 ili više svojih neprijatelja i prebacimo ju u drugu sobu. Ako je bila u sobi s dva neprijatelja, sad će biti u sobi s jednim manje. Također, njena dva neprijatelja iz prve sobe će biti s jednim manje, ali njen neprijatelj iz druge sobe s jednim više. Dakle S će se smanjiti za 1+2-1=2. Slično, ako je osoba bila s 3 neprijatelja, S će se smanjiti za 6. Dalje je zadatak ekvivalentan 8. zadatku.

18. Obojimo ploču s 3 boje kao u 3. zadatku. Uočimo da ćemo u svakom potezu odabrati žeton na jednoj boji polja i pomaknuti ga preko polja druge boje na polje treće boje, dakle promjene broja žetona na poljima određene boje će biti redom -1, -1, +1. Tada (slično 4. zadatku) zaključujemo da budu nakon svakog poteza ili sva tri broja parna ili sva tri broja neparna. Zato je nemoguće postići da ostane samo jedan žeton.

19. Dokazat ćemo da je najmanji takav n jednak 8. Dokažimo prvo da za $n < 8$ nikako ne može cijelo zemljište obrasti u korov. Opseg dijela zemljišta obraslog u korov je monovarijanta. Ako korov prijeđe na polje koje ima dva susjeda u korovu, opseg se ne mijenja, a ako su bila tri ili četiri susjeda onda se smanji. To znači da n ne može biti 7 ili manji jer je tada početni opseg najviše 28, dakle nikako se ne može dogoditi da bude 30 (što bi bio ako cijelo zemljište bude u obraslo u korov). Preostaje još dokazati da za $n = 8$ postoji raspored takav da će cijelo zemljište obrasti u korov. Za to samo treba naći primjer, npr. mogu polja A1, B2, C3, D4, E5, E7, E9 i E10 biti na početku obrasla u korov.

18.2. G2: Namik Agić - Angle chase

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Oba kuta su jednaka $90-\beta$ zbog $\angle CAO = 2\beta$, $AO = CO$ i pravokutnog trokuta kojeg čine A, B i nožište visine iz A.
2. Neka je P presjek BDF, CDE. Imamo $\angle EPF = 360 - \angle EPD - \angle FPD = 360 - (180-\beta) - (180-\gamma) = 180-\alpha$, pa je $AEPF$ tetivan i P je traženi presjek triju kružnica.
3. Neka je H' preslika H preko BC. Vrijedi $\angle BH'C = \angle BHC$, a $\angle BHC$ se lagano odredi kao $180-\alpha$. To odmah daje $ABH'C$ tetivan.
4. Opet bez smanjenja općenitosti neka je M polovište BC. Zato što je M polovište i BC i HH', $BHCH'$ je paralelogram pa je $\angle BH'C = \angle BHC$. Završetak je isti kao u zadatku iznad.
5. Iz tetivnih četverokuta $ABXY, XYCD$ je $\angle ABD = 180 - \angle AYX = \angle CYX = 180 - \angle CDX = 180 - \angle CDB$, pa zbog presječnice dobivamo traženu paralelnost.
6. državno 2014 1. razred
7. državno 2011. 1. razred
8. Iz lemme s uvoda znamo $MB = MC$, zato je dovoljno $MB = MI$. Iz obodnih kuteva po opisanoj ABC imamo $\angle MBI = \alpha/2 + \beta/2 = 90 - \gamma/2$, te $\angle BMI = \angle BMA = \gamma$, što daje MBI jednakokračan i gotovi smo.
9. državno 2010. 2. razred
10. HMO 2013. MEMO test
11. IMO shortlist 2010 G1
12. IMO 2015 p4
13. IMO shortlist 2013 G4
14. IMO shortlist 2017 G7

18.3. A2: Mislav Plavac - Teleskopiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Najlakše je dokaz izvesti direktnom provjerom:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{(n+x)-n}{n(n+x)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{n(n+x)}=\frac{1}{n(n+x)}.$$

2. Primijetimo da za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}.$$

Uvrstimo li to natrag u umnožak dobivamo

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

Uočavamo da se pokrati sve osim brojnika prvog člana i nazivnika zadnjeg člana pa je

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}.$$

3. Primijetimo da za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijedi $k^2-1=(k-1)(k+1)$. Lako tada vidimo da je

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Uvrstimo li to natrag u sumu dobivamo

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Nakon što skratimo stvari preostaju nam članovi $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n^2-n-2}{4n^2+4n}$. Dakle,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3n^2-n-2}{4n^2+4n}.$$

4. Primijetimo da za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijedi $k^2+3k+2=(k+1)(k+2)$ te stoga

$$\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}.$$

Slično prethodnom zadatku dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

Pokrati se sve osim prvog i zadnjeg člana pa je

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

5. Uočavam da je opći član sume $\frac{1}{k(k+3)}$ te analogno prijašnjim zadacima rastavljamo na 2 razlomka

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right).$$

Sada uvrštavamo u sumu i dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{33}{100}.$$

6. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{(k-1)(k+1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n+1} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dakle,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2+1}{k^2-1} = \frac{2n^3+3n^2-3n-2}{2n^2+2n}.$$

7. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}.$$

Što znači da dani umnožak možemo zapisati kao

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2}$$

Dakle,

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

8. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

9. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2! - 1! + 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Umjereni zadaci

10. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Dakle,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

11. Rastavimo izraz $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Odredimo koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$. Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}.\end{aligned}$$

Usporedimo li dobiveni brojnik s brojnikom izraza $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ i izjednačimo li koeficijente uz k^2, k te slobodne koeficijente, dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 2a=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-1, \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \dots - \frac{2}{n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2}.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8}.$$

12. Primjetimo da vrijedi

$$\frac{1}{(a+1)\sqrt{a} + a\sqrt{a+1}} \cdot \frac{(a+1)\sqrt{a} - a\sqrt{a+1}}{(a+1)\sqrt{a} - a\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1)\sqrt{a} - a\sqrt{a+1}}{a(a+1)} = \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{\sqrt{a+1}}{a+1}.$$

Kada raspišemo sve, pokratit će se sve osim prvog i zadnjeg, pa ostajemo s $\frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{25}}{25} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

13. Opći član je $\frac{k^2+(k+1)^2}{k(k+1)}$. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{k^2+(k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)} + \frac{(k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k} = 2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Tada naša suma postaje

$$\left(2+1-\frac{1}{2}\right) + \left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(2+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right) + \left(2+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right) = 2\cdot 99 + 1 - \frac{1}{100}.$$

14. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(k^2+k+1)\cdot k! = ((k+1)^2-k)\cdot k! = (k+1)^2\cdot k! - k\cdot k! = (k+1)\cdot(k+1)! - k\cdot k!.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2\cdot 2! - 1\cdot 1! + 3\cdot 3! - 2\cdot 2! + \ldots + (n+1)\cdot(n+1)! - n\cdot n! = (n+1)\cdot(n+1)! - 1.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)k! = (n+1)\cdot(n+1)! - 1.$$

15. Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \ldots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_1-x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant 2n.$$

Neka je $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ... $x_n = x_{n-1} - x_n$. Tada je lijeva strana nejednakosti jednaka

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_i}).$$

Zbog uređenosti $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ je svaki $a_i > 0$ pa je $a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2$ prema A-G nejednakosti, ako zbrojimo nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_i}) \geq 2n$$

što je i trebalo pokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = 1$ za svaki $i = 1, 2, ...n$, odnosno $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = ... = x_{n-1} - x_n = 1$.

16. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

pa je dana suma manja od

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

17. Primijetimo da se nazivnici mogu faktorizirati na sljedeći način: $k^4 + k^2 + 1 = (k^2+1)^2 - k^2 = (k^2+k+1)(k^2-k+1)$. Ono što je zanimljivo kod ove faktorizacije jest da je jedna zagrada zapravo jednaka drugoj zagradi uz translaciju varijable za jedan, odnosno vrijedi $k^2 - k + 1 = (k-1)^2 + (k-1) + 1$. Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bi izveli teleskopiranje. Rastavljajući izraz na parcijalne razlomke, dobivamo da vrijedi

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2(k^2+k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{((k+1)-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right).$$

Pa je dana suma jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{(n+1-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2+2n+2}.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{n^2+n}{2n^2+2n+2}.$$

Teži zadaci

18. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}(F_{k-1}+F_k)} = \frac{1}{F_k}\left(\frac{1}{F_{k-1}} - \frac{1}{F_{k-1}+F_k}\right) = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}}.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = 1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}} < 1.$$

19. Najprije, po Sophie-Germain faktorizaciji vrijedi sljedeće:

$$a^4 + 4 \cdot 9^2 = ((a-3)^2 + 3^2)((a+3)^2 + 3^2).$$

Zapišimo sve faktore preko njihovih faktora:

$$\frac{(7^2+3^2)(13^2+3^2)(19^2+3^2)(25^2+3^2)(31^2+3^2)(37^2+3^2)(43^2+3^2)(49^2+3^2)(55^2+3^2)(61^2+3^2)}{(1^2+3^2)(7^2+3^2)(13^2+3^2)(19^2+3^2)(25^2+3^2)(31^2+3^2)(37^2+3^2)(43^2+3^2)(49^2+3^2)(55^2+3^2)}$$

Nakon što skratimo sve faktore, dobit ćemo $\dfrac{61^2+3^2}{1^2+3^2} = 373.$

20. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}.$$

Što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{3-2} - \frac{2^2}{3^2-2^2} + \frac{2^2}{3^2-2^2} - \frac{2^3}{3^3-2^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

21. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^3-8}{k^3+8} = \frac{(k-2)(k^2+2k+4)}{(k+2)(k^2-2k+4)}.$$

vidimo da će se $\dfrac{k-2}{k+2}$ teleskopirat, jedino ostaje vidjet što je s drugim dijelom produkta. Vidimo da je $k^2+2k+4 = (k+1)^2+3$ te $k^2-2k+4 = (k-1)^2+3$ pa će se i oni teleskopirati. Produkt ćemo rastaviti na 2 jednostavnija produkta

(a)
$$\prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{n-3}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}.$$

(b)
$$\prod_{k=3}^{n} \frac{(k+1)^2+3}{(k-1)^2+3} = \frac{4^2+3}{2^2+3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n+1)^2+3}{(n-1)^2+3} = \frac{(n^2+3)((n+1)^2+3)}{(2^2+3)(3^2+3)}.$$

Dakle,

$$\prod_{k=3}^{n} \frac{k^3-8}{k^3+8} = \frac{2}{7} \cdot \frac{(n^2+3)((n+1)^2+3)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}.$$

22. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{(k^3+3k)^2}{k^6-64} = \frac{k^2(k^2+3)^2}{(k^3)^2-8^2} = \frac{k^2(k^2+3)^2}{(k^3+8)(k^3-8)}$$

$$= \frac{k^2(k^2+3)^2}{(k-2)(k^2+2k+4)(k+2)(k^2-2k+4)} = \frac{k}{k-2}\cdot\frac{k}{k+2}\cdot\frac{k^2+3}{(k-1)^2+3}\cdot\frac{k^2+3}{(k+1)^2+3}.$$

Analogno prošlom zadatku produkt rastavljamo na jednostavnije te imamo

(a)

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k}{k-2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}.$$

(b)

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k}{k+2} = \frac{3\cdot 4}{(n+1)(n+2)}.$$

(c)

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2+3}{(k-1)^2+3} = \frac{n^2+3}{2^2+3}$$

(d)

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2+3}{(k+1)^2+3} = \frac{3^2+3}{(n+1)^2+3}.$$

Dakle,

$$\prod_{k=3}^{n}\frac{(k^3+3k)^2}{k^6-64} = \frac{72}{7}\cdot\frac{n(n-1)(n^2+3)}{(n+1)(n+2)((n+1)^2+3)}.$$

23. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{7k+32}{k(k+2)} = \frac{16}{k} - \frac{9}{k+2}.$$

Uočimo sada da vrijedi $9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 16$ pa možemo opći član rastaviti kao

$$\frac{7k+32}{k(k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{16}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{9}{k+2}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{16}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{16}{k+2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{7k+32}{k(k+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{16}{k+2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}\right)$$

$$= 12 + \frac{9}{2} - \frac{16}{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \frac{16}{n+2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}.$$

24. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+k^2+(k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{k^4+2k^3+k^2+2k^2+2k+1}}{k(k+1)} = \frac{\sqrt{(k^2+k)^2+2(k^2+k)+1}}{k(k+1)} = \frac{\sqrt{(k^2+k+1)^2}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Dalje se zadatak svodi na teleskopiranje sume s općim članom $\frac{1}{k(k+1)}$. Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = n + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}.$$

25. (a)

$$f\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=f\left(\frac{k+1-k}{1-(k+1)(-k)}\right)=f(k+1)+f(-k)=f(k+1)-f(k).$$

Lako se vidi da će nakon pokraćivanja ostati samo 2 člana.

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=f(n+1)-f(1).$$

(b)

$$\left(\frac{1}{2k^2}\right)=\left(\frac{2k+1-(2k-1)}{1+(2k-1)(2k+1)}\right)=f(2k+1)-f(2k-1).$$

Kao i u prijašnoj sumu ostat će samo 2 člana.

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{2k^2}\right)=f(2n+1)-f(1).$$

18.4. N2: Simeon Stefanović - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

1. *Rješenje:*

$$13x + 13y = xy$$

$$y(x-13) = 13x$$

$$y = \frac{13x}{x-13} = 13 + \frac{13^2}{x-13}$$

Kako y mora biti cijeli broj, vrijedi da $(x-13) \mid 13^2$, a iz toga slijedi da $x = 14, 26, 182$, a $y = 182, 26, 14$. Rješenja su uređeni parovi $(x, y) = (14, 182), (26, 26), (182, 14)$. Ova metoda se naziva metoda kvocijenta.

2. *Rješenje:*

$$y(x-1) + 2x - 2 = 2$$

$$y(x-1) + 2(x-1) = 2$$

$$(x-1)(y+2) = 2$$

Primjetimo da nam je umnožak na lijevoj strani jednak 2, dakle imamo 4 mogućnosti: $(x-1, y+2) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$ što rezultira s četiri uređena para rješenja: $(2, 0), (3, -1), (0, 4), (-1, -3)$. Ova metoda se naziva metoda faktorizacije.

3. *Rješenje:* Primjetimo kako je x^2 neparan. Naime, ako bi vrijedilo $2 \mid x^2$, uz $2 \mid 4y$, slijedi da je lijeva strana dijeljiva s 2, ali vidimo da desna nije. Dakle, x^2 je neparan pa je i x neparan. Nadalje možemo pisati $x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$

$$(2k-1)^2 - 4y = 1995$$

$$4k^2 - 4k + 1 - 4y = 1995$$

$$4(k^2 - k - y) = 1994$$

Zaključujemo da jednadžba nema rješenja jer je lijeva strana dijeljiva s 4, a za desnu lako provjerimo da nije. Ova metoda se naziva metoda kongruencija.

4. *Rješenje:* Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je $abc = a + b + c \leq 3c$, odnosno $ab \leq 3$ pa imamo 3 slučaja: $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$.
Uvrštavajući te vrijednosti u početnu jednadžbu dobijemo rješenje $(1, 2, 3)$ i sve permutacije. Ova metoda se naziva metoda ograničavanja.

5. *Rješenje:* Nakon što sve izmnožimo i prebacimo na lijevu stranu dobijemo:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

Ideja je sada lijevu stranu zapisati kao zbroj nekih kvadrata jer ćemo tada dobiti da je zbroj nekih prirodnih brojeva jednak nekom prirodnom broju, što nema puno mogućnosti.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Sada imamo četiri mogućnosti za dobiti zbroj 1, a to su $(x-1, y) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$. Time dobivamo 4 rješenja: $(x, y) \in \{(2, 0), (0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$. Ova metoda se naziva metoda zbroja kvadrata.

6. *Rješenje:* Primjetimo da vrijedi $n^2 < n^2 + n + 7 < (n+3)^2$. Sada nam preostaje provjeriti dva slučaja:

$$n^2 + n + 7 = (n+1)^2$$

$$n^2 + n + 7 = n^2 + 2n + 1$$

$$n = 6$$

Odakle dobivamo jedno rješenje. Provjerom slučaja

$$n^2 + n + 7 = (n+2)^2$$

$$n^2 + n + 7 = n^2 + 4n + 4$$

$$n = 1$$

dobivamo i drugo rješenje. Dakle, sva rješenja su $n \in \{1, 6\}$. Ova metoda se naziva metoda smještanja među kvadrate.

7. *Rješenje:* Srednji član na lijevoj strani jednadžbe rastavimo kako bismo mogli omogućiti faktorizaciju:

$$x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 18$$

$$x(x+y) - 2y(x+y) = 18$$

$$(x-2y)(x+y) = 18$$

Uspjeli smo zapisati lijevu stranu kao umnožak dva cjelobrojna izraza. Oba izraza su djelitelji broja 18, a to su

$$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

Međutim, dobili smo 12 slučajeva. Bilo bi lijepo ukoliko bismo mogli eliminirati neke slučajeve. Primjetimo da je

$$(x+y) - (x-2y) = 3y$$

Dakle, razlika ovih dvaju izraza je djeljiva s 3. To znači da možemo odbaciti sve slučajeve u kojima razlika nije 3. Preostaje nam provjeriti samo slučajeve $(x+y, x-2y) = (-6,-3), (-3,-6), (3,6), (6,3)$. (Uvjerite se da su to jedini bitni slučajevi).
Rješavanjem ta 4 sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobivamo 4 rješenja: $(x, y) = (-5,-1), (-4,1), (4,-1), (5,1)$.

8. *Rješenje:* Započnimo opservacijom $x, y \neq 0$. Zbog toga možemo pomnožiti sve s xy kako bismo dobili ljepši oblik:

$$y + 4x + 7 = xy$$

$$xy - y = 4x + 7$$

$$y(x-1) = 4x + 7$$

Provjerom možemo vidjeti da $x = 1$ nije rješenje (ni za jedan y), pa smijemo dijeliti s $x - 1$

$$y = \frac{4x+7}{x-1}$$

$$y = 4 + \frac{11}{x-1}$$

Kako y mora biti cijeli broj, zaključujemo da vrijedi $(x-1) \mid 11$. Preostaje nam provjeriti 4 slučaja za svaku mogućnost $x - 1 \in \{-11, -1, 1, 11\}$
Dobivamo 3 rješenja: $(x, y) = (-10, 3), (2, 15), (12, 5)$.

9. *Rješenje:* Ovaj zadatak ćemo riješiti metodom faktorizacije:

$$(m^2+n)(m+n^2) = (m+n)^3$$

$$m^3 + m^2n^2 + mn + n^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$

$$m^2n^2 + mn = 3m^2n + 3mn^2$$

$$mn(mn + 1 - 3m - 3n) = 0$$

Sada razlikujemo 3 slučaja:

(a) $m = 0$, sva rješenja su uređeni parovi $0, n), n \in \mathbb{Z}$

(b) $n = 0$, sva rješenja su uređeni parovi $(m, 0), m \in \mathbb{Z}$

(c) $mn + 1 - 3m - 3n = 0$
$m(n-3) - 3(n-3) = 8$
$(m-3)(n-3) = 8$
Kako je jednadžba simetrična, BSO (bez smanjenja općenitosti) možemo pretpostaviti $m \geq n$. Sada imamo slučajeve:

$$m - 3 = 8, n - 3 = 1$$

$$m - 3 = 4, n - 3 = 2$$

$$m - 3 = -1, n - 3 = -8$$

$$m - 3 = -2, n - 3 = -4$$

.

To nam daje rješenja: $(x, y) \in \{(0, n), (m, 0), (11, 4), (4, 11), (7, 5), (5, 7), (2, -5), (-5, 2),$
$(1, -1), (-1, 1)\}$

10. *Rješenje:* Primjetimo da ne mogu sva tri broja a, b, c biti proizvoljno veliki. Dapače, $a, b, c > 3$ povlači $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Zato je bar jedan od brojeva manji od 3. BSO neka je $a \leq b \leq c$.

(a) $a = 1 \implies \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Kontradikcija.

(b) $a = 2 \implies \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Sada opet ograničavamo. Uočimo da barem jedan od brojeva mora biti manji od 4. Slučaj $b = 2$ vodi na kontradikciju, a preostala dva daju rješenja $(2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$.

(c) $a = 3 \implies \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. BSO $b \leq 3$ pa je $b = 3$ i imamo rješenje $(3, 3, 3)$.

Dakle, rješenja su trojke $(3, 3, 3), (2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$ te njihove permutacije.

11. *Rješenje:* Promotrimo ostatke pri dijeljenju sa 7. Jednadžba zatim prelazi u

$$5x^3 \equiv 3 \pmod 7$$

Promotrimo ostatak pri djeljenju broja x^3 gdje je $x = 7k + l, l \in \{0, 1, ..., 6\}$ pri dijeljenju sa 7. Dobijemo da su jedini ostaci $1, 0, -1$. Slijedi da je $5x^3 \equiv 5, 0, -5 \pmod 7$, što je u kontradikciji da je $5x^3 \equiv 3 \pmod 7$. Dakle, nema rješenja.

12. *Rješenje:* Očito je rješenje $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
Sada pretpostavimo da je (x, y, z) rješenje jednadžbe gdje nisu sva tri broja jednaka 0. Neka je $d = gcd(x, y, z)$. Neka je $x = ad, y = bd, z = bc$. Supstitucijom u početnu jednadžbu dobivamo da je i (a, b, c) rješenje.
Sada promotrimo rješenje jednadžbe s najmanjim zbrojem. Primjetimo da je lijeva strana dijeljiva s 2, što znači da je i desna, pa je $2 \mid z \implies z = 2z_0$. Sada nam je početna jednadžba

$$10x^3 + 20y^3 + 16xyz_0 = 15992z_0^3$$

$$5x^3 + 10y^3 + 8xyz_0 = 7996z_0^3$$

Primjetimo da su svi članovi osim $5x^3$ nužno parni, pa je $2 \mid x \implies x = 2x_0$.
Sada nam je početna jednadžba

$$40x_0^3 + 10y^3 + 16x_0yz_0 = 7996z_0$$

$$20x_0^3 + 5y^3 + 8x_0yz_0 = 3998z_0^3$$

Ponovno možemo primjetiti da su svi članovi osim $5y^3$ parni, pa je $2 \mid y \implies y = 2y_0$. Konačno, jednadžba nakon supstitucije i dijeljenja s 2 postaje

$$10x_0^3 + 20y_0^3 + 8x_0y_0z_0 = 1999z_0^3$$

Primjetimo da je to ekvivalentno početnoj jednadžbi, što implicira da je i (x_0, y_0, z_0) rješenje koje je manje od (x, y, z) što je u kontradikciji s pretpostavkom da je (x, y, z) najmanje rješenje. Dakle, nema preostalih rješenja.

13. *Rješenje:* Primjetimo da je lijeva strana potpun kub. Ideja za rješenje nam je smještanje među kubove. Za prirodne brojeve vrijedi $8x^2 - 6x > 0$. To nam koristi zato što možemo dobiti dobiti da je $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 > x^3$. S druge strane, nakon što izmnožimo, primjetimo da je $x^3+8x^2-6x+8 < (x+3)^3$. Ostaje nam provjeriti slučajeve kada je $y^3 = (x+1)^3$ i $y^3 = (x+2)^3$. Za prvi slučaj imamo

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$5x^2 - 9x + 7 = 0$$

Za prirodne brojeve x vrijedi da je $5x^2-9x+7 > 0$ (što možemo dobiti provjerom diskriminante kvadratne jednadžbe). Za slučaj $y^3 = (x + 2)^3$ imamo

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$2x^2 - 18x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

odakle je $x = 9$ jedino prirodno rješenje, što povlači da je $y = 11$.

14. Za rješavanje ovog zadatka koristit ćemo metodu zbroja kvadrata. Prvo ćemo faktorizirati lijevu stranu pa promatrati slučajeve.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2$$

1. $x + y = 0$
   Rješenje su svi uređeni parovi $(x, -x)$ gdje je $x \in \mathbb{Z}$
2. $$(x^2 - xy + y^2) = (x + y)$$

   Pomnožit ćemo jednadžbu s 2 i napisati u sljedećem obliku

   $$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$
   $$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

   Sada slijedi $|x-y| \le 1$, $|x-1| \le 1$ i $|y-1| \le 1$. Nadalje promatrajući sve slučajeve dolazimo do svih preostalih rješenja, $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.

Sljedeća četiri zadatka se nalaze u knjizi "Andreescu T., Andrica D., Cucurezeanu I. An introduction to Diophantine equations. A problem-based approach (Birkhauser, 2010)". Ona se može naći na sljedećem linku.

15. Example 3, str. 6
16. Example 1, str. 4
17. Example 4, str. 15
18. Example 5, str. 31

19. Rješenja za treću grupu

19.1. C3: Vedran Cifrek - Indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Baza $n=4$: $2^4 \geq 4^2 \iff 16 \geq 16$.
Pretpostavka: vrijedi $2^n \geq n^2$ za neki prirodan broj $n \geq 4$
Korak: dokažimo tvrdnju za $n+1$: $2^{n+1} \geq (n+1)^2 = n^2+2n+1$
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, pa iskoristimo pretpostavku indukcije i imamo $2^{n+1} \geq 2 \cdot n^2$
Sada još želimo dokazati da je $n^2 \geq 2n+1$ za $n \geq 4$: $n^2 \geq 2n+1 \iff n^2-2n \geq 1 \iff n^2-2n+1 \geq 2 \iff (n-1)^2 \geq 2$ što očito vrijedi za $n \geq 4$, pa onda imamo:
$2^{n+1} \geq 2n^2 = n^2+n^2 \geq n^2+2n+1 = (n+1)^2$
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

2. Baza $n=1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.
Pretpostavka: vrijedi $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ za neki prirodan broj n
Korak: Dokažimo $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 =$ [Iskoristimo pretpostavku indukcije za zbroj prvih n] $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1)+6(n+1)) = \dfrac{n+1}{6} \cdot (2n^2+7n+6) = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

3. definiramo $T(n)$: $F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$ za prirodan broj n;
Baza: $T(1)$: $F_1 - F_2 \cdot F_0 = (-1)^{1-1} \iff 1-1\cdot 0 = 1$ pa vrijedi.
Pretpostavka: pretpostavimo da vrijedi $T(n)$ za neki prirodan broj n.
Korak: Dokažimo da vrijedi $T(n+1)$:
Želimo dokazati $F_{n+1} - F_{n+2} \cdot F_n = (-1)^{n+1-1}$, pa krenimo od lijeve stane:
$F_{n+1}^2 - F_{n+2} \cdot F_n =$ [Raspišemo F_{n+2}] $= F_{n+1}^2 - (F_{n+1}+F_n) \cdot F_n = F_{n+1} \cdot (F_{n+1}-F_n) - F_n^2 =$ [$F_{n+1}-F_n = F_{n-1}$] $= F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n =$ [Koristimo pretpostavku indukcije] $= -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1-1}$.

4. Uočimo da vrijedi $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$ za bilo koji prirodan broj k pa vidimo da ćemo od svakog člana u sumi dobiti 2 i da će se uvijek 2. od ta dva pokratiti s prvim koji je dobiven od sljedećeg početnog člana pa će na kraju ostati samo prvi i tj. $1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.
Ovo možemo formalno dokazati koristeći matematičku indukciju po n ili zapis sumom:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} =$ [promijenimo indekse sumacije u drugoj sumi (umjesto $k+1$ stavimo k pa se granice povećaju za 1) te odvojimo posebno prvi član prve sume i zadnji član druge sume] $\displaystyle = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

5. Za sve prirodne brojeve n definiramo $T(n)$: $x^n + \frac{1}{x^n}$ je cijeli broj.
Tvrdnja vrijedi i za $n = 0$, te će to biti dio baze indukcije.
Baza: $n = 0$: $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$; $n = 1$: zadano u tekstu zadatka.
Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$ i $n-1$ te dokažimo da vrijedi za n.
$x^n + \frac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})(x + \frac{1}{x}) - x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}$, pa je traženi izraz cijeli broj jer je umnožak dva cijela broja cijeli broj i onda je od njega oduzet cijeli broj.

Dokazali smo da tvrdnji vrijedi za 0 i 1 te ako vrijedi za $n-2$ i $n-1$ vrijedi za n pa po principu indukcije vrijedi za sve prirodne brojeve (ako vrijedi za 0 i 1 vrijedi za 2, pa vrijedi za 1 i 2 pa vrijedi za 3...).

