Zimska škola matematike 2022.

Osijek, 2.-8.1.2022.

Sadržaj

II Hintovi predavanja

III Rješenja predavanja

IV Natjecanja

V Završne riječi

1. Poglavlje

Predgovor

U ovoj knjizi dana su sva predavanja sa Zimske škole matematike 2022., zajedno sa zadacima te hintovima i rješenjima istih.

Osnovna namjera bila je omogućiti nastavak rada i nakon Zimske škole jer su sama predavanja vremenski ograničena te je nemoguće proći kroz sve zadatke, a za uspješno razumijevanje bilo koje teme, potrebno je vježbati. Također, knjiga može poslužiti kao izvor zadataka za samostalne pripreme.

Knjiga sadrži i kratku povijest same udruge i kampova, kao i opis formata kampa, zajedno sa zadacima s natjecanja održanih na Zimskoj školi.

U slučaju da uočite bilo kakve pogreške, bili bismo zahvalni kada biste ih javili na sljedeću e-mail adresu: `mnm@mnm.hr`

Autori,
28. siječnja 2022.

2. Poglavlje

Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatne nastave koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Udruga se prvotno bavila organizacijom predavanjima subotom u Zagrebu i ljetnih kampova mladih matematičara, no tokom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranja raznih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, provođenju vlastitih natjecanja EMC i Marinada, organiziranih predavanja subotom u drugim gradovima, popularizacijskih radionica u školama diljem Hrvatske, sudjelovanju na festivalima popularizacije znanosti...

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče i sudjelovanja matematičara iz drugih država na kampovima u ulogama učenika, mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Još od 2010. godine udruga MNM održava ljetne matematičke kampove koji učenicima pružaju priliku da jedan tjedan ljetnih praznika provedu usvajajući nova matematička znanja i družeći se s vršnjacima sličnih interesa. Zbog uspjeha ljetnog kampa i interesa učenika nastala je ideja o Zimskoj školi, "mlađoj sestri" Ljetnog kampa, sa željom da i preko zimskih praznika održimo nešto slično.
Ta ideja se i ostvarila početkom 2014. godine kad je održana prva zimska škola u Domu crvenog križa na Sljemenu. U školskoj godini 2014./2015. organizaciju provodimo u suradnji s Hrvatskim savezom informatičara (HSIN), a od 2016. do 2020. godine Zimska škola održava se u Ogulinu. Prošle godine (2021.) Zimska škola je zbog epidemiološke situacije održana online, a ove godine preselila se u Osijek. Iako su svojim sadržajem jako slični, Zimska škola je nešto više usmjerena na pripreme za nadolazeća natjecanja nego Ljetni kamp, upravo zbog toga što prethodi početku održavanja hrvatskih matematičkih natjecanja u siječnju.
Uz razne aktivnosti i povremene snježne radosti, na Zimskoj školi matematike iz godine u godinu učenike u ugodnoj atmosferi pripremamo za razne matematičke izazove te se nadamo da ćemo tako i nastaviti.

Slika 2.2: Zimska škola 2016.

Slika 2.3: Zimska škola 2015.

2.3. Ovogodišnja Zimska škola

Zimska škola matematike 2022. održana je u Osijeku. Svi sudionici i predavači bili su smješteni u Srednjoškolskom đačkom domu Osijek. Predavanja su se održavala na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku gdje već nekoliko sezona i tijekom godine dolazimo održavati natjecateljska predavanja osječkim srednjoškolcima u suradnji s Udrugom matematičara Osijek.

Slika 2.4: Srednjoškolski đački dom Osijek [1]

Slika 2.5: Odjel za matematiku [2]

[1]Izvor fotografije: Stranice SĐD Osijek
[2]Izvor fotografije: Stranice Sveučilišta J.J. Strossmayera Osijek

2.4. Aktivnosti na Zimskoj školi

Kao i inače, glavne su aktivnosti na Zimskoj školi bile jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici su slušali detaljno predavanje na kojem je obrađena određena tema iz natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici su se uz ručak imali priliku odmoriti i zabaviti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz natjecateljsku, primijenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik Zimske škole je na početku odabrao jedan od ponuđenih raznovrsnih projekata te na njemu detaljnije radio tijekom četiri popodneva.
Svaki dan nakon večere odvijale su se raznovrsne aktivnosti, u skladu s epidemiološkom situacijom. Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi sudionici imali su slobodno vrijeme tijekom kojeg su se mogli družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, Blotto, bela, Resistance, Dixit, kockice ...

Jedan dan su se umjesto jutarnjih predavanja i projekata, učenici okušali u pojedinačnim natjecanjima JELMO i ELMO koje su za njih pripremili marljivi mentori.

2.5. Popis mentora

Ema Borevković
Mislav Brnetić
Luka Bulić Bračulj
Vedran Cifrek
Andrej Čizmarević
Paula Horvat
Leon Križanić
Ivan Novak
Lucija Relić
Daniel Širola
Nika Utrobičić
Ivan Vojvodić
Marko Žagar

2.6. O predavanjima

Predavanja su glavni dio Zimske škole i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u četiri skupine, ovisno o uzrastu i predznanju. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja koja su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi kako bi učenike koji su proveli duže vrijeme u rješavanju nekog zadatka usmjerili prema rješenju, ali rješenja ili izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Dio I

Zadaci s predavanja

3. Poglavlje

Geometrija

3.1. G1: Sukladnost i sličnost - Leon Križanić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Dva su trokuta sukladna akko:

- imaju sve tri odgovarajuće stranice jednake duljine (SSS)
- dvije stranice su jednake duljine i kut između njih su jednake veličine (SKS)
- imaju jednu stranicu jednake duljine i veličina kuteva na toj stranici jednake veličine (KSK)
- dvije stranice su jednake duljine i kut nasuprot većoj od tih stranica (SSK)

Dva su trokuta slična akko su:

- im dva odgovarajuća kuta jednake veličine (KK)
- im sve odgovarajuće stranice proporcionalne (SSS)
- im dvije odgovarajuće stranice proporcionalne, a kut između njih jednaki (SKS)

Lakši zadaci

1. Dokažite da je za poučak o sukladnosti SSK nužno tražiti kut nasuprot većoj od dvaju poznatih stranica.
2. Dokaži da se u četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju ako i samo ako je taj četverokut paralelogram. (Trebate dokazati oba smjera.)
3. Dokažite Euklidov poučak: Neka je zadan pravokutni trokut ABC s pravim kutem u točki C te neka je D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu AB. Neka su $p = |BD|$ i $q = |AD|$ duljine odsječaka na hipotenuzi. Tada je $a = \sqrt{cp}$, $b = \sqrt{cq}$ i $v = \sqrt{pq}$.
4. Neka je u trokutu ΔABC povučena simetrala kuta iz vrha C do točke D na stranici $\overline{AB}$. Dokaži da vrijedi $|AD| : |DB| = |AC| : |BC|$. (Poučak o simetrali trokuta.)
5. Dokaži da težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru $2 : 1$, gledajući od vrha trokuta.
6. Središtem kvadrata položena su dva međusobno okomita pravca koji sijeku stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{AD}$ redom točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|\overline{FH}| = |\overline{EG}|$.

Umjereni zadaci

7. Nad stranicama paralelograma $ABCD$ konstruirani su prema van kvadrati te neka su P, Q, M, N središta dijagonala tih kvadrata sa stranicama redom $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$. Dokaži da je i četverokut $PQMN$ također kvadrat.
8. Dan je kvadrat $ABCD$. Točke M, N, P, Q polovišta su stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$ kvadrata. Dokaži da pravci AP,BQ,CM,DN određuju kvadrat čija je površina jednaka $\frac{1}{5}$ površine kvadrata $ABCD$.

9. Dužina $\overline{AD}$ podijeljena je točkama B i C na tri sukladna dijela. Nad dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$ konstruirani su jednakostranični trokuti ACF i CDE s iste strance pravca. Dokažite da je trokut BEF jednakostraničan.

10. Duljina srednjice trapeza iznosi 4, a kutovi uz jednu osnovicu su $40°$ i $50°$ Odredite duljine osnovica ako je udaljenost njihovih polovišta jednaka 1

Teži zadaci

11. Jedan kut pravokutnog trokuta ABC je $30°$. U polovištu S hipotenuza $\overline{AB}$ podignuta je okomica na hipotenuzu i njezino je sjecište s duljom katetom točka D. Dokaži da je dužina $\overline{SD}$ tri puta kraća od dulje katete.

12. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$ sijeku se u točki O. Ako su dane površine trokuta ΔABO zadana s P_1 i ΔCDO s P_2, kolika je površina trapeza?

13. Središtem kružnice upisane trokutu ΔABC položen je pravac paralelan s najduljom stranicom. Koliki je opseg nastalog manjeg trokuta ako su duljine stranica trokuta 12 cm, 6 cm i 9 cm?

14. U trokutu ΔABC je $\beta = 2\alpha$. Dokaži da za stranice trokuta vrijedi $b^2 - a^2 = ac$.

15. Nad katetama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati $CBDE$ i $ACFG$. Pravac AD siječe katetu $\overline{BC}$ u točki M, a pravac BG katetu $\overline{AC}$ u točki N. Pravci AD i BG sijeku se u točki Q. Dokaži da je površina četverokuta $MCNQ$ jednaka površini trokuta ABQ.

3.2. G2: Upisana i pripisana kružnica - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom ćemo predavanju proći nekoliko zanimljivih činjenica o upisanoj i pripisanoj kružnici.

Upisana kružnica

Definicija 3.2.1. Upisana kružnica trokuta je ona kojoj su pravci na kojima leže stranice trokuta tangente i dira sve stranice trokuta. Njeno središte je sjecište simetrala kuteva.

Definicija 3.2.2. Četverokut je tangencijalan ako mu se može upisati kružnica.

Teorem 3.2.3. *Četverokutu se može upisati kružnica ako i samo ako mu se zbrojevi nasuprotnih stranica poklapaju.*

Teorem 3.2.4. *Površina trokuta jednaka umnošku radijusa upisane kružnice i njegovog poluopsega.*

Lema 3.2.5. *Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D sjecište BI (simetrala kuta $\angle ABC$) i opisane kružnice trokuta ABC. Lema o trozupcu kaže da je*

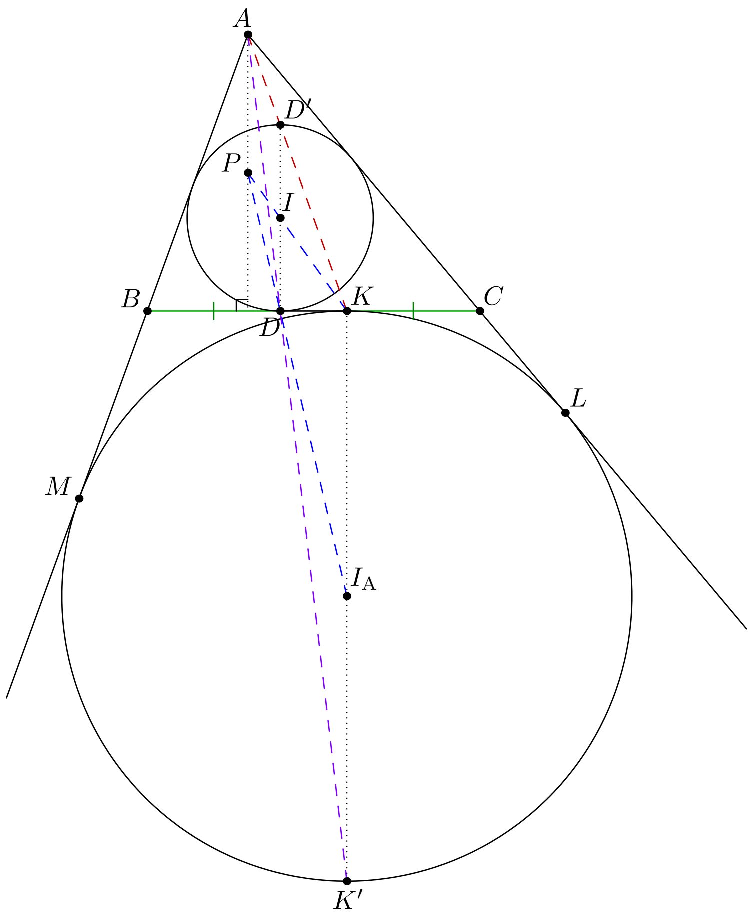
$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte trokutu pripisane kružnice koja dira AB, BC i $\overline{AC}$.