6. Kada na n pravaca dodajemo $n+1$. vidimo da svaki puta kada taj pravac presiječe neki od postojećih n pravaca, on područje odmah iza tog pravca dijeli na 2 dijela, a tako dijeli i početno područje prije nego presiječe ijedan od pravac, pa ukupno povećava broj područja za $n+1$. Kako on uvijek povećava za najviše $n+1$, onda je najbolje moguće da na maksimalan broj područja s n pravaca dodamo pravac koji stvori još $n+1$ dodatnih područja.
Da bi se to dogodilo samo moramo pripaziti da se nikoja dva pravca ne sijeku u istoj točci jer onda imamo manje od n različitih presjeka novog pravca s starima. Također, naravno da želimo da novi pravac siječe sve stare pa ne smije biti paralelan s nikojim od prošlih.
Znači jedino što trebamo paziti kad radimo korak indukcije je da novi pravac ne prolazi nekim sjecištem dva postojeća pravca i da nije paralelan s niti jednim od njih, a to sigurno možemo jer ima beskonačno smjerova pravaca, a samo konačno smjerova kad bi bio paralelan i konačno točaka koje treba izbjeći. Baza je $n = 0$ i onda je jedno područje.
n-ti pravac povećava broj područja za n, pa s n pravaca imamo maksimalno $1+1+2+3+...+n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ područja.

7. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neka funkcija koju ćemo kasnije definirati. Želimo da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za svaki prirodan broj n, te da je $f(n) > 0$, jer ćemo tada iz ove tvrdnje odmah dobiti traženu tvrdnju zadatka. Recimo da smo provjerili bazu. Pretpostavka će biti da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za neki prirodan broj n, te za korak želimo dokazati $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq 2$.
Kad bi imali $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n)$, onda bi direktno imali tvrdnju koraka. Kad skratimo iste članove s obje strane vidimo da f treba zadovoljavati: $f(n) - f(n+1) \geq \frac{1}{(n+1)^2}$, usput vidimo da je f padajuća funkcija. Jedna od najjednostavnijih padajućih funkcija koje su pozitivne za sve prirodne brojeve je $f(n) = \frac{1}{n}$ i vidimo da ona zadovoljava tražene uvjete (Baza $1 + 1 \leq 2$), pa po principu indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

8. $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Baza: $n = 0$, samo je jedan planet, a ne može astronom na njemu gledati svoj planet.
Pretpostavka: za neki $n \in \mathbb{N}$, ako imamo $2n+1$ planeta, takvih da astronomi na njima gledaju samo planete među tih $2n+1$, onda postoji planet kojeg nitko od njih ne gleda.
Korak: Imamo $2n+3 = 2(n+1)+1$ planeta s astronomima. Uzmimo najmanju udaljenost između neka dva planeta, tada nužno mora astronom s jednog od njih gledati onaj drugi i obrnuto, pa preostalih $2n+1$ gledaju jedni druge međusobno. Sada na tih $2n+1$ iskoristimo pretpostavku indukcije i dobili smo planet kojeg nitko ne gleda.

9. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom pa pogledajmo prvo korak kako bi vidjeli koja vrsta indukcije i koja baza nam treba.

Vidjet ćemo kasnije koja treba biti pretpostavka te promotrimo sumu za skup $\{1, 2, ..., n, n+1\}$: Ako posebno promatramo određene vrste podskupova možemo posebno odrediti vrijednost sume za svake vrstu posebno te onda sumirati te sume.

U prvoj skupini će biti oni podskupovi koji ne sadrže $n + 1$:
To znači da tražimo neprazne podskupove od $\{1, 2.., n + 1\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva i ne sadrže $n+1$, odmah vidimo da su to zapravo neprazni podskupovi od $\{1, 2, ..., n\}$ koji ne sadrže uzastopne pa je po pretpostavci indukcije za n ta suma jednaka $(n + 1)! - 1$.

Sada promotrimo one podskupove koji sadrže $n + 1$, to znači da ne mogu sadržavati n koji je uzastopan njemu.

Sada definiramo drugu skupinu podskupova u kojoj će biti oni koji sadrže $n + 1$ i još neki element skupa. Ako pogledamo traženu sumu svih takvih podskupova, vidimo da iz svakog sumanda možemo izlučiti $(n+1)^2$ i dobiti sumand od nekog podskupa od $\{1, 2, ..., n-1\}$ koji nema uzastopnih elemenata, te lako vidimo da ćemo dobiti sve takve pa je suma druge skupine jednaka $(n+1)^2\cdot$ vrijednost sume za $n-1$ koja će po pretpostavci indukcije biti $n!-1$ znači $(n+1)^2(n!-1)$.

U trećoj skupini su ostali podskupovi koji sadrže samo $n + 1$ i ništa drugo tj jedan jedini skup $\{n + 1\}$ čija je vrijednost sume $(n + 1)^2$.

Sada zbrojimo vrijednosti od sve 3 skupine te imamo: $(n+1)!-1+(n+1)^2(n!-1)+(n+1)^2 = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! = (n + 2)(n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1$.

Vidimo da nam za indukciju trebaju pretpostavke za $n - 1$ i n da dobijemo tvrdnju za $n + 1$ pa trebamo provjeriti bazu za dva uzastopna broja tj za $n = 1$ (Jedini podskup je $\{1\}$ i vrijednost je 1) i $n = 2$ (podskupovi bez uzastopnih su $\{1\}$ i $\{2\}$ i vrijednost je 5).

10. Baza: $n = 1$, imamo dva skupa: prazan i $\{1\}$, koje možemo pobojati bilo kako da dobijemo 0, 1 ili 2 crvena.
Pretpostavka: za neki prirodan broj n vrijedi da za bilo koji $0 \le N \le 2^n$, možemo obojati podskupove na traženi način da ih ima točno N crvenih.
Korak dokažimo tvrdnju za $n + 1$ i proizvoljni $0 \le N' \le 2^{n+1}$.
1. slučaj $N' \le 2^n$:
Tada možemo po pretpostavci indukcije uzeti bojanje podskupova od $\{1, 2, .., n, n + 1\}$ koji ne sadrže $n + 1$, tj. podskupova od $\{1, 2, .., n\}$ koje ima točno N' crvenih s traženim svojstvom. Ako sve skupove koji sadrže $n + 1$ pobojamo u plavo, dobili smo točno N' crvenih skupova, a traženo svojstvo je održano jer ako napravimo uniju nekog skupa s skupom koji sadrži $n+1$ opet dobijemo skup koji sadrži $n + 1$.

2. slučaj $N' > 2^n$, tada po pretpostavci indukcije uzmemo bojanje podskupova od $\{1, 2, .., n\}$ s točno $N' - 2^n$ crvenih s traženim svojstvom, te sve podskupove koji sadrže $n + 1$ pobojamo u crveno. Slično kao u 1. slučaju vidimo da ovakvo bojanje nije pokvarilo traženo svojstvo, a ukupno imamo točno $N' - 2^n + 2^n = N'$ crvenih.

11. Kad bi krenuli raditi indukciju gdje dokazujemo tvrdnju $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$.:
Pretpostavka je $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$ i želimo dokazati $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$, pa raspišimo lijevu stranu tako da se pojave članovi iz pretpostavke indukcije $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + F_n^2 = F_n^2 + F_{n+1}F_n + (F_n + F_{n-1})F_{n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Iskoristimo pretpostavku indukcije] $= F_{2n-1} + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$ te vidimo kako bismo htjeli da vrijedi $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$ da možemo dovršiti dokaz. To znači da zapravo moramo nekako dokazati i tu činjenicu za svaki prirodan broj n. U ovom slučaju je dobra ideja obje ove tvrdnje dokazivat indukcijom zajedno.
za prirodan broj n definiramo $T(n)$: vrijedi $F_n^2 + F_n - 1^2 = F_{2n-1}$ i vrijedi $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$

Baza: ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$) $n = 1$: $F_1^2 + F_0^2 = F_1$ vrijedi i $F_2F_1 + F_1F_0 = F_2$ vrijedi.
Pretpostavimo da za n vrijedi $F_n^2 + F_n - 1^2 = F_{2n-1}$ i $F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_{2n}$ te trebamo dokazati da vrijede obje ove tvrdnje za $n+1$.
Prva tvrdnja (koju smo već skoro do kraja raspisali ranije):
$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) + F_n^2 = F_n^2 + F_{n+1}F_n + (F_n + F_{n-1})F_{n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Iskoristimo prvu tvrdnju iz pretpostavke indukcije] $= F_{2n-1} + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Iskoristimo drugu tvrdnju iz pretpostavke indukcije] $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$.
Druga tvrdnja: $F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_n = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1}) + (F_n + F_{n-1})F_n = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} =$ [Za prva dva člana koristimo prvu tvrdnju koraka koju smo upravo dokazali, a za ostala 2 člana pretpostavku indukcije] $= F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+2}$.

12. Wikipedia: Zeckendorf's theorem

13. Baza $n = 1$ očito vrijedi. Pretpostavimo da postoji n s svojstvom da za svaki prirodan broj k, takav da je $k \leq n$ vrijedi tvrdnja kada postoji k ćelija.
Korak: Dokažimo da tvrdnja vrijedi kad ima $n+1$ ćelija:
Ako postoji neka ćelija koja je jedina zadana u svojem retku i u svojem stupcu, onda ju možemo obojati bilo kako.
Ako postoji neka ćelija koja samo u svojem retku ima druge zadane ćelije ili samo u svojem stupcu ima druge zadane ćelije, onda iskoristimo pretpostavku indukcije na svih n ćelija osim te. Tada u tom retku/stupcu je ili jednako crvenih i plavih pa možemo našu ćeliju obojati u bilo koju boju, a inače obojimo u onu boje koje ima manje.
Znači sada nam ostaju samo mogućnosti kad sve ćelije imaju barem još jednu zadanu u svojem retku i barem jednu zadanu u svojem stupcu.
Uzmimo jednu ćeliju nazovimo ju A, te neka se u njezinom retku nalazi zadana ćelija B, a u njezinom stupcu zadana ćelija D.
Označimo s C ćeliju u presjeku stupca u kojoj se nalazi B i retka u kojoj se nalazi D.
Prvo pogledajmo slučaj kada je C zadana, onda možemo A i C obojati u jednu boju, a B i D u drugu boju, pa se u ta dva retka i dva stupca ne mijenja razlika broja crvenih i plavih ćelija. Po pretpostavci indukcije možemo obojati preostalih $n-3$ (kad je $n+1=4$ nemamo što obojati), a inače to mora biti prirodan broj jer se nalazimo u takvom slučaju.

Ostao nam je najpametniji slučaj zadatka, onaj u kojem ćelija C nije zadana. No, sada možemo uzeti sve preostale ćelije te reći da nam C jest zadana, a A, B i D nisu zadane, te po pretpostavci indukcije pobojati sve te ćelije tako da vrijedi tvrdnja zadatka. Bez smanjena općenitosti recimo da smo C pobojati u crvenu, sada obojimo B i D u crvenu, a A u plavu, time je razlika broja plavih i crvenih ostala ista(ona koju smo dobili u pretpostavci indukcije) u svim retcima i stupcima koji sadrže A, B, C i D.
Budući da smo riješili sve moguće slučajeve dokazali smo korak indukcije, pa sada tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n po principu indukcije.

14. Example 5.

19.2. G3: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 3.
2. 2015.O2A.2
3. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 8.
4. 2016.O2A.4
5. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 11.
6. 2016.3A.3

Teži zadaci

7. 2011.D1A.4
8. 2017.Ž2A.4
9. 2009.D4A.1
10. 2018.D4B.5
11. 2018.Ž4A.3
12. Izvor: staro predavanje.

    Skica rješenja. Neka je E nožište visine iz vrha C, i G sjecište CE i FH. Četverokut $EMGH$ je tetivan (razmislite zašto), i G je težište trokuta ABC, pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = \frac{1}{3}|BE|$. Po poučku SKS, trokuti BHF i EBC su slični, pa je $\angle EMG = \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta ABC, pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EMF = 180° - \angle EMG = 180° - \alpha$, pa je $EBHF$ tetivan, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

13. Izvor: staro predavanje.

    Skica rješenja. Uvedimo oznaku $\alpha = \angle AMB$. Slijedi $\angle KBC = \angle BCK = 90° - \alpha$ i $\angle BKC = 2\alpha$. Promotrimo kružnicu BCM. Kako je $\angle CMB = 180° - \alpha$, drugi obodni kut nad $\overline{BC}$ jednak je α. Budući da je $\angle BKC = 2\alpha$ i $|BK| = |CK|$, K je središte kružnice BCM i vrijedi $|BK| = |CK| = |MK|$.

    Označimo s E sjecište pravaca KM i AD. Dokazujemo da je $\angle DEM = 90°$.

    Vrijedi $\angle ACB = \angle ADB = \angle EDM = \frac{\alpha}{2}$, jer se radi o obodnim kutevima nad lukom AB. Kako je trokut CMK jednakokračan, $\angle CMK = \angle MCK = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Također, $\angle DMC = \alpha$.

    Budući da su točke E, M i K kolinearne (leže na istom pravcu), vrijedi $\angle DME + \angle DMC + \angle CMK = 180°$, odakle je $\angle DME = 90° - \frac{\alpha}{2}$, i konačno, promatrajući unutarnje kutove trokuta DEM, dobijemo $\angle DEM = 90°$, što je i trebalo dokazati.

14. Izvor: državno 2007. 3A.3

    Skica rješenja. Neka je H' osnosimetrična slika ortocentra preko $\overline{AB}$ i D nožište visine na stranicu AB, tj. presjek pravaca HH' i AB. Kako je trokut AOH jednakostraničan (razmislite zašto), vrijedi $\angle AOH' = 60°$, pa je njegov obodni kut $\angle ACH' = \angle ACD$ jednak $30°$. Budući da je trokut ACD pravokutan, slijedi $\angle CAD = \angle CAB = 60°$.

19.3. A3: Lucija Relić - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Primjenimo A-G nejednakost

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}} = 1.$$

Množenjem obje strane s 3 dobivamo izraz koji smo htjeli dokazati.

> **Napomena 19.3.1**
>
> Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:
>
> $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

2. Pokazujemo

$$a^8 + a^6 + a^2 + 1 \geq 4a^4.$$

Označimo $a_1 = a^8 > 0$, $a_2 = a^6 > 0$, $a_3 = a^2 > 0$ i $a_4 = 1 > 0$ i primijenimo AG nejednakost na sredine brojeva a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} &\geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\\ \frac{a^8+a^6+a^2+1}{4} &\geq \sqrt[4]{a^8\cdot a^6\cdot a^2\cdot 1} = \sqrt[4]{a^{8+6+2}}\\ a^8+a^6+a^2+1 &\geq 4\cdot\sqrt[4]{a^{16}} = 4\cdot a^4\end{aligned}$$

Napomena: Za realan broj $x \geq 0$ i $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

3. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right) \geq \frac{1}{2}(2a+2b+2c) = a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

4. Primjetimo da je tvrdnja zadatka ekvivalenta s tim da je $(x+y)^2 \leq 2$.

Iz KG dobivamo:

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \iff xy \leq \frac{1}{2}$$

Tada imamo

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 1+2xy \leq 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

5. *1. način*

Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Oduzimanjem $2ab + 2bc + 2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Analogno dobivamo i

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

Napomena.

Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

6. Riješeni primjeri, zadatak 1.

7. Primjenom A-G nejednakosti na $p^2 + p + 1$ dobivamo:

$$p^2 + p + 1 \geq 3\sqrt[3]{p^2 \cdot p \cdot 1} = 3p$$

Analogno dobivamo

$$q^2 + q + 1 \geq 3q.$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost:

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq.$$

8. Riješeni primjeri, zadatak 3.

9. Riješeni primjeri, zadatak 4.

10. Example 1.1.4.

11. Zadatak 3.

12.

$$\frac{1}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff \frac{1}{xy} \geq 4.$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 1 + \frac{4}{x+y} + 4 = 9.$$

13. Nesbittova nejednakost

14. Pham Kim Hung - Secrets in Inequalities (Volume 1) stranica 16. propozicija (proposition) 1

15. Riješeni primjeri, zadatak 12.

16. Državno natjecanje 2013 SŠ1 3. zadatak

17. 2. razred, 4. zadatak.

18.

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2}},$$
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Iz toga imamo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ &\leq \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(a+b+c)^4}{3^3}} = \frac{(a+b+c)^2}{4 \cdot 3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Iz K-A nejednakosti imamo:

$$\frac{a+b+c}{3} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$
$$(a+b+c)^2 \leq 9 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Iz toga imamo:

$$S \leq \frac{(a+b+c)^2}{4 \cdot 3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$$
$$4S\sqrt{3} \leq a^2+b^2+c^2.$$

19. Riješeni primjeri, zadatak 20. (IMO SL 2001.)

20. IMO 2001. zadatak 2

19.4. N3: Adian A. Santos Sepčić - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

1. *Broj n nije djeljiv niti s 2 niti s 3. Dokaži da $24|n^2-1$.*

Zadatak ćemo riješiti koristeći (mod 3) i (mod 8).
$n^2 \in \{1^2, 2^2\} \pmod 3 \implies n^2 \equiv 1^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$ jer n nije djeljiv s 3.
$n^2 \in \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \pmod 8 \implies n^2 \equiv 1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod 8$ jer n nije paran.
$\implies n^2 \equiv 1 \pmod 3, n^2 \equiv 1 \pmod 8$
$\implies 3|n^2-1, 8|n^2-1$
$\implies 24|n^2-1$

2. *Za prirodne brojeve a,b,c vrijedi $a^2+b^2=c^2$. Dokaži da je jedan od ta 3 broja djeljiv s 3.*

Pretpostavimo da nijedan od brojeva a,b,c nije djeljiv s 3. Tada mora vrijediti $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 3$, jer $1^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$. No, onda dobivamo:
$a^2+b^2=c^2 \implies 1+1 \equiv 1 \pmod 3$, što je nemoguće. Znači, jedan od brojeva a,b,c mora biti djeljiv s 3.

3. *Neka je n prirodan broj. Ako je zadnja znamenka broja 3^n jednaka 1, dokaži da je n djeljiv sa 4.*

Zadnja znamenka broja je samo ostatak pri dijeljenju s 10, pa uvjet da je posljednja znamenka broja 3^n jednaka 1 možemo svesti na to da $3^n \equiv 1 \pmod{10}$. Promotrimo sada ostatke pri dijeljenju s 10 brojeva $3^1, 3^2, ... \to 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3...$
Možemo primijetiti da se uzorak ponavlja i da je ostatak jednak 1 za svaku četvrtu potenciju. Sada valja samo pokazati zašto se uzorak ponavlja. To možemo napraviti tako da primijetimo da $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, što znači da $3^{n+4} \equiv 3^n \cdot 3^4 \equiv 3^n \cdot 1 \equiv 3^n \pmod{10}$. Ovime je dokazano da je se uzorak posljednjih znamenki ponavlja svake 4 potencije broja 3, a kako je jedini broj među prve 4 koji ima posljednju znamenku 1 upravo 3^4, svi ostali koji imaju posljednju znamenku 1 moraju biti potencija višekratnika broja 4, što znači da je n djeljiv sa 4.

4. *Odredi posljednju znamenku broja 7^7.*

Zadatak se svodi na računanje ostatka broja 7^7 pri dijeljenju s 10. Modularna aritmetika čini ovaj posao jednostavnim:
$7 \xrightarrow{\cdot 7} 49 \xrightarrow{\equiv \pmod{10}} 9 \xrightarrow{\cdot 7} 63 \xrightarrow{\equiv \pmod{10}} 3 \xrightarrow{\cdot 7} 21 \xrightarrow{\equiv \pmod{10}} 1$
$\implies 7^3 \equiv 3 \pmod{10}, 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$
$\implies 7^7 \equiv (7^3) \cdot (7^4) \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{10}$
Znači, posljednja znamenka broja 7^7 je znamenka 3.

5. *Ivan i Novak igraju igru u kojoj naimjenično zapisuju brojeve na ploču. Ivan je prvi na potezu i svaki put kad je na redu zapiše zbroj posljednja 2 zapisana broja $(x+y)$, a nakon toga Novak zapiše umnožak posljednja dva zapisana broja uvećan za 1 $(xy+1)$. Na početku je na ploči zapisan broj 0, a nakon toga 1 $(0 \to 1 \xrightarrow{Ivan} 1 \xrightarrow{Novak} 2 \xrightarrow{Ivan} 3 \xrightarrow{Novak} 7 \xrightarrow{Ivan} 10 \xrightarrow{Novak} ...)$.*

(a) *Dokaži da će posljednja znamenka svakog broja koji Ivan zapiše biti 0, 1 ili 3.*

Primijetimo da posljednja znamenka broja kojeg zapiše Ivan ovisi jedino o posljednjim znamenkama dva prethodno zapisana broja (promatramo operacije množenja i zbrajanja modulo 10). Znači, ako Ivan zapiše broj koji završava za znamenkom 0, a nakon toga Novak broj koji završava znamenkom 1, uzorak znamenaka će ponavljati u beskonačnoj petlji. Upravo se ovo dogodi kada Ivan zapiše 10 u svom trećem potezu (Novak nakon toga zapiše $7 \cdot 10 + 1 = 71$). Kako je dotada Ivan jedino zapisao brojeve koji završavaju znamenkama 0, 1 i 3, svaki idući broj koji Novak zapiše završit će znamenkama 0, 1 ili 3.

(b) *Dokaži da Novak nikada neće zapisati broj djeljiv s 3.*

Analogno (a) dijelu rješenja, nakon što Ivan zapiše broj 3, ostaci zapisanih brojeva pri dijeljenju s 3 će se ponavljati. Kako Novak dotada nije zapisao broj koji daje ostatak 0 pri dijeljenju s 3, nikada i neće, to jest nikada neće zapisati višekratnik broja 3.

6. *Odredi sve prirodne brojeve n takve da* $11 | 3^n + 4^n$.

Zadatak se svodi na rješavanje iduće jednadžbe:
$3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{11}$ (primijetimo $3^4 \equiv 9^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{11}$)
$3^n + 3^{4n} \equiv 0 \pmod{11}$ (neka $3^n \equiv x \pmod{11}$)
$x + x^4 \equiv 0 \pmod{11}$
Uzorak ostataka 3^n počevši od $n = 1$ je $3, 9, 5, 4, 1, 3, 9, 5...$ i ponavlja se ciklično nakon n = 5 jer $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. Ako u jednadžbu $x + x^4 \equiv 0 \pmod{11}$ uvrstimo redom $x = 1, 3, 4, 5, 9$ vidimo da nijedno od tih rješenja nije valjano, stoga početna jednadžba također nema rješenja, pa ne postoji niti jedan prirodan broj n koji zadovoljava svojstvo $11|3^n + 4^n$.

7. *Odredi sve prirodne brojeve n takve da* $7 \nmid 1 + 3^n + 2^n + 6^n + 4^n + 5^n$.

Primijetimo $2 \equiv 3^2 \pmod 7$, $6 \equiv 3^3 \pmod 7$, $4 \equiv 3^4 \pmod 7$, $5 \equiv 3^5 \pmod 7$. Znači, možemo uz supstituciju $3^n \equiv x \pmod 7$ i supstituciju $S = 1 + 3^n + 2^n + 6^n + 4^n + 5^n$ reći iduće:
$S \equiv 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \pmod 7$
Kako je k = 6 najmanji broj takav da $3^k \equiv 1 \pmod 7$, $3^n \equiv 1 \pmod 7$ ako i samo ako 6|n.
Rastavimo sada zadatak na slučajeve:

- **Ako 6|n**
  $x \equiv 1 \pmod 7$, pa onda $1 \equiv x \equiv x^2 \equiv x^3 \equiv x^4 \equiv x^5 \pmod 7$
  Znači, $S \equiv 6 \pmod 7 \implies 7 \nmid S \implies$ Svaki višekratnik od n je valjano rješenje.
- **Ako 6 ∤ n**
  $S \equiv 0 \pmod 7$
  $\iff 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \equiv 0 \pmod 7$
  $\iff (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \equiv 0 \pmod 7$
  $\iff x^6 \equiv 1 \pmod 7$
  $\iff (3^n)^6 \equiv (3^6)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 7 \implies$ vrijedi
  Znači, u ovom slučaju n ne može biti rješenje.

Sveukupno, sva rješenja za n su višekratnici broja 6.

8. *Odredi posljednju znamenku broja* 7^{7^7} *(**Napomena:*** $7^{7^7} = 7^{(7^7)}, 7^{7^7} \neq (7^7)^7$*).*

Kako vrijedi $7^4 \equiv 49^2 \equiv 9^2 \equiv 1 \pmod{10}$, znamo da za sve prirodne brojeve n vrijedi iduće:
$7^{4n+0} \equiv 1 \pmod{10}$
$7^{4n+1} \equiv 7 \pmod{10}$
$7^{4n+2} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$
$7^{4n+3} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$
Znači, ako odredimo $7^7 \pmod 4$, možemo iskoristiti gore navedene jednadžbe da izračunamo 7^{7^7} (mod 10), to jest posljednju znamenku broja 7^{7^7}.
$7^7 \equiv 7 \cdot (7^2)^3 \equiv 7 \cdot 1^3 \equiv 3 \pmod 4 \implies 7^7 = 4n + 3$ za neki prirodan broj n
$\implies 7^{7^7} \equiv 7^{4n+3} \equiv 3 \pmod{10}$
$\implies$ Posljednja znamenka broja 7^{7^7} je znamenka 3.

9. *Za svaki pojedinačan cijeli broj a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m vrijedi da je ili djeljiv sa 4 ili neparan i vrijedi:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = h^2 + i^2 + j^2 + k^2 + l^2 + m^2$$

Dokaži da a,b,c,d,e,f,g nisu svi neparni.

Primijetimo da za sve neparne brojeve vrijedi da su kongruentni 1 modulo 8. Također, primijetimo da kvadrat svakog broja djeljivog s 4 mora biti djeljiv s 8, pa tako kongruentan 0 modulo 8. **Pretpostavimo sada da su a,b,c,d,e,f,g zaista svi neparni.** Tada slijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 7 \pmod 8$$

No, kako su h,i,j,k,l,m svi djeljivi sa 4 ili neparni, vrijedi da su h^2,i^2,j^2,k^2,l^2,m^2 svi kongruentni 0 ili 1 modulo 8. No, tada je broj ovih kvadrata koji je kongruentan 1 modulo 8 upravo iznos izraza $h^2 + i^2 + j^2 + k^2 + l^2 + m^2 \pmod 8$. No, kako je u pitanju 6 varijabli, između 0 i 6 njih je kongruentno 1 modulo 8, pa izraz $h^2 + i^2 + j^2 + k^2 + l^2 + m^2$ ne može biti kongruentan 7 modulo 8, što znači da $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2)$ i $(h^2 + i^2 + j^2 + k^2 + l^2 + m^2)$ daju različite ostatke pri dijeljenju s 8, pa ne mogu biti jednaki, što je kontradikcija s početnom jednadžbom.

$\Longrightarrow$ Kontradikcijom je dokazano da a,b,c,d,e,f,g ne mogu svi biti neparni.

10. *Odredi sve prirodne brojeve n takve da $31 | 4^n + 7^n + 20^n$.*

$4^n + 7^n + 20^n \equiv 0 \pmod{31}$ (uvrstimo $7 \equiv 100 \pmod{31}$)
$\Longleftrightarrow 4^n + 100^n + 20^n \equiv 0 \pmod{31}$
$\Longleftrightarrow 4^n(1 + 25^n + 5^n) \equiv 0 \pmod{31}$ ($\gcd(4, 31) = 1$)
$\Longleftrightarrow 1 + 25^n + 5^n \equiv 0 \pmod{31}$
$\Longrightarrow (1 - 5^n)(1 + 5^n + (5^n)^2) \equiv 0 \pmod{31}$
$\Longleftrightarrow 1 - (5^n)^3 \equiv 0 \pmod{31}$ ($(5^n)^3 \equiv (5^3)^n \equiv 125^n \equiv (4 \cdot 31 + 1)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{31}$)
$\Longleftrightarrow 1 \equiv 1 \pmod{31} \Longrightarrow$ vrijedi

Promatrajući logičke strelice u postupku, vidimo da je peti redak jedini u kojem ne vrijedi nužno ekvivalencija tvrdnji (ako i samo ako odnos). No, ovaj odnos vrijedi ako $31 \nmid 5^n - 1$. Promotrimo li uzorak ostataka 5^n modulo 31 (5,25,1,5,25,1...), vidimo da $31 | 5^n - 1$ ako i samo ako $3 | n$. Rastavimo sada zadatak na 2 slučaja:

- **Ako 3|n**
  Vrijedi ekvivalencija idućih tvrdnji:
  $4^n + 7^n + 20^n \equiv 0 \pmod{31} \Longleftrightarrow 1 + 25^n + 5^n \equiv 0 \pmod{31}$

  Kako je n djeljiv s 3, znamo:
  $5^n \equiv 1 \pmod{31}$
  $25^n \equiv (5^2)^n \equiv (5^n)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{31}$
  $\Longrightarrow 1 + 25^n + 5^n \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{31}$
  $\Longrightarrow 31 \nmid 1 + 25^n + 5^n$
  $\Longrightarrow 31 \nmid 4^n + 7^n + 20^n$
- **Ako $3 \nmid$ n**
  Vrijedi $1 \equiv 1 \pmod{31} \Longleftrightarrow 31 | 4^n + 7^n + 20^n$.
  $\Longrightarrow 31 | 4^n + 7^n + 20^n$

Sveukupno, sva rješenja za n su svi prirodni brojevi koji nisu djeljivi s 3.