Pripisana kružnica

Definicija 3.2.6. A-pripisana kružnica trokuta je ona kojoj su pravci na kojima leže stranice trokuta tangente, a jedina stranica trokuta koju dira je ona nasuprot vrha A. Njeno središte je sjecište simetrala kuta trokuta u vrhu A i vanjskih kuteva u B i C.

Na sljedećoj skici D je dirалište upisane sa stranicom $\overline{BC}$, K, L i M su dirališta pripisane sa stranicama trokuta, I i I_A su središta upisane i pripisane kružnice redom, a točka P je polovište visine iz A. Vrijedi sljedeće:



Na ovoj konfiguraciji vrijede sljedeće činjenice:

- Vrijedi $BD = CK$.
- Točke A, D' i K su kolinearne.
- Točke A, D i K' su kolinearne.
- Točke P, I, K i P, D, I_A su kolinearne.

Uvodni zadaci

1. Dokažite da središte upisane kružnice trokuta postoji i da je to zaista točka opisana u uvodu.
2. Dokažite da središta pripisanih kružnica trokuta postoje i da su to zaista točke opisane u uvodu.
3. Dokažite da se četverokutu može upisati kružnica ako i samo ako mu se zbrojevi nasuprotnih stranica poklapaju.
4. Dokažite da je površina trokuta jednaka umnošku radijusa upisane kružnice i njegovog poluopsega.
5. Dokažite da se simetrala stranice i simetrala pripadnog kuta sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
6. Dokažite lemu o trozupcu.
7. Dokažite tvrdnje iz uvoda vezane za konfiguracije s pripisanim kružnicama.

Lakši zadaci

8. Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose 15 cm i 20 cm, kolika je površina trapeza?
9. Dokažite da svaki pravac koji prolazi središtem upisane kružnice trokuta dijeli opseg i površinu tog trokuta u istom omjeru.
10. Odredite kutove jednakokračnog trokuta čiji ortocentar leži na njegovoj upisanoj kružnici.
11. Točka S je središte trokutu ABC upisane kružnice, a simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.
12. Trokutu ABC upisana je kružnica koja redom dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama D, E, F. Dokažite da se pravci AD, BE, CF sijeku u istoj točki P.
13. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

Teži zadaci

14. Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.
15. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.

    U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?
16. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.
17. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka je t tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A. Kružnica sa središtem u točki A koja prolazi točkom C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a pravac t u točkama E i F tako da su C i E s iste strane pravca AB. Dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na pravcu DE.
18. U šiljastokutnom trokutu ABC označimo s D diralište pripisane kružnice i stranice $\overline{BC}$, a E diralište upisane kružnice i stranice $\overline{BC}$. Neka je I_1 središte upisane kružnice trokuta ABD, a I_2 središte upisane kružnice trokuta ADC. Dokažite da je EDI_1I_2 tetivan.

3.3. G3: Trigonometrija - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U trokutu $\triangle ABC$ stranice ćemo označavati s a, b, c, a kuteve s α, β, γ na standardan način. Polumjer kružnice opisane trokutu označavat ćemo sa R, a upisane r.

Teorem 3.3.1 (Osnovni identitet). *Za svaki realan broj x vrijedi*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Teorem 3.3.2 (Adicijske formule). *Za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Korolar 3.3.3. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Teorem 3.3.4 (Sinusov poučak). *Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Teorem 3.3.5 (Kosinusov poučak). *Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Teorem 3.3.6 (Poučak o simetrali kuta). *Neka je D presjek simetrale unutarnjeg kuta kod vrha A i stranice BC. Vrijedi:*

$$\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}.$$

Teorem 3.3.7 (Cevin poučak). *Neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB redom. Tada vrijedi:*

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Korolar 3.3.8 (Trigonometrijski Cevin poučak).

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC} \cdot \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA} \cdot \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB} = 1.$$

Teorem 3.3.9 (Potencija točke). *Neka točkom T prolazi pravac p koji siječe kružnicu k u A i B, pravac q koji siječe k u C i D. Vrijedi:*

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

Primjer 3.3.10. Neka je H ortocentar trokuta ABC i D nožište visine iz A na BC. Izračunajte $|AD|$, $|BD|$, $|DC|$ i $|AH|$ (preko duljina stranica trokuta i sinusa i kosinusa kuteva).

Zadaci

1. Neka je AM težišnica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}.$$

2. U trokutu ABC ($|AB| > |AC|$) simetrala vanjskog kuta $\angle BAC$ siječe opisanu kružnicu trokuta u točki E, a F je nožište okomice iz E na AB. Dokažite da vrijedi $2|AF| = |AB| - |AC|$.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut kojemu je AC promjer opisane kružnice. Neka je P projekcija točke A na BD te neka je Q projekcija od C na BD. Dokažite da je $|BP| = |DQ|$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da vrijedi $|AB| < |AC|$. Neka su X i Y točke na manjem luku $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC takve da je $|BX| = |XY| = |YC|$. Pretpostavimo da na dužini $\overline{AY}$ postoji točka N takva da je $|AB| = |AN| = |NC|$. Dokaži da pravac NC prolazi kroz polovište dužine $\overline{AX}$.

5. Neka je A_1 središte kvadrata upisanog u šiljastokutni trokut ABC tako da su dva vrha na stranici BC. Jedan od preostalih vrhova je na stranici AB, a drugi na AC. Točke B_1, C_1 su definirane na sličan način kao središta upisanih kvadrata kojima su dva vrha na stranicama AC i AB redom. Dokaži da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki.

6. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica Γ_A sa središtem u polovištu stranice BC koja prolazi kroz H siječe pravac BC u točkama A_1 i A_2. Točke B_1, B_2, C_1 i C_2 su definirane na sličan način. Dokaži da su točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 konciklične.

7. Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H. Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G. Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M. Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.

3.4. G4: Homotetija - Daniel Širola

Link na hintove. Link na rješenja.

Homotetija

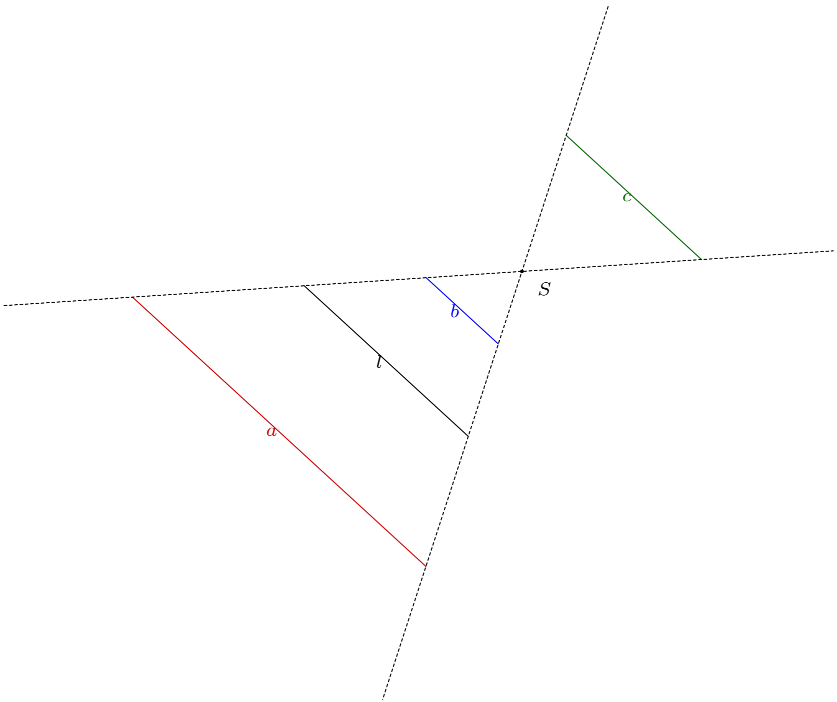
U ovom predavanju bavimo se homotetijom. Homotetija je, neformalno govoreći, rastezanje ravnine s centrom u jednoj točki. U geometrijskim zadatcima važno je znati ju prepoznati jer može imati razne korisne posljedice. Sada dajemo formalnu definiciju homotetije.

Definicija 3.4.1. Homotetija je funkcija $H_{S,k} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ definirana za točku $S \in \mathcal{M}$ i realni broj $k \in \mathbb{R}$ dana s

$$H_{S,k}(P) = Q \text{ tako da } \overrightarrow{SQ} = k\overrightarrow{SP}$$

Definicija je napisana u obliku vektora da napomene nekoliko bitnih činjenica:

- Homotetija preslikava P u točku na pravcu PQ.
- Homotetija može imati negativan i pozitivan koeficijent. Homotetija s negativnim koeficijentom preslikava P u točku Q tako da je S između P i Q.
- Vrijedi $|SQ| = |k| \cdot |SP|$.

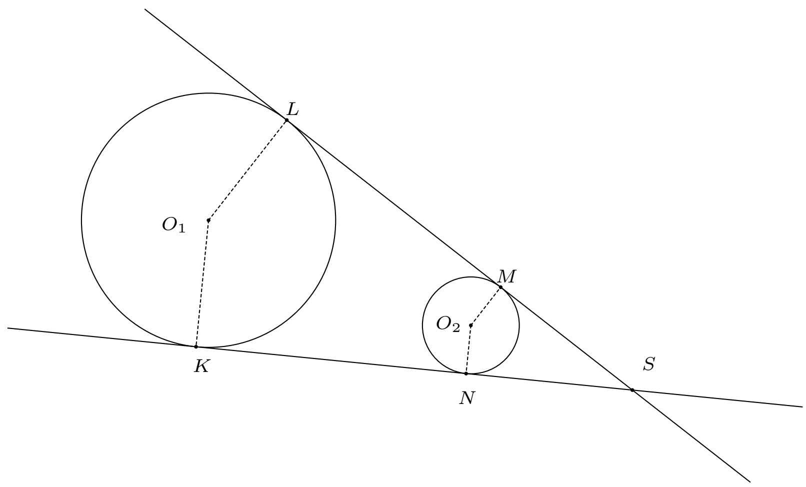


Na prethodnoj skici vidimo nekoliko homotetija na jednu dužinu. Sve homotetije imaju centar u S i djeluju na crnu dužinu l. Crvena dužina a rezultat je homotetije za $k > 1$. Plava dužina b je rezultat homotetije s koeficijentom $0 < k < 1$. Konačno, zelena dužina c ima koeficijent $k < 0$. Uočavamo nekoliko važnih činjenica. Prva je da za proizvoljnu točku i $k = 1$ dobivamo identitetu. Također, homotetija je bijekcija, osim kada je $k = 0$. Tada je nul-funkcija. Dalje, na skici su prikazane homotetije dužine. Nije rečeno da slika dužine mora biti dužina, ali vrlo se jednostavno preko sličnosti pokaže da homotetija čuva kolinearnosti. Onda je jasno također da homotetija čuva i incidencije. Samim time čuva i paralelnost jer nam se ne može sjecište stvoriti niotkuda. Iz istog razloga čuva tangente. Općenito, homotetija objekte šalje u njima slične objekte, a u slučaju $k = 1, -1$ u sukladne. Općenito, sama slika homotetije nije pretjerano korisna. Ako imamo neku konfiguraciju i djelujemo na nju homotetijom dobivamo istu konfiguraciju, samo malo *odzumiranu.* Bitna ideja je gledati u isto vrijeme i konfiguraciju i njezinu slikati i uočavati poznata svojstva homotetije. Još jedna bitna činjenica koja vrijedi za homotetije slijedi.

Lema 3.4.2. *Neka su zadane dvije proizvoljne homotetije H_{S_1,k_1}, H_{S_2,k_2}. Tada je i njihova kompozicija također homotetija s faktorom $k_1k_2 \neq 1$ i središtem kolinearnim s S_1 i S_2, ili translacija u smjeru pravca S_1S_2.*

Primjer 3.4.3. Neka su dane proizvoljne kružnice ω_1, ω_2 različitih radijusa. Tada postoji homotetija koja preslikava jednu kružnicu u drugu.

Rješenje:

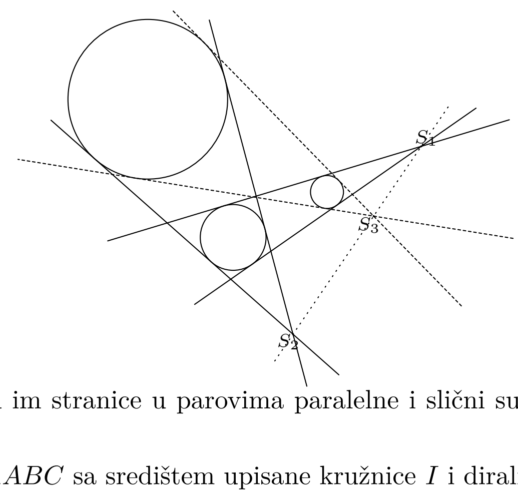
> Nacrtajmo par vanjskih zajedničkih tangenti obje kružnice. Tvrdimo da je njihovo sjecište središte homotetije. Treba naći eksplicitno homotetiju koja ih preslikava jednu u drugu.
>
> 
>
>
> Znamo da su pravci O_1L i O_2M paralelni. Zbog sukladnosti $\triangle SO_1L \cong \triangle SO_1K$ imamo da je $\sphericalangle O_1SL = \sphericalangle O_2SL = \frac{\sphericalangle KSL}{2}$. Zbog toga su i O_1, O_2, S kolinearne točke. Iz te sličnosti se lako dobiva i $\frac{|SO_2|}{|SO_1|} = \frac{r_2}{r_1}$ što je dovoljno za homotetiju jer se iz tog omjera lako vidi da svaku točku na ω_2 ta homotetija šalje u drugu točku na ω_1 u zadanom omjeru.

◊

Iz tog primjera slijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.4.4. *(Monge) Neka su zadane tri kružnice u općem položaju. Tada se sjecišta vanjskih tangenti svih triju parova kružnica sijeku na istom pravcu.*

Dokaz. Dokaz teče korištenjem prethodnog primjera. Naime, po prethodnom primjeru postoji homotetija koja preslikava ω_1 u ω_2 sa središtem u S_1. Zatim, postoji homotetija koja preslikava ω_2 u ω_3 sa središtem u S_2. Sada po ranije spomenutoj lemi možemo samo uočiti da je kompozicija tih dvaju homotetija ponovo homotetija čije središte leži na pravcu koji spaja S_1, S_2. □



Sada navodimo još da su dva trokuta homotetična ako su im stranice u parovima paralelne i slični su. Slijedi klasični zadatak s homotetijom.

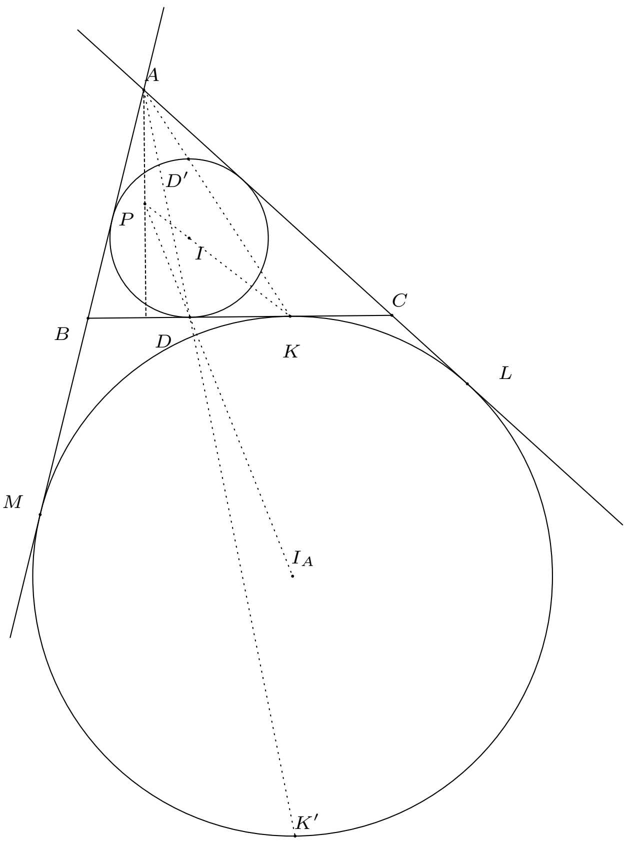
Primjer 3.4.5. (Pripisana kružnica) Neka je dan trokut $\triangle ABC$ sa središtem upisane kružnice I i diralištem D upisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$. Neka je D' preslika D preko I, K dirałište pripisane kružnice nasuprot A sa $\overline{BC}$, a I_A središte pripisane kružnice. Točka P je polovište visine iz A, a K' je preslika točke K preko I_A. Dokažite:

1. $|BD| = |CK|$
2. Točke A, D', K su kolinearne.

3. Točke A, D, K' su kolinearne.
4. Točke P, I, K, su kolinearne.
5. Točke P, D, I_A su kolinearne.

Rješenje:

> Prva tvrdnja dokazuje se bez homotetije i posljedica je jednakosti duljina tangenta od sjecišta do dirališta kružnice. To nije tema predavanja pa se ostavlja za vježbu čitatelju. Povučemo li pravac kroz D' paralelan s BC, dobivamo mali trokut. Taj trokut je sličan trokutu $\triangle ABC$ i stranice su mu paralelne sa stranicama trokuta $\triangle ABC$ pa postoji homotetija iz vrha A koja preslikava jedan trokut u drugi. S druge strane, D' je tada dirališta pripisane kružnice malom trokutu (a to je upravo upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$. To znači da u slici te homotetije točki D' odgovara točka K. Kako ta homotetija šalje D' u K, i upisanu kružnicu u pripisanu, onda mora i slati presliku D' preko središta upisane kružnice, odnosno D u presliku K preko centra pripisane kružnice, odnosno K'. Konačno, zadnje dvije tvrdnje se dobivaju homotetijom koja preslikava preko D trokut $\triangle AN_AD$ u $\triangle DKK'$. Sada polovište $\overline{KK'}$ odgovara polovištu AN_A, odnosno P, D, I_A su kolinearne. Predzadnja tvrdnja se dokazuje analogno homotetijom iz K koja šalje D u N_A i D' u A.



$\diamond$

Primjer 3.4.6. Neka su ω i Ω kružnice takve da ω dira Ω iznutra u točki T. Neka je P bilo koja druga točka na ω i neka je su A, B sjecišta tangente na ω u P sa Ω. Tada je sjecište TP sa Ω polovište luka $\overset{\frown}{AB}$.

Rješenje:

> Neka je A' sjecište TA sa Ω i B' sjecište TB s Ω. Tada su to praslike homotetije koja šalje ω u Ω. Tada je dovoljno dokazati da je P polovište luka $\overset{\frown}{A'B'}$. To je ekvivalentno tvrdnji da je $\sphericalangle B'TP = \sphericalangle A'TP$. Dodajemo sjecište S pravaca AB i zajedničke tangente t. Sada je $\sphericalangle STB = \sphericalangle SAT$. Zbog tangente je $\sphericalangle B'TP = \sphericalangle B'PB$. Zbog druge tangente isto $\sphericalangle STB' = \sphericalangle B'PT = \sphericalangle SAT$. Sada imamo zbog tetivnosti i komplementarnih kutova da je $\sphericalangle TAP + \sphericalangle A'PA = \sphericalangle B'TP + \sphericalangle B'PT$, pa sada imamo da je $\sphericalangle B'TP = \sphericalangle A'TP$.

$\diamond$

Spiralna sličnost

Prirodni nastavak priče o homotetiji je priča o spiralnoj sličnosti. Spiralna sličnost ne unosi ništa kvalitativno novo u priču, samo je teža za uočavanje jer se dobiva komponiranjem s rotacijom. To znači da i dalje čuva cjelokupnu strukturu koju preslikava.

Definicija 3.4.7. Spiralna sličnost je kompozicija homotetije i rotacije oko istog središta.

Teorem 3.4.8. *Neka su dane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Tada je središte spiralne sličnosti koja šalje jednu od tih dužina u drugu dugi presjek (ABP) i CDP gdje je P presjek AC i BD.*

Primjer 3.4.9. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ i točke X, Y na produžetcima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko B, C tako da je $|BX| = |CY|$. Kružnice (ABC) i (AXY) se sijeku u N. Dokažite da je N polovište luka $\overset{\frown}{CB}$ koji sadrži A.

Rješenje:

> Očito je N središte spiralne sličnosti koja šalje $\triangle NBX$ u $\triangle NCY$. Također imamo jednakost produžetaka pa je $|NB| = |NC|$. Znamo da je N na simetrali $\overline{BC}$ iz čega slijedi tvrdnja.

$\Diamond$

Lakši zadaci

1. Dokažite da su ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta na istom pravcu.

2. Dokažite da nožišta visina, polovišta stranica i polovišta spojnica vrhova s ortocentrom leže na jednoj kružnici.

3. Kvadrat $PQRS$ upisan je u kružnicu. Iz točke A van te kružnice povučene su tangente na kružnicu koje pravac PR sijeku u K, L. Pravci AQ i AS sijeku PR redom u M, N. Dokažite $|KM| = |LN|$.

Umjereni zadaci

4. Neka je N polovište luka $\overset{\frown}{ABC}$ opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ i neka su NP, NT tangente na upisanu kružnicu trokuta tako da su P i T na upisanoj kružnici. BP i BT sijeku kružnicu (ABC) u točkama P_1 i T_1. Dokaži da je $PP_1 = TT_1$.

5. $ABCD$ je jednakokračan trapez takav da je $AB||CD$. ω je kružnica kroz C i D te siječe CA i CB u točkama A_1 i B_1. Točke A_2, B_2 su simetrične točkama A_1 i B_1 s obzirom na polovišta stranica CA i CB. Dokaži da su točke A, B, A_2, B_2 konciklične.

Teži zadaci

6. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut tako da $|AB| \neq |AC|$. H je ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i M polovište $\overline{BC}$. Točke D i E redom na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su takve da je $|AE| = |AD|$ i D, H, E su kolinearne. Dokaži da je pravac HM okomit na radikalnu os kružnic opisanih trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$.

7. Dan je trokut $\triangle ABC$. Neka je r_A pravac koji prolazi kroz polovište stranice $\overline{BC}$ i okomit je na unutrašnju simetralu kuta $\sphericalangle BAC$. Analogno definiramo i r_B, r_C. Neka su H, I ortocentar i centar upisane od $\triangle ABC$. Pretpostavimo da pravci r_A, r_B, r_C čine trokut (u općem su položaju). Dokažite da je centar opisane kružnice tog trokuta polovište $\overline{HI}$.

3.5. G5: Projektivna geometrija - Ivan Vojvodić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Kako je svima poznato da najbolja predavanja otvaraju i zatvaraju kamp, danas se bavimo projektivnom geometrijom. Za olimpijske potrebe, projektivna geometrija podrazumijeva poseban skup alata, lema i lemica koje se često mogu koristiti u težim zadacima. Predavanje je kombinacija sljedećih literatura:
Alexander Remorov: Projective Geometry
Matija Bucić i Domagoj Ćevid: Harmoniteti
Pratite što ja laprdam na ploči jer su tamo sva rješenja koja vas zanimaju, a ovdje će biti pregled definicija i korisnih teorema.