11. *Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x,y,z) takve da $45^x - 6^y = 2019^z$.*

Promotrimo izraz $45^x - 6^y = 2019^z$ modulo 5. Tada dobivamo:
$0 - 1^y \equiv (-1)^z \pmod 5 \Longrightarrow (-1)^z \equiv -1 \pmod 5 \Longrightarrow$ z je neparan

Promotrimo sada $45^x - 6^y = 2019^z$ modulo 4 kada $y \geq 2$. Tada dobivamo:

$1^x - 2^y 3^y \equiv (-1)^z \pmod 4 \Longrightarrow (-1)^z \equiv 1 \pmod 4 \Longrightarrow$ z je paran
No, ovo je nemoguće, jer smo prije zaključili da je z paran, pa ne može vrijediti $y \geq 2$.

$\implies y = 1$

Promotrimo sada $45^x - 6^y = 45^x - 6 = 2019^z$ modulo 9 kada $z \geq 2$. Tada dobivamo:
$0 - 6 \equiv 3^2 \pmod 9 \implies -6 \equiv 0 \pmod 9$ No, ovo je nemoguće, pa z = 1.
$\implies 45^x - 6 = 2019 \implies 45^x = 2019 + 6 = 2025 = 45^2 \implies x = 2$
Znači, jedino moguće rješenje je (x,y,z) = (2,1,1).

12. *Neka za prirodne brojeve a,b,c vrijedi $a^2 + b^2 = 2^c$. Dokaži da je c neparan.*

Pretpostavimo da je c paran.
$\implies c = 2k$ za neki prirodan broj k
$\implies a^2 + b^2 = 2^{2k}$
$\implies a^2 + b^2 = 4^k$
Promotrimo posljednji redak modulo 4:
$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$
Promotrimo li sva moguća rješenja za a i b modulo 4, vidimo da a i b moraju oboje biti parni.
$\implies a = 2a_1, b = 2b_2$, gdje su a_1 i b_2 prirodni brojevi
$\implies (2a_1)^2 + (2b_1)^2 = 4^k$
$\implies 4a_1^2 + 4b_1^2 = 4^k$
$\implies a_1^2 + b_1^2 = 4^{k-1}$

Sada možemo uočiti da analogno prijašnjem postupku možemo zaključiti $a_2^2 + b_2^2 = 4^{k-2}$, gdje vrijedi da $a_1 = 2a_2$ i $b_1 = 2b_2$, gdje a_2 i b_2 moraju biti prirodni brojevi. No, ovdje moramo pripaziti da smo sigurni da je $k-1$ veći od nula, jer inače ne vrijedi
$a_1^2 + b_1^2 \equiv 0 \pmod 4$. Srećom, znamo da ovo vrijedi, jer inače $1^2 + 1^2 \leq a_1^2 + b_1^2 = 1$.
$\implies a_2^2 + b_2^2 = 4^{k-2}$, $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, gdje su a_2 i b_2 prirodni brojevi
$\implies a_3^2 + b_3^2 = 4^{k-3}$, $a_2 = 2a_3$, $b_2 = 2b_3$, gdje su a_3 i b_3 prirodni brojevi
...
No, ovaj logički postupak ne može se beskonačno ponavljati, jer u n-tom koraku mora uvijek vrijediti $k - n > 0$. Stoga zaključujemo i da se ovaj postupak mora beskonačno ponavljati i da se ne može, što je kontradikcija, što znači da je pretpostavka da je c paran kriva. Ovo znači da c mora biti neparan.

13. *Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a,b,c takvi da $a^2 + b^2 = 7^c$.*

Neka je broj a djeljiv sa 7 ukupno n puta, a broj b djeljiv sa 7 ukupno m puta. Neka tada $a = 7^n x$, $b = 7^m y$, gdje su x i y prirodni brojevi koji nužno nisu djeljivi sa 7. Bez gubitka općenitosti, neka $n \leq m$.
$\implies (7^n x)^2 + (7^m y)^2 = 7^c$
$\implies x^2 + (7^{m-n} y)^2 = 7^{c-2n}$

Ako $c \leq 2n$, tada $7^{c-2n} \leq 1 \implies x^2 + (7^{m-n} y)^2 \leq 1$, što je nemoguće.
$\implies c > 2n$
$\implies x^2 + (7^{m-n} y)^2 \equiv 0 \pmod 7$.

Kvadrati prirodnih brojeva jedino poprimaju vrijednosti 0,1,2 i 4 modulo 7, pa je jedini slučaj u kojem je zbroj dva kvadrata prirodnih brojeva kongruentan 0 modulo 7 onaj u kojem su oba djeljiva sa 7, što nije slučaj ovdje, kako $7 \nmid x$. Znači, posljednja dobivena jednadžba nema rješenja modulo 7, pa tako niti početna jednadžba $a^2 + b^2 = 7^c$ ne može imati rješenja.

14. *Odredi sve trojke nenegativnih cijelih brojeva (a,b,c) takve da $a! + 5^b = 7^c$.*

- **Ako c = 0**
  $a! + 5^b = 1 \implies$ nemoguće jer je lijeva strana jednadžbe barem 2

$\Longrightarrow c \neq 0$

- **Ako $\mathbf{a \geq 7}$**
  $a! + 5^b \equiv 7^c \pmod 7$
  $5^b \equiv 0 \pmod 7 \Longrightarrow$ nemoguće

$\Longrightarrow a \leq 6$

- **Ako $\mathbf{b = 0}$**
  $0! + 5^0 = 2 \neq 7^c$
  $1! + 5^0 = 2 \neq 7^c$
  $2! + 5^0 = 3 \neq 7^c$
  $3! + 5^0 = 7 = 7^1$
  $4! + 5^0 = 25 \neq 7^c$
  $5! + 5^0 = 121 \neq 7^c$
  $6! + 5^0 = 721 \neq 7^c$

$\Longrightarrow$ Jedino rješenje u ovom slučaju je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

- **Ako $\mathbf{a \geq 5, b \neq 0}$**
  $a! + 5^b \equiv 7^c \pmod 5$
  $0 \equiv 7^c \pmod 5 \Longrightarrow$ nemoguće

$\Longrightarrow$ Jedini preostali slučaj je onaj u kojem $a \leq 4$ i $b, c \neq 0$, pa ćemo nadalje upravo ovo pretpostaviti.

- **Ako $\mathbf{a = 0}$ ili $\mathbf{a = 1}$**
  $a! = 1$
  $a! + 5^b$ je paran, a 7^c neparan
  $a! + 5^b \neq 7^c \Longrightarrow$ nemoguće

- **Ako $\mathbf{a = 2}$**
  Za $b = 1$ dobivamo
  $2! + 5^1 = 7 = 7^1 \Longrightarrow (a, b, c) = (2, 1, 1)$

  Za $b \geq 2$ dobivamo
  $7^1 \equiv 7 \pmod{25}$, $7^2 \equiv 24 \pmod{25}$, $7^3 \equiv 18 \pmod{25}$, $7^4 \equiv 1 \pmod{25}$
  Ostaci ostalih potencija broja 7 nadalje se ponavljaju, jer $7^4 \equiv 1 \pmod{25}$.
  $\Longrightarrow 7^c \in \{7, 24, 18, 1\} \pmod{25}$

  $2! + 5^b \equiv 7^c \pmod{25}$
  $7^c \equiv 2 \pmod{25} \Longrightarrow$ nemoguće

$\Longrightarrow$ Jedino rješenje u ovom slučaju je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

- **Ako $\mathbf{a = 3}$**
  Za $b = 1$ dobivamo
  $3! + 5^1 = 11 = 7^c \Longrightarrow$ nemoguće

  Za $b \geq 2$ analogno slučaju kada $a = 2$ dobivamo
  $7^c \in \{7, 24, 18, 1\} \pmod{25}$
  $3! + 5^b \equiv 7^c \pmod{25}$
  $7^c \equiv 6 \pmod{25} \Longrightarrow$ nemoguće

- **Ako a = 4**
  $7^1 \equiv 2 \pmod 5$, $7^2 \equiv 4 \pmod 5$, $7^3 \equiv 3 \pmod 5$, $7^4 \equiv 1 \pmod 5$
  Ostaci ostalih potencija broja 7 nadalje se ponavljaju, jer $7^4 \equiv 1 \pmod 5$, pa slijedi
  $7^c \equiv 1 \pmod 5$ za $c \equiv 0 \pmod 4$
  $7^c \equiv 2 \pmod 5$ za $c \equiv 1 \pmod 4$
  $7^c \equiv 4 \pmod 5$ za $c \equiv 2 \pmod 4$
  $7^c \equiv 3 \pmod 5$ za $c \equiv 3 \pmod 4$

  $4! + 5^b \equiv 7^c \pmod 5$
  $7^c \equiv 4 \pmod 5 \implies c \equiv 2 \pmod 4$
  $\implies$ c je paran, pa neka c = 2n, gdje n mora biti prirodan broj

  $4! + 5^b \equiv 7^c \pmod 3$
  $5^b \equiv 1^c \pmod 3$
  $(-1)^b \equiv 1 \pmod 3$
  $\implies$ b je paran, pa neka b = 2m, gdje m mora biti prirodan broj

  $4! + 5^{2m} = 7^{2n}$
  $(7^n)^2 - (5^m)^2 = 24$
  $(7^n - 5^m)(7^n + 5^m) = 24$
  Sada vidimo da $7^n + 5^m \leq 24$, pa $5^m < 25$, $7^n < 49 \implies n, m < 2$
  $\implies n = m = 1 \implies b = c = 2$
  $4! + 5^2 = 49 = 7^2 \implies$ ovo rješenje je valjano

$\implies$ jedino rješenje u ovom slučaju je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$

Kako smo u postupku prošli sve moguće slučajeve, jedine moguće trojke (a, b, c) su

$$(3, 0, 1), (2, 1, 1), (4, 2, 2).$$

15. *Odredi sve prirodne brojeve n takve da postoje prirodni brojevi a i b takvi da $2^n + 3^a = 5^b$.*
***(Pazi:** Traže se samo brojevi n za koje postoje takvi a i b, a ne nužno sve trojke (n,a,b).)*

- **Ako n = 1**
  $2^1 + 3^1 = 5^1$

$\implies$ za n = 1 postoje traženi a,b

- **Ako n = 2**
  $2^2 + 3^a \equiv 5^b \pmod 4$
  $3^a \equiv 1^b \pmod 4$
  $(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$
  $\implies$ a je paran, pa neka a = 2x, gdje x mora biti prirodan broj

  $2^2 + 3^a \equiv 5^b \pmod 3$
  $5^b \equiv 4 \pmod 3$
  $(-1)^b \equiv 1 \pmod 3$
  $\implies$ b je paran, pa neka b = 2y, gdje y mora biti prirodan broj

  $2^2 + 3^{2x} = 5^{2y}$
  $(5^y)^2 - (3^x)^2 = 4$
  $(5^y - 3^x)(5^y + 3^x) = 4$
  Lijeva strana posljednje jednadžbe je umnožak dva prirodna broja, pa vrijedi $5^y + 3^x \leq 4$, ali $5^y + 3^x \geq 5^1 + 3^1 = 8$, pa je ovo nemoguće

$\implies$ za n = 2 ne postoje traženi a,b

- **Ako n $\geq$ 3**
  $2^n + 3^a \equiv 5^b \pmod 4$
  $3^a \equiv 1^b \pmod 4$
  $(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$
  $\implies$ a je paran, pa neka a = 2x, gdje x mora biti prirodan broj

  $2^n + 3^{2x} \equiv 5^b \pmod 8$
  $(3^2)^x \equiv 5^b \pmod 8$
  $5^b \equiv 9^x \equiv 1^x \pmod 8$
  $5^b \equiv 1 \pmod 8$
  $5^1 \equiv 5 \pmod 8$, $5^2 \equiv 1 \pmod 8$, $5^3 \equiv 5 \pmod 8$...
  $\implies$ b je paran, pa neka b = 2y, gdje y mora biti prirodan broj

  $2^n + 3^{2x} = 5^{2y}$
  $(5^y)^2 - (3^x)^2 = 2^n$
  $(5^y - 3^x)(5^y + 3^x) = 2^n$

  Kako su jedini djelitelji svake potencije broja 2 također potencije broja 2, znamo da su $5^y - 3^x$ i $5^y + 3^x$ potencije broja 2 takve da je $5^y + 3^x$ ona veća. Tu ćemo činjenicu izraziti ovako:

  $5^y - 3^x = 2^k$, gdje k mora biti prirodan broj
  $5^y + 3^x = 2^{k+t}$, gdje t mora biti prirodan broj

  Promotrimo razliku ove dvije jednadžbe:
  $(5^y + 3^x) - (5^y - 3^x) = 2^{k+t} - 2^k$
  $2 \cdot 3^x = 2^k(2^t - 1)$
  $\implies k = 1$, jer inače je desna strana jednadžbe djeljiva s 4, a lijeva nije

  $2 \cdot 3^x = 2(2^t - 1)$
  $3^x = 2^t - 1$
  - **Ako t = 1**
    $3^x = 2^1 - 1 = 1 \implies$ nemoguće, jer x mora biti prirodan broj
  - **Ako t = 2**
    $3^x = 2^2 - 1$
    $3^x = 3 = 3^1 \implies x = 1$, to jest $a = 2$
    $5^y - 3^x = 2^k$
    $5^y = 3 + 2 = 5 \implies y = 1$, to jest $b = 2$
    $2^n + 3^a = 5^b$
    $2^n + 3^2 = 5^2$
    $2^n = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
    $2^n = 2^4 \implies$ n = 4

  $\implies$ u slučaju t = 2 dobivamo rješenje (n,a,b) = (4,2,2)
  $\implies$ za n = 4 postoje traženi a,b
  - **Ako t = 3**
    $3^x \equiv 2^t - 1 \pmod 8$
    $3^x \equiv 7 \pmod 8$
    $3^1 \equiv 3 \pmod 8$, $3^2 \equiv 1 \pmod 8$, $3^3 \equiv 3 \pmod 8$...
    $\implies$ izraz 3^x ne može poprimiti vrijednost 7 modulo 8, pa u ovom slučaju nema rješenja

$\implies$ za n $\geq$ 3 jedina vrijednost n za koju postoje traženi a,b je n = 4

Kako smo u postupku prošli kroz sve moguće slučajeve, možemo sa sigurnošću reći da n može jedino biti jednak 1 ili 4.

20. Rješenja za četvrtu grupu

20.1. C4: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

1. članak s Brillianta, Double counting, 1. primjer
2. Označimo sa x broj šahista, s y broj penzionera, a sa z broj onih koji su i šahisti i penzioneri. Tada vrijedi:

$$z = \frac{x}{4}, z = \frac{y}{3}$$

Odakle slijedi

$$x = 4z, y = 3z$$

$$4z > 3z \implies x > y$$

odnosno u društvu ima više šahista (naravno, pod pretpostavkom da je broj ljudi u društvu veći od 0).

3. (a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.
S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

   (b) Promatrajmo $n + 1$ osobu te od njih biramo ekipu od k osoba.
S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.
S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.
Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

   (c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.
To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.
S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

4. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$ različitih parova, a kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, to je ujedno i ukupan broj parova učenika koji zajedno čiste učionicu. Svaki dan, među 3 učenika, pojavljuju se točno 3 različita para. Dakle, kako kamp traje k dana, broj parova jednak je i $3 \cdot k$. Imamo $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.
5. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak
6. (a) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba. S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru).

(b) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

(c) Izraz možemo intepretirati kao broj odabira r–članih skupova n–članog skupa, te k–članih podkupova odabranog r–članog skupa, gdje je r prozvoljan broj između (i uključivo) k i n. No mogli smo prvo odabrati k–člani podskup n–članog skupa što možemo napraviti na $\binom{n}{k}$ načina, a zatim odlučiti koje ćemo preostale elemente uključiti u nadskup izabranog k–članog skupa što možemo napraviti na 2^{n-k} načina.

7. Yufei Zhao: Counting in two ways - Problem 2 (IMC 2002.)

8. Imomath predavanje dvostruko prebrojavanje - 2.zadatak Zbroj $p_1 + 2p_2 + ... + np_n$ predstavlja broj parova (π, i), gdje je π permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$, a i njena fiksna točka. S druge strane, broj permutacija π koje fiksiraju točku i jednak je $(n-1)!$. Slijedi da je broj parova (π, i) jednak $n(n-1)! = n!$, što dokazuje tvrdnju.

9. članak s Brillianta, Double counting, 4. primjer

20.2. G4: Borna Banjanin - Potencija točke

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut MBC dobijemo $|CM|$. Označimo s P polovište dužine $\overline{BC}$. Nakon toga gledamo potenciju točke C na kružnicu k. $Pow_k(C) = |CE| \cdot |CM| = |CP|^2$ i iz te relacije lagano izračunamo $|CE|$.

2. $|EB| \cdot |ED| = |EC| \cdot (2r - |EC|)$

3. $|EB|^2 = |EA| \cdot |EC|$ - potencija točke
$|\angle DBC| = |\angle BCD| = |\angle BAC| = 45°$ - poučak o kutu između tangente i tetive
$|DC|^2 + (|DC| + |BE|)^2 = |CE|^2$ - Pitagora

4. $(\frac{1}{2}|AB|)^2 = \frac{1}{2}|AD| \cdot |AD|$

5. $|AT|^2 = |AP| \cdot |AB|$ - potencija
$\triangle APT \sim \triangle ATB$
Pitagora na trokut PTB

6. $|MA|^2 = Pow_{k_1}(M) = |MP| \cdot |MQ| = Pow_{k_2}(M) = |MB|^2$
Ili samo kažemo da je PQ radikalna od k_1 i k_2.

7. $BCKL$ je tetivno i p i q su paralelni pa vrijedi: $|\angle KBC| = |\angle KLT| = |\angle MTK|$
Sad znamo da je MT tangenta na opisanu kružnicu trokuta KTL, a također je i na radikalnoj osi od te kružnice i k što nam automatski daje da je M polovište dužine $\overline{AT}$.

8. $|\angle AQ'P| = |\angle AP'Q| = 90°$
Sad znamo da je $PP'QQ'$ tetivno pa zbog potencije točke iz A vrijedi: $|AP'| \cdot |AP| = |AQ'| \cdot |AQ|$. A to nam daje da je A na radikalnoj od k_3 i k_4.

9. Ako su D, E i F nožišta okomica, onda su $ABDE$, $ACDF$ i $BCEF$ 3 tetivna četverokuta. Njihova opisane krućnice u parovima imaju po 3 radikalne osi koje se sijeku u ortocentru trokuta.

10. $|\angle FEB| = |\angle MFE| = 90°$ i iz toga slijedi da je ME tangenta na kružnicu opisanu trokutu FEB
$|DA| = |DC|$ i $|\angle DBA| = |\angle CBD|$ jer je D polovište luka
$|\angle ADB| = |\angle DEB| = 90°$ pa dobivamo $|\angle EDB| = |\angle DAB|$, odnosno da je MD tangenta na polukružnicu

11. Državno 2018., 4. razred
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm

12. Neka je M_1 polovište dužine $\overline{BQ}$, M_2 polovište dužine $\overline{CP}$, a M_3 polovište dužine $\overline{PB}$. M_3M_1 je težišnica trokuta BPQ pa je paralelna s PQ, a to nam daje da je i paralelno s BC. M_3M_2 je iz istog razloga paralelno s BC i zbog toga možemo zaključiti da je M_1M_2 paralelno s BC. Prema Teoremu 1.5. možemo zaključiti da je radikalna os okomita na M_1M_2 pa je automatski okomita na BC i time je gotov prvi dio dokaza.

Neka je X nožište okomice iz Q na AP, a Y iz P na AQ. X i Y su na odgovarajućim početnim kružnicama zbog jer je obodni kut nad promjerom pravi. Trokut AXY je sličan trokutu APQ, a on je sličan ABC pa dobijamo $\triangle ABC \sim \triangle AXY$. Sad preko omjera stranica koji vrijede za slične trokute dobivamo $|AX| \cdot |AB| = |AY| \cdot |AC|$, odnosno da je A na radikalnoj.

13. Županijsko 2022., 4. razred
http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm

14. Y_1Y_2 je radikalna os upisane kružnice i točke B. Analogno je i Z_1Z_2 radikalna os upisane kružnice i točke C. To znači da je X radikalno središte upisane kružnice i točaka B i C. M je polovište $\overline{BC}$, odnosno na radikalnoj je osi kružnica radijusa 0 sa središtima u B i C. Iz toga zaključujemo da je radikalna os točaka B i C zapravo pravac XM i da je taj pravac okomit na BC.

15. Dovoljno je dokazati da samo 2 para tih točaka leže na kružnici (npr. A_1, A_2, B_1 i B_2) jer onda analogno možemo dokazati da su svih 6 na kružnici. H je radikalno središte3 od svih triju kružnica zato što sve prolaze kroz H. To znači da sve tri radikalne osi prolaze kroz H. Nazovimo kružnicu kojoj je središte polovište dužine $\overline{BC}$ a te kružnicu kojoj je središte polovište dužine $\overline{AC}$ b. Radikalna os od a i b je pravac koji prolazi kroz H, a okomit je na spojnicu njihovih središta. Spojnica središta tih kružnica je srednjica trokuta ABC te je paralelna s pravcem AB, a to nam znači da je radikalna os od a i b naš visina trokuta ABC iz točke C. Odnosno, C se nalazi na radikalnoj osi od a i b pa ima jednake potencije na obje kružnice te zbog toga vrijedi: $|CA_1| \cdot |CA_2| = |CB_1| \cdot |CB_2|$ i time smo dokazali da su A_1, A_2, B_1 i B_2 na istoj kružnici.

16. Nazovimo kružnicu promjera $\overline{AC}$ k_1, a kružnicu promjera $\overline{BD}$ k_2. Radikalna os k_1 i k_2 je pravac XY. Zbog toga što se P nalazi na xy, znamo da ima jednaku potenciju na k_1 i k_2. Odnosno vrijedi: $|PC| \cdot |PM| = |PB| \cdot |PN|$. Sada prema Teoremu 1.3 možemo zaključiti da je četverokut $BCNM$ tetivan. Zbog te tetivnosti dobivamo: $|\angle MND| = |\angle MNB| + 90° = |\angle MCB| + 90° = 90° - |\angle MAD| + 90° = 180° - |\angle MAD|$. Zaključujemo da je četverokut $AMND$ tetivan i neka je k_3 njegova opisana kružnica. Radikalna os kružnica k_1 i k_2 je XY, k_1 i k_3 AM, a k_2 i k_3 DN, a znamo da se one sijeku u jednoj točki, odnosno radikalnom središtu.

17. HMO, završni test za izbor MEMO ekipe, 2022.
https://natjecanja.math.hr/hmo2020/hmo/

18. IMO Shortlist G3, 2009.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf

20.3. A4: Adian A. Santos Sepčić - CSB

Predavanje Hintovi Rješenja

1. $$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c$$

$$\iff \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a}\geq a+b+c$$

$$\overset{\text{Engel}}{\Longleftarrow} \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{2(a+b)+2(b+c)+2(c+a)}\geq a+b+c$$

$$\iff \frac{(2(a+b+c))^2}{4(a+b+c)}\geq a+b+c$$

2. $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\iff \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\geq\frac{3}{2}$$

$$\overset{\text{Engel}}{\Longleftarrow} \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\iff (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ac)$$

$$\iff a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geq 3ab+3bc+3ca$$

$$\iff a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\geq(ab+bc+ca)^2 \implies \text{vrijedi po CSB}$$

3. $$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1$$

$$\iff \frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\geq 1$$

$$\overset{\text{Engel}}{\Longleftarrow} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}\geq 1$$

$$\iff \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}\geq 1$$

4. $$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{3(a+b+c)}{3+a+b+c}$$

$$\iff \frac{a^2}{ab+a}+\frac{b^2}{bc+b}+\frac{c^2}{ca+c}\geq\frac{3(a+b+c)}{3+a+b+c}$$

$$\overset{\text{Engel}}{\Longleftarrow} \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+a+b+c}\geq\frac{3(a+b+c)}{3+a+b+c}$$

$$\iff 3(a+b+c)^2+(a+b+c)^3\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3(a+b+c)^2$$

$$\iff (a+b+c)^3\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\iff (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\iff a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

$$\iff \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2 \geq 0$$

5. $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xLeftarrow{\text{Engel}} \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff a+b+c \geq \sqrt{3}$$

$$\iff (a+b+c)^2 \geq 3 = 3ab+3bc+3ca$$

$$\iff a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \geq (ab+bc+ca)^2 \implies \text{vrijedi po CSB}$$

6.

- **Prvo rješenje**

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

$$\iff a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \geq (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2$$

$$\iff 2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \geq 2a_1a_2+2b_1b_2$$

$$\iff (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \geq (a_1a_2+b_1b_2)^2 \implies \text{vrijedi po CSB}$$

- **Drugo rješenje**
  Ako na koordinatnoj ravnini označimo točke A(0,0), B(a_1, b_1) i C($-a_2$, $-b_2$), početna nejednadžba je zapravo nejednakost trokuta:

$$|AB|+|AC| \geq |BC|$$

7. Poznato je iduće:

$$(\cot\frac{\alpha}{2})^2+(2\cot\frac{\beta}{2})^2+(3\cot\frac{\gamma}{2})^2=(\frac{6s}{7r})^2$$

Neka $(x,y,z)=(\cot\frac{\alpha}{2},\cot\frac{\beta}{2},\cot\frac{\gamma}{2})$.

Nožišta iz središta upisane kružnice dijele opseg na idući način:

$|AB|=rx+ry$, $|BC|=ry+rz$, $|CA|=rz+ra$

$$\implies s=rx+ry+rz$$

$$\implies x^2+(2y)^2+(3z)^2=\left(\frac{6(x+y+z)}{7}\right)^2$$

$$\iff \frac{49}{36}(x^2+(2y)^2+(3z)^2)=(x+y+z)^2$$

$$\iff (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9})(x^2+(2y)^2+(3z)^2)=(x+y+z)^2$$

Po CSB posljednja jednakost za $x,y,z>0$ jedino vrijedi ako $x:2y:3z=1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$

$\Longrightarrow x : y : z = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9}$

$\Longrightarrow x : y : z = 36 : 9 : 4$

$\Longrightarrow |AB| : |BC| : |CA| = (x+y) : (y+z) : (z+x) = 45 : 13 : 40$

$\Longrightarrow$ Svi trokuti za koje je početna jednakost zadovoljena slični su trokutu sa stranicama 45,13,40.

$gcd(|AB|, |BC|, |CA|) = k \cdot gcd(45, 13, 40) = k$, gdje je k faktor sličnosti između trokuta ABC i onoga sa stranicama 45,13,40. Stoga, ako postoji manji trokut sa cjelobrojnim stranicama sa ovim svojstvom, $k < 1$, no onda $gcd(|AB|, |BC|, |CA|) < 1$, što je nemoguće ako su njegove stranice cjelobrojne.

$\Longrightarrow$ Najmanji trokut sa cjelobrojnim stranicama sa svojstvom iz zadatka ima stranice duljine 45,13 i 40.