Projektivna ravnina

Da bismo se bavili projektivnom geometrijom kako spada, trebamo prvo našu euklidsku ravninu proširiti sa jednim objektom koji nazivamo pravac u beskonačnosti.

Definicija 3.5.1. Svakom pravcu u ravnini dodajemo još jednu točku koju nazivamo *točka u beskonačnosti* (tog pravca). Svaki par usporednih pravaca dijeli istu točku u beskonačnosti, odnosno sijeku se u toj točki.

Na ovaj način efektivno svakom "smjeru" u ravnini pridružujemo po jednu točku u beskonačnosti.

Definicija 3.5.2. Skup svih točaka u beskonačnosti nazivamo *pravac u beskonačnosti.*

Definicija 3.5.3. *Projektivna ravnina* je unija euklidske ravnine i pravca u beskonačnosti.

Uočimo da u projektivnoj ravnini vrijedi da se *svaka* dva pravca sijeku u jednoj točki i da *svake* dvije točke određuju pravac.

Dvoomjeri

Definicija 3.5.4. Neka su A, B, C, D 4 međusobno različite kolinearne točke. Njihov *dvoomjer* definiramo kao:

$$(A, C; B, D) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}$$

gdje su dužine usmjerene. Posebno, ako je $D = P_\infty$ točka u beskonačnosti na pravcu ABC, tada

$$(A, C; B, P_\infty) = \frac{BA}{BC}$$

Definicija 3.5.5. Neka su A, B, C, D 4 međusobno različite kolinearne točke i P točka koja nije na pravcu $ABCD$. *Pramen* je skup od 4 konkurentna pravca PA, PB, PC, PD, a dvoomjer tog pramena je

$$(PA, PC; PB, PD) = \frac{sin(\angle BPA)}{sin(\angle BPC)} : \frac{sin(\angle DPA)}{sin(\angle DPC)}$$

Lema 3.5.6. *Neka je a, b, c, d pramen i $A, A' \in a, B, B' \in b, C, C' \in c, D, D' \in d$ takve da su A, B, C, D kolinearne i da su A', B', C', D' kolinearne. Tada*

$$(A, C; B, D) = (A', C'; B', D')$$

Definicija 3.5.7. Neka su A, B, C, D 4 međusobno različite konciklične točke na kružnici ω. Dvoomjer $(A, C; B, D)$ definiramo kao:

$$(A, C; B, D) = (PA, PC; PB, PD)$$

za proizvoljnu točku P na ω takvu da P nije iz skupa $\{A, B, C, D\}$.

Lema 3.5.8. *Neka su A, B, C, D, E 5 međusobno različitih kolinearnih točaka takve da vrijedi*

$$(A, C; B, D) = (A, C; B, E)$$

Tada je $D = E$.

Teorem 3.5.9. *(Pappus) Dana su dva pravca p, q te točke A, B, C na p i D, E, F na q. Tada su presjeci $X \equiv AE \cap BD$, $Y \equiv BF \cap CE$, $Z \equiv CD \cap AF$ kolinearni.*

Teorem 3.5.10. *(Pascal) Neka je ω kružnica te A, B, C, D, E, F točke na ω. Tada su presjeci $X \equiv AE \cap BD$, $Y \equiv BF \cap CE$, $Z \equiv CD \cap AF$ kolinearni.*

Teorem 3.5.11. *(Butterfly) Neka je $ABCD$ tetivni četverokut s opisanom kružnicom ω. Neka je M sjecište dijagonala AC i BD i neka je PQ tetiva od ω kojoj je M polovište. Neka su X, Y sjecišta PQ i AD te PQ i BC redom. Tada je M polovište dužine $\overline{XY}$.*

Harmoniteti

Definicija 3.5.12. Četvorku A, B, C, D za koju vrijedi

$$(A, C; B, D) = -1$$

nazivamo *harmonijska četvorka* ili *harmonitet*.

Definicija 3.5.13. Pramen a, b, c, d za koji vrijedi

$$(a, c; b, d) = -1$$

nazivamo *harmonijski pramen*.

Lema 3.5.14. *Neka je a, b, c, d pramen u točki P i neka je p proizvoljni pravac koji siječe a, b, c u A, B, C redom. Ako vrijede dvije od sljedeće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:*

- $(a, c; b, d) = -1$
- *B je polovište dužine $\overline{AC}$*
- *d je paralelan s p*

Lema 3.5.15. *Neka su A, B, C, D 4 kolinearne točke u tom poretku i P točka koja nije na pravcu $ABCD$. Ako vrijede dvije od sljedeće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:*

- $(A, C; B, D) = -1$
- *PC je simetrala kuta $\angle BPD$*
- *PA je okomit na PC*

Lema 3.5.16. *Neka je ABC trokut i D, E, F točke na dužinama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ redom. neka je točka G presjek pravaca EF i BC. Vrijedi:*

$$(G, D; B, C) = -1 \iff AD, BE \text{ i } CF \text{ su konkurentni}$$

Pol i Polara

Definicija 3.5.17. Neka je ω kružnica s centrom O i radijusom r i P proizvoljna točka različita od O. Neka je P' jedinstvena točka na polupravcu OP za koju vrijedi $OP \cdot OP' = r^2$. Neka je p okomica na OP' u P'. Kažemo da je p *polara* točke P s obzirom na ω i P je pol pravca p s obzirom na ω.

Lema 3.5.18. *Neka je ω kružnica s centrom O i P proizvoljna točka različita od O.*

1. *slučaj: P je izvan ω. Neka su PA i PB tangente iz P na ω. Tada je AB polara od P s obzirom na ω.*
2. *slučaj: P je unutar ω. Neka je t okomica u P na OP i neka t siječe ω u A i B. Neka se tangente na ω u A i B sijeku u X. Tada se X nalazi na OP i okomica u X na OP je polara od P s obzirom na ω.*

Teorem 3.5.19. *(La Hire) Neka je ω kružnica s centrom O i X, Y proizvoljne točke različite od O. Vrijedi:*

X je na polari od Y akko je Y na polari od X

Teorem 3.5.20. *(Desargues) Neka su ABC i $A_1B_1C_1$ trokuti. Vrijedi da su točke $X \equiv AB \cap A_1B_1$, $Y \equiv AC \cap A_1C_1$, $Z \equiv BC \cap B_1C_1$ kolinearne akko su pravci AA_1, BB_1, CC_1 konkurentni.*

Harmonijski četverokut

Definicija 3.5.21. Tetivni četverokut $ABCD$ je *harmonijski četverokut* ako vrijedi $(A, C; B, D) = -1$.

Definicija 3.5.22. Neka je ABC trokut. A-*simedijana* je osnosimetrična slika težišnice iz vrha A u odnosu na simetralu kuta $\angle BAC$.

Lema 3.5.23. *Neka je $ABCD$ tetivan četverokut i ω njegova opisana kružnica. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- $(A, C; B, D) = -1$
- *tangente na ω u točkama B i D se sijeku na AC*
- *AC je A-simedijana trokutu ABD*

Zadaci

1. Dokaži Lemu 23.
2. (Brocard) Dan je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu ω. Definirajmo $X \equiv AB \cap CD$, $Y \equiv AC \cap BD$, $Z \equiv AD \cap BC$. Tada je trokut XYZ autopolaran s obzirom na ω (XY je polara od Z, YZ je polara od X, XZ je polara od Y).
3. Neka je AD visina u šiljastokutnom trokutu ABC, a P proizvoljna točka na $\overline{AD}$. BP siječe AC u M, a CP siječe AB u N. MN siječe AD u Q. Neka je F proizvoljna točka na $\overline{AC}$. FQ siječe CN u E. Dokaži $\angle FDA = \angle EDA$.
4. Neka je ω upisana kružnica trokutu ABC i D, E, F dirališta ω s BC, CA, AB redom. Neka je X unutar trokuta takva da upisana kružnica trokutu XBC dira BC u D. G, H su druga dva dirališta upisane kružnice od XBC. Dokaži da su E, F, G, H konciklične.
5. Neka je ω kružnica kroz točke A, B trokuta ABC i neka ω siječe AC, BC u D, E redom. Neka je N na AB takva da se CN, BD i AE sijeku u jednoj točki. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokaži da su M, N, D, E konciklične.
6. U trokutu ABC, D je diralište upisane kružnice sa stranicom BC. AD siječe upisanu kružnicu opet u X. Neka je $T \neq D$ na AD takva da $BT = BD$ i neka je $S \equiv BT \cap CX$. Dokaži da je $ST = TB$.
7. Neka su ω i Ω kružnice koje se diraju izvana u M i neka je radijus od Ω veći od radijusa od ω. A se nalazi na Ω i ne nalazi se na pravcu koji spaja središta kružnica. Tangente iz A na ω diraju ω u B i C. BM i CM sijeku Ω opet u E i F, redom. Neka je D presjek EF i tangente na Ω u A. Dokaži da, kako A varira, lokus od D je pravac.
8. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $\angle BAC = 90°$ i $\angle ABC < \angle ACB$ i neka je ω njegova opisana kružnica. Tangenta u A na ω siječe BC u D. Neka je E preslika A preko BC, X nožište okomice iz A na BE i Y polovište dužine $\overline{AX}$. Neka BY ponovno siječe ω u Z. Dokaži da je BD tangenta na opisanu kružnicu trokuta ADZ.
9. U nejednakokračnom trokutu ABC, D je polovište stranice $\overline{BC}$. Točke E i F leže na $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom tako da se opisane kružnice trokutima CDE i AEF sijeku na AD u točki P. Simetrala kuta $\angle EPF$ siječe EF u Q. Dokaži da je tangenta u A na opisanu kružnicu trokuta AQP okomita na BC.
10. U tetivnom četverokutu $ABCD$, neka je M polovište stranice $\overline{CD}$ i neka je $N \neq M$ na kružnici opisanoj trokutu ABM takva da vrijedi $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. Neka je $E \equiv AC \cap BD$ i $F \equiv AD \cap BC$. Dokaži da su E, F i N kolinearne.
11. Upisana kružnica ω u šiljastokutnom trokutu ABC dira stranicu BC u točki K. Neka je AD visina u ABC i neka je M polovište dužine AD. N je presjek KM i ω različit od K. Dokaži da se ω i kružnica opisana trokutu BCN diraju u N.

4. Poglavlje

Teorija brojeva

4.1. N1: Kongruencije - Paula Horvat

Link na hintove. Link na rješenja.

Kongruencije

Promotrimo sljedeće skupove $\{1, 5, 9, 13, \ldots\}, \{2, 6, 10, 14, \ldots\}, \ldots, \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$. Vidimo da se svaki od prirodnih brojeva nalazi u točno jednom od tih skupova. Ono što te skupove čini posebnima jest to što svaka dva člana u nekom od skupova daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 4, odnosno, ako odaberemo neke brojeve a i b iz jednog od skupova, imamo $4 \mid a - b$.

Definicija 4.1.1. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a **kongruentan** broju b **modulo** n ako vrijedi $n \mid a - b$. Pišemo: $a \equiv b\ (mod\ n)$.

Neka su $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$. Vrijede sljedeća svojstva:

- $a \equiv a + kn \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n,\ c \equiv d \pmod n \implies a + c \equiv b + d \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n,\ c \equiv d \pmod n \implies ac \equiv bd \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n \implies a^k \equiv b^k \pmod n$
- $ac \equiv bc \pmod n$ i $\gcd(c, n) = 1 \implies a \equiv b \pmod n$.

Eulerov teorem

Definicija 4.1.2. *Eulerova funkcija* je broj brojeva iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji su **relativno prosti** s n.

Svojstva Eulerove funkcije:

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:
$$\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_l}).$$
- ϕ je multiplikativna, tj. vrijedi: $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$, za $M(m, n) = 1$.
- Ako je p prost broj, $\phi(p) = p - 1$.

Teorem 4.1.3. *Eulerov teorem. Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi:*
$$a^{\phi(n)} \equiv 1\ (mod\ n).$$

Direktna posljedica Eulerovog teorema je Mali Fermatov teorem.

Teorem 4.1.4. *Mali Fermatov teorem. Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je p prost broj takav da a nije djeljiv s p. Tada vrijedi:*
$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p).$$

Lakši zadaci

1. Dokaži da kvadrat cijelog broja daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3/pri dijeljenju s 4.
2. Odredite ostatak pri djeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ sa 7.
3. Nađite ostatak pri djeljenju broja $(7^{2014})^{2015} + (3^{2014})^{2015}$ s 11.
4. Neka je n prirodan broj, a $S(n)$ suma njegovim znamenki. Dokažite da vrijedi $n \equiv S(n)\ (mod\, 3)$.
5. Odredite posljednju znamenku broja $7^{7^{100}}$.
6. Nađite sve prirodne brojeve m, n koji zadovoljavaju jednadžbu
$$4^m - 9n = 5.$$
7. Dokažite: $13 | 2^{12n+9} - 5^{4n+1}$.
8. Ako su p i q različiti prosti brojevi, dokažite da je broj $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ djeljiv s pq.

Teži zadaci

9. Za koliko prostih brojeva p vrijedi da $29^p + 1$ višekratnik broja p?
10. Dokaži za za $m, n \in \mathbb{N}$ sljedeća jednadžba nema rješenja:
$$n^{21} - n + 11 = 5^m.$$
11. Neka je $p \geqslant 7$. Dokaži da je broj koji ima $p-1$ jedinica (11..1) djeljiv s p.
12. Dokažite da je umnožak zadnje znamenke broja 2^n i sume njegovih znamenaka bez zadnje djeljiv s 3.
13. Za koliko prirodnih brojeva i za kojeg vrijedi $1 \leqslant i \leqslant 1000$ postoji prirodan broj j za kojeg vrijedi $1 \leqslant j \leqslant 1000$, takav da i dijeli $2^j - 1$?
14. Dokaži da za svaki prost broj p postoji beskonačno mnogo brojeva oblika $2^n - n$ koji su djeljivi sa p.
15. Odredi zbroj:
$$\lfloor \frac{2^0}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2^1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2^2}{3} \rfloor + ... + \lfloor \frac{2^{1000}}{3} \rfloor.$$

4.2. N2: Diofantske jednadžbe - Andrej Čizmarević

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Diofantske jednadžbe rješavamo u skupu cijelih ili skupu prirodnih projeva. Metode koje ćemo koristiti su:

- razne faktorizacije
- promatranje ostataka modulo n
- "izdvajanje" najvećeg zajedničkog djelitelja
- smještanje između kvadrata

Prilikom faktorizacije poželjno je s "desne" strane jednažbe imati konstantu, potenciju s fiksnom bazom (npr. 2^a, $a \in \mathbb{N}$) ili potenciju s fiksnim eksponentom (npr. x^3). Kod umnoška s "lijeve" strane jednažbe često je korisno promatrati najveći zajedniči djelitelj među faktorima te uz pomoć toga i izraza s "desne" izvesti neki zaključak.

Primjer 4.2.1 (Faktorizacija). Ako je $x \cdot (x+1) = 2^a$, $a \in \mathbb{N}_0 \implies x = 2^b$, $x+1 = 2^c$, b, $c \in \mathbb{N}_0$. Sada, kako znamo da su x i $x+1$ relativno prosti, zaključujemo da je manji od njih, tj. x, jednak 1.

Primjer 4.2.2 (Smještanje između kvadrata). x^2+x+1 nije kvadrat jer ga možemo "smjestiti" između x^2 i $(x+1)^2$ (znamo da je x^2 manji od x^2+x+1, a $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ je veći od x^2+x+1 promatramo li x u skupu $\mathbb{N}$).

Zadaci

1. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2+y^2+z^2 = x^2y^2$
2. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x+y = xy$
3. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2-y^2 = 2xyz$
4. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2-3y^2 = 17$
5. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $2xy+3y^2 = 24$
6. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2+xy+y^2 = x^2y^2$
7. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^2+y^2+z^2+u^2 = 2xyzu$
8. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x+y = x^2-xy+y^2$
9. Riješi jednadžbu u skupu prirodnih brojeva: $m^2+(m+1)^2 = n^4+(n+1)^4$
10. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $x^3+3 = 4y(y+1)$
11. Dokaži da x^2+1 nema prostog djelitelja oblika $4k+3$; $x, k \in \mathbb{Z}$.
12. Dokaži da x^2+1 nema djelitelja oblika $4k+3$; $x, k \in \mathbb{Z}$.
13. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva: $y^2 = x^3+7$

4.3. N3: Mali Fermat i Euler - Luka Bulić Bračulj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 4.3.1. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a *kongruentan* broju b *modulo* n ako vrijedi $n \mid a - b$. Pišemo: $a \equiv b \ (mod\ n)$.

Neka su $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$. Vrijedi:

- $a \equiv a + kn \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n,\ c \equiv d \pmod n \implies a + c \equiv b + d \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n,\ c \equiv d \pmod n \implies ac \equiv bd \pmod n$
- $a \equiv b \pmod n \implies a^k \equiv b^k \pmod n$

Definicija 4.3.2. Eulerova funkcija je broj brojeva iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji su *relativno prosti* s n.

Svojstva Eulerove funkcije:

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:
$$\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_l}).$$
- ϕ je multiplikativna, tj. vrijedi $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ ako su n i m relativno prosti.
- Ako je p prost broj, $\phi(p) = p - 1$.

Teorem 4.3.3. ***Eulerov teorem.*** *Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi:*
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Direktna posljedica Eulerovog teorema je Mali Fermatov teorem.

Teorem 4.3.4. ***Mali Fermatov teorem.*** *Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je p prost broj takav da a nije djeljiv s p. Tada vrijedi:*
$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p).$$

Lakši zadaci

1. Odredi ostatak pri djeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ sa 7.
2. Izračunaj $2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + 5^{50} + 6^{60} \pmod 7$.
3. Odredi $2^{98} \pmod{33}$.
4. Odredi posljednju znamenku broja 7^{7^7}.
5. Neka je $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1$. Izračunaj $a_{100} \pmod 7$.

Umjereni zadaci

6. Koliko postoji prostih brojeva p takvih da je $29^p + 1$ višekratnik od p?
7. Pokaži da $19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.
8. Izračunaj posljednje tri znamenke broja $2005^{11} + 2005^{12} + \ldots + 2005^{2006}$.
9. Izračunaj sumu
$$\lfloor \frac{2^0}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2^1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2^2}{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{2^{1000}}{3} \rfloor$$
10. Ako je $a^p \equiv b^p \pmod p$ dokaži da je tada $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

Teži zadaci

11. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Dokaži da je
$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$
djeljiv s 1989.

12. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n \mid 2^n + 1$ i pronađi sve takve proste n.

13. Neka je a_n niz zadan sa
$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$
Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom zadanog niza.

4.4. N4: Polinomi u TB - Vedran Cifrek

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Teorem 4.4.1. *(Teorem o nul - polinomu). Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, jednak je nul - polinomu ako i samo ako $a_i = 0, i = 0, 1, ..., n$.*

Teorem 4.4.2. *(O jednakosti polinoma). Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako $m = n$ i $a_i = b_i, i = 0, 1, ..., n$.*

Teorem 4.4.3. *Svaki polinom stupnja n se može jednoznačno (do na permutaciju) zapisati kao $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma, a $x_1, x_2, \ldots x_n$ ne nužno različite (kompleksne) nultočke polinoma.*

Vieteove formule Neka je $P(x)$ polinom stupnja n: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ te neka je $P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ njegov zapis preko nultočaka. Definiramo $T = \{1, 2, \ldots, n\}$. Onda vrijedi $\sum\limits_{S\subseteq T,\ |S|=n-k} \prod\limits_{i\in S} x_i = (-1)^{n-k} \cdot \frac{a_k}{a_n}$ Za svaki $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Na primjer za $k = n-1,\ n-2$ i 0:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

VRLO KORISNA TVRDNJA: $x - y \mid P(x) - P(y)$

Za svaki polinom s cjelobrojnim koeficijentima P i za svaka dva cijela broja x i y vrijedi da $x-y$ dijeli $P(x)-P(y)$. Analogan zapis $x \equiv y \pmod{n} \implies P(x) \equiv P(y) \pmod{n}$ za svaki prirodan broj n i cijele brojeve x i y.
Korisne ideje:

1. promatranje nultočki, stupnja i ponekad vietovih formula
2. promatranje vrijednosti polinoma za velike brojeve
3. promatranje ostataka pri djeljenje kao u ostalim zadacima iz teorije brojeva (npr. diofantske)
4. promatranje prostih brojeva koji dijele vrijednosti polinoma

Lakši zadaci

1. Postoji li polinom s cjelobrojnim koeficijentima p takav da vrijedi $p(a) = b,\ p(b) = c,\ p(c) = a$ za neke međusobno različite cijele brojeve a, b i c.
2. Pronađi sve polinome kojima su svi koeficijenti ± 1 i sve nultočke cjelobrojne.
3. Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima za koji vrijedi $P(-1) = -4$, $P(-3) = -40$, $P(-5) = -156$. Za koliko najviše brojeva vrijedi $P(P(x)) = x^2$.
4. Pronađi sve polinome s cjelobrojnim koeficijentima p, takve da vrijedi: $a+b \mid p(a)-p(b)\ \forall a,\ b \in \mathbb{Z}, a+b \neq 0$.

Umjereni zadaci

5. Pronađi sve proste brojeve p za koje postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentima $Q(x)$ takav da polinom $1 + p + Q(x^1) \cdot\ Q(x^2) \ldots\ Q(x^{2p-2})$ ima cjelobrojnu nultočku.

6. Neka je $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polinom stupnja $n \geqslant 1$ sa n (ne nužno različitih) cjelobrojnih nultočki. Pretpostavimo da postoje različiti prosti brojevi $p_0,\ p_1, \cdots p_{n-1}$ takvi da je $a_i > 1$ i a_i je potencija broja p_i za svaki $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Odredi sve n za koje postoji takav polinom f.

7. Neka su $m \geqslant 2$ i n prirodni brojevi. Dokaži da postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentima $P(x)$ takav da su $P(0), P(1), \cdots P(n)$ potencije od m.

8. Nađi sve polinome f kojima je vodeći koeficijent jednak 1 za koje postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da $p \mid 2(f(p)!)) + 1$ za svaki prosti $p > N$.

Teži zadaci

9. Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima s stupnjem n, $n > 1$. Neka je Q polinom $Q(x) = P^k(x)$ gdje je $P^1(x) = P(x)$ i $P^k(x) = P(P^{k-1}(x))$ za $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Dokaži da postoji najviše n (različitih) cjelih brojeva t, takvih da je $Q(t) = t$.

10. Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da za svaki prirodni broj n vrijedi $P(n) > n$. Neka je x_k niz definiran s $x_1 = 1,\ x_{i+1} = P(x_i),\ \forall i \in \mathbb{N}$. Također, za svaki prirodni broj N postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $N \mid x_i$. Dokaži da je $P(x) = x + 1$.

4.5. N5: Brojevi - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Dokažite da za bilo koja dva različita prosta broja p, q, postoji prirodan broj n takav da je p najmanji prost djelitelj od n, a q najmanji prost djelitelj od $n+2$.

2. Dokaži da postoji prirodan broj n takav da je ostatak koji 3^n daje pri dijeljenju s 2^n veći od 10^{2021}.

3. Niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prirodnih brojeva zadovoljava $a_1 > 5$ i $a_{n+1} = 5 + 6 + \ldots + a_n$ za sve prirodne brojeve n. Odredite sve proste brojeve p takve da bez obzira na odabir broja a_1, ovaj niz nužno sadrži višekratnik broja p.

4. Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ takve da za sve parove cijelih brojeva (i, j) takvih da je $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $i + j$ i $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ imaju istu parnost.

5. Odredite sve prirodne brojeve n takve da postoji jedinstven nenegativan cijeli broj $a < n!$ takav da
$$n! \mid a^n + 1.$$

6. Neka je $p \geqslant 5$ prost broj. Dokažite da postoji $a \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$ takav da niti $a^{p-1} - 1$ niti $(a+1)^{p-1} - 1$ nisu djeljivi s p^2.