8. $$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(abc)^2}{a^3(b+c)} + \frac{(abc)^2}{b^3(c+a)} + \frac{(abc)^2}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(bc)^2}{a(b+c)} + \frac{(ca)^2}{b(c+a)} + \frac{(ab)^2}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\xLeftarrow{\text{Engel}} \frac{(bc+ca+ab)^2}{2(bc+ca+ab)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{bc+ca+ab}{3} \geq 1$$

$$\xLeftarrow{\text{A-G}} \sqrt[3]{(bc)\cdot(ca)\cdot(ab)} \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow abc \geq 1$$

9. $$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2d} + \frac{d^4}{d^2a} \geq 4$$

$$\xLeftarrow{\text{Engel}} \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a} \geq 4$$

$$\Longleftrightarrow a^2b+b^2c+c^2d+d^2a \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow (a(ab)+b(bc)+c(cd)+d(da))^2 \leq 16$$

$$\xLeftarrow{\text{CSB}} (a^2+b^2+c^2+d^2)((ab)^2+(bc)^2+(cd)^2+(da)^2) \leq 16$$

$$\Longleftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2 \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow b^2(a^2+c^2)+d^2(c^2+a^2) \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow (b^2+d^2)(c^2+a^2) \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(b^2+d^2)(c^2+a^2)} \leq 2$$

$$\xLeftarrow{\text{A-G}} \frac{b^2+d^2+c^2+a^2}{2} \leq 2 \Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$$

10. $$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{a+ab^2c}+\frac{b^2}{b+bc^2d}+\frac{c^2}{c+cd^2a}+\frac{d^2}{1+da^2b} \geq 2$$

$$\xLeftarrow{\text{Engel}} \frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b} \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4^2}{4+ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b} \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow 16 \geq 8+2(ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b)$$

$$\Longleftrightarrow (ab)(bc)+(bc)(cd)+(cd)(da)+(da)(ab) \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow (bc)(ab+cd)+(da)(cd+ab) \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow (bc+da)(ab+cd) \leq 4$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(bc+da)(ab+cd)} \leq 2$$

$$\xLeftarrow{\text{A-G}} \frac{ab+bc+cd+da}{2} \leq 2$$

$$\Longleftrightarrow ab+bc+cd+da \leq 4$$

Promotrimo sada početni uvjet kako bismo dokazali posljednji redak:

$$a+b+c+d=4$$

$$\Longleftrightarrow (a+b+c+d)^2=16$$

$$\Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+(2ab+2bc+2cd+2da)+(2ac+2bd)=16$$

$$\Longleftrightarrow (a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bd+d^2)+(2ab+2bc+2cd+2da)=16$$

$$\Longleftrightarrow (a+c)^2+(b+d)^2+2(ab+bc+cd+da)=16$$

Stoga, ako dokažemo $(a+c)^2+(b+d)^2 \geq 8$, dokazali smo $2(ab+bc+cd+da) \leq 8$ čime je redak koji pokušavamo dokazati dokazan i time zadatak riješen.

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \geq 8$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{2} \geq 4$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{2}} \geq 2$$

$$\xLeftarrow{\text{K-A}} \frac{(a+c)+(b+d)}{2} \geq 2$$

$$\Longleftrightarrow a+b+c+d \geq 4$$

20.4. N4: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Lagani zadatci

1. Prema Eulerovom teoremu znamo:

$$3^{10} \equiv 1 \mod 11 \Big/^{10}$$

$$3^{100} \equiv 1 \mod 11$$

Za drugi dio idemo sličnim postupkom:

$$3^{20} \equiv 1 \mod 25 \Big/^{5}$$

$$3^{100} \equiv 1 \mod 25$$

2. Mi zapravo tražimo $7^{7^{7^7}} \equiv ? \mod 100$ Odnosno preko leme iz predavanja to je isto što i:

$$7^{7^{7^7} \mod 40} \equiv ? \mod 100$$

Idemo sada nastaviti rekurzivno s tim postupkom:

$$7^{7^7} \equiv 7^{7^7 \mod 16} \mod 40$$

$$7^7 \equiv 7 \mod 16$$

$$7^{7^7} \equiv 7^7 \equiv 23 \mod 40$$

$$7^{7^{7^7} \mod 40} \equiv 7^{23} \equiv 43 \mod 100$$

3. Opet radimo istu stvar kao i u prošlom zadatku samo više puta.
Kao rješenje se opet dobije 43.

4. Znači mi tražimo najmanji $x := ord_{a^n-1}(a)$ za koji vrijedi:

$$a^x \equiv 1 \mod (a^n - 1)$$

Očito vrijedi $x \geq n$ jer inače kongruencija neće vrijediti. Za $x = n$ kongruencija vrijedi i s obzirom da x mora biti najmanji broj takav da navedena kongruencija onda je $x = n$ odnosno $ord_{a^n-1}(a) = n$

5. Treba dokazati oba smjera:
Smjer ulijevo je $\mathbb{TRIVIAL}$
Smjer udesno: $x^2 - 1 \equiv (x-1)(x+1) \equiv 0 \mod p$ iz ovoga i činjenice da je p prost (dosta bitno za reći) slijedi tvrdnja

Umjereni zadatci

6. Tvrdnja koju želimo dokazati je ekvivalentna tvrdnji: $pq \mid a^{pq-q-p+2} - a$
Vrijedi:

$$a^{pq-q-p+2} = a^{(p-1)(q-1)+1}$$

Sada je potrebno promatrati više slučajeva.
1. slučaj - $pq \mid a$
Tvrdnja očito vrijedi.
2. slučaj - $p \mid a$ i $q \nmid a$
Iz uvjeta vrijedi:

$$p \mid a^{pq-q-p+2} - a$$

I prema Malom Fermatovom teoremu vrijedi (smijemo ga koristiti jer $\gcd(a^{p-1}, q) = 1$):

$$a^{(p-1)(q-1)+1} \equiv (a^{(p-1)})^{(q-1)} a \equiv a \mod q$$

Znači vrijedi:

$$q \mid a^{pq-q-p+2} - a$$

Odnosno $pq \mid a^{pq-q-p+2} - a$
3. slučaj - $p \nmid a$ i $q \mid a$
Ovo je simetrično s 2. slučajem.
4. slučaj - $p \nmid a$ i $q \nmid a$
Prema Malom Fermatovom teoremu vrijedi (smijemo ga koristiti jer $\gcd(a^{p-1}, q) = 1$):

$$a^{(p-1)(q-1)+1} \equiv (a^{(p-1)})^{(q-1)} a \equiv a \mod q$$

Znači vrijedi:

$$q \mid a^{pq-q-p+2} - a$$

Istim postupkom se pokaže:

$$p \mid a^{pq-q-p+2} - a$$

Odnosno $pq \mid a^{pq-q-p+2} - a$

7. Znamo da $ord_{(a^n-1)}(a) = n$. I znamo prema Eulerovom teoremu da (smijemo koristiti Eulerov teorem jer očito $\gcd(a^n - 1, a) = 1$):

$$a^{\phi(a^n-1)} \equiv 1 \mod (a^n - 1)$$

Sada prema teoremu iz predavanja vrijedi:

$$ord_{(a^n-1)}(a) \mid \phi_{(a^n-1)}$$

Odnosno

$$n \mid \phi_{(a^n-1)}$$

8. Stavimo $m = \phi_{(b)}$ i $n = \phi_{(a)}$

$$a^m + b^n \equiv a^{\phi(b)} + b^n \equiv 1 + 0 \equiv 1 \mod b$$

$$a^m + b^n \equiv a^m + b^{\phi(a)} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \mod a$$

Sada redom zaključujemo:

$$b \mid a^m + b^n - 1$$

$$a \mid a^m + b^n - 1$$

I s obzirom da su a i b relativno prosti slijedi:

$$ab \mid a^m + b^n - 1$$

9. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi.
Neka je p najmanji prosti djelitelj broja n (stvorit ćemo kontradikciju tako da nađemo manji djelitelj broja n). Vrijedi:

$$p \mid n \mid 2^n - 1$$

Znači $ord_p(2) \leq p$, no također vrijedi:

$$p \mid 2^{\phi(p)} - 1$$

Što znači da $ord_p(2) \leq \phi_{(p)} \leq p - 1$. Prema teoremu o Orderu iz predavanja znamo da vrijedi $ord_p(2) \mid n$, ali to nema smisla jer smo dobili da je $ord_p(2)$ manji od p i dijeli n, što prema definiciji p-a nema smisla.

10. Iz Malog Fermatovog teorema slijedi:

$$a \equiv b \mod p$$

Znači $a = b + pk$. Sada imamo preko binomnog teorema:

$$a^p = (b + kp)^p = b^p + \binom{p}{1} b^{p-1} kp + \cdots + (kp)^p \tag{20.1}$$

Ako sada gledamo obje strane jednakosti (1) modulo p^2 dobije se:

$$a^p \equiv b^p \mod p^2$$

Alternativno rješenje bi bilo da faktorizirate $a^p - b^p$. Probajte to za vježbu ako niste uspjeli ovaj zadatak iz prve :)

Teški zadaci

11. Znamo da: $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$ Sada ćemo posebno dokazati da svaki od ovih faktora dijeli $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n} \equiv 0 \mod 9$$

Ako $3 \mid n$ onda smo gotovi inače po lemi iz predavanja treba dokazati:

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 6$$

Očito je da $n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 2$. Treba još pokazati:

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 3$$

Što znači da treba samo pokazati:

$$n^n - n \equiv 0 \mod 2$$

što očito vrijedi
Sada želimo pokazati:

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n} \equiv 0 \mod 13$$

Ako $13 \mid n$ onda tvrdnja očito vrijedi, inače trebamo dokazati:

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 12$$

Odnosno treba pokazati:

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 4 \tag{20.1}$$

i

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 3 \tag{20.2}$$

(1) očito vrijedi ako $2 \mid n$ inače treba pokazati:

$$n^n - n \equiv 0 \mod 2$$

što očito vrijedi, a (2) smo već prije očito pokazali.
Za kraj treba pokazati:

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n} \equiv 0 \mod 17$$

Ako $17 \mid n$ tvrdnja očito vrijedi, inače treba pokazati:

$$n^{n^n} - n^n \equiv 0 \mod 16$$

Ako $2 \mid n$ tvrdnja očito vrijedi, inače treba pokazati:

$$n^n - n \equiv 0 \mod 8$$

Sada znamo da su n neparni, stoga $n^2 \equiv 1 \mod 8$ odnosno $n^{n-1} \equiv 1 \mod 8$ iz toga očito slijedi $n^n - n \equiv 0 \mod 8$.
Nakon ovoga napornog raspisivanja očito je da vrijedi $1989 \mid n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$

12. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi odnosno:

$$2^a + 1 \equiv 0 \mod 2^b - 1$$

Također će nam trebati tvrdnja: $2^b \equiv 1 \mod 2^b - 1$.
Neka $a = kb + r\; b > r$. Onda slijedi:

$$0 \equiv 2^a + 1 \equiv 2^{kb+r} + 1 \equiv (2^b)^k 2^r + 1 \equiv 2^r + 1 \mod 2^b - 1$$

Znači dobili smo $2^b - 1 \mid 2^r + 1$ i ovoga mora vrijediti: $2^b - 1 \leq 2^r + 1$, ali još znamo da $r < b$ iz čega slijedi $2^r + 1 \leq 2^{b-1} + 1$. Kombiniranjem nejednakosti dobijemo:

$$2^b - 1 \leq 2^{b-1} + 1$$

$$2^{b-1}(2-1) = 2^{b-1} \leq 2$$

$$b \leq 2$$

Što je kontradikcija s uvjetom zadatka.

13. Ako je $p = 2$ ili $p = 3$ onda stavimo $n = 2$. U svim drugim slučajevima uzmemo $n = p - 2$ i u tim slučajevima smijemo koristiti Mali Fermatov teorem.

$$6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 2 + 3 + 1 - 6 \equiv 0 \mod p$$

znači $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \mod p$, čime smo pokazali sve što smo htjeli.

14. Bugarska nacionalna olimpijada 1996- četvrta runda 1. zadatak

21. Rješenja za petu grupu

21.1. C5: Mislav Brnetić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. MNM online predavanja, Bojanja i popločavanja, Zadatak 3.
2. MNM online predavanja, Bojanja i popločavanja, Zadatak 1.
3. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je ploču moguće popločati na traženi način.

   Obojimo stupce naizmjence crno i bijelo. Svaka L-tetromina zauzima jedno crno i tri bijela ili jedno bijelo i tri crna polja. Kako na ploči postoji jednako bijelih i crnih polja, postoji jednako L-tetromina obje vrste. Međutim, kako ploča ima 100 polja, potrebno nam je ukupno 25 L-tetromina, a kako je to neparan broj, nije moguće da postoji jednak broj L-tetromina obje vrste, odakle slijedi kontradikcija.

   Dakle, ploču nije moguće popločati na traženi način.
4. Arthur Engel: Problem solving strategies, Coloring Proofs, Problem 2

Umjereni zadaci

5. Županijsko natjecanje 2014., A-1.5.
6. Arthur Engel: Problem solving strategies, Coloring Proofs, Problem 6
7. Županijsko natjecanje 2016., A-2.5.
8. Arthur Engel: Problem solving strategies, Coloring Proofs, Problem 3
9. Državno natjecanje 2019., A-3.3.
10. Arthur Engel: Problem solving strategies, Coloring Proofs, Problem 28
11. MNM online predavanja, Bojanja i popločavanja, Primjer 2.

Teži zadaci

12. HMO 2017., MEMO test, zadatak 2.
13. Državno natjecanje 2008., A-3.5.
14. Arthur Engel: Problem solving strategies, Coloring Proofs, Problem 8

21.2. G5: Stella Čolo - Upisana i pripisana kružnica

Predavanje Hintovi Rješenja

1. $\angle BI_1C = 180 - (\angle I_1BC + \angle I_1CB) = 180 - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180 - \frac{180 - \angle BAC}{2} = \frac{\angle BAC + 180}{2}$
$\angle BI_2C = 180 - (\angle I_2BC + \angle I_2CB) = 180 - \frac{\angle DBC + \angle DCB}{2} = 180 - \frac{180 - \angle BDC}{2} = \frac{\angle BDC + 180}{2}$
Kako je $ABCD$ tetivan, $\angle BAC = \angle BDC \implies \angle BI_1C = \angle BI_2C \implies$ četverokut I_2I_1BC je tetivan.

2. Po definiciji položaja središta pripisanih kružnica I_C, A, I_B su kolinearne i analogno I_C, B, I_A i I_A, C, I_B.
Također, A, I, I_A su kolinearne, kao i B, I, I_B i C, I, I_C
$\angle I_AAI_C = \angle I_AAB = \angle BAI_C = \frac{\alpha}{2} + \frac{180-\alpha}{2} = 90 \implies AI_A$ je visina u $\triangle I_aI_bI_c$, analogno vrijedi i za BI_B i CI_C.

3. Želimo da $\angle D_1D_2E_2 + \angle D_1E_1E_2 = 180 \Leftrightarrow 180 - \angle E_2D_2A + 180 - \angle D_1E_1B - \angle E_2E_1C = 180 \Leftrightarrow 180 - \frac{180-\alpha}{2} + 180 - \frac{180-\beta}{2} - \angle E_2E_1C = 180$
$\Leftrightarrow \angle E_2E_1C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180-\gamma}{2} \Leftrightarrow CE_1 = CE_2$. Po primjeru 1. vrijedi: $CE_1 = \frac{BC+CF-BF}{2}, CE_2 = \frac{CA+CF-AF}{2}$. Mi trebamo dokazati $\frac{BC+CF-BF}{2} = \frac{CA+CF-AF}{2} \Leftrightarrow BC + CF - BF = CA + CF - AF \equiv BC - CA = BF - AF$, a znamo da $BF - AF = \frac{AB+BC-CA}{2} - \frac{AB+CA-BC}{2} = BC - CA$ pa vrijedi $CE_1 = CE_2$, što nam je bilo dovoljno za dokazati da je četverokut $D_1E_1E_2D_2$ tetivan.

4. Po prvom primjeru: $BD = y, DC = z, CE = z, EA = x, AF = x, FB = y \implies \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{y}{z} \times \frac{z}{x} \times \frac{x}{y} = 1$. Iz čega slijedi da se pravci AD,BE, CF sjeku u jednoj točci.

5. Po lemi o trozubcu točka O je polovište kraćeg luka BC kružnice opisane $\triangle ABC$. Slijedi da su točke A, I, O kolinearne pa $\angle OIF = 180 - \angle FIA = 180 - (90 - \frac{\alpha}{2}) = 90 + \frac{\alpha}{2}, \angle OIE = 180 - \angle EIA = 180 - (90 - \frac{\alpha}{2}) = 90 + \frac{\alpha}{2} = \angle OIF$
IF i IE su polumjeri upisane kružnice pa su jednaki $\implies$ po SKS poučku o sukladnosti $\triangle FIO$ i $\triangle EIO$ su sukladni $\implies \angle OFB = \angle OEC$

6. Dokazat ćemo prvo da je četverokut $ICKE$ tetivan iz čega slijedi $\angle IKC = \angle IEC = 90$ tj. BK je okomito na CK. Dokaz: $\angle EKI = \angle FKB = 180 - \angle KFB - \angle KNF = 180 - (180 - \frac{180-\alpha}{2}) - \frac{\beta}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \angle ECI$. Nadalje, $MK = MB \implies \angle KMB = 180 - 2\angle MBK = 180 - \beta = 180 - \angle ABC = 180 - \angle NMC = \angle NMB \implies N, K, M$ su kolinearne.

7. Definirajmo P' kao presjek EF i AM. Dokazat ćemo da $P' = P$ tako da pokažemo da vrijedi $\frac{FP}{PE} = \frac{FP'}{P'E}$. Izrazit ćemo $\frac{FP}{PE}$ preko sinusovog poučka iz trokuta $\triangle FPI$ i $\triangle PIE$ $\angle FIP = 2\angle IDF = 2(90 - \angle FDB) = 2(90 - (90 - \frac{\beta}{2})) = \beta$, analogno $\angle PIE = \gamma$ $\frac{FP}{sinFIP} = \frac{FI}{sinFPI} \Leftrightarrow \frac{FP}{sin\beta} = \frac{FI}{sinFPI}$. Iz $\triangle PIE$ dobijemo $\frac{PE}{sin\gamma} = \frac{IE}{sinIPE}$. Koristeći da $FI = IE$ i $sinFPI = sinIPE$ dobivamo $\frac{FP}{PE} = \frac{sin\beta}{sin\gamma}$. Dalje računamo $\frac{FP'}{P'E}$ iz sinusovog poučka na $\triangle FAP', \triangle EAP'$ $\frac{FP'}{sinFAP'} = \frac{AF}{sinFP'A}, \frac{P'E}{sinP'AE} = \frac{AE}{sinAP'E}$. Znamo da $AF = AE, sinFP'A = sinAP'E$, pa $\frac{FP'}{P'E} = \frac{sinFAP'}{sinP'AE} = \frac{sinBAM}{sinMAC}$. Analognom primjenom sinusovog poučka na $\triangle BAM, \triangle CAM$ dobivamo $\frac{sinBAM}{sinCAM} = \frac{sin\beta}{sin\gamma} = \frac{FP'}{P'E}$. Time je dokazano da $P' = P$, odnosno da su točke A, P i M kolinearne.

8. Uvedimo B', C' kao presjeke tangente na opisanu kružnicu $\triangle ABC$ u točci D' sa stranicama AC, AB. Kako su BD i $B'D'$ okomiti na DD', $\implies BD \parallel B'D'$ pa postoji homotetija iz točke A koja šalje $\triangle AB'C'$ u $\triangle ABC$ te upisanu kružnicu(koja je A-pripisana $\triangle AB'C'$) u A- pripisanu i diralište upisane u diralište A- pripisane tj. šalje točku D' u točku X iz čega slijedi da su točke A, D', X kolinearne.

9. Neka su B_1, C_1 presjeci tangente na A-pripisanu u X' i pravaca AB, AC. $\angle AX'I_A = 90 = \angle BXI_A \implies BC \parallel B'C' \implies$ postoji homotetija iz točke A koja šalje $\triangle ABC$ u $\triangle AB'C'$ pa također šalje dirališta upisanih kružnica tih trokuta jedno u drugo, odnosno šalje D u X' iz čega slijedi da su točke A, D i X' kolinearne.

10. Neka je K nožište visine iz A na BC. Iz 8. zadatka znamo da su točke A, D', X kolniearne. $AK \parallel DD'$ pa postoji homotetija iz točke X koja šalje $\triangle XD'D$ u $\triangle XAK$, također šalje polovište stranice DD' u polovište stranice AK iz čega slijedi da su točke P, I i X kolinearne.

11. Po 9.zadatku znamo da su točke A, D, X' kolinearne. Neka je K nožište visine iz A na BC. $\angle X'XD = \angle DKA = 90 \implies X'X \parallel AK \implies$ postoji homotetija iz točke D koja šalje $\triangle DXX'$ u $\triangle DKA$, također šalje polovište stranice XX' u polovište $AK \implies$ točke P, D i I_A su kolinearne.

12. Neka su Y', X', Z redom dirališta A-pripisane sa polupravcima AC, AB, BC. Znamo da $AX' = AY' = s = 2$ pa su X, Y redom polovišta dužina AX', AY'. BSO treba opseg $\triangle ABM$ biti 2 $\Leftrightarrow AB + BM + AM = 2 = AU \Leftrightarrow BM + AM = BU = BZ \Leftrightarrow BM + AM = BM + MT \Leftrightarrow AM = MT$. Želimo dokazati da $AM = MT$. $XY \parallel X'Y'$ pa je XY okomito na AI_A iz čega slijedi da je XY radikalna os A-pripisane kružnice i kružnice s centrom u točci A s radijusom 0. M leži na toj radikalnoj osi pa ima jednaku potenciju na obje kružnice, kako je MT tangenta na A-pripisanu, vrijedi: $MA^2 = MT^2 \implies MA = MT$.

21.3. A5: Vedran Cifrek - Uvod u funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

1. Provjerimo prvo surjektivnost: za proizvoljan y želimo da je jednak $f(x)$ pa imamo $y = ax + b \iff ax = y - b$, te kada je $a \neq 0$ je ekvivaletno s $x = \frac{y-b}{a}$ pa je za sve takve funkcija surjektivna i za proizvoljan y je $f(\frac{y-b}{a}) = y$. Usput, kad je $a = 0$ funkcija je konstanta pa nije surjekcija.
   Sada provjerimo injektivnost za $a \neq 0$:
   $f(x_1) = f(x_2) \implies ax_1 + b = ax_2 + b \implies ax_1 = ax_2$, te kako je $a \neq 0$, slijedi $x_1 = x_2$ pa je to injekcija.

2. Da funkcija bude surjekcija za proizvoljan y želimo x takav da je $f(x) = y$, pa vidimo da je za svaki takav y dobar $x = f(y)$.
   Injektivnost: $f(x_1) = f(x_2) \implies f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, jer ako funkcija djeluje na isti broj mora dati istu vrijednost, pa primjenom tvrdnje zadatka imamo $x_1 = x_2$ što je i trebalo dokazati.

3. $P(x, 0)$ daje $f(x+0) + f(x-0) = x^2 + 0^2 \implies 2f(x) = x^2 \implies f(x) = \frac{x^2}{2}$ za svaki realan broj x.
   Provjerimo da ova funkcija zadovoljava početnu jednadžbu:
   $f(x+y) + f(x-y) = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{2} = x^2 + y^2$.

4. $P(x, x)$ nam daje $f(0) = 2f(x) - 2x^2$, tj $f(x) = x^2 + \frac{f(0)}{2}$.
   Treba nam $f(0)$ pa uvrstimo $P(0, 0)$: $f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$ pa imamo da je $f(x) = x^2$ te laganom provjerom u početnu jednadžbu vidimo da je to rješenje.

5. Početna jednadžba je $f(x) + xf(1-x) = x$, za bilo koji realni broj x pa možemo uvrstiti $1-x$ umjesto x i tada dobivamo $f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1-x \implies f(1-x) = 1-x+(x-1)f(x)$, te onda to uvrstimo u početnu jednadžbu:
   $f(x) + x \cdot (1 - x + (x-1)f(x)) = x \implies (x^2 - x + 1)f(x) = x^2 \implies f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$.
   (diskriminanta je negativna pa izraz u nazivniku nema realnih nultočaka)
   Uvrstimo rješenje u početnu jednadžbu:
   $f(x) + xf(1-x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1} + \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2 - (1-x) + 1} = \frac{x^2 + x(1 - 2x + x^2)}{x^2 - x + 1} = \frac{x(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = x$, pa je dobivena funkcija rješenje zadatka.

6. $P(0, y)$: $f(0) + f(f(y)) = y \implies f(f(y)) = y - f(0)$, pa ako uzmemo proizvoljni z i želimo da je $f(x) = z$ vidimo da je dobar $x = f(z + f(0))$, pa imamo da je funkcija surjekcija.
   Kako je surjekcija postoji a realan broj takav da je $f(a) = 0$ pa uvrstimo $P(x, a)$: $f(x) + f(x + f(a)) = 2x + a \implies f(x) = x + \frac{a}{2}$, što znači da postoji realna konstanta c takva da je $f(x) = x + c$, za svaki realan broj x.
   Sada uvrstimo to u početnu jednadžbu kako bi provjerili koji c zadovoljavaju jednadžbu, a tako ćemo obaviti i provjeru da dobivena funkcija stvarno je rješenje zadatka:
   $f(x) + f(x + f(y)) = x + c + f(x + y + c) = 2x + y + 3c$, pa da bi to bilo jednako $2x + y$, mora biti $c = 0$, tj rješenje je $f(x) = x$.

7. AOPS

8. $P(0, y)$: $f(f(0) + f(y) + y) = f(0) + 2y$, $f(0) + 2y$ je surjektivna funkcija pa poprima sve realne brojeve, a budući da je lijeva strana uvijek $f(\text{nešto})$, pa i f poprima sve vrijednosti, odnosno f

je surjekcija.
$P(x,0)$: $f(f(x)+f(0))=f(x)$, budući da je f surjekcija možemo umjesto $f(x)$ staviti bilo koji proizvoljni realan broj, pa stavimo $f(x)=y-f(0)$ za proizvoljan realan broj y i dobijemo $f(y)=y-f(0)$, tj postoji konstanta $c\in\mathbb{R}$ takva da je $f(x)=x+c$ za bilo koji realan broj x. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu vidimo da mora biti $c=0$, te da za njega vrijedi.

9. $P(0,y)$: $f(f(y))=f(0)^2+y$, pa vidimo da je f surjekcija pa postoji realan broj a takav da je $f(a)=0$ i onda uvrstimo $P(a,y)$ iz čega imamo $f(f(y))=f(a)^2+y$, tj. $f(f(y))=y$, pa ako primijenimo to u gornju jednadžbu imamo $f(0)^2=0$, odnosno $f(0)=0$.
$P(x,0)$: $f(xf(x))=f(x)^2$
$P(f(x),0)$: $f(f(x)f(f(x))+f(0))=f(f(x))^2+0$, primijenimo $f(f(x))=x$, pa imamo $f(xf(x))=x^2$, vidimo da je lijeva strana ista kao gore pa izjednačimo te dvije jednakosti i dobijemo $f(x)^2=x^2$, ovaj račun smo proveli za proizvoljan x pa je $f(x)^2=x^2$ za svaki realan broj x.
Sada bismo mogli biti nepažljivi i reći da iz ove tvrdnje direktno slijedi da je $f(x)=x$ za sve realne brojeve x ili $f(x)=-x$ za sve realne brojeve x, no to gore ne piše jer svaki realan broj x može birati je li $f(x)=x$ ili $f(x)=-x$, a ne da mora za sve biti isto, npr. moglo bi biti $f(x)=x$ za sve x osim 2, i $f(2)=-2$, no to može vrijediti samo u ovoj posebnoj jednakosti koju smo dobili, ali srećom možemo dokazati da nekakva takva funkcija ne zadovoljava početnu jednakost.
Znači pretpostavimo da postoji takva funkcija, tj. da postoje b i c realni brojevi različiti od 0 (za 0 je $0=-0$) takvi da je $f(b)=b$, $f(c)=-c$ te uvrstimo $P(b,c)$: $f(bf(b)+f(c))=(f(b))^2+c$, odnosno $f(b^2-c)=b^2+c$
b^2-c je sada neki realan broj, pa imamo dvije mogućnosti:
1. $f(b^2-c)=b^2-c$, no onda je $b^2-c=b^2+c$, odnosno $c=0$, kontradikcija.
2. $f(b^2-c)=c-b^2$, no onda je $c-b^2=b^2+c$, odnosno $b=0$, kontradikcija.
Sada znamo da mora biti $f(x)=x$ za sve realne brojeve ili $f(x)=-x$ za sve realne brojeve, te provjerimo u početnu jednadžbu vidimo da su obje te funkcije rješenje početne jednadžbe.