7. Neka je p neparan prost broj. Neka je S podskup od $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ sa $\frac{p-1}{2}$ elementa takav da zbroj svaka dva elementa iz S nije djeljiv s p. Neka je $m < p$ prirodan broj. Označimo sa n broj elemenata $x \in S$ takvih da ostatak koji mx daje pri dijeljenju s p nije u S. Dokaži da vrijedi
$$(-1)^n \equiv m^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

8. Dokaži da za svaki prost broj p postoji prirodan broj n takav da je
$$1^n + 2^{n-1} + \ldots + n^1 \equiv 2020 \pmod{p}.$$

9. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da je m neparan i postoje permutacije f, g, h skupa $\{1, \ldots, n\}$ takve da
$$n \mid f(x)g(x) - m \cdot h(x)$$
za svaki $x \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Neka je p neparan prost broj. Za p-torku $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$ cijelih brojeva iz skupa $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ kažemo da je *kranjska sa sirom* ako $a_1 + \ldots + a_p$ nije djeljivo s p, a
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$
je djeljivo s p. Koliko ima p-torki koje su kranjske sa sirom?

11. Neka je p prost broj. Dokaži da postoji prost broj q takav da za svaki prirodan broj n vrijedi da
$$n^p - p$$
nije djeljiv s q.

12. Neka je ℓ prirodan broj i n prirodan broj veći od ℓ. Dokažite da u skupu $\{1, 2 \ldots, n^2\}$ postoji barem $n - \ell$ prirodnih brojeva k za koje $k! + \ell$ nije kvadrat prirodnog broja.

13. Neka je p prost broj, a $r > 1$ prirodan broj takav da $p | r^7 - 1$. Ako postoje cijeli brojevi a, b takvi da $p | r + 1 - a^2$ i $p | r^2 + 1 - b^2$, dokažite da postoji cijeli broj c takav da $p | r^3 + 1 - c^2$.

5. Poglavlje

Kombinatorika

5.1. C1: Invarijante - Marko Žagar

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Invarijanta, kao što ime kaže, jest veličina koja se ne mijenja nikakvom dozvoljenom promijenom u nekom sustavu. U nekim zadacima gdje se sustav mijenja po određenim pravilima je korisno pronaći invarijantu pomoću koje možemo zaključiti hoće li se neko rješenje dogoditi ili neće. No, najbolje ćemo pokazati što je invarijanta na konkretnom primjeru.

Primjer:

Na stolu je 100 čaša, od kojih je jedna postavljena otvorom prema dolje, a ostale otvorom prema gore. U jednom potezu dozvoljeno je istovremeno preokrenuti dvije čaše. Može li se, ponavljanjem ovog postupka, postići da sve čaše budu postavljene otvorom prema gore.

Rješenje:

Uočimo da je na početku 99 čaša okrenuto otvorom prema gore, a jedna otvorom prema dolje. Odnosno, imamo neparan broj čaša okrenutih otvorom prema gore i neparan broj čaša okrenutih otvorom prema dolje.

Tijekom procesa okretanja možemo se susresti sa dvije situacije: da okrenemo dvije čaše koje su jednako okrenute ili da okrenemo dvije čaše koje su različito okrenute.

Uočimo da se parnost ne mjenja u niti jednom slučaju. Dakle, u ovom primjeru, parnost okrenutih/neokrenutih čaša jest invarijanta sustava. Zaključujemo da nikada sve čaše neće moći biti okrenute otvorom prema gore (naravno, niti prema dolje).

Zadaci

1. U kutiji je m crvenih i n plavih kuglica. U svakom koraku Anica uzima nasumce dvije kuglice iz kutije. Potom ukoliko je izvukla dvije kuglice iste boje, u kutiju stavlja jednu crvenu kuglicu, a u suprotnom u kutiju stavlja jednu plavu kuglicu. Odredite koje će boje biti zadnja preostala kuglica u kutiji ako je na početku:

   a) $m = n = 2022$, b) $m = 2022, n = 2023$.

2. Ploča 8x8 obojena je kao šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svim poljima u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu i obrnuto. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

3. Na ploči su zapisani brojevi $41, 3, 22, 29, 15$. Potez se sastoji od odabira tri broja x, y, z koja mijenjamo s $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Možemo li u konačno mnogo poteza dobiti sljedeće brojeve (ne nužno tim redosljedom)?

   a) $17, 12, 42, 9, 30$

   b) $23, 50, 7, 17, 15$

4. 6 novčića je složeno u krug redom 1kn, 2kn, 1kn, 2kn, 1kn, 1kn. U potezu možemo na dva susjedna staviti po 1 novčić od 1 kn. Možemo li postići da vrijednost svakog tornja od novčića bude jednaka?

5. Neka je n prirodan neparni broj. Brojevi od 1 do $2n$ su napisani na ploči. Janko odabire dva broja s ploče, briše ih i zapisuje njihovu razliku. Ponavlja to dok na ploči ne ostane jedan broj. Dokaži da je taj zadnji broj paran.

6. U nekoj državi ne postoje dva para grada s jednakim međusobnim udaljenostima. Putnik počinje u gradu A odakle putuje u najdalji mogući grad, B. Iz grada B putuje u najdalji mogući grad C. Nakon toga nastavlja putovanje po istom principu. Dokaži da se putnik nikada neće vratiti u grad A.

Teži zadaci

7. Zadan je set $\{3, 4, 12\}$. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati dva broja iz seta, nazovi ih a i b te ih zamijeniti sa $0.6a - 0.8b$ i $0.8a + 0.6b$. Može li se nakon konačnog broja koraka doći do seta $\{4, 6, 12\}$?

8. 3 skakavca sjede u 3 vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala 2 te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo vremena stići u četvrti vrh kvadrata?

9. Na beskonačnoj ploči sastavljenoj od jediničnih kvadratića, konačan broj polja obojen je crnom bojom (ostala su polja bijela). U svako polje bijele boje upisan je broj susjednih polja (polja sa zajedničkom stranicom) crne boje, a u svako polje crne boje upisan je broj susjednih polja bijele boje. Dokažite da je zbroj svih brojeva na ploči uvijek djeljiv s 4.

10. U svakom polju 4×4 matrice stoji broj 1 osim u prvom retku drugog stupca gdje stoji -1. U svakom koraku se mogu u bilo kojem stupcu retku i dijagonali (ne nužno najdužoj dijagonali, dakle moguće je odabrati samo jedan kut) promijeniti predznaci svim brojevima. Dokaži da će u matrici uvijek ostati barem jedna jedinica.

5.2. C2: Igre - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na današnjem predavanju promatrat ćemo situacije u kojima igrači (najčešće 2) igraju neku igru te je cilj odrediti koji igrač, ovisno o zadanim parametrima, ima pobjedničku strategiju.
Kažemo da igrač ima pobjedničku strategiju ako ima niz poteza kojim može osigurati pobjedu, neovisno o tome kako drugi igrač igra (naravno, ti potezi ovise o potezima drugog igrača).

Promotrimo jedan primjer igre.

Primjer 5.2.1. Na hrpi se nalazi n kamenčića. Igrači A i B igraju sljedeću igru: u svakom koraku igrač koji je na redu može s hrpe uzeti $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića. Prvo igra igrač A, a igraju naizmjenično. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.
U ovisnosti o n, odredite koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Načelno, ideja rješavanja ovakvih problema je podjela svih pozicija na disjunktne skupove pobjedničkih i gubitničkih pozicija. Pritom su pobjedničke pozicije one na kojima igrač koji je na redu ima pobjedničku strategiju, a gubitničke one na kojima drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

U gornjem primjeru lako možemo zaključiti kako su brojevi $1, 2, 3$ i 4 sigurno pobjedničke pozicije (s njih možemo uzeti sve kamenčiće u jednom potezu). Dakle, kada je $n = 1, 2, 3, 4$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.
Promotrimo situaciju kada imamo 5 kamenčića: sada, koji god broj kamenčića uzmemo, ostat će još $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića na hrpi. Kako smo ranije zaključili, drugi igrač sada može uzeti sve kamenčiće i pobijediti. Dakle, 5 je gubitnička pozicija, a u toj poziciji drugi igrač ima pojedničku strategiju.
Promotrimo sada situacije kada imamo $6, 7, 8$ ili 9 kamenčića: prvi igrač može uzeti toliko kamenčića da na hrpi ostane još 5 kamenčića, a tada drugi igrač sigurno gubi (s obzirom da je to gubitnička pozicija), odnosno prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Sada, provođenjem ovakvog koraka indukcije, lako vidimo da su (samo) pozicije $n = 5k, k \in \mathbb{N}$ gubitničke, a ostale pobjedničke. Odnosno, prvi igrač ima strategiju za $n \neq 5k$, inače strategiju ima drugi igrač.

Ta strategija je vrlo jednostavna: pobjednik u svakom koraku uzima odgovarajući broj kamenčića kako bi gubitniku ostavio $5k$ kamenčića, odnosno poslao ga u gubitničku poziciju (a ranije smo vidjeli zašto je takva strategija dobra).

Generalizacijom gornjeg dokaza možemo zaključiti i:

- pobjednička pozicija je svaka iz koje postoji potez koji vodi u gubitničku (intuitivno, protivnik je u pozciji iz koje mora izgubiti)
- gubitnička pozicija je svaka iz koje se može doći samo u pobjedničku (intuitivno, protivnik je u poziciji iz koje može pobijediti)

Bitno je primijetiti kako pobjednička pozicija garantira pobjedu samo uz točno određeni niz poteza (bilo kakva pogreška igrača vodi u gubitničku poziciju), dok je gubitnička pozicija sigurno gubitnička (naravno, ako protivnik ne pogriješi).

Neki od principa korisnih kod rješavanja ovakvih problema:

- Indukcija - kao u ranijem primjeru
- Invarijante i monovarijante
- Simetrija - situacija u kojoj neki igrač može uvijek "odgovoriti" na potez prethodnog, pa zato ne može izgubiti

Zadaci

1. Na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k. Dva igrača zatim igraju sljedeću igru: igrač koji je na redu može broju na ploči oduzeti jedan od brojeva $1, 2, ..., k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan), a igraju naizmenično. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

   Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

2. Kao u prvom zadatku, na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k, međutim dva igrača naizmenično broju s ploče oduzimaju jedan od brojeva $1, 2, 2^2, ..., 2^k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan). Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

   Koji igrač sada ima pobjedničku strategiju?

3. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom i žetonima međusobno istog radijusa. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ostalima te da se nalazi u cijelosti unutar ploče. Igrač koji više ne može postaviti žeton na ploču gubi.

   Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

4. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Dvojica igrača s hrpe naizmjence uzimaju m kamenčića ($m \geqslant 1$), a pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako m ne smije biti:

   a) složen broj b) prost broj?

5. Na stolu su dvije neprazne hrpe kamenčića. Dva igrača naizmjence s jedne od hrpa uzimaju po volji mnogo kamenčića. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.

   Za koje rasporede kamenčića na hrpama drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

6. Dva igrača igraju "šah s dva poteza" (tj. šah s normalnim pravilima, osim što svaki igrač igra dva umjesto jednog poteza). Može li neki igrač osigurati neriješen ishod ili pobjedu?

7. Igrači A i B igraju igru sa skakačem na šahovskoj ploči: prvo igrač A postavi skakača na bilo koje polje na ploči, a potom počevši od igrača B igrači naizmjence pomiču skakača na način na koji se skakač miče u šahu. Gubi onaj igrač koji ne može postaviti skakača na polje koje je skakač već posjetio. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

8. Dva igrača igraju igru s čokoladom koja se sastoji od $m \times n$ kockica, te je broj kockica veći od 1. Igrači naizmjence biraju jednu od preostalih kockica te odlome (i pojedu) sve kockice koje se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu dolje u odnosu na odabranu, te i sve one koje su time ostale odvojene od ostatka čokolade (pri čemu gornja lijeva kockica čokolade ostaje nepojedena). Gubi onaj igrač koji pojede zadnju kockicu (tj. onu u gornjem lijevom kutu) jer je to nepristojno.

   Za koje veličine čokolada drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

9. Dana je bijela kvadratna ploča sa 64 polja. Anica i Božica igraju sljedeću igru: prvo Anica oboji n polja u crvenu boju, a potom Božica odabire 4 retka i 4 stupca te sva polja u njima oboji crno. Božica pobjeđuje ako nije ostalo nijedno crveno polje na ploči; u suprotnom pobjeđuje Anica.

   Odredite najmanji n takav da Anica može osigurati pobjedu bez obzira na potez Božice.

Teži zadaci

10. Goci i Lazo igraju igru. Zadan je bilo koji polinom $p(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima, stupnja većeg ili jednakog 1. Na ploči je napisan skup brojeva

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, \dots, p, p+1, \dots, 2p-1, 2p\}$$

    i suma S koja je na početku 0. Goci započinje igru. Svaki igrač u svakom potezu odavire jedan broj $n \in \mathcal{M}$, briše ga s ploče i umjesto sume S na ploču napiše $p(n) - S$. Igra je gotova kada se isprazni $\mathcal{M}$. U tom slučaju, ako je S djeljiv s p pobjeđuje Lazo, inače pobjeđuje Goci.

    Tko ima pobjedničku strategiju?

11. Na ploči na početku piše n uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je n veći od 10. Anica i Božica naizmjence brišu po jedan broj s ploče, dok ne ostanu 2 broja na ploči. Anica pobjeđuje ako su ta 2 broja relativno prosta, a u suprotnom pobjeđuje Božica. Za koje n Anica ima pobjedničku strategiju?

12. Anica i Božica igraju igru. Prvo Božica napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku ona odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Božica odabrati brojeve tako da Anica ne može ostvariti svoj naum?

13. Anica i Božica igraju igru sa sljedećim pravilima. Na početku postoji hrpa s $n \geqslant 2$ kamenčića. Prvo Anica makne s hrpe bilo koji broj kamenčića tako da hrpa ne ostane prazna, a zatim njih dvije naizmjence miču kamenčiće s hrpe tako da ako je u prethodnom potezu maknuto k kamenčića, u sljedećem potezu ih smije biti maknuto najviše $2k - 1$. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju, ako pobjeđuje ona koja makne zadnji kamenčić?

14. Anica i Božica igraju sljedeću igru, uz dani prirodni broj n. Anica prvo napiše broj 1, a potom naizmjence svaka od njih zapiše broj za 1 veći ili duplo veći od prethodnog, pri čemu nijedan napisani broj ne smije biti veći od n. Pobjeđuje igrač koji napiše broj n. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju?

5.3. C3: Prebrojavanja - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom ćemo predavanju proći nekoliko osnovnih principa i klasičnih problema vezanih za prebrojavanja.
To uključuje:

1. Princip zbroja - broj elemenata unije dva disjunktna konačna skupa je suma brojeva elemenata tih skupova - ako imamo x predmeta tipa A i y predmeta tipa B ukupno imamo $x + y$ predmeta

2. Princip umnoška - broj elemenata Kartezijevog umnoška konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata tih skupova

3. Princip bijekcije - dva skupa imaju jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija između njih

4. Matematička indukcija

5. Dirichletov princip - ako $k \cdot x + 1$ predmeta smještamo u x kutija, u barem jednoj će biti $k + 1$ predmet

Bitno je da znamo da n povrh k označava izraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A n faktorijela izraz

$$n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$$

Dame i gospodo, spremni smo za zadatke!

Uvodni zadaci[1] [2]

1. Lucija je kupila kutiju Domaćica s k kekasa (keksiju?) koji su svi međusobno različiti. Na koliko načina Lucija može dati svakoj osobi na kampu po keks?

2. Novaku je Merlin poklonio kutiju Domaćica s k kekasa (keksiju?) koji su svi međusobno različiti. Novak šeta domom i daje keks svakoj osobi koju sretne. Ako nekog sretne više puta, svaki put mu da novi keks. Na koliko načina Novak može podijeliti svoje kekse?

3. Mislav je na dražbi osvojio kutiju s k različitih vrsta Domaćica: r_1 keksić prve vrste, r_2 keksića druge vrste, ... , r_k keksića k-te vrste. Mislav sistematično dijeli svakoj osobi po keksić. Na koliko to načina može napraviti?

4. Paula je sanjala kutiju Domaćica s k keksova koji su svi međusobno različiti. Dok je mjesečarila, dijelila ih je sudionicima kampa na koje bi nabasala, koji su od njih radili tornjeve. Svaki put kada bi srela osobu, dala bi joj keksić koji bi onda ta osoba stavila na vrh svoga tornja. Na koliko načina je to mogla napraviti?

5. Leonu je na glavu pala kutija Domaćica u kojoj su jedino k srca, pa ih je odlučio podijeliti. Šetao je po domu i dijelio Domaćice. Za razliku od Novaka, ljudima koje je viđao više puta Domaćicu bi dao samo jednom. Na koliko načina može podijeliti domaćice?

6. Širola je dobio na lutriji! Osvojio je kutiju od k Domaćica u kojoj su isključivo trokutići. Poput Novaka, šetao je domom i dijelio kekse kome bilo. Na koliko ih je načina mogao podijeliti?

7. LBB je iz daleke Amerike donio kutiju keksa *Housewives* u kojoj se nalazilo k identičnih keksića. Poput Širole i Novaka, odlučio je tumarati domom i dijeliti kekse. Nije pazio na to da ista osoba ne dobije više kekasa, no zbog progresivnih se načela ipak pobrinuo da svaka osoba na kampu dobije barem jedan keks. Na koliko je načina to mogao učiniti?

Zadaci

8. Kutija Domaćica ima 5 vrsta keksića. Bdnan Bnibal S. S. dobro zna da je za optimalno gastronomsko iskustvo potrebno spojiti 2 keksa iste vrste po čokoladnom dijelu. Kutiju Domaćica takvu da je svaku vrstu keksa moguće optimalno kušati naziva *savršenom*. Koliko je savršenih kutija domaćica?

[1] U ovim zadacima redoslijed dijeljenja nije bitan, načinom smatramo stanje na kraju podjele.
[2] Uzimamo da se na kampu nalazi $n = m - 2$ osoba.

9. Rabrden, Rogja, Ronba i Kojna igraju belu, no prije toga se moraju obuti. Oblače po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko načina se mogu obuti ako na svaku nogu najprije moraju obući čarapu, a onda cipelu? Prebrojavamo procese oblačenja, a ne konačan rezultat!

10. Mentori organiziraju put iz Zagreba na ljetni kamp u Zadru. Opće je poznato da je Republika Hrvatska cjelobrojna koordinatna mreža sa Zagrebom u ishodištu. Zadar se nalazi na koordinatama $(6, 7)$.
    (a) Koliko ima najkraćih puteva do Zadra?[3]
    (b) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze Ogulinom, koji se nalazi na koordinatama $(3, 3)$?
    (c) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze niti jednim gradom u čijoj je blizini jezero? Takvi gradovi su točno oni čije su obje koordinate neparne.

11. Ema i Andrej su za vrijeme pauze otišli po domaćice, no cigla je nestala pa im je za povratak u predavaonicu potrebna šifra. Tajnim su metodama saznali da je šifra neki peteroznamenkasti broj koji ima paran broj parnih znamenaka. Koliko je mogućih šifri?

12. Na raspolaganju imamo 7 različitih predavaonica. Na koliko različitih načina možemo odabrati koje ćemo koristiti za kviz? Možemo koristiti između 0 i 7 predavaonica, uključivo.

13. 100 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

    Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

14. Na koliko načina možemo staviti u red A nezaraženih ljudi, B ljudi maski i C zaraženih ljudi tako da svaki čovjek maska mora stajati izmedu zaraženog i nezaraženog čovjeka te nijedan zaraženi čovjek ne smije stajati pokraj nezaraženog?

15. Oko okruglog stola nalaze se kartice s imenima 11 MNM mentora (svi različitih imena). Na početku velikog sastanka nitko nije nije sjedio kod kartice sa svojim imenom. Je li moguće rotirati stol za neki kut tako da nakon rotacije barem 2 mentora sjede kod kartice sa svojim imenom?

16. U veeeeeeelikoj dvorani nalazi se n stolaca u istom redu, označenih prirodnim brojevima od 1 do n. Mentori pripremaju učionicu za sastanak tako što stavljaju oznake na stolce na koje će k učenika smjeti sjesti. Koliko ima odabira stolaca ako znamo da učenici ne smiju sjesti jedan do drugoga?

Ma dosta više primjene!

17. Pokažite da je broj $(4n)!$ djeljiv sa 2^{3n} i 3^n.
18. Dokažite da $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
19. Dokažite da $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
20. Dokažite da $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
21. Dokažite da $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
22. Dokažite da $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
23. Dokažite da
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n + n^2) \cdot 2^{n-2}$$

Bis

24. *Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

25. *Interval $\langle 0, 20\rangle$ je pokriven s 13 otvorenih podintervala tako da nijedan nije podskup unije ostalih. Dokaži da bar jedan od ovih podintervala ima duljinu ne veću od 3.

[3] Smijemo se kretati samo rubovima koordinatne mreže

Šalabahter - problemi distribucije

- Želimo odrediti broj rasporeda m različitih objekata u n različitih kutija tako da:
  1. U svaku kutiju možemo staviti najviše jedan objekt:
  $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$
  2. svaka kutija može sadržavati proizvoljno mnogo objekata:
  $$n^m$$
  Primjetite da poredak unutar kutija nije bitan.
  3. svaka kutija može sadržavati samo jedan objekt, a na raspolaganju je r_1 objekata prve vrste, ..., r_k objekata k-te vrste, gdje je $n = r_1 + \ldots + r_k$:
  $$\frac{n!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$
  4. svaka kutija može sadržavati proizvoljan broj objekata, ali poredak unutar kutije je bitan:
  $$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+m-1)$$
- Želimo odrediti broj rasporeda m identičnih objekata u n različitih kutija tako da
  1. u svaku kutiju stavimo najviše jedan objekt:
  $$\binom{n}{m}$$
  2. u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj objekata:
  $$\binom{n+m-1}{m-1}$$
  3. u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj objekata, ali tako da niti jedna kutija ne bude prazna:
  $$\binom{m-1}{n-1}$$

5.4. C4: Grafovi - Ema Borevković

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U zadacima iz teorije grafova najkorisnije metode su indukcija, pricnip ekstrema i algoritamsko razmišljanje. Sada ćemo navesti neke tvrdnje i definicije.

Definicija 5.4.1. *Stablo* je jednostavan, povezan, usmjeren graf za kojeg vrijedi jedna od sljedećih ekvivalentnih tvrdnji:

- nema ciklusa
- broj čvorova je n, a bridova $n-1$
- između svaka dva čvora postoji jedinstveni put
- micanje bilo kojeg brida učinit će da graf više nije povezan

Definicija 5.4.2. *Bipartitan graf* je graf koji se može obojati u dvije boje tako da nikoja dva susjedna čvora nisu obojana u istu boju. To bojanje možemo promatrati kao podijelu čvorova na lijeve i desne tako da postoje bridovi samo između te dvije skupine, ali ne i unutar (ne postoji brid između dva lijeva ili dva desna čvora, ali može postojati između jednog desnog i jednog lijevog).