10. Baltic Way 2019

11. $P(0,y)$: $(y+1)f(0)+f(f(y))=y\ \forall y\in\mathbb{R}$, znači kad je $f(0)\neq 1$, onda je f bijekcija
1. slučaj $f(0)=1$:
iz $P(0,y)$ imamo $f(f(x))=-1\ \forall x\in\mathbb{R}$
Uvrstimo $P(f(x),y)$: $(y+1)f(f(x))+f(f(x)f(y)+f(f(x)+y))=y$, tj. $f(f(x)f(y)+f(f(x)+y))=2y+1$, pa je f surjekcija, no onda u $f(f(x))=-1$, možemo umjesto $f(x)$ uvrstiti proizvoljni y pa imamo $f(y)=-1\ \forall y\in\mathbb{R}$, a ta funkcija nije surjekcija, pa imamo kontradikciju

2. slučaj $f(0)\neq 1$: onda je f surjekcija, pa uzmimo $a\in\mathbb{R}$ takva da je $f(a)=0$
$P(x,a)$: $(a+1)f(x)+f(xf(a)+f(x+a))=a$, iskoristimo $f(a)=0$ i $f(f(y))=y-(y+1)f(0)$: $(a+1)f(x)+(x+a)\cdot(1-f(0))-f(0)=a$
Ako pretpostavimo da je $a=-1$ dobijemo da je proizvoljni realan broj x jednak konstanti $(f(0)\neq 1)$., pa je $a\neg-1$, što znači da je $f(x)=cx+d$ za neke realne brojeve c i d koje možemo zapisati pomoću a i $f(0)$, ali to nije potrebno.
Uvrstimo $f(x)=cx+d$ u početnu jednadžbu da vidimo za koje vrijednosti ona vrijedi: $(y+1)(cx+d)+f(x\cdot(cy+d)+c(x+y)+d)=y \iff cxy+dy+cx+d+c^2xy+cdx+c^2x+c^2y+cd+d=y \iff xy(c^2+c)+x(c+cd+c^2)+y(d+c^2)+cd+2d=y$, Dva polinoma u (više) varijabli su jednaka ako su im svi koeficijenti jednaki pa mora vrijediti:
$c^2+c=0$, $cd=0$, $d+c^2=1$ i $(c+2)d=0$
Iz prve jednadžbe imamo da je c jednak 0 ili -1, ako je $c=0$, onda je $d=0$ i onda je to kontradikcija s $d+c^2=1$. Znači $c=-1$ i $d=0$. Pa je jedino rješenje zadatka $f(x)=-x$ za svaki realan broj x.

21.4. N5: Emanuel Tukač - CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci koje možemo rješiti i bez da znamo CRT

1. $55k + 46$ je rješenje. Po CRT-u postoji samo jedno rješenje mod 55. Provjerimo 5 kandidata za koje je ostatak pri dijeljenju s 11 jednak 2 i tako dođemo do 46.

2. $55k + 46$ i $55k + 24$ su rješenja. x je 1 ili 4 $\pmod 5$. I onda ponovimo postupak iz prvog.

3. $110k + 101$
   Možemo "rastaviti" $x \equiv 1 \pmod{10}$ na:
   $$x \equiv 1 \pmod 2$$
   $$x \equiv 1 \pmod 5$$
   (Napomena 2.2)
   Znamo rješenje za:
   $$x \equiv 1 \pmod 5$$
   $$x \equiv 2 \pmod{11}$$
   pa samo nadogradimo za $x \equiv 1 \pmod 2$ isprobavanjem dva slučaja.

4. $1430k + 101$ Tražimo rješenja *mod* 1430. Rastavimo prvu kongruenciju na dvije (Napomena 2.2):
   $$x \equiv 1 \pmod 2$$
   $$x \equiv 1 \pmod 5$$
   Sada kao i u dokazu CRT-a konstruiramo rješenje:
   Neka su d_5, d_{11}, d_{13} inverzi od 5, 11, 13 modulo 2
   Neka su p_2, p_{11}, p_{13} inverzi od 2, 11, 13 modulo 5
   Neka su j_2, j_5, j_{13} inverzi od 2, 5, 13 modulo 11
   Neka su t_2, t_5, t_{11} inverzi od 2, 5, 11 modulo 13
   Imamo rješenje:
   $$1 \cdot 5 \cdot d_5 \cdot 11 \cdot d_{11} \cdot 13 \cdot d_{13} + 1 \cdot 2 \cdot p_2 \cdot 11 \cdot p_{11} \cdot 13 \cdot {}_{13} + 2 \cdot 2 \cdot j_2 \cdot 5 \cdot j_5 \cdot 13 \cdot j_{13} + 10 \cdot 2 \cdot t_2 \cdot 5 \cdot t_5 \cdot 11 \cdot t_{11}$$
   Pomoću Eulerovog teorema i brzog potenciranja nađemo inverze (pri tome primjenimo mod kada god je moguće) i time dobijemo:
   $$d_5 = 1, d_{11} = 1, d_{13} = 1$$
   $$p_2 = 3, p_{11} = 1, p_{13} = 2$$
   $$j_2 = 6, j_5 = 9, j_{13} = 6$$
   $$t_2 = 7, t_5 = 8, t_{11} = 6$$
   Uvrstimo ih i dobijemo 101.

Tipični CRT zadaci

5. Neka su $p-ovi$ različiti prosti, po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1}$$

$$a_1 \equiv -1 \pmod{p_2}$$

$$a_1 \equiv -2 \pmod{p_3}$$

$$\dots$$

$$a_1 \equiv -(n-1) \pmod{p_n}$$

a_1 je djeljiv s p_1, a_2 je djeljiv s p_2,...
Pa možemo uzeti niz $A_i = a_i + 2p_i$ tako da je A_i djlejiv s p_i i veći od p_i pa je time složen. Alternativno smo mogli u sustav za CRT postaviti potencije prostih kao module ili umjesto prostih staviti umnožak dva prosta i tako odmah biti sigurni da su $a_i - ovi$ složeni.

6. Neka su $p-ovi$ različiti prosti, po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1 p_{n+1}}$$

$$a_1 \equiv -1 \pmod{p_2 p_{n+2}}$$

$$a_1 \equiv -2 \pmod{p_3 p_{n+3}}$$

$$\dots$$

$$a_1 \equiv -(n-1) \pmod{p_n p_{2n}}$$

a_1 je djeljiv s p_1 i s p_{n+1}, pa nije potencija prostog...

7. Neka su $p-ovi$ različiti prosti, po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1^2}$$

$$a_1 \equiv -1 \pmod{p_2^2}$$

$$a_1 \equiv -2 \pmod{p_3^2}$$

$$\dots$$

$$a_1 \equiv -(n-1) \pmod{p_n^2}$$

a_1 je djeljiv s p_1^2, a_2 je djeljiv s p_2^2,...

8. Neka su $p-ovi$ različiti prosti, po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv p_1 \pmod{p_1^2}$$

$$a_1 \equiv p_2 - 1 \pmod{p_2^2}$$

$$a_1 \equiv p_3 - 2 \pmod{p_3^2}$$

$$\dots$$

$$a_1 \equiv p_n - (n-1) \pmod{p_n^2}$$

a_1 je djeljiv s p_1 ali nije s p_1^2, a_2 je djeljiv s p_2 ali nije s p_2^2,...

9. Neka su $p - ovi$ različiti prosti, po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+1} \pmod{p_{n+1}^2}$$

$$a_1 \equiv -1 \pmod{p_2^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+2} - 1 \pmod{p_{n+2}^2}$$

$$a_1 \equiv -2 \pmod{p_3^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+3} - 2 \pmod{p_{n+3}^2}$$

$$\ldots$$

$$a_1 \equiv -(n-1) \pmod{p_n^2}$$

$$a_1 \equiv p_{2n} - (n-1) \pmod{p_{2n}^2}$$

10. Neka je $d = a_2 - a_1$ umnožak svih prostih manjih od od n. Neka su $p - ovi$ različiti prosti brojevi veći od n , po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 1 \pmod{d}$$

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1}$$

$$a_1 \equiv -d \pmod{p_2}$$

$$a_1 \equiv -2d \pmod{p_3}$$

$$\ldots$$

$$a_1 \equiv -(n-1)d \pmod{p_n}$$

$a_i - a_j = (i-j)d$, a iz prve kongruencije imamo da je $a_i \equiv 1 \pmod{p}$ za svaki prost p manji od n pa nema zajedničkog djeljitelja ni s d ni s $(i-j)$, pa tako nema ni s a_j

11. Neka je $d = a_2 - a_1$ umnožak svih prostih manjih od od n. Neka su $p - ovi$ različiti prosti brojevi veći od n , po CRT-u postoji a_1 takav da:

$$a_1 \equiv 1 \pmod{d}$$

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_1^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+1} \pmod{p_{n+1}^2}$$

$$a_1 \equiv -d \pmod{p_2^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+2} - d \pmod{p_{n+2}^2}$$

$$a_1 \equiv -2d \pmod{p_3^2}$$

$$a_1 \equiv p_{n+3} - 2d \pmod{p_{n+3}^2}$$

$$\ldots$$

$$a_1 \equiv -(n-1)d \pmod{p_n^2}$$

$$a_1 \equiv p_{2n} - (n-1)d \pmod{p_{2n}^2}$$

12. Odaberemo $n \cdot m$ prostih brojeva. Za a_1 postavimo:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p_{1,1}p_{1,2}\dots p_{1,m}}$$

$$a_1 \equiv -1 \pmod{p_{2,1}p_{2,2}\dots p_{2,m}}$$
$$a_1 \equiv -2 \pmod{p_{3,1}p_{3,2}\dots p_{3,m}}$$
$$\dots$$
$$a_1 \equiv -(n-1) \pmod{p_{n,1}p_{n,2}\dots p_{n,m}}$$

Za b_1 postavimo:

$$b_1 \equiv 0 \pmod{p_{1,1}p_{2,1}\dots p_{n,1}}$$
$$b_1 \equiv -1 \pmod{p_{1,2}p_{2,2}\dots p_{n,2}}$$
$$b_1 \equiv -2 \pmod{p_{1,3}p_{2,3}\dots p_{n,3}}$$
$$\dots$$
$$b_1 \equiv -(m-1) \pmod{p_{1,m}p_{2,m}\dots p_{n,m}}$$

Skriveni CRT

13. Neka su p_i svi prosti djeljitelji od n.
Iz $x^2 \equiv x \pmod{n}$ slijedi:

$$x^2 - x \equiv 0 \pmod{n}$$

odnosno:

$$x(x-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

Za svaki p_i postoje dvije opcije:

$$x \equiv 0 \pmod{p_i}$$
$$x - 1 \equiv 0 \pmod{p_i}$$

Pa je odgovor $2^{(brojprostihdijeljiteljaodn)}$

14. IMO 2009 P1

15. USAMO 2008 P1

16. APMO 2009 P4

22. Rješenja za šestu grupu

22.1. C6: Emanuel Tukač - Konstrukcije u kombinatorici

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. JBMO 2019 4.zadatak

2. ELMO 2020 Zimski 5.zadatak

   Rješenje.

   Neka je A broj redaka s dva označena polja i B broj redaka s jednim označenim poljem. Tada je $2A + B$ broj označenih polja.

   Za svako polje iz retka s jednim označenim poljem postoji jedinstveno polje iz nekog drugog retka s jednim označenim poljem koje je u istom stupcu s njim. Time smo podijelili polja iz retka s jednim označenim poljem u $B/2$ parova, i svakom paru pridružili jedinstveni stupac s dva označena polja. Dakle, broj stupaca s dva označena polja je $B/2$. Analogno, broj stupaca s jednim označenim poljem je $2A$.

   Sada je još potrebno maksimizirati zbroj $2A + B$, uz uvjete $A + B \leqslant 2019$ i $2A + B/2 \leqslant 2019$. Zbrajanjem tih dvaju nejednakosti dobijemo $(2A + B) \cdot 3/2 \leqslant 4038 \implies 2A + B \leqslant \frac{2019 \cdot 4}{3} = 2692$.

   Dokažimo još da se 2692 postiže. Promotrimo sljedeće označavanje : Označimo retke i stupce brojevima od 1 do 2019. Ako je oznaka retka $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki $k \geqslant 0$, tada u tom retku označimo polje u $3k + 1$-tom stupcu. Ako je oznaka retka $3k$ za neki $k > 0$, tada u tom retku označimo polja u stupcima $3k$ i $3k - 1$.

   Lako se vidi da je konstrukcija valjana tj. da za svako označeno polje postoji jedinstveno drugo označeno polje u istom retku ili stupcu. Broj redaka s dva označena polja je $2019/3$, a broj redaka s jednim označenim poljem je $2 \cdot 2019/3$, pa je broj označenih polja upravo $4 \cdot 2019/3$.

3. HMO 2020. MEMO-test 2.zadatak

4. ELMO 2019. Ljetni 5.zadatak

   Prvo rješenje.

   Tvrdimo da je odgovor $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$.

   Dokažimo da se taj broj može postići. Označimo bakterije s $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ tako da je A_0 kraljica.

   Postavimo da su $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ djeca od A_0, te da su ostale bakterije djeca od A_1.

   Tada je svaka kći od A_0 različita od A_1 teta svakoj kćeri od A_1, pa ih ima

$$\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right) \left(n - 1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Označimo kraljicu s Q. Za bakteriju X različitu od kraljice, neka je $M(X)$ majka od X. Tada definiramo dubinu od X kao najmanji k takav da je $M^k(X) = Q$, te stavimo da je dubina od Q jednaka 0. Broj parova (tetka, nećakinja) je manji ili jednak broju parova bakterija u, v takvih da je dubina od u različite parnosti od dubine od v i takvih da u i v nisu spojeni, jer tetka i nećakinja imaju dubine različite parnosti i nisu spojene.

Neka je P broj bakterija parne dubine.

Tada je broj opisanih parova jednak

$$P(n-P)-(n-1).$$

Lijevi pribrojnik je broj parova različite dubine, a od tog broja moramo oduzeti one povezane, a ima $n-1$ bridova. Taj broj je prema AG nejednakosti manji ili jednak

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - (n-1) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Iz toga slijedi da je i broj parova (tetka, nećakinja) ograničen tim brojem, kao što je i trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Konstrukcija je ista kao i u prvom rješenju. Dubinu definiramo kao i u prvom rješenju. Neka je L_i broj vrhova s dubinom i.

Vrijedi da je broj parova (teta, nećakinja) manji ili jednak broju parova (u, v) takvih da je dubina od u za 1 manja od dubine od v i takvih da u nije majka od v. Naime, ako su neki (u, v) teta i nećakinja, tada je dubina od u za 1 manja od dubine od v i u nije majka od v.

Vrijedi da je broj opisanih parova jednak

$$\sum_{i=0}^{k}(L_i-1)L_{i+1},$$

gdje je k maksimalna dubina, zato što neki vrh čija dubina je $i+1$ se spari s točno $L_i - 1$ vrhova dubine i, sa svima čija dubina je i osim sa svojom majkom.

Primijetimo da vrijedi $L_0 = 1$ pa prvi pribrojnik možemo zanemariti. Također, $L_{k+1} = 0$ pa možemo i zadnji pribrojnik zanemariti. Nadalje, vrijedi $L_1 + L_2 + \ldots + L_k = n - 1$. Uvedimo oznaku

$$f(L_1, \ldots, L_k) = \sum_{i=1}^{k-1}(L_i-1)L_{i+1}.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom po k sljedeću tvrdnju:

Za svaki prirodan broj $k \geqslant 2$, za svaki prirodan broj $n \geqslant 4$ i za svakih k prirodnih brojeva $L_1, \ldots, L_k$ za koje vrijedi $L_1 + \ldots + L_k \leqslant n - 1$, vrijedi

$$f(L_1, \ldots, L_k) \leqslant \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Baza: za $k = 2$, vrijedi

$$(L_1-1)L_2 \leqslant (n-2-L_2)L_2 \leqslant \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil,$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz AG nejednakosti.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k-1$, gdje je $k \geqslant 3$. Promotrimo brojeve $L_1, \ldots, L_k$ čiji zbroj je manji ili jednak $n-1$.

Pretpostavimo da je $L_2 \geqslant L_{k-1}-1$. Tada vrijedi

$$f(L_1,\dots,L_k) \leqslant f(L_1+L_k, L_2,\dots,L_{k-1},0),$$

jer je $f(L_1+L_k,L_2,\dots,L_{k-1},0) = f(L_1,\dots,L_k)+L_kL_2-L_k(L_{k-1}-1)$. Nova $k-1$-torka zadovoljava sve uvjete (zbroj je ostao isti, svi brojevi su prirodni), pa možemo primijeniti pretpostavku indukcije pa vrijedi nejednakost.

Drugi slučaj je ako je $L_2 < L_{k-1}-1$. Tada vrijedi

$$f(L_1,\dots,L_k) \leqslant f(L_2,\dots,L_{k-1},L_k+L_1-1,0),$$

gdje nejednakost vrijedi zbog $f(L_2,\dots,L_{k-1},L_k+L_1-1,0) = f(L_1,\dots,L_k)+(L_{k-1}-1)(L_1-1)-L_2(L_1-1)$. Nova $k-1$-torka zadovoljava sve uvjete (zbroj se smanjio za 1, svi brojevi su prirodni), pa po pretpostavci indukcije i u ovom slučaju vrijedi nejednakost. Time smo pokazali korak indukcije.

Dakle, broj parova (tetka, nećakinja) je manji ili jednak od $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$, čime smo dokazali da je to maksimum.

Umjereni zadaci

5. Bundeswettbewerb Mathematik Runde 2 2023 2.zadatak
Promatrajmo slučaj u kojem se postiže maksimalna udaljenost dva čvora. Neka je to n.
Neka su $a_0, a_1, ..., a_n$ čvorovi jednog puta duljine n takav da između a_0 i a_n ne postoji kraći put.
Primjetimo da a_0 i a_3 ne smiju biti povezani s istim čvorom jer bi tada postojao kraći put od a_0 do a_n. Općenito : a_i i a_j ne mogu biti povezani s istim čvorom, ako $j \geq i+2$.
Iz toga slijedi da su skup čvorova povezanih s a_3i i skup čvorova povezanih s a_3j disjunktni za različite i i j
a_0 mora biti povezan još s barem 41 čvorom van spomenutog niza, a_3 s barem 40, a_6 s 40 ...
Pošto su skupovi disjunktni ukupan broj čvorova bio bi barem zbroj tih brojeva (3 za a_0, a_1, a_2 i 41 povezanih s a_0, 3 za a_3, a_4, a_5 i 40 povezanih s a_3, ...), a znamo da ih je ukupno 2023.
Time dobivamo $n \leq 140$.
Preostaje dokazati da je $n = 140$ moguće. Pri tome koristimo istu strukturu s kojom smo dokazalai prvu stranu:
Povežemo 141 čvora u lanac.
a_0, a_1, a_2 povežemo s klikom od 41 čvora
a_{3i}, a_{3i+1}, a_{3i+2} povežemo s klikom od 40 čvora za svaki i iz $\{1,2,3,...45\}$
a_{138}, a_{139}, a_{140} povežemo s klikom od 41 čvora

6. Državno 2018 4. razred A 5.zadatak

7. Državno 2014 1. razred A 5.zadatak

8. IMO shortlist 2021 C2/HMO 2022. prvi dan 2.zadatak

9. Državno 2018 1.razred A 5. zadatak

Težak zadatak

10. IMO 2023 P5

22.2. G6: Krunoslav Ivanović - Spiralna sličnost i sl.

Predavanje | Hintovi | Rješenja

1. Poglavlje 2, zadatak 1
2. Poglavlje 2, zadatak 2
3. Link
4. Link
5. Link
6. Poglavlje 3, zadatak 1
7. Poglavlje 3, zadatak 3
8. HMO 2018. 1. dan
9. Example 1

22.3. A6: Janko Bušelić - Algebra mix

Predavanje Hintovi Rješenja

1. IMO SL 2022 A1
2. IMO 2023 P4
3. IMO SL 2002 A2
4. IMO SL 2014 A2
5. IMO SL 2014 A3
6. Neki hmo

22.4. N6: Ivan Vojvodić - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

1. IMOSL 2013 N1
2. BMO 2017/3
3. Baltic way 2022/16
4. MEMO 2016 I4
5. BMO 2019/1
6. Državno 2019 4. razred, 5. zadatak
7. USAMO 2012/4
8. Korea National Olympiad 2013/5
9. IMOSL 2020 N5

23. Rješenja za sedmu grupu

23.1. C7: Matej Vojvodić - Igre za zaigrane

Predavanje Hintovi Rješenja

Neriješeni zadaci iz uvoda

Zad 5. Ukoliko Nina počinje, pobjeđuje Ines. U svakom svom potezu ona stavlja žeton iste boje kao i Ninin, samo na nasuprotni vrh deseterokuta (centralno simetrično). Ukoliko Ines počne, pobjeđuje Nina. Lako se vidi da već nakon dva poteza može osigurati da su svi nizovi od 5 žetona pokvareni, tako da u prvom potezu igra odmah pored Ines žeton iste boje, a u drugom potezu isto, ali tako da je taj odigrani žeton što bliži žetonima odigranim u prvom potezu; ovo ima smisla jer kako god Ines stavi svoj drugi žeton će dvije udaljenosti biti različite. (ostatak igre nije bitan, pa Nina može igrati bilo koji mogući potez)

Zad 6. Viktor ima pobjedničku strategiju. Prvi žeton stavlja na sredinu, a dalje centralno simetrično zrcali Emilove poteze.

Zad 7. Ako je ploča kvadratna, pobjeđuje Jurica. Za svaki Tinov pomak kamena prema dolje za x, Jurica ga u svom potezu pomakne x polja ulijevo. Za svaki Tinov pomak kamena ulijevo, Jurica ga pomakne jednak broj polja prema dolje. Drugim riječima, on igra poteze tako da kamen vraća na dijagonalu.

Ako ploča nije kvadratna, pobjeđuje Tin tako da u prvom potezu poziciju svede na kvadratnu ploču, a onda dalje igra kao što je ranije opisano.

Zad 9. Vidimo da su pozicije od 1 do k pobjedničke za prvog igrača, pa je zato pozicija $k+1$ očito gubitnička. Indukcijom proširujemo gubitničke pozicije na sve oblika $l(k+1)$, $\forall l \in \mathbb{N}$, a sve ostale pozicije su pobjedničke. Dakle, ukoliko je n djeljiv s $k+1$ pobjeđuje Kraljević, tako da nakon svakog Kruninog poteza makne onoliko šibica koliko treba da u zbroju makne ukupno $k+1$ šibicu.

Ako n nije djeljiv s $k+1$, pobjeđuje Kruno tako da najprije uzme onoliko šibica koliki je ostatak koji daje n pri dijeljenju s $k+1$, a onda koristi istu strategiju koju je Kraljević imao u prethodnom slučaju.

Zad 11. Skica rješenja: Očigledno je 2 pobjednička pozicija, pa zbog toga je 3 sigurno gubitnička. Generalno, zbog prirode zadatka (najviše polovica preostalih) možemo naslutiti da će gubitničke pozicije imati veze s potencijama broja 2 (i stvarno hoće, gubitničke pozicije su oblika $2^k - 1$, dok su svi ostali brojevi pobjedničke).

Izvor i puno rješenje: Žup 2019 SŠ1A

Zad 13. Ukoliko ne smiju maknuti složen broj kamenčića s hrpe, tada možemo za $n = 1, 2, 3$ reći da su pobjedničke pozicije jer prvi igrač može dobiti u potezu. No, pozicija 4 očigledno je gubitnička jer vodi samo u pobjedničke. Primijetimo sljedeće: sve pozicije oblika $4k$ su sigurno gubitničke. Dokaz ćemo provesti indukcijom. Pretpostavimo da je pozicija $4k$ gubitnička. Pozicije oblika $4k+1, 4k+2$ i $4k+3$ su pobjedničke jer se mogu dovesti u poziciju $4k$ (tako da se uzme 1, 2 ili 3 kamenčića), a pozicija $4k+4$ je gubitnička jer vodi samo u pobjedničke. Ovo se lakše može vidjeti iz obrata po kontrapoziciji, tj. "jer ne vodi u gubitničke", a očito ne vodi u gubitničke jer je od njih udaljena za neki višekratnik od 4 (dakle sigurno složen broj). Dakle, po principu matematičke indukcije, očigledno vrijedi da su gubitničke pozicije točno višekratnici broja 4.

Ukoliko se pak ne smije maknuti prost broj kamenčića, vidimo sljedeće: pozicija $n = 1$ je pobjednička u potezu; $n = 2$ gubitnička jer vodi samo u 1; $n = 3$ pobjednička jer vodi u 2; $n = 4$ pobjednička u potezu; $n = 5$ gubitnička jer vodi samo u 4 i 1; $n = 6$ pobjednička jer vodi u 5; $n = 7$ gubitnička jer vodi samo u pozicije $6, 3$ i 1. Promotrimo sada neki $n > 7$: tvrdimo da je to pobjednička pozicija za prvog igrača. Zaista, to je sigurno pobjednička pozicija jer ukoliko je n neparan, tada u potezu igru može svesti na 5, a ukoliko je n paran, u potezu može igru svesti na 2, koje su obje gubitničke pozicije za igrača na potezu, te kako je razlika parna i veća od 2, sigurno dohvatljive jer je razlika složen broj.

Zadaci

1. Drugi igrač pobjeđuje. Broj hrpa svakom podjelom raste za 1, ali je broj žetona konstantan. Igra završava kada je broj hrpa (na početku 3) jednak broju žetona (9), što je sveukupno 6 podjela, stoga hrpu neće moći podijeliti prvi igrač jer je redni broj njegovih podjela neparan.

2. Ako je $n = m$, pobjeđuje Mislav jer može samo kopirati Martinove poteze. Ako $n \neq m$, tada Martin u prvom potezu iz veće hrpe uzme točno onoliko žetona koliko treba da hrpe budu jednakobrojne, pa zatim on kopira Mislavove poteze.

3. Drugi igrač pobjeđuje. Rezultat je uvijek neparan jer kad god bilo koji predznak ispred nekog broja n promijenimo, konačni rezultat će se promijeniti za $2n$.

4. Prvi igrač uvijek može dobiti, i to rezultatom 10:8. Dovoljno je da stavi svoj znak u centralno polje ploče, a dalje igra centralno simetrično s obzirom na drugog igrača. Tako osigurava da dobije srednji red i stupac, a sve ostale dobiva u paru s drugim igračem.

5. Pretpostavimo najprije da je dimenzija čokolade 1×1. U tom slučaju očito gubi Mila.

Pretpostavimo sada da je barem jedan od brojeva m, n veći od 1 i da ponovno gubi Mila, tj. da je početna pozicija gubitnička. Tada ona gubi i ako odlomi samo kvadratić u desnom donjem kutu. Očito nije izgubila u prvom potezu. Nakon što Jurica odigra svoj potez, komad preostale čokolade mogao je ostati i odmah nakon Milinog poteza jer će donji desni kvadratić biti pojeden bez obzira na to koji kvadratić izabrali. Stoga je i Jurica u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće jer barem jedan igrač mora pobijediti u igri jer ona završava i ne može završiti nerješeno. Dakle, Mila uvijek ima pobjedničku strategiju, ali nismo našli koju. :)

6. Karlo ima pobjedničku strategiju. Dokazat ćemo da nakon svakog Viktorovog poteza Karlo može završiti igru ili postići da Viktor ne može završiti igru u sljedećem potezu. Pretpostavimo da je Viktoru u nekom trenutku ostalo $k - 1$ karata, a Karlu k karata, te neka zbroj karata na stolu daje ostatak j pri dijeljenju s $2n + 1$. Ako Karlo ima broj $2n + 1 - j$ među svojim kartama, može to odigrati i pobijediti. Ako nema tu kartu, ima jednu kartu više od Viktora. Za svaku Viktorovu kartu, najviše je jedna Karlova karta takva da će Viktor pobijediti odmah nakon bacanjem te karte. To znači da Karlo ima barem jednu kartu koju može odigrati, a da Viktor neće pobijediti u sljedećem potezu. Budući da svi znaju koje su karte preostale i koje su bačene, Karlo zna koju kartu treba baciti. Također, igra mora završiti jer nakon što se baci zadnja karta, zbroj svih bačenih karata je dijeljiv s $2n + 1$. Dakle, Karlo ima pobjedničku strategiju.

7. Očigledno Charlie dobiva za $n = 1$, jer nakon što zapiše 1 je igra gotova. Također, očigledno Nick dobiva za $n = 2$ tako da u svom prvom potezu obriše 2 i sada on zapiše 1.

Pokazat ćemo da Nick dobiva i za sve $n > 2$. Pretpostavimo da Nick dobiva za neki $n - 1$. Tada ukoliko igramo igru u kojoj Charlie napiše početnu permutaciju s n brojeva, znamo (prema pretpostavci indukcije) da sigurno dobiva igrač koji je na potezu kada se odigra prvi potez druge vrste, pa ga zato oboje žele izbjeći.

Sada samo treba pokazati da Nick može igrati potez prve vrste ako ga može i Charlie. To je trivijalno pokazati jer je $n!$ paran, pa je dovoljno bilo kako upariti permutacije, te će s vremenom

Charlie ostati bez poteza. Alternativno, moguće je pronaći i direktno sparivanje (npr. ako Charlie napiše permutaciju P, Nick ju uvijek napiše obrnutim redom). Dakle, po principu matematičke indukcije, Nick dobiva za svaki $n \geq 2$.

8. U oba slučaja pobjeđuje onaj igrač koji igra prvi.

a) Ako Nina igra prva, u prvom potezu briše najmanji broj, a ostale brojeve dijeli u parove uzastopnih brojeva. Zašto? Primijetimo da su dva uzastopna prirodna broja sigurno relativno prosta.

Dakle, Nini je dovoljno da na kraju ostane bilo koji od takvih parova brojeva. Zaista, to može lako učiniti tako da nakon svakog Juričinog poteza obriše onaj drugi broj iz istog para u kojem se nalazio taj broj.

b) Uzmimo sada da Jurica igra prvi. Pretpostavimo da je njegov prvi potez obrisati najmanji broj na ploči. Tada se među tim brojevima nalazi po 1011 parnih i neparnih brojeva. Ukoliko ostanu dva parna broja, Jurica sigurno pobjeđuje, pa stoga Jurica briše neparne brojeve. Zbog toga Nina, da spriječi takav razvoj događaja, mora brisati isključivo parne brojeve (čim obriše jedan neparan, a Jurica dalje briše samo neparne, ostat će dva parna broja na kraju). Dakle, prije no što se odigra zadnji potez, ostat će dva parna i dva neparna broja. Nina je opet prisiljena obrisati paran broj jer inače Jurica može ostaviti dva parna broja na ploči. Također, Jurica želi da ta dva neparna broja ne budu relativno prosti i to Jurica zaista može osigurati jer je na početku na ploči bilo dovoljno brojeva tako da brojeve koje ostavlja budu djeljivi s 3. Stoga Jurica može obrisati sve neparne brojeve, osim neka dva koji su djeljivi s 3, a uz njih su na ploči i još dva parna broja. Zaključujemo da u ovom slučaju Jurica ima pobjedničku strategiju jer može obrisati broj iste parnosti kao i Nina.

9. Ok, ovdje je opet podvaljena invarijanta. Igra nakon zadnjeg mogućeg poteza uvijek ima oblik triangulacije - lako se provjeri iz definicije jer ukoliko postoji neki mnogokut s više od tri vrha, moguće je povući njegovu dijagonalu. Sada pak koristimo svojstvo da triangulacija uvijek uzima jednak broj dijagonala (tj. $n - 1$), pa pobjednik ovisi samo o parnosti n.

Ovo je također odličan primjer "konstantne" strategije, jer neovisno o potezima drugog igrača, oba slijede "napravi potez ako možeš" strategiju.

10. Najprije treba provjeriti da igra završava: to je očito jer se u svakom potezu makne barem jedan broj iz S (tj. odabrani k), pa igra traje najviše 2023 poteza. Također, očigledno igra ne može završiti nerješeno.

Pretpostavimo da je početna pozicija gubitnička. To posebno znači da vodi isključivo u pobjedničke. Tada je posebno set $S\backslash\{1\}$ dobiven odabirom $k = 1$ u prvom potezu također pobjednička pozicija. To znači da postoji $k \in S\backslash\{1\}$ čijim je odabirom moguće doći do nekog S' koji je gubitnička pozicija za igrača na potezu. No, lako se vidi da je odabirom tog istog k u prvom potezu bilo moguće direktno doći u S', te stoga početna pozicija mora biti pobjednička.

Dakle, početna pozicija je pobjednička za igrača na potezu, što znači da Emil dobiva. No, sretno s nalaženjem konkretne strategije. :)

Izvor: MBL QQ 2023.

11. Skica rješenja: Jurica može odabrati pola polja tablice tako da nije moguće preko njih doći s bilo koje strane do nasuprotne, te su u svakom redu odabrana tri polja. Tada može upariti svako od tih polja s nekim neodabranim u istom redu, i svoje poteze izvoditi tako da forsira da veći broj u tom paru bude u odabranom polju.

X	X		
X			X
X			X
		X	X

Slika 23.1: Primjer odabranih polja

Detaljnije rješenje za 6×6 tablicu možete naći u knjizi Olympiad Combinatorics, na stranici 110. pdfa.

12. Lako se pokaže da igra mora završiti jer se u svakom potezu odabire prirodan broj, pa u najgorem slučaju traje 2023! poteza. Lako se pokaže da je broj dobiven umnoškom prvih 21 prostih brojeva najmanja gubitnička pozicija. Svi manji brojevi moraju biti pobjedničke pozicije jer imaju najviše 20 različitih prostih faktora.

No, to ujedno i znači da su svi višekratnici od umnoška prvih 21 prostih brojeva gubitničke pozicije, a sve ostalo su pobjedničke pozicije. Dokaz slijedi lagano po indukciji i definiciji gubitničkih/pobjedničkih pozicija, na isti način kao u zadatku 9 (ili zadatka 12) iz uvoda.

Dakle, kako je 2023! višekratnik umnoška prvih 21 prostih brojeva (s tim da je 21. prosti broj je 73), onda je pobjednica Mare.

13. Skica rješenja: neka Mila u prvom potezu zapiše pq. Tada zbog pravila Ines mora zapisati neki pr, na što Mila može zapisati qr. Općenito, može se pokazati da Mila ima potez kao odgovor na svaki Inesin potez, a kako N ima konačno dijelitelja, onda igra mora završiti i Mila pobjeđuje.

Rješenje možete naći u knjizi Olympiad Combinatorics, na stranici 109. pdfa.

14. Za pijuna je lako pokazati da dobiva Karlo namještavanjem neke specifične pozicije jer pijun može igrati samo jedan mogući potez. Jedno moguće rješenje je da Karlo dobije u potezu tako da pijuna stavi na zadnji red.

Za ostale figure pobjeđuje Tin. Na početku igre polja ploče podijelit će u parove tako da bude moguće napraviti potez između polja svakog para. To za kralja, topa, i damu mogu biti domine; za lovca 2×2 pločice, a za skakača nešto specijalno (slično kao L pločica bez sredine; pogledaj skicu dolje).

Promotrimo jednu moguću podjelu/strategiju ukoliko je odabrana figura skakač. Najprije dio ploče veličine 2×4 podijelimo na četiri para, a zatim koristeći kopije te podjele popunimo cijelu ploču kao na skici 23.2.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	7	8	5	6
9	10	11	12	13	14	15	16
11	12	9	10	15	16	13	14
17	18	19	20	21	22	23	24
19	20	17	18	23	24	21	22
25	26	27	28	29	30	31	32
27	28	25	26	31	32	29	30

Slika 23.2: podjela šahovske ploče na parove polja

Nakon što Karlo stavi skakača na ploču, prvi Tinov potez bit će pomaknuti skakača na polje spareno s Karlovim početnim poljem. Općenito, kako Karlo igra prvi, morat će skakača dovesti na jedno polje neposjećenog para, a Tin će tada postaviti figuru na preostalo polje tog para. Tin uvijek na raspolaganju ima taj potez, stoga će Karlo ostati bez poteza i izgubiti.

15. Skica rješenja: promotrimo svaku 50. kartu; tada će svaki potez utjecati samo na jednu promatranu kartu. Kako igra završava tek kada su sve preokrenute, a u svakom potezu se mijenja parnost broja preokrenutih karata, pobjednik je drugi igrač, tj. Maša.

Izvor: C1 2009, puno rješenje nalazi se na shortlistu.

16. Skica rješenja: za n dijeljiv s 3, postoji bojanje u tri boje (dijagonalno) koje forsira da je parnost broja žetona na svakoj boji jednaka. Kada n nije dijeljiv s 3, moguće je konstrukcijom svesti na 1×1 (ili 4) ili 2×2 slučaj, koji se riješe ručno kao baza indukcije.

Potpuno rješenje možete naći na webu Evana Chena ili po izvoru (IMO 1993, problem 3).

17. Skica rješenja: Primijetimo da ukoliko je netko forsiran igrati potez u polja označena s X u konfiguraciji ...SXXS..., tada druga osoba dobiva u potezu. Lako je pokazati da postojanje barem jednog takvog bloka prvi igrač može osigurati u drugom potezu, a kako drugi igrač igra kada je parno mnogo preostalih polja, onda će on morati igrati kada ostanu samo takvi blokovi.

Puno rješenje možete naći kao USAMO 1999 P5 ili video.

18. Neka je c broj crvenih, p broj plavih i z broj zelenih kamenčića u igri. Promotrimo razlike $c - p$, $p - z$ i $z - c$ modulo 3. Provjerom oba poteza vidimo da su razlike modulo 3 invarijante, te kako je samo razlika $p - z$ jednaka 0 modulo 3, onda je jedini mogući slučaj kada preostanu kamenčići samo jedne boje kada je ta boja crvena.

Dakle, jedina potencijalna pobjednica je Maša. **No, igra nema pobjednika jer nikad ne završava!**

Promotrimo koju strategiju Mare i Mila imaju protiv Maše: ukoliko Maše igra prvi potez na nekoj boji, tada će Mare i Mila odigrati prvi potez (nije bitno na kojim bojama), tako da se nakon ova tri poteza suma brojeva $c + p + z$ smanjila za 9. Ukoliko Maša odigra drugi potez, tada će Mare i Mila također odigrati drugi potez na druge dvije kombinacije kamenčića, tako da se nakon ova tri poteza brojevi c, p, z nisu promijenili.

Promotrimo sada zašto je ova strategija dobra, tj. zašto Maša ne može završiti igru. Dakle, primjenjujući ovu strategiju, Mare i Mila mogu osigurati da nakon Milinog poteza (tj. prije Mašinog) brojevi c, p, z pri dijeljenju s 3 daju ostatake $1, 2, 2$ redom.

Sigurno će moći odgovoriti na Mašin potez ako igra potez prve vrste jer je početni broj kamenčića 131 koji pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5, pa će Maša moći prvi tip poteza odigrati najviše $126/9 = 14$ puta, te nakon što ga Mila odigra 14. put, ostaju $(c, p, z) = (1, 2, 2)$.

Slično, raspisom tri moguće varijacije koje ostatke mod 3 mogu davati c, p, z nakon što Maša odigra neki potez druge vrste vidimo da Mare i Mila sigurno mogu osigurati da mogu poziciju vratiti u početnu (tj. da broj kamenčića neke vrste neće postati negativan). Primjera radi, neka je Mašin potez pretvorio $(1, 2, 2)$ u $(0, 1, 4)$. Tada Mare to može pretvoriti u $(2, 0, 3)$, što Mila vraća u $(1, 2, 2)$.

Dakle, u navedenoj igri nema pobjednice jer nije nužno da završi.

19. Skica rješenja: pretpostavimo da je početna pozicija gubitnička. Recimo da je Marko uzeo neki višekratnik od n kamenčića. Tada ako Tomislav uzme neki drugi višekratnik od n kamenčića u sljedećem potezu, očito je to mogao Marko napraviti odmah. Ako pak Tomislav uzme $< n$ kamenčića, treba pametno iskoristiti uvijet na $N > n^2$ preko Dirichleat, pa ćemo pokazati da Marko sa sljedećim potezom može doći u pobjedničku poziciju, čime je kontradikcija postignuta. Dakle, početna pozicija je pobjednička, pa Marko može dobiti.

Rješenje možete naći u knjizi Olympiad Combinatorics, na stranici 119. pdfa.

20. Skica rješenja: Matej želi održati sljedeće uvijete:

(prvi način)

(1) dvije susjedne posude su prazne.
(2) od preostale tri posude, dvije nesusjedne imaju manje od 1L vode ukupno.
(3) preostala posuda ima manje od 1L vode.

(drugi način)

(1) volumen vode u svake dvije nesusjedne posude je najviše 1.
(2) volumen vode u svim posude je najviše $\frac{3}{2}$.

Bez obzira koji se način koristi, moguće je pokazati rastavom na slučajeve da kako god Mislav rasporedi vodu, Matej može isprazniti dvije susjedne posude tako da ponovo vrijede uvjeti tog načina. Dalje raspisujem samo prvi način, a drugi način je raspisan na linku ispod.

Neka je X situacija nakon što je Matej ispraznio posude, a Y situacija nakon što je Mislav rasporedio vodu. Vrijedi $x_1 = x_2 = 0, x_0 + x_3 \leq 1$ i $x_4 \leq 1$. Vrijedi $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$, što posebno znači da vrijedi barem jedna od nejednakosti $y_0+y_2 \leq 1$ i $y_1+y_3 \leq 1$. Recimo da vrijedi druga. Tada Matej može isprazniti posude 0 i 4, te se pokaže da su uvijeti očuvani ($y_1 + y_3 \leq 1$ iz pretpostavke, $y_2 \leq 1$ jer je $x_2 = 0$).

Bitno je istaknuti da greedy pristup "isprazni dvije susjedne posude s najvećom količinom vode u zbroju" ili neki sličan ne vrijedi! Zašto? Promotrimo težu verziju zadatka: ako je umjesto 2L zapremnina svake posude V, za koje V Mislav može forsirati da se voda prelije nakon konačno mnogo krugova? Izgleda da Mislav može forsirati da se voda prelije za sve $V < 2$, a dokaz se nalazi na linku ispod.

Konkretno, Mislav može u svakom svojem krugu rasporediti vodu tako da sve posude imaju istu količinu vode u sebi. Tako može doći do neke situacije u kojoj sve posude imaju $\frac{1}{2} - \epsilon$ vode u sebi, za neki mali ϵ. Tada Matej izlije vodu iz neke dvije, a ostale ostavi. Tada Mislav može u postići da količina vode u posudama postane $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon, 0, 0) + (0, \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}, \frac{3}{4} + \epsilon, 0) \to (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{3}{2} - \epsilon, 0)$. Sada Matej isprazni dvije srednje posude - ovdje se greedy pristup nažalost raspada. U sljedećem potezu Mislav rasporedi vodu tako da u preostale dvije posude bude po $\frac{9}{8} - \epsilon$ vode, a kako Matej ne može isprazniti obje posude u jednom potezu, u sljedećem potezu će ona posuda koju ne isprazni imati $\frac{17}{8} - \epsilon > 2$ vode.

Puno rješenje i postupak također je dostupno u sklopu službenog rješenja na shortlistu C5 2009.

23.2. G7: Boris Stanković - Geometrija ne mora biti bauk

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Balkan MO 2020 P1
2. MEMO 2018 I-2
3. IMO SL 2021 G1
4. HMO 2014 IMO TEST
5. HMO 2012 2. dan, analizirajte detaljno oba rješenja
6. IMO 2020 SL G3
7. BMO 2019 P3, analizirati različita rješenja
8. BH matematička olimpijada 2018. 1. zadatak
9. Srbija IMO TST 2022
10. IMO SL 2021 G4
11. IMO SL 2014 G3
12. IMO 2023 P2
13. IMO 2019 P2
14. IMO 2012 P5
15. IMO 2015 P3

23.3. A7: Ivan Novak - Algebra mix

Predavanje Hintovi Rješenja

1. IMO 2023, P1
2. EGMO 2023, P1
3. APMO 2003, P1
4. BxMO 2023, P1
5. HMO 2023., 1. dan, 1. zadatak.
6. Romania EGMO TST 2022, P1
7. 2. ELMO, 1. zadatak

23.4. N7: Borna Banjanin - Lema o podizanju eksponenata

Predavanje Hintovi Rješenja

1. LTE na taj broj.

2. link

3. link

4. link

5. Rastavimo na 2 slučaja, ovisno o parnosti od n. Za neparni n dobijemo kontradikciju.

6. Ako vrijedi $p \mid a$ i $p \mid b$, tada vrijedi i $p^3 \mid a^3 + b^3$. U suprotnom p ne dijeli a, pa onda ne dijeli ni b te su za $n = 3$ zadovoljene pretpostavke tvrdnje 2. LTE-a i imamo

$$v_p(a^3 + b^3) = v_p(a + b) + v_p(3) = v_p(a + b).$$

Zbog uvjeta zadatka je $v_p(a^3 + b^3) \geq 2$, pa iz gornje jednakosti slijedi $v_p(a + b) \geq 2$, što je i trebalo pokazati.

7. Kako izraz $5^a + 1$ mora biti djeljiv s 3, nemoguće je da a bude paran jer bi to značilo $5^a + 1 \equiv (-1)^a + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Dakle a je neparan te iz tvrdnje 2 LTE-a slijedi

$$v_3(5^a + 1) = v_3(5 + 1) + v_3(a) = 1 + v_3(a).$$

Neka je $a = 3^r s$ za neke $r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ takve da s nije djeljiv s 3, odnosno $v_3(a) = r$. Kako $3^a \mid 5^a + 1$, imamo da vrijedi

$$v_3(3^a) \leq v_3(5^a + 1) \implies a \leq v_3(a) + 1 = r + 1 \implies 3^r s \leq r + 1.$$

Sada je lako matematičkom indukcijom pokazati da vrijedi $3^r > r + 1$ za svaki $r \geq 1$, što znači da je jedino rješenje $(r, s) = (0, 1) \implies a = 1$.

8. LTE Handout problem 1.2.2.

9. LTE Handout problem 1.2.6.

10. IMO 2022 P5

11. link

12. CHINA TST 2016

IV. Natjecanja na Ljetnom kampu

24. Natjecanja

24.1. O natjecanjima

Kao i svake godine, tijekom Ljetnog kampa sudionici su se imali prilike i natjecati iz matematike.

Članovi hrvatskog MEMO tima imali priliku simulirati i individualno i ekipno natjecanje koje ih je čekalo na MEMO-u, za što smo sigurni da im je dobro došlo jer su se iz Slovačke vratili s tri srebra, broncom i dvije pohvale! Velike čestitke MEMO ekipi!

Kao i inače, jedno poslijepodne Kampa održala su se natjecanja Reli i ELMO.

Reli je već tradicionalno ekipno natjecanje u kojem timovi od četiri do pet učenika raznih uzrasta i predznanja imaju priliku rješavati između šest i devet zadataka iz svakog od četiri glavna područja olimpijske matematike.
Ove godine najbolje rezultate ostvarile su ekipe:

1. Dane? – s osvojenih 213 bodova!
2. Prvi tim – s osvojenih 192 boda!
3. Plavi Lamborghini – s osvojenih 187 bodova!

Svim sudionicima velike čestitke jer su svi timovi bili jako blizu i svi su uspjeli riješiti barem nešto!

ELMO (Ekstremno loša matematička olimpijada) je pojedinačno natjecanje na kojem natjecatelji rješavaju test od pet olimpijskih zadataka sličnih zadacima na državnim natjecanjima. Ove godine prvo mjesto podijelili su David Lang i Fabijan Cikač s po 25 bodova. Drugu nagradu osvojili su Adrian Grbac Lacković s 23 boda, Nina Šušić s 21 bodom, te Andrej Krčmar i Barbara Kelava s po 19 bodova. Za treću nagradu bilo je dovoljno 10 bodova, a natjecanju je pristupilo sveukupno 23 sudionika.

Također, na poticaj učenika Kristijana Šimovića održan je i prvi KFMO (Kristijanova funkcijska matematička olimpijada)! Kristijan je sam osmislio zadatke, a natjecanju su mogli pristupiti svi koji su htjeli, što je uključilo i neke mentore (koji nisu bili preblizu punim bodovima!). Najbolje rezultate ostvarili su David Lang s 39 bodova, Val Karan i Jurica Špoljar s po 37 bodova te mentor Vedran Cifrek s 35 bodova. Natjecanju je pristupilo sveukupno 11 sudionika.

U nastavku donosimo zadatke i rješenja ovogodišnjih ELMO-a i KFMO-a.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

8. Ekstremno loša matematička olimpijada
Kaštela, 13. kolovoza 2023.

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svaki trokut dužinama podijeliti na n trokuta koji su svi slični početnom trokutu.

2. Neka su n i k relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $n > k > 2$, te pretpostavimo da

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \quad \text{dijeli} \quad \left\lfloor \frac{n^2}{k^2} \right\rfloor.$$

Dokaži da je $n < k^2$.

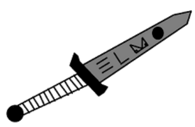
Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$.

3. Za prirodan broj n, označimo sa p_n n-ti najmanji prosti broj, te označimo $p_0 = 1$.
Marin i Varivoda igraju igru. Na početku, Marin na svom papiriću ima zapisan broj 2023, a Varivoda broj 2024. U svakom potezu, oba igrača istovremeno čine neku dozvoljenu transformaciju po vlastitom izboru, gdje je dozvoljena transformacija zamjena broja k sa papirića brojem $k \cdot \frac{p_i}{p_{i+1}}$ ili brojem $k \cdot \frac{p_{i+1}}{p_i}$ za neki $i \geq 0$. Može li se dogoditi da je nakon nekoliko poteza omjer broja na Marinovom papiriću i broja na Varivodinom papiriću jednak 2025?

4. Neka je ABC raznostraničan šiljastokutan trokut i neka je D točka unutar trokuta ABC na simetrali kuta $\angle BAC$. Neka je ℓ pravac paralelan s BC koji prolazi kroz D. Neka su E, F sjecišta ℓ sa AB, AC redom. Neka su X, Y redom druga sjecišta pravaca CD i BD s kružnicama opisanim trokutima ADE i ADF. Neka su A', X', Y' redom refleksije točaka A, X, Y preko simetrale $\overline{\mathrm{BC}}$. Dokaži da se pravci $A'D, X'F, Y'E$ sijeku u jednoj točki.

5. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$|xf(x) - yf(y)| \leq (10^9 + 7)|x - y|.$$



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

24.2.1. Rješenja

Zadatak 1. (Folklor)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svaki trokut dužinama podijeliti na n trokuta koji su svi slični početnom trokutu.

Rješenje.

Odgovor su svi prirodni brojevi osim $2, 3$ i 5

Prvo ćemo dokazati da $2, 3, 5$ ne rade, pokazat ćemo da se jednakostranični trokut ne može podijeliti na traženi način. Za $n = 2$ ta dužina ne smije prolaziti ni kroz jedan vrh trokuta jer bi tad jedan od kuteva bio manji od $60°$, što je nemoguće. Za $n = 3$ pogledajmo svaki vrh početnog trokuta: svaki od njih mora biti u zasebnom trokutu, a to je nemoguće (takvim trokutima se ne može pokriti cijeli početni trokut). Za $n = 5$ ponovno dobijamo 3 trokuta koja sadrže vrhove početnog trokuta: pogledajmo onaj dio početnog trokuta koji nije pokriven. Ako je taj lik trokut, on je nužno jednakostraničan pa se ne može podijeliti na 2 manja takva. Ako taj lik ima više od 4 vrha, ne možemo ga podijeliti u 2 trokuta (triangulacija). Ako je taj lik četverokut, on je $60°$-$120°$ trapez, te je jedini način za podjelu na 2 trokuta povlačenjem dijagonale, a to je nemoguće jer će dijagonala napraviti kut manji od $60°$, što je kontradikcija.

Za $n = 4$ možemo dobiti srednjicama, $n = 6$ dobijemo tako da odrežemo gornji trokut s koeficijentom $\frac{2}{3}$ a u donjoj pruzi podijelimo na 5 zigzag trokuta paralelama s bočnim stranicama. Za $n = 8$ radimo istu stvar samo s gornjim trokutom koji ima koeficijent sličnosti $\frac{3}{4}$. Kao korak sa n na $n + 3$ u konstrukciji za n uzmimo proizvoljan manji trokut i podijelimo ga na 4 dijela kako je iznad opisano. Zaista se vidi da to pokriva sve na početku istaknute brojeve čime je dokaz gotov.

Zadatak 2. (Ivan Novak)

Neka su n i k relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $n > k > 2$, te pretpostavimo da

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \quad \text{dijeli} \quad \left\lfloor \frac{n^2}{k^2} \right\rfloor .$$

Dokaži da je $n < k^2$.

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$.

Rješenje.

Neka je $n = ak + b$ gdje je $0 \leq b < k$ cijeli broj. Dovoljno je dokazati da je $a < k$.
Tada je $\lfloor n/k \rfloor = a$ i $\lfloor n^2/k^2 \rfloor = a^2 + \lfloor (2akb + b^2)/k^2 \rfloor$, te uvjet djeljivosti prelazi u

$$a \mid a^2 + \left\lfloor \frac{2akb + b^2}{k^2} \right\rfloor ,$$

što je ekvivalentno s

$$a \mid \left\lfloor \frac{2akb + b^2}{k^2} \right\rfloor .$$

Kako je $b \leq k - 1$, onda je $2akb + b^2 \leq 2ak(k - 1) + (k - 1)^2 < (2a + 1)k^2$, pa je desna strana u novom uvjetu djeljivosti najviše $2a$, pa mora biti jednaka ili a ili $2a$.
Ako je jednako $2a$, onda imamo $2akb + b^2 \geq 2ak^2$, ali onda je

$$a \leq \frac{b^2}{2k(k - b)} \leq \frac{(k - 1)^2}{2k} < k,$$

i u ovom slučaju smo gotovi.

Ako je jednako a, onda imamo

$$ak^2 \leq 2akb + b^2 < ak^2 + k^2.$$

Primijetimo da ne može biti $2b = k$ jer su b i k relativno prosti.
Ako je $2b > k$, onda je $2b \geq k + 1$. Promotrimo onda desnu nejednakost. Vrijedi

$$ak \leq ak(2b - k) < k^2 - b^2 < k^2,$$

iz čega slijedi tvrdnja.
Ako je $2b < k$, onda promotrimo lijevu nejednakost. Vrijedi

$$ak \leq ak(k - 2b) \leq b^2 < k^2,$$

iz čega opet slijedi tvrdnja.

Zadatak 3. (Namik Agić)

Za prirodan broj n, označimo sa p_n n-ti najmanji prosti broj, te označimo $p_0 = 1$.
Marin i Varivoda igraju igru. Na početku, Marin na svom papiriću ima zapisan broj 2023, a Varivoda broj 2024. U svakom potezu, oba igrača istovremeno čine neku dozvoljenu transformaciju po vlastitom izboru, gdje je dozvoljena transformacija zamjena broja k sa papirića brojem $k \cdot \frac{p_i}{p_{i+1}}$ ili brojem $k \cdot \frac{p_{i+1}}{p_i}$ za neki $i \geq 0$. Može li se dogoditi da je nakon nekoliko poteza omjer broja na Marinovom papiriću i broja na Varivodinom papiriću jednak 2025?

Rješenje.

Za prirodni broj n definirajmo:

$$f(n) = \sum_{i \geq 1} (i \cdot v_{p_i}(n))$$

Ono što vrijedi iz definicije operacije je činjenica da se svakim potezom $f(n)$ mijenja za točno 1 za svakog od igrača. Na početku vrijedi $f(2023) = 4 + 2 * 7 = 18$, dok $f(2024) = 3 + 5 + 9 = 17$. To u kombinaciji s zaključkom iznad daje da će u svakom trenutku vrijednosti koje f vraća za Marinov i Varivodin broj imati različitu parnost. Međutim, f je potpuno multiplikativna (lagano se provjeri), pa kad bi kvocijent nekad bio 2025, uz oznake M, V za tadašnji Marinov i Varivodin broj redom, vrijedilo bi (do na predznak):

$$f(M) - f(V) = f(2025) = 2f(45)$$

, što je parno, a to je kontradikcija s obzervacijom iznad.

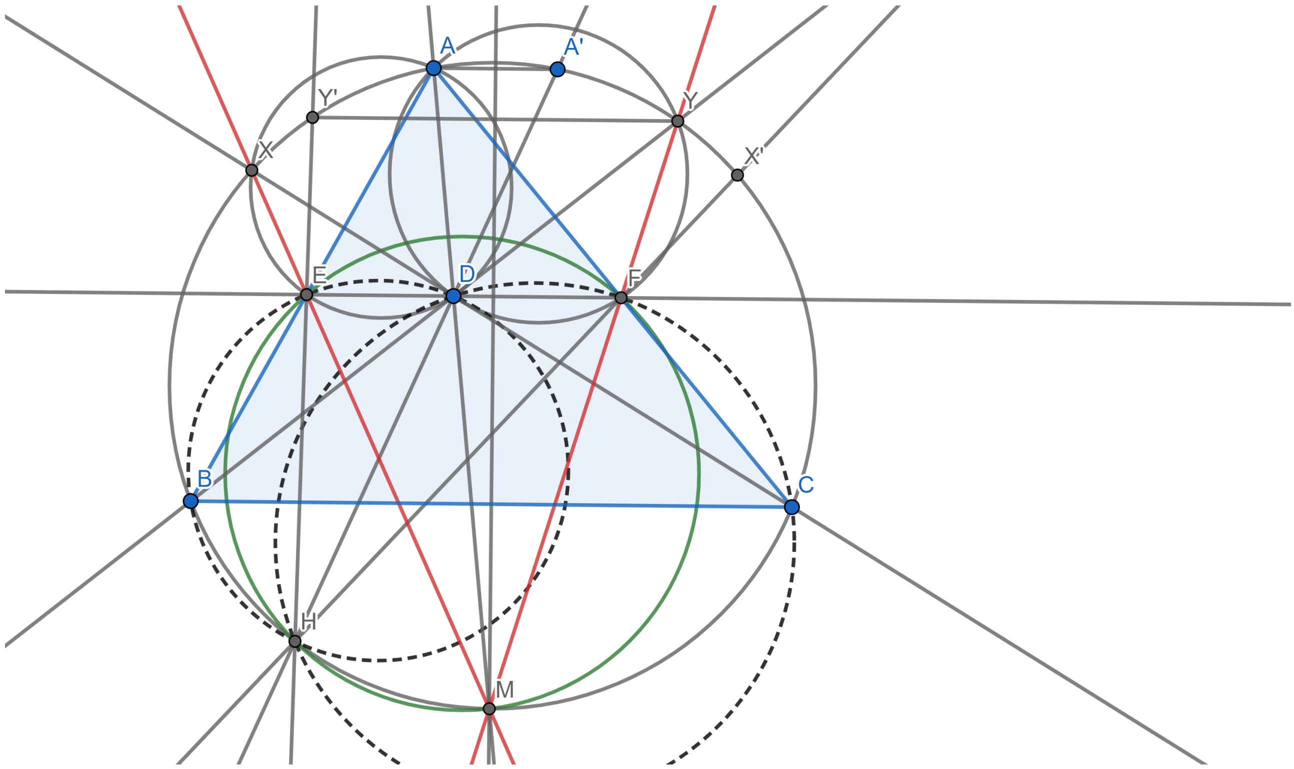
Zadatak 4. (Janko Bušelić)

Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut i neka je D točka unutar trokuta ABC na simetrali kuta BAC. Neka je l pravac paralelan s BC koji prolazi kroz D. Neka su E, F sjecišta l sa AB, AC redom. Neka su X, Y druga sjecišta pravaca CD i BD s kružnicama (ADE) i (ADF). Neka su A', X', Y' redom refleksije A, X, Y preko simetrale $\overline{\mathrm{BC}}$. Dokaži da se pravci $A'D, X'F, Y'E$ sijeku u jednoj točki.

Rješenje.

Neka je $H = Y'E \cap X'F$. Dokazat ćemo da pravac HD prolazi kroz A'. Neka je ω opisana kružnica $\triangle ABC$. Neka je M polovište luka BC kružnice ω koji ne sadrži A.
Tvrdnja 1.: X, Y su na ω i $XE \cap YF$ je točka M.
$\angle AED = \angle AXD = \angle BAC$ pa je X na ω, analogno dobijemo isto za Y.
$\angle MXC = \angle CAM = \angle MAB = \angle DXE$. Pa su $X - E - M$ kolinearne, analogno dobijemo $Y - E - M$ kolinearane.
Sad imamo da i X', Y', A' leže na ω.
Tvrdnja 2.: H je na ω i na (EMF).
Ako je H_1 drugi presjek $Y'E$ sa ω, H_2 drugi presjek $X'F$ sa ω imamo da je H_1EFM tetivan zbog $\angle EFM + \angle EH_1M = \angle Y'YM + \angle EH_1M = 180$ isto tako dobijemo da je H_2EFM tetivan što znači da je H na ω i na (EFM)

Tvrdnja 3. : Drugo sjecište (DEB) i (DFC) je H
Neka je H' to drugo sjecište. $\angle BH'D + \angle CH'D = \angle BED + \angle CFD = 180 - \angle BAC$ pa je H' na ω. Ali onda $\angle EH'F = \angle EMF$ jer $Y'X' = XY$. pa je H' i na (EFM) pa $H' = H$
Sad imamo $\angle Y'HA' = \angle ABY$ jer $A'Y' = AY$, ali $\angle ABY = \angle EHD$ jer je $EDBH$ tetivan pa su $H - D - A'$ kolinearne.



Zadatak 5. (Borna Šimić)

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$|xf(x) - yf(y)| \leq (10^9 + 7)|x - y|.$$

Rješenje. *Za javnost priredio Ivan Novak*

Dokazat ćemo da je $f(x)$ nužno konstantna. Neka je $M = 10^9 + 7$.
Neka je $x > 0$ zadan. Dokazat ćemo da postoji $c > 0$ takav da je $f(x) = f(x + d)$ za svaki $d < c$.
Pretpostavimo da je $f(x + d) \neq f(x)$ za neki $d > 0$.

Imamo

$$\begin{aligned} |(x+d)f(x+d) - xf(x)| &= |(x+d)(f(x+d) - f(x)) + df(x)| \\ &\geq (x+d)|f(x+d) - f(x)| - df(x) \\ &\geq x - df(x). \end{aligned}$$

Dakle, $x - df(x) \leq Md$, odnosno $d \geq \frac{x}{M+f(x)}$. Dakle, za svaki $d < \frac{x}{M+f(x)}$ vrijedi $f(x) = f(x + d)$. Ako sad krenemo od proizvoljnog x_0 i definiramo aritmetički niz $(x_i)_i$ sa $x_{i+1} = x_i + \frac{x_0}{2(M+f(x_0))}$, induktivno dobivamo da je f konstanta (jednaka $f(x_0)$) na segmentima $[x_i, x_{i+1}]$. Kako je x_i aritmetički niz, tim segmentima pokrivamo cijeli $[x_0, +\infty)$, pa je $f(x) = f(x_0)$ za svaki $x > x_0$. Kako je x_0 bio proizvoljan, slijedi da je f konstantna.

Lako se vidi da sve konstantne funkcije $f(x) = c$ za $c \leq 10^9 + 7$ zadovoljavaju uvjet zadatka, a ostale konstantne funkcije ga ne zadovoljavaju.

1. Kristijanova funkcijska matematička olimpijada

Kaštela, 14. kolovoza 2023.

1. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f(x) + xf(1-x) = 2x^2 - 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da:

$$f\left(\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)} - x^2\right) = 0, \quad \forall x \neq 0$$

3. Neka je $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ te neka $f^n(x)$ označava f primijenjenu na sebe n puta ($f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x)), \ldots$), odnosno $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$.

Nađite sva rješenja funkcijske jednadžbe

$$f^{\lfloor x \rfloor}(x) + f^{\lfloor y \rfloor}(y) = f(x + 2y) - y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$.

4. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka vrijedi:

(a)

$$f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) f je neprekidna funkcija

(c) postoji jedinstveni $a \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\lfloor f(a) \rfloor = \lfloor a \rfloor$$

Odredite sve realne brojeve a za koje takva funkcija postoji te odredite koliko takvih funkcija postoji.

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$.

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da:

$$f(a^2) + f(b^2) + f(c^2) = (f(a+b) + f(b+c) + f(a+c))\, f(a+b+c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

24.3.1. Rješenja

1. Uočavamo da je $1-(1-x)=x$ te umjesto svakog x uvrštavamo $1-x$. Dobivamo jednadžbu

$$f(1-x)+(1-x)f(x)=2x^2-2$$

Promatrajmo ovu jednadžbu i početnu.

$$f(x)+xf(1-x)=2x^2-4x$$

$$f(1-x)+(1-x)f(x)=2x^2-2$$

Dobili smo sustav jednadžbi za $f(x)$ i $f(1-x)$. Pomnožimo drugu jednadžbu s $-x$ i zbrojimo s prvom.

$$f(x)+(x^2-x)f(x)=-2x^3+2x^2-2x$$

$$(x^2-x+1)f(x)=(-2x)(x^2-x+1)$$

Kako je $x^2-x+1\neq 0$ za sve realne x možemo podijeliti jednadžbu s tim te dobivamo $f(x)=-2x$. Uvrštavanjem se lako vidi da to je rješenje.

2. Promatramo li argument funkcije f uočavamo da

$$f\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0,\quad \forall x\neq 0$$

ali znamo da funkcija f ima nultočku prema zadanoj jednadžbi. Dakle, $x=0$ je jedina nultočka funkcije f. To također znači da argument u zadanoj funkcijskoj jednadžbi mora biti 0.

$$\frac{x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}-x^2=0$$

$$\implies f(x)=x,\quad \forall x\neq 0$$

A kako je $f(0)=0$ tada je $f(x)=x\,(\forall x\in\mathbb{R})$ jedino rješenje. Uvrštavanjem se lako provjeri da to zaista je rješenje.

3. Primijetimo da za $x\in[0,1)$ vrijedi $f^{\lfloor x\rfloor}(x)=f^0(x)=x$. Uvrstimo li $x,y\in[0,1)$ u jednadžbu dobivamo:

$$x+y=f(x+2y)-y \iff f(x+2y)=x+2y$$

$$\implies 0\leq f(x+2y)<1+2\cdot 1=3,\quad \forall x,y\in[0,1)$$

Dakle, funkcija f je omeđena na intervalu $[0,1)$.

Uvrstimo $y=0$ i dobijemo

$$f^{\lfloor x\rfloor}(x)=f(x)$$

Uvrstimo $x=0$ i dobijemo

$$f^{\lfloor y\rfloor}(y)=f(2y)-y$$

Uvrštavamo to natrag u početnu jednadžbu te dobivamo

$$f(x)+f(2y)-y=f(x+2y)-y \iff f(x)+f(2y)=f(x+2y)$$

Ovo je Cauchyeva funkcijska jednadžba, a kako je funkcija omeđena na nekom intervalu znamo da su jedina rješenja oblika $f(x)=ax, a\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ako uzmemo $x,y\in[0,1)$ lako vidimo da jedino $a=1$ zadovoljava početnu jednadžbu. Uvrštavanjem $f(x)=x$ vidimo da je to rješenje jednadžbe.

4. Iz svojstva (a) dobivamo da je f jednak svojemu inverzu pa znamo da je bijekcija. Poznato je da je inverz funkcije njezina refleksija preko $y = x$ pravca. Zbog svojstva (c) ne može vrijediti $f(x) = x$ za svaki x. To znači da postoji točka ispod/iznad pravca $y = x$, a kako je f jednak svome inverzu, refleksija te točke preko istog pravca će biti vrijednost funckije. Kako je dio funkcija iznad, a drugi ispod pravca $y = x$, f će se siječi s njime i u toj točki će biti

$$f(k) = k$$

Primijetimo da ta fiksna točka zadovoljava (c) pa je $k = a$ odnosno za a iz (c) uvjeta vrijedi

$$f(a) = a$$

Dokazat ćemo da je nužno $a \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \notin \mathbb{Z}$. Tada će zbog neprekidnosti postojati po apsolutnoj vrijednosti dovoljno mali ε za koji

$$\lfloor f(a+\varepsilon) \rfloor = \lfloor f(a) \rfloor$$

jer $a + \varepsilon \notin \mathbb{Z}$

$$\lfloor a+\varepsilon \rfloor = \lfloor a \rfloor = \lfloor f(a) \rfloor = \lfloor f(a+\varepsilon) \rfloor$$

što je u kontradikciji sa (c) da postoji točno jedan takav broj. Tvrdimo da za sve $a \in \mathbb{Z}$ nužno postoji funkcija koja zadovoljava uvjete zadatka. Promatrajmo funkciju $f(x) = 2a - x$ Ona trivijalno zadovoljava prva dva uvjeta samo nam ostaje pokazati da jednadžba

$$\lfloor 2a - x \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

ima samo jedno rješenje.

$x = a$ je očito rješenje te rastavljanjem na dva slučaja $x > a$ i $x < a$ lako vidimo da nema drugih rješenja.

5. Označimo jednadžbu s $P(a, b, c)$

$P(0, 0, 0)$:

$$f(0) = f(0)^2$$

1. slučaj: $f(0) = 0$:

$P(a, 0, 0)$:

$$f(a^2) = 2f(a)^2$$

$P(a, -a, 0)$:

$$f(a^2) = 0$$

Kada te dvije jednakosti spojimo dobijemo

$$f(a) = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$$

što je jedno rješenje.

2. slučaj: $f(0) = 1$:

$P(a, a, a)$:

$$f(a^2) = f(2a)f(3a)$$

$P(a, a, 0)$:

$$2f(a^2) + 1 = (f(2a) + 2f(a))f(2a)$$

Kad prvu jednadžbu supstituiramo u drugu dobijemo:

$$2f(2a)f(3a) + 1 = (f(2a) + 2f(a))f(2a)$$

Lagano se provjeri da $f(2a) \neq 0$. Jednadžba je djeljiva s $f(2a)$ pa zaključujemo da $f(2a)$ dijeli 1 odnosno $f(2a) \in \{-1, 1\}$ Ako to uvrstimo u drugu jednadžbu dobijemo

$$f(a^2) = f(a)f(2a)$$

To možemo iskoristiti u $P(a, a, -a)$:

$$3f(a^2) = (f(2a) + 2)f(a) = f(2a)f(a) + 2f(a) = f(a^2) + 2f(a)$$

$$f(a^2) = f(a)$$

$P(a, 0, 0)$:

$$f(a^2) + 2 = (2f(a) + 1)f(a)$$

$$f(a)^2 = 1$$

Koristeći $f(a^2) = f(a)f(2a)$ i $f(a^2) = f(a)$ dobijemo $f(2a) = 1$.

Ostaje nam naći vrijednost funkcije za neparne brojeve. Ako za neki neparni n vrijedi $f(n) = 1$, uvrštavanjem $P(n, 2, 0)$ dobije se $f(n+2) = 1$ te uvrštavanjem $P(n, -2, 0)$ se dobije $f(n-2) = 1$ te induktivno

$$f(a) = 1, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Ako je $f(n) = -1$ gdje je n neparan, rješenje će biti

$$f(a) = (-1)^a$$

Uvrštavanjem se provjeri da sva tri rješenja rade.

V. Projekti na Ljetnom kampu

25. Projekti

25.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 3 do 9 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz nekoliko popodneva detaljnije odabranu temu. Na ovogodišnjem je Kampu bilo ponuđeno sveukupno 10 projekata. Osim toga, za MEMO grupu su se paralelno održavala i natjecateljska predavanja.
Većina projekata može se svrstati u neku od sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema, a što su naučili na projektima možete pročitati u nastavku!

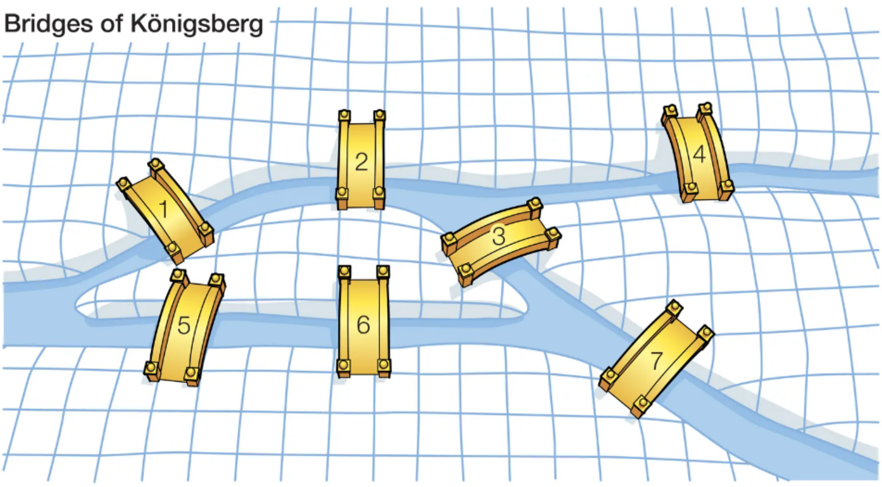
25.2. Popis projekata na ovom Ljetnom kampu

25.2.1. Fleksagoni

Vrsta: primjena **Mentori:** Borna Banjanin i Lucija Relić

Fleksagoni su više-dimenzionalni modeli konstruirani od papira na način da se nova lica otkrivaju pokretima okretanja i presavijanja tzv. fleksanja. No, ovaj projekt nije bio samo o presavijanju papira, nego smo se upoznali s temama iz teorija grafova, funkcija i grupa.

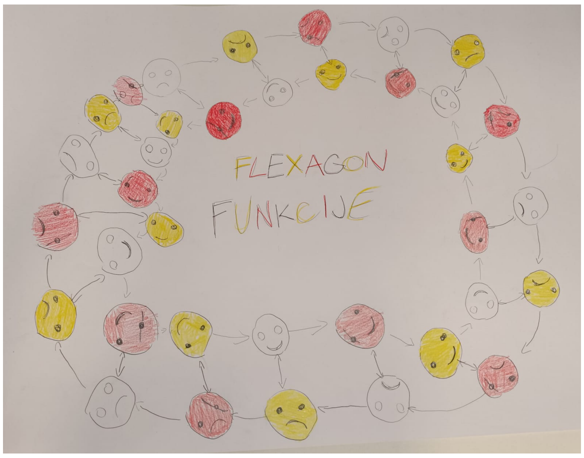
Za početak smo rješavali natjecateljske zadatke na temu teorije grafova, a prije toga smo proučavali zagonetku "Sedam mostova Kalinjingrada."



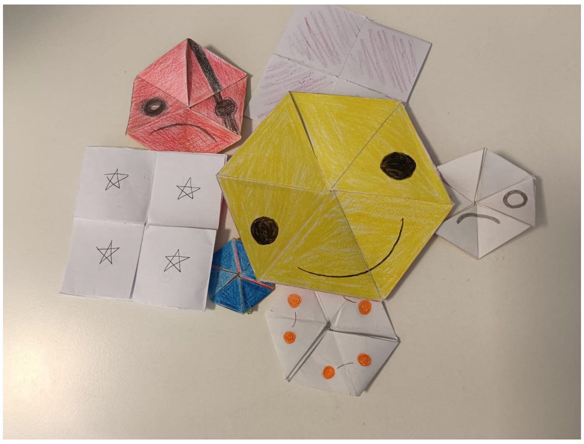
Kroz to smo naučili koji su uvjeti da graf ima Eulerov put, tj. da se može proći kroz njega tako da se ni jedan brid ne posjeti dvaput. Nakon toga, započeli smo temu funkcija. Učili smo kako se funkcijom informacije prenose iz domene u kodomenu. Kroz fleksagone se isto mogu objasniti kompozicije kao niz pokreta nad fleksagonom. Također pomoću crtanja funkcija u koordinatni sustav, naučili smo što su injekcija, surjekcija i bijekcija. Konačno, zadnje od novih tema koje smo obradili bile su grupe.

Grupe su skupovi povezani nekom operacijom. Najjednostavniji primjer su cijeli brojevi sa zbrajanjem, a za fleksagon to su pokreti koji radimo da mijenjamo lica. Na svoje fleksagone nacrtali smo lica tako da sa jedne strane uvijek bude sretno, a s druge strane tužno. Brzo se primijeti da se fleksanjem fleksagona bez da ga okrenemo emocija lica ne mjenja, nego promjeni se tek kad okrenemo i nastavimo.

Sve ove tri teme smo povezali kad smo napravili fleksagone i nacrtali graf koji opisuje sve pokrete i ishode koje možemo napraviti s njima. Nakon osamnaest fleksanja za redom vratimo se na početak, stvarajući ciklus. Radili smo i mnoge druge vrste fleksagona, ne samo heksagone sa tri lica.



Slika 25.1: Graf gusarskih fleksagona



Slika 25.2: Neki od fleksagona koje smo napravili

25.2.2. MMUM i ja

Vrsta: primjena **Mentori:** Matej Vojvodić i Patricija Dovijanić

Na ovogodišnjem matematičkom kampu održan je projekt *Matematičko modeliranje u Mafiji*. Naime, Mafija je popularna društvena igra u kojoj su sudionicima podijeljene uloge, najčešće mafije i civila, te kako bi razotkrili identitet mafije, civili moraju surađivati i vjerovati u sebe i druge. Tijekom slobodnog vremena na kampu, uvijek se može pronaći netko od učenika, pa čak i mentora, koji igraju tu igru.

Na početku smo uveli neke pojmove iz područja vjerojatnosti, kako bismo ih tijekom sljedećih nekoliko dana projekta iskoristili za postavljanje matematičkog modela igre Mafije. Cilj modela je analizirati razne situacije do kojih može doći u jednoj igri te što točnije odrediti vjerojatnost pobjede civila s obzirom na broj ostalih uloga u igri, a tako i odrediti optimalan broj mafije na početku igre. Baza našeg modela je tzv. "*Fakat rendom teorem*" koji glasi:

Teorem 25.2.1: Fakat rendom teorem

Ne postoji bolja od nasumične strategije ni za civile ni za mafiju.

U svrhu određivanja vjerojatnosti pobjede civila u igri te, u kasnijim stadijima projekta, uvođenja drugih u praksi čestih uloga (npr. policajac, doktor i sl.) definirali smo sljedeću formulu:

Lema 25.2.2: Osnovna funkcija vjerojatnosti u Mafiji

Vjerojatnost pobjede civila u konfiguraciji igre s n igrača od kojih je m mafije:

$$\mathbb{P}(C,(n,m)) = \begin{cases} 1 & \text{za } m = 0 \\ 0 & \text{za } n \leq 2m \\ \frac{m}{n}\,\mathbb{P}(C,(n-2,m-1)) + \frac{n-m}{n}\,\mathbb{P}(C,(n-2,m)) & \text{inače} \end{cases}$$

Promatranjem šanse za pobjedu civila u određenim konfiguracijama igre primijetili smo da je ona viša kada u igri sudjeluje neparan broj igrača. Ova konstatacija inspirirala je *Teorem o paljenju*:

Teorem 25.2.3: Teorem o paljenju

$$\mathbb{P}\left(C,(n,m)\right) \leq \mathbb{P}\left(C,(n-1,m)\right) \iff n \text{ je paran}$$

Korolar 25.2.4: Pravilo paljenja

Trebamo paliti ako i samo ako je razlika broja civila i mafije neparna.

Zbog jednostavnosti doktorova utjecaja na igru, on je bio prva dodatna uloga koju smo detaljno proučili s krajnjim ciljem potpune integracije u model. Nakon dugotrajnog, intenzivnog i mukotrpnog proučavanja izveli smo "*Teorem o sebičnom doktoru*":

Teorem 25.2.5: Teorem o sebičnom doktoru

Doktor najviše pomaže civilima ako liječi samo sebe.

Također smo otkrili optimalnu strategiju za igranje uloge policajca.

Teorem 25.2.6: Teorem o suicidalnom policajcu

Policajac bi trebao ostati skriven broj krugova koji otprilike iznosi

$$n\sqrt{\eta}$$

gdje je n ukupan broj igrača, a $\eta = \frac{m}{n}$, tj. omjer mafije i igrača na početku igre.
U slučaju da je policajac ubijen prije no što je vrijeme da se otkrije, civili bi se trebali predati.
Inače, policajac se treba raskrinkati, napraviti listu sigurnih civila i tražiti da ga se spali.

Kad smo bili zadovoljni našim modelom, odlučili smo ga iskoristiti kako bismo konstruirali optimalni omjer svih podijeljenih uloga. Dapače, nismo se zaustavili ovdje, nego smo, svi željni novoga znanja, uveli limese kako bismo proučavali ponašanje beskonačno velike igre mafije pod pažnjom i budnim okom naših odraslih mentora. Analizom funkcije vjerojatnosti u Mafiji iz 25.2.2, primijetili smo da se broj mafije s obzirom na broj civila u "poštenim" igrama ponaša slično kao funkcija $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Također smo uočili kako dodavanje policajca u igru transformira to u linearnu funkciju $\frac{1}{\pi}$, što možemo aproksimirati na $\frac{1}{3}$ za praktične svrhe. ☺

Teorem 25.2.7: Pošteni udio mafije

Pošteni (tj. i mafija i civili imaju jednaku šansu pobijediti) udio mafije na početku igre bez policajca je $\frac{\sqrt{n}}{2}$, a u igri s policajcem $\frac{1}{\pi} \sim \frac{1}{3}$.

Napokon, svoja saznanja uveli smo u praksu odigravši jednu igru Mafije. Za svoj ogroman trud tijekom projekta bili smo nagrađeni gracioznom pobjedom civila u super napetoj igri sa savršeno uravnoteženim udjelom svih uloga.

25.2.3. Komba

Vrsta: natjecateljski **Mentori:** Andrija Tomorad, Paula Horvat i Mislav Brnetić

Projekt kombinatorika natjecateljski je projekt u kojem su se obrađivale teme iz teorija grafova i prebrojavanja. Jedan od ciljeva projekta bio je upoznati se sa osnovnim pojmovima iz teorije grafova, kao što su planaran graf, stupanj vrha, ciklus, stablo, Eulerov put...
Nakon toga smo se bavili prebrojavanjima. Izveli smo neke osnovne principe prebrojavanja, poput pravila produkta i pravila zbroja. Nakon toga smo dokazivali neke kombinatorne identitete tako što bismo neki skup prebrojali na dva načina.

25.2.4. Teorija brojeva

Vrsta: natjecateljski **Mentor:** Vedran Cifrek

Dokazali smo neke osnovne tvrdnje iz teorije brojeva kao što su Teorem o dijeljenju s ostatkom, Bezuotova lema i Osnovni teorem aritmetike. Pomoću njih smo dokazali osnovna svojstva relacije dijeli, kongruencija i najvećeg zajedničkoj djelitelja koja smo primjenjivali u zadacima raznih težina. Unatoč tome što ju je jako jednostavno dokazati, tvrdnja da ako $x \mid y$ onda je $y = 0$ ili $|x| \leq |y|$ se pokazala vrlo korisna.

25.2.5. Kako zasaditi polje

Vrsta: fakultetski **Mentori:** Mislav Plavac i Ivan Premuš

Krenuli smo od osnovnih definicija i aksioma s uređenim parom i Kartezijevim produktom. Zatim smo definirali binarnu relaciju te njena svojstva: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost. Definirali totalni i parcijalni uređaj te gornju među, supremum i infimum skupa. Korijenizdva. Spomenuli smo Peanove aksiome i Dedekindove rezove. Kroz većinu nas je zadataka vodilo 15 Božjih zapovijedi čijih je prvih pet sastavio Abel prije nego što ga je buraz izbacio iz egzistencije. Ako želite potpuno urediti polje savjetujemo vam da se poslužite 15. aksiomom AKA aksiomom potpunosti. Spoznali smo rješenja jednakosti x+x=0. Arhimed nas je naučio da za svaki realni broj postoji prirodan broj koji je od njega veći, a Cantor nešto kompliciranije o ugniježđenim segmentima. Na kraju smo dokazali da ako skup ima gornju među, a uzmemo da vrijedi Arhimedov i Cantorov aksiom, onda ima i supremum, tj. vrijedi 15. aksiom. Time dokazujemo da je ovo najbolji projekt na Kampu. Q.E.D.

25.2.6. Višedimenzionalna kombinatorna geometrija

Vrsta: fakultetski/natjecateljski **Mentori:** Emanuel Tukač i Simeon Stefanović

Na ovom smo se projektu upoznali s konceptima iz višedimenzionalne kombinatorne geometrije, zanimljive grane matematike koja promatra prostor u više dimenzija na kombinatorni način. Krenuli smo s osnovama – definicije točke, pravca, ravnine, te njihovih višedimenzionalnih analogona. Promatranjem njihovih svojstava u manje dimenzija, obično 2D i 3D, uspjeli smo izvući poopćenja za više dimenzija. Kasnije smo se upoznali s kombinatornom stranom ovog projekta i našli smo rješenja za zadatke koji isprva nemaju nikakve veze s geometrijom koja se koriste isključivo njome. Na primjer, problem s troznamenkastim PIN-om zamislili smo u 3D prostoru, gdje svaka znamenka PIN-a predstavlja jednu koordinatu te smo na taj način mogli zamisliti zadatak na mnogo lakši način. Kad je sva intuicija bila razvijena i kad smo dobili praksu za više dimenzija, bili smo spremni za dokaz Radonovog teorema. Radi se o teoremu otkrivenom prije više od 100 godina, čiji je jedini poznati dokaz koristio linearnu algebru. Simeon se, na svu sreću, prije par godina susreo s tim zadatkom na natjecanju, gdje je dokaz bio postavljen kao zadatak. Iznenadio je sve sa svojim kombinatornim dokazom te tvrdnje, koji je do tad bio neviđen. Na projektu smo zajedno analizirali taj teorem te nam je Simeon pokazao svoj izvanredan dokaz. Projekt je zaista prikazao šarm kombinatorne geometrije i svi smo se dosta zabavili s našim mentorima.

25.2.7. Geometrija

Vrsta: natjecateljski **Mentori:** Janko Bušelić i Stella Čolo

Na ovom projektu bavili smo se olimpijskim zadacima iz geometrije. Naučili smo metodu inverzije te ju primijenili na nekim zadacima. Također smo naučili neke korisne konfiguracije, primarno vezane uz Miquelovu točku. Rješavali smo izazovne zadatke olimpijskog tipa, sa IMO shortlista te sa Iranske geometrijske olimpijade. Svaki zadatak smo podijelili na više lakših dijelova. Cilj je bio motiviranje svakog koraka tako da je više bio naglasak na ne pristupačnim zadacima.

25.2.8. Izlet u vjerojatnost

Vrsta: fakultetski/primjena **Mentori:** Kruno Ivanović i Katja Varjačić

Krenuli smo od samih početaka vjerojatnosti proučavajući naizgled jednostavne primjere poput bacanja novčića i kocke. Ispostavilo se kako mogu biti kompleksni (ne skup brojeva), ali na predavanjima smo naučili razne metode i formule koji pobliže objašnjavaju i daju smisao problemima vezanim uz vjerojatnost. Također smo se upoznali s osnovama teorije Markovljevih lanaca koja nam je omogućila lakši pristup nekim problemima. Osim teorije, na projektu smo spominjali i brojne primjene u svakodnevnom i profesionalnom životu, kao što su testiranje lijekova, ispitivanje "poštenosti" novčića te traženje izgubljenih objekata (konkretnije, olupina brodova i aviona u oceanu). Iako je bilo teško, na projektu smo se zabavili i dosta tog naučili.

25.2.9. Računska geometrija

Vrsta: natjecateljski **Mentori:** Boris Stanković i Namik Agić

Na ovom projektu upoznali smo se s nekim metodama koje se koriste za računanje stvari u geometrijskim zadacima. Prva dva dana učili smo o nekim trigonometrijskim stvarima i kako one mogu pomoći u rješavanju zadataka, te smo nakon toga i sami pokušali riješiti neke. Na drugoj polovici projekta upoznali smo se s kompleksnim brojevima i kako njihova geometrijska interpretacija može pomoći u jako velikom broju geometrijskih zadataka te smo neko vrijeme proveli na rješavanju olimpijskih zadataka tim metodama. Iako je projekt natjecateljski i puno smo vremena proveli rješavajući zadatke, mislimo da će nam to biti korisno u nastavku našeg natjecateljskog puta.

25.2.10. Uvod u matematičku analizu

Vrsta: fakultetski **Mentori:** Hrvoje Radoš i Adian Anibal Santos Sepčić

Matematička analiza u svojoj punoj formalnosti veoma je zahtjevno područje matematike koje se proučava na fakultetu. Cilj ovog projekta je bilo predstaviti temeljne ideje analize i stvoriti intuiciju za rješavanje raznih teških problema za čije je rješavanje potrebno poznavanje analize.

Na samom početku projekta bavili smo se problemom toga koja je je točno poveznica između omjera opsega i promjera kruga i površine kruga, to jest objašnjenjem toga zašto se jedno može izraziti pomoću drugoga. Nužna ideja pri rješavanju ovog problema je na neki način zamisliti apstraktan koncept podijele kruga na infinitezimalne dijelove. Kasnije smo na ovaj način izvodili formule za volumene trodimenzionalnih tijela kao što su piramida i sfera.

U ostatku projekta gradili smo razne ideje na ove temelju ove intuicije, polazeći od toga što derivacija jest i kako njima baratati, a kasnije čak zakucali na vrata dokaza Eulerovog identiteta.

Za kraj nudimo učenicima handout na kojem se nalaze neke stvari koje smo radili i neke koje nismo stigli odraditi.

25.2.11. Handout uz projekt "Uvod u matematičku analizu"

Motivacija iza derivacije

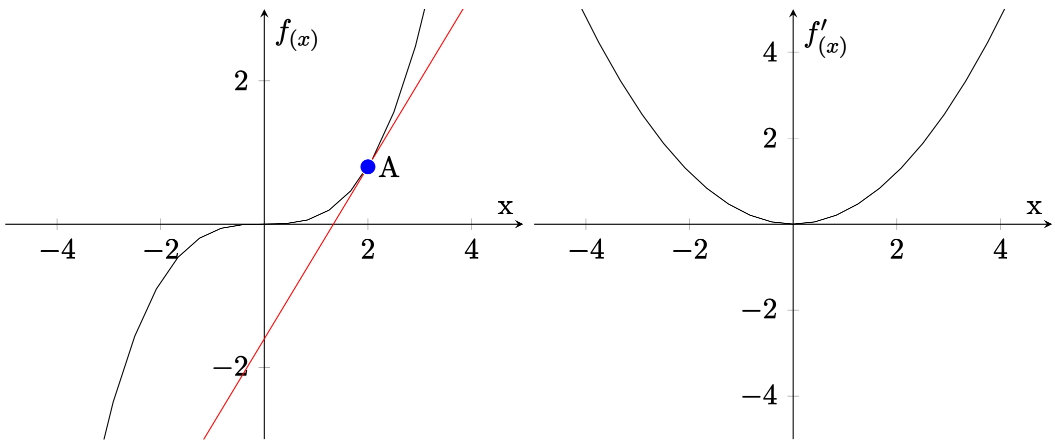
Kao motivacija za derivaciju navode se uvijek dva primjera: problem određivanja tangente u točki neke krivulje i problem brzine.

Problem tangente

Zamislimo da imamo neku funkciju $f_{(x)}$ (slika). Sada promotrimo njezin graf odaberimo bilo koju točku na grafu i nazovimo ju A. Sada nacrtajmo tangentu na krivulju koju opisuje funkcija i zapitajmo se:

"Kako izgleda jednadžba pravca koja opisuje nacratnu tangentu?". Znamo iz osnovne škole da je za određivanje jednadžbe pravca potrebno znati dvije točke koje leže na pravcu. Mi znamo jednu točku koja leži na pravcu (točku A) što je manje od potrebne dvije... Znači li to da je nemoguće odrediti tangentu odnosno da ima beskonačno mnogo tangenata? To intuitvno ne bi imalo smisla jer kad bi povukli neki drugi pravac kroz tu istu točku dobili bi da on siječe graf funkcije što znači da taj pravac nije tangenta.
Prvo ćemo pokušati za drugu točku uzeti točku koja se nalazi na grafu funkcije, ali se nalazi jako blizu točke A. Onda možemo pomoću te dvije točke odrediti pravac koji kroz njih prolazi i imamo aproksimiranu tangentu.
Sada se postavlja pitanje koliko druga točka mora biti blizu točke A? Odgovor je: "Najviše koliko može biti, a da ne bude 0".

Kako bi ovo konkretno izgledalo? Izmislit ćemo novu funkciju koja se zove $f'_{(x)}$ i za svaki x izračunat ćemo nagib tangente funkcije $f_{(x)}$ i to preslikati kao vrijednost funkcije $f'_{(x)}$. Funkciju $f'_{(x)}$ ćemo zvati derivacijom funkcije $f_{(x)}$.



Problem brzine

U osnovnoj školi brzinu ste definirali kao $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ gdje je Δs put koji tijelo prijeđe za Δt. No, vjerojatno ste vrlo brzo primijetili da je ova definicija manjkava. Što ako se unutar vremenskog intervala Δt brzina promijeni? Rješenje ovoga je da uzmemo jako malene vremenske intervale tako da je nemoguće da unutar njih tijelo promijeni brzinu. Već se vidi da je ova problematika dosta slična onoj u prethodnog potpoglavlju i u stvarnosti to je potpuno isti problem, pa neću previše duljiti ovdje. Umjesto $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ćemo pisati $v = \frac{ds}{dt}$. Gdje su ds i dt "jako maleni Δs i Δt", inače d se zove diferencijal. (Ovo je jako kontrovezan način označavanja i u kasnijem poglavlju ću objasniti zašto.)
Sada se pokušate uvjeriti da ako imamo neku funkciju koja opisuje prijeđeni put u ovisnosti o vremenu $s_{(t)}$, $\frac{ds}{dt}$ je zapravo samo njezina derivacija $s'_{(t)}$

Definicija

Definicija 25.2.8: derivacija

Derivacija funkcije $f_{(x)}$ u točki x je jednaka:

$$f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Pokušajte intuitivno shvatiti ovu definiciju. Gore smo govorili što je derivacija konceptualno i kako ćemo ju računati. Rekli smo da ćemo ju računati tako da uzmemo dvije točke na grafu funkcije koji

su jako blizu. Prema definiciji te dvije točke se po x koordinati razlikuju za h, a po y koordinati za $f_{(x+h)} - f_{(x)}$. Nagib tangente je onda kvocijent tih dvaju vrijednosti. Za kraj potrebno je uzeti dvije točke koje su "jako blizu". Mi to postižemo uporabom limesa (Limes je konkretno definiran preko ε - δ definicije limesa.) tako da gledamo kako se funkcija ponaša kada h ide u 0.
Bitno je napomenuti da ovaj limes ne mora postojati u nekoj točki odnosno da ide u beskonačnost u tom slučaju kažemo da funkcija nije diferencijabilna u toj točki.

dx i dy

Osim y' derivacija funkcije y se može označavati i kao $\frac{dy}{dx}$. Ovakvu oznaku je vjerojatno većina vas prije vidjela i intuitivno ima smisla. dy bi bila oznaka za jako malenu Δy, a dx oznaka za jako malenu veličinu Δx. Problem s ovakvim razmatranjem je da je ovo matematički KRIVO.
dy i dx nismo nikada isključivo definirali, stoga nema smisla o njima raspravljati kao varijablama. Ako bi netko pokušao definirati dy kao:

$$dy = \lim_{h \to 0} f_{(x+h)} - f_{(x)}$$

Nailazi se na problem jer prema ε-δ definiciji limesa ovaj limes je jednak 0. Isto se događa i za:

$$dx = \lim_{h \to 0} x + h - x = \lim_{h \to 0} h = 0$$

Čemu je onda jednako $\frac{dy}{dx}$?

No iako nije matematički korektno, tretiranje dy i dx funkcionira poprilično dobro. Funkcionira toliko dobro da se to radi u fizici bez velikog premišljanja. I osobno smatram da je korisno za izgradnju intuicije za matematičku analizu.

Derivacije elementarnih funkcija

This is where the magic begins
Sada ćemo pokušati derivirati funkciju $f_{(x)} = x^3$.

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

Inače se može pokazati da $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ovo vrijedi čak i ako $n \in \mathbb{R}$! Derivacije drugih elementarnih funkcija se nalaze u tablici ispod.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{th} x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{cth} x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
e^x	e^x	$\mathrm{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
a^x	$a^x \ln a$		

Ovdje ima nekih funkcija za koje možda niste prije čuli (npr. hiperbolne trig funkcije), no to nije sada bitno. Posebnu pažnju obratite na funkciju e^x čija derivacija je ista ta funkcija!. Slično se ponašaju i trigonometrijske funkcije npr. ako derivirate $\sin(x)$ četiri puta dobiti ćete opet $\sin(x)$!

Pravila za računanje derivacija

Teorem 25.2.9: Derivacija zbroja funkcija

$$(f_{(x)} + g_{(x)})' = f'_{(x)} + g'_{(x)}$$

Dokaz. Ostavljam kao vježbu čitatelju '_'

□

Teorem 25.2.10: derivacija produkta funkcija

Neka su $f_{(x)}$ i $g_{(x)}$ diferencijabilne na intervalu $\langle a, b\rangle$

$$(f_{(x)} g_{(x)})' = f'_{(x)} g_{(x)} + f_{(x)} g'_{(x)}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dokaz.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} g_{(x+h)} - f_{(x)} g_{(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} g_{(x+h)} + f_{(x+h)} g_{(x)} - f_{(x+h)} g_{(x)} - f_{(x)} g_{(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)}(g_{(x+h)} - g_{(x)}) + g_{(x)}(f_{(x+h)} - f_{(x)})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)}(g_{(x+h)} - g_{(x)})}{h} \lim_{h\to 0} \frac{g_{(x)}(f_{(x+h)} - f_{(x)})}{h} =$$

$$= f_{(x)} g'_{(x)} + g_{(x)} f'_{(x)}$$

Pogledajmo kako se ovaj teorem konkretno koristi. Kako bi bolje razumijeli ove primjere pokušajte zapamtit većinu derivacija elementarnih funkcija iz tablice gore.

Primjer 1. Derivirajte funkciju $f_{(x)} = 5\sin(x)$

Rješenje 1.

$$f'_{(x)} = (5)'\sin(x) + 5(\sin(x))' = 5\cos(x)$$

□

Primjer 2. Derivirajte funkciju $f_{(x)} = xe^x$

Rješenje 2.

$$f'_{(x)} = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$

□

□

Teorem 25.2.11: deriviranje kvocijenta funkcija

$$\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right)' = \frac{f'_{(x)}g_{(x)} - f_{(x)}g'_{(x)}}{g^2_{(x)}}$$

Dokaz ovoga je analogan prošlome.

Primjer 3. Derivirajte funkciju $f_{(x)} = \frac{1}{1-x}$

Rješenje 3.

$$f'_{(x)} = \frac{(1)'(1-x) - 1(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

□

Teorem 25.2.12: deriviranje kompozicije funkcija

Neka su $f_{(x)}$ i $g_{(x)}$ diferencijabilne na intervalu $\langle a, b\rangle$

$$(f_{(g_{(x)})})' = (f \circ g)'_{(x)} = f'_{(g_{(x)})}g'_{(x)}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dokaz.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_{(g_{(x+h)})} - f_{(g_{(x)})}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(g_{(x+h)})} - f_{(g_{(x)})}}{h}\frac{g_{(x+h)} - g_{(x)}}{g_{(x+h)} - g_{(x)}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_{(g_{(x+h)})} - f_{(g_{(x)})}}{g_{(x+h)} - g_{(x)}}\frac{g_{(x+h)} - g_{(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_{(g_{(x+h)})} - f_{(g_{(x)})}}{g_{(x+h)} - g_{(x)}}\lim_{h\to 0}\frac{g_{(x+h)} - g_{(x)}}{h} =$$

$$= f'_{(g_{(x)})}g'_{(x)}$$

□

Ovo je isprve pomalo čudan teorem jer ljudima inače nije jasno što $f'_{(g_{(x)})}$ znači. Mi ovdje samo deriviramo funkciju, ali ne tretiramo x kao varijablu po kojoj deriviramo već tretiramo $g_{(x)}$ kao varijablu. To je kao da smo napravili supstituciju $g_{(x)} = y$ i onda derivirali $f_{(y)}$.

Primjer 4. Derivirajte funkciju $f_{(x)} = \sin(3x)$

Rješenje 4. Neka nam je (ako zadržimo imenovanje koje smo koristili u teoremu) $f_{(x)} = \sin(x)$, a $g_{(x)} = 3x$ onda je derivacija jednaka:

$$(\sin(3x))' = \cos(3x)\cdot 3 = 3\cos(3x)$$

□

Primjer 5. Derivirajte $f_{(x)} = e^{x\sin(x)}$

Rješenje 5.
$$(e^{x\sin(x)})' = e^{x\sin(x)} \cdot (x\sin(x))' = e^{x\sin(x)} \cdot (\sin(x) + x\cos(x))$$

□

Ovo je vjerojatno najbitniji teorem i pravilo koje se najčešće koristi. Ono nam omogućava da lagano deriviramo SVAKU funkciju koja je kompozicija elementarnih. Ako još niste shatili pravilo prođite opet kroz primjere. Nije teško kada se konačno skuži :)

Teorem 25.2.13: derivacija inverzne funkcije

Neka sje $f_{(x)}$ diferencijabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka postoji $f^{-1}_{(x)}$

$$(f^{-1}_{(x)})' = \frac{1}{f'_{(f^{-1}_{(x)})}}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Dokaz.
$$\begin{aligned} f_{(f^{-1}_{(x)})} &= x \quad /' \\ f'_{(f^{-1}_{(x)})}(f^{-1}_{(x)})' &= 1 \\ (f^{-1}_{(x)})' &= \frac{1}{f'_{(f^{-1}_{(x)})}} \end{aligned}$$

□

Ovo se koristi ne toliko često koliko prethodni teoremi, no ipak je jako bitan teorem što ću pokazati na primjeru u nastavku, naime ovaj teorem nam omogućuje da pronađemo derivaciju funkcija kao što su $\arcsin(x)$ i sl. odnosno onih funkcija koje su definirane kao inverzne funkcije od neke "konkretnije" funkcije.

Primjer 6. Derivirajte funkciju $\arcsin(x)$

Meni je osobno lakše umjesto direktne primjene teorema računati kao što sam to radio u dokazu.

$$\sin(\arcsin(x) = x \Big/ '$$
$$\cos(\arcsin(x))(\arcsin(x))' = 1 \tag{25.1}$$

Sada s obzirom da je slika funkcije $\arcsin(x)$ po definiciji $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vrijedi:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x)))} = \sqrt{1 - x^2}$$

Uvrstimo sada to u 25.1:
$$\sqrt{1 - x^2}(\arcsin(x))' = 1$$
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

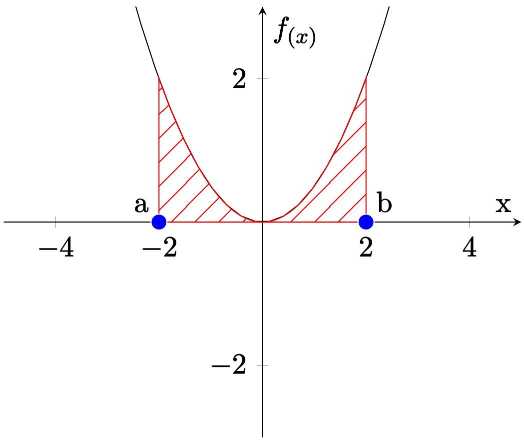
Možete usporediti ovaj rezultat u tablici gore.

Nešto malo o integralima

Iako integrale ne planiramo raditi u sklopu projekta odlučio sam jedan napisati jednu kratku cjelinu posvećenu njima.

Definicija 25.2.14

Integral funkcije $f_{(x)}$ možemo označiti s $\int_a^b f_{(x)}\,dx$ i on mjeri površinu ispod grafa funkcije $f_{(x)}$ od $x = a$ do $x = b$

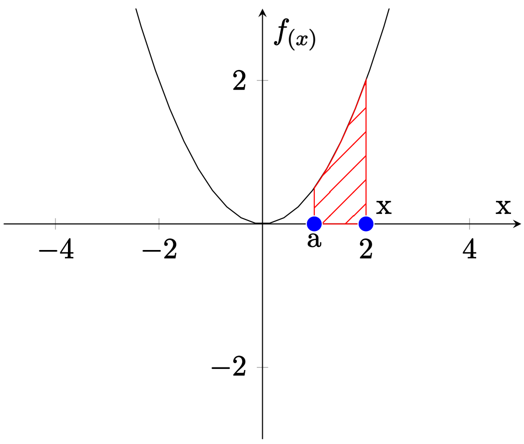


Intuitivno znak $\int_a^b$ se može shvatiti kao $\sum_{n=a}^{b}$ samo što on ne radi korake $n = n + 1$ kao normalna sumacija već radi korake $x = x + dx$ (Da, ovo je matematički krivo...). Sada se vidi da $\int_a^b f_{(x)}\,dx$ računa površine beskonačno mnogo pravokutnika visine $f_{(x)}$ i širine dx za svaki x i onda ih sve sumira.

Definicija 25.2.15

funkcija $I_{(x)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Svakom x pridružuje vrijednost koja odgovara površini ispod grafa funkcije $f_{(x)}$ od neke točke a do x.Označavamo ju : $I_{(x)} = \int_a^x f_{(t)}\,dt$

Na slici se može bolje vidjeti što točno funkcija radi:



Znači funkcija funkcionira slično kao derivacija samo što joj vrijednosti nisu nagibi pravca već površina ispod grafa.
Sada se netko može zapitati kako izgleda derivacija ovakve funkcije?

Teorem 25.2.16

$$I'_{(x)} = f_{(x)}$$

Dokaz.

$$I'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{I_{(x+h)} - I_{(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f_{(t)}\,dt - \int_a^x f_{(t)}\,dt}{h}$$

Pažljivim razmatranjem očito je da vrijedi: $\int_a^{x+h} f_{(t)}\, dt - \int_a^x f_{(t)}\, dt = \int_x^{x+h} f_{(t)}\, dt$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f_{(t)}\, dt - \int_a^x f_{(t)}\, dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f_{(t)}\, dt}{h}$$

Sada ću malo varati s dokazom jer nam za sljedeći korak treba jedan teorem za koji nemamo vremena. Integral u brojniku mjeri površinu ispod $f_{(x)}$ između x i $x+h$. S obzirom da h ide u 0, mi ovu površinu smijemo aproksimirat kao pravokutnik površine $f_{(x)}h$. Što znači:

$$I'_{(x)} = f_{(x)}$$

□

Ovo je jako koristan rezultat jer to znači da kad bi imali nekakvu antiderivaciju koja bi poništila derivaciju na $I'_{(x)}$ onda bi mogli računati površine proizvoljnih krivulja što je itekako korisno. Antiderivacije nisu jedinstvene, naime $(f_{(x)} + 5)' = (f_{(x)})'$ iako vrijedi $f_{(x)} = f_{(x)}$. Inače vrijedi ovo:

$$(f'_{(x)} = g'_{(x)}) \implies (f_{(x)} = g_{(x)} + C)$$

Gdje je C konstanta.
Kažemo da je $f_{(x)}$ primitvna funkcija funkcije $f'_{(x)}$. Inače primitivnu funkciju funkcije $f_{(x)}$ označavamo s $F_{(x)}$. Znači $F_{(x)}$ je funkcija za koju vrijedi $F'_{(x)} = f_{(x)}$
Ovdje ima još dosta tvrdnji koje se trebaju dokazivati, stoga ću samo navesti teorem koji nam omogućava računanje integrala.

Teorem 25.2.17: Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b f_{(x)}dx = F_{(a)} - F_{(b)}$$

gdje je $F_{(x)}$ bilo koja primitivna funkcija od $f_{(x)}$

Ovo mogu dokazati da bude svima razumljivo (nadam se)

Dokaz. Prema teoremu 6.3 $I_{(x)}$ je primitivna funkcija od $f_{(x)}$, stoga za neku drugu primitivnu funkciju (ili istu svejedno je) $F_{(x)}$ vrijedi: $I_{(x)} = F_{(x)} + C$.
Za $x = a$ vrijedi:

$$I_{(a)} = \int_a^a f_{(t)}\, dt = F_{(a)} + C = 0 \implies C = -F_{(a)}$$

Sada uvrstimo $x = b$

$$I_{(b)} = \int_a^b f_{(t)}\, dt = F_{(b)} + C = F_{(b)} - F_{(a)}$$

□

Ajmo sada ovo primijeniti na nešto da vam bude jasnije čemu ovo sve služi.

Primjer 7. Izračunajte površinu ispod grafa funkcije $f_{(x)} = x^3$ od $x = 0$ do $x = 1$

Rješenje 6. Treba prvo odrediti neku primitivnu funkciju od $f_{(x)}$. Funkcija koja je zadovoljavajuća je $F_{(x)} = \frac{x^4}{4}$ jer $F'_{(x)} = x^3$ Sada jednostavno uvrštavamo u formulu:

$$\int_{-1}^4 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

□

Lema 25.2.18

Primitivna funkcija od $f_{(x)} = x^n$ je $F_{(x)} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Dokaz. Samo derivirajte $F_{(x)}$ □

Taylorov polinom

Sada ću iskoristiti Newton-Leibniza na pomalo nestandardan način:

$$\int_{x_0}^{x} f'_{(x)}\,dx = f_{(x)} - f_{(x_0)}$$

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f'_{(x)}\,dx \tag{25.2}$$

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \left(f'_{(x_0)} + \int_{x_0}^{x} f''_{(x)}\,dx\right) dx$$

Primijetimo kako smo sada u posljednjem koraku zapravo napravili isto što u 25.2 samo smo umjesto funkcije $f_{(x)}$ izrazili $f'_{(x)}$.

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \left(f'_{(x_0)}\right) dx + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \left(f''_{(x)}\,dx\right) dx$$

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \left(f''_{(x)}\,dx\right) dx$$

Ako nastavimo raditi ovaj postupak n puta nailazimo na uzorak:

$$f_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}_{(x_0)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Gdje $f^{(n)}_{(x)}$ označava fukciju koju dobijemo kada deriviramo $f_{(x)}$ n puta
Ovo se zove Taylorov polinom i jako je fora...
Zašto je ovaj polinom toliko poseban i žašto ga ovoliko simpam? Pa ako malo bolje razmislimo mislit ćemo da se SVAKA funkcija koju znamo derivirat može zapisati preko polinoma. Ovo nažalost nije istina, ali sad već ulazim u dio matematičke analize koji mi se trenutno neda pisati ovdje i koji bi potencijalno zbunio čitatelja.
Istina je da funkcije možemo APROKSIMIRAT Taylorovim polinomom. Neke funkcije možemo zapisati kao beskonačnu sumu članova Taylorovog polinoma i reći da je ta suma jednaka toj funkciji za svaki x, ali to ne možemo raditi sa svakom funkcijom jer ta suma može potencijalno divergirati za neki x ili možda ne postoji n-ta derivacija funkcije.

Za kraj ću napisati tri funkcije preko Taylorovog polinoma i dati jedan sladak zadatak za vježbu (Sladak je samo ako ga se riješi).

Kako bi funkcije mogli zapisati preko Taylorovog polinoma trebate odabrati neki x_0 oko kojeg aproksimirate funkciju. Znači ako ja odaberem $x_0 = 0$ onda će Taylorov polinom od n članova bolje aproksimirati vrijednosti funkcije koje su bliže nuli. Za bolje razumijevanje možete pogledati ovaj 3Blue1Brown video koji ima fora animacije ovoga o čemu pričam: link

Za sljedeće funkcije ću uzeti nadalje $x_0 = 0$.

Korolar 25.2.19

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}_{(x)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Korolar 25.2.20

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Korolar 25.2.21

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Naglasit ću da ova tri prethodna korolara vrijede za svaki $x \in \mathbb{R}$
I sada taj slatki zadatak...

Primjer 8. Pomoću Taylorovog polinoma dokažite:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

VI. Završne riječi

26. Zahvale

Organizacija Ljetnog kampa bila je kao i svake godine zahtjevna i nepredvidljiva, no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su nam u tome pomogli na bilo koji način. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jednog Ljetnog kampa.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Srednjoj školi "Braća Radić" i Učeničkom domu, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Kaštel Štafiliću.

Naša najveća zahvala ide našem glavnom spoznoru, Jane Streetu. Osim što financijski podupiru sve aktivnosti Udruge, a među njima i posebno Ljetni kamp, kao i ranijih godina poslali su posebne nagrade za sve sudionike Kampa.

Jane Street is a quantitative trading firm with offices worldwide. We hire smart, humble people who love to solve problems, build systems and test theories. You'll learn something new every day in our office — whether it's connecting with a colleague to share perspectives, or participating in a talk, class, or game night. Our success is driven by our people and we never stop improving.

Jane Street has a number of opportunities available for students - from multi-day educational programs to learn how we apply Mathematics and Computer Science in our everyday work, through to our global internships as well as full-time roles. Take a look at www.janestreet.com to learn more!

Posebno želimo zahvaliti i Ministarstvu znanosti i obrazovanja na financijskoj potpori za organizaciju Ljetnog kampa i Hrvatskom matematičkom društvu, našem glavnom partneru.

**MINISTARSTVO ZNANOSTI
I OBRAZOVANJA
REPUBLIKE HRVATSKE**

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim ostalim donatorima i sponzorima: Stype CS, Visage Technologies, Wiener osiguranje Vienna Insurance Group, Photomath te Offertisima. Omogućili ste ne samo da se Kamp održi, već i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše Udruge.

Od srca zahvaljujemo i Ivani Valentić na održanom popularno-znanstvenom predavanju te što je zainteresirala mnoge sudionike za daljnje bavljenje matematikom, statistikom i biologijom te im pružila znanje iz prakse i približila svakodnevni posao matematičara.

Naravno, Kamp ne bi bio moguć bez svih mentora. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima Kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i nakon što je Kamp završio.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem i razvijanjem znanja u STEM području. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv potvrđuje da ono što radimo zaista čini razliku.

Veliko vam hvala svima na svemu!

27. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: mnm.hr

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **kontakti i društvene mreže**: mnm.hr

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata i rada Udruge.