Teorem 5.4.3. *Graf je bipartitan ako i samo ako nema ciklusa neparne duljine.*

Teorem 5.4.4. *(Eulerova formula) Za planaran graf s V čvorova, E bridova, koji ravninu dijeli na F područja vrijedi $V - E + F = 2$.*

Lema 5.4.5. *(Lema o rukovanju) Neka je d_i stupanj i-tog čvora u grafu s n čvorova, a $|E|$ broj bridova u tom grafu. Tada vrijedi $\sum_{k=1}^{n} d_k = 2|E|$.*

Zadaci

1. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput (u terminima teorije grafova: dokaži da svaki turnir (potpun usmjeren graf) ima Hamiltonov put).
2. Neka je G povezan graf s m bridova. Dokažite da je moguće označiti bridove s brojevima $1, 2, \ldots, m$ u nekom poretku tako da za svaki čvor, ako taj čvor ima stupanj barem 2, onda je najveći zajednički djelitelj svih oznaka bridova spojenih na taj čvor jednak 1.
3. U sobi je $2n + 1$ ljudi, gdje je n prirodan broj. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokažite da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.
4. U državi s 1993 gradova, svaki grad ima barem 93 neusmjerene veze prema drugim gradovima. Dokažite da, ako postoji put između svaka dva grada, onda postoji put između svaka dva grada koji prolazi kroz najviše 63 ceste.
5. U državi ima 1983 gradova. Svaka dva su povezana cestom, a svaka cesta je u vlasništvu neke od 10 kompanija. Dokažite da postoji neparni ciklus kojemu su sve veze u vlasništvu iste kompanije.
6. Dokažite da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.
7. Dano je stablo s n vrhova. Neka je v_0 bilo koji vrh, te neka je v_1 najudaljeniji vrh od v_0 (bilo koji takav). v_2 se definira analogno, u odnosu na v_1. Dokažite da je put $v_1 v_2$ promjer stabla. Promjer stabla je najdulji put u tom stablu.
8. Dan je graf u kojemu kroz svaki vrh prolazi najviše n neparnih ciklusa. Dokažite da je vrhove tog grafa moguće obojati u najviše $2n + 2$ boje, tako da ne postoji veza između dva vrha iste boje.
9. Dan je graf G i njemu komplementaran graf G'. G' ima sve iste čvorove kao G samo što vrijedi da su čvorovi u' i v' povezani u G' ako i samo ako čvorovi u i v nisu povezani u G. Dokaži da je suma kromatskih brojeva grafova G i $G' \leqslant n + 1$ pri čemu je n broj čvorova u grafu G.

Teži zadaci

10. Dokažite da u svakom povezanom grafu s n čvorova postoji ili skup čvorova takvih da nikoja dva nisu povezana veličine barem $\lceil \sqrt{n} \rceil$ ili ciklus veličine barem $\lceil \sqrt{n} \rceil$.

11. Dana je $4m \times 4m$ ploča u kojoj su neka polja obojana plavo. Za dva polja ćemo reći da su povezana ako su u istom redku ili stupcu. Znamo da je svako polje povezano s najmanje dva plavo obojana polja. Koliki je najmanji mogući broj plavih polja?

12. Na konačnom neusmjerenom grafu G dozvoljeno je provoditi sljedeće operacije:

    (i) Ako je neki čvor povezan s neparno mnogo drugih čvorova moguće je izbrisati njega zajedno sa svim bridovima koji izlaze iz njega.

    (ii) Moguće je duplicirati graf G u graf G' tako da svaki čvor I' iz G' bude povezan sa čvorom I iz G te da čvorovi I' i J' iz G' budu povezani ako i samo ako su čvorovi I i J iz G povezani.

    Dokažite da je nekim konačnim nizom poteza moguće napraviti da svi preostali čvorovi budu nepovezani.

5.5. C5: Komba mix - Andrej Čizmarević

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Zadana je tablica dimenzija 4×4. U svim poljima tablice upisane su jedinice, osim u polju koje se nalazi desno od polja u donjem lijevom kutu, gdje je upisano -1. U svakom potezu možemo izabrati redak, stupac ili dijagonalu (u bilo kojem od dva smjera; pod dijagonalom se podrazumijevaju i "kraće" dijagonale pa čak i samo polje u kutu) te se svim brojevima u tom retku, stupcu ili dijagonali promijeniti predznak. Može li se primjenom takvih poteza dobiti tablica u kojoj su svi upisani brojevi jedinice?

2. Vrhovima n-terokuta pridruženi su realni brojevi x_1, $x_2 \dots x_n$. Neka su a, b, cid brojevi pridruženi četirima uzastopnim vrhovima. Ako je $(a-d)\cdot(b-c)<0$ možemo zamijeniti brojeve bic tj. vrhu kojem je bio pridružen broj b sada će biti pridružen broj c i obrnuto. Postoji li n za kojeg možemo izabrati brojeve x_1, $x_2 \dots x_n$ tako da se opisani postupak može beskonačno puno puta ponavljati?

3. Zadan je prirodan broj n. Imamo vagu i n utega s masama $2^0, 2^1, 2^2 \dots 2^{n-1}$. Naš je zadatak u n koraka postaviti utege na vagu. U prvom koraku izaberemo uteg i stavimo ga na lijevu stranu vage. U svakom od sljedećih poteza postavljamo po jedan od preostalih utega na vagu pazeći pritom da vaga cijelo vrijeme ostane nagnuta na lijevu stranu. Odredi broj načina na koji se utezi mogu postaviti na vagu poštujući opisane uvjete.

4. 1000 učenika stoji u krugu. Dokaži da postoji cijeli broj k, uz uvjet $100 \leqslant k \leqslant 300$, tako da postoji niz od $2k$ "uzastopnih učenika" kod kojeg je broj djevojčica među prvih k učenika jednak broju djevojčica među drugih k učenika.

5. Nekoliko prirodnih brojeva je zapisano u nizu. U svakom potezu Alisa izabere dva uzastopna broja x i y tako da je $x > y$ te je x lijevo od y i zamjeni par (x, y) ili s $(y+1, x)$ ili s $(x-1, x)$. Dokaži da taj postupak Alisa može ponoviti samo konačno puno puta.

6. Neka je n prirodan broj. Odredi najmanji prirodan broj k sa sljedećim svojstvom: Zadani su realni brojevi $a_1, a_2 \dots a_d$ tako da u zbroju daju n te su svi između 0 i 1 (uključujući). Moguće je dane brojeve podijeliti u k skupina tako da ne postoji skupina u kojoj je zbroj njenih elemenata veći od 1.

7. U ravnini je zadano 2013 crvenih i 2014 plavih točaka tako da ni jedne tri nisu na istom pravcu. Potrebno je nacrtati k pravaca koji dijele ravninu na način da ni u jednom dijelu ne postoji i plava i crvena točka. Odredi najmanji k tako da je opisano moguće postići neovisno o unaprijed zadanim točkama.

6. Poglavlje

Algebra

6.1. A2: KAGH+ - skupina mentora

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Za sve nejednakosti vrijede sljedeća osnovna svojstva:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

KAGH nejednakosti

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ i $n \in \mathbb{N}$. Definiramo sljedeće sredine brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

- kvadratna sredina: $K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$
- aritmetička sredina: $A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$
- geometrijska sredina: $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- harmonijska sredina: $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost:

$$K \geq A \geq G \geq H.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Napomena. Ako se u zadatku spominju nenegativni realni brojevi i nejednakost, velika je mogućnost da se radi upravo o KAGH nejednakosti.

CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski) nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i i y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $k > 0$ takav da je $y_i = kx_i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$).

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ i $y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Definiramo funkciju

$$f(a) = (x_1 a - y_1)^2 + (x_2 a - y_2)^2 + \ldots + (x_n a - y_n)^2$$

To je realna funkcija koja postiže nultočke samo u slučaju da je svaka zagrada nula. Štoviše, osim u tom slučaju funkcija nema nultočaka. Sada raspišimo funkciju:

$$f(a) = x_1^2 a^2 - 2x_1 y_1 a + y_1^2 + x_2^2 a^2 - 2x_2 y_2 a + y_2^2 + \ldots + x_n^2 a^2 - 2x_n y_n a + y_n^2$$

Grupiramo li članove po stupnju dobivamo

$$f(a) = a^2 A - aB + C$$

gdje su

$$A = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$
$$B = 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$$
$$C = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

Znamo kako ta funkcija nema nultočaka osim možda jedne kada je $x_1 a - y_1 = x_2 a - y_2 = \ldots = x_n a - y_n$, a tada je nultočka $a = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \frac{y_n}{x_n}$. To znači da je diskriminanta te kvadratne funkcije uvijek manja ili jednaka 0, a jednakost se postiže u gore komentiranom slučaju. Diskriminanta je upravo

$$B^2 - 4AC \leqslant 0 \iff B^2 \leqslant 4AC$$

$$\iff (2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n))^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

A to je upravo trebalo i pokazati. □

Sada pokazujemo drugi oblik prethodne nejednakosti, odnosno nejednakost koja se vrlo lagano dokazuje iz CSB-a.

CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski) nejednakost: Engel forma

Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ realni brojevi i $y_1, y_2, \ldots y_n$ pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

Dokaz. Započinjemo množenjem obje strane nejednakosti s $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ i dobivamo

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \geqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

Kako su svi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitivni realni brojevi, smijemo korijenovati i definirati $b_1 = \sqrt{y_1}, b_2 = \sqrt{y_2}, \ldots, b_n = \sqrt{y_n}$. Sada je i $\frac{x_i^2}{y_i} = \frac{x_i^2}{b_i^2} = \left(\frac{x_i}{b_i}\right)^2$. Sada direktnom primjenom CSB nejednakosti na $\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}, \ldots \frac{x_n}{b_n}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dobivamo upravo tvrdnju teorema.

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \left(\left(\frac{x_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{b_n}\right)^2\right)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

□

Lakši zadaci

1. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

2. Dokažite da za svaki realan broj a vrijedi

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0$$

3. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geqslant a+b+c$$

4. Neka su x, y realni brojevi takvi da vrijedi $x^2+y^2=1$. Dokažite da za takve brojeve vrijedi

$$-\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}$$

5. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$$

6. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

7. Dokaži da za sve pozitivne brojeve $a, b\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geqslant 2^{n+1}.$$

8. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1)\geqslant 3pq$$

9. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b vrijedi:

$$ab^3+a^3b\leqslant a^4+b^4.$$

10. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$(a+b+c)abc\leqslant a^4+b^4+c^4.$$

11. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c.$$

12. Dokažite nejednakost:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Umjereni zadaci

13. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y za koje vrijedi $x+y=1$ vrijedi i nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$$

14. (Nesbittova nejednakost) Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

15. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2$$

16. Neka su $a, x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi i $n\geqslant 2$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+...+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geqslant\frac{n^2}{2(x_1+...+x_n)}.$$

17. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze. Dokaži da vrijedi

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

18. Za pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

19. Neka je $P(x)$ polinom s pozitivnim koeficijentima. Dokaži da ako

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{P(x)}$$

vrijedi za $x=1$, onda vrijedi i za sve $x>0$.

20. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

21. * Dokaži AG nejednakost za sve pozitivne realne brojeve. (Uputa: matematička indukcija).

Teži zadaci

22. Dokaži da za trokut sa stranicama a, b, c i površinom S vrijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

23. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

za realne brojeve $x, y, z \neq 1$ koji zadovoljavaju uvjet $xyz=1$.

24. (IMO Shortlist 2001.) Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ po volji odabrani pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+...+\frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

25. (IMO 2001. Zad 2.) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

6.2. A4: Funkcijske jednadžbe - skupina mentora

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 6.2.1. Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija $f : A \to B$ svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B. Ako je $x \in A$ onda element koji funkcija njemu pridružuje nazivamo $f(x)$. Skupa A se naziva domena funkcije f, a skup B kodomena.

Funkcija je potpuno zadana kada joj znamo domenu, kodomenu i vrijednost $f(x)$ za sve brojeve $x \in A$. Funkcijska jednadžba je tip zadatka u kojem je zadana neka tvrdnja koja vrijedi za funkciju i treba odrediti sve funkcije za koje vrijedi ta tvrdnja i dokazati da ne postoje druge funkcije osim onih koje smo pronašli.
Najčešći način za dokazati da su to jedina rješenja (način na koji se i rješavaju funkcijske) je promatrati različite slučajeve od kojih jedan sigurno mora vrijediti za funkciju i u svakom slučaju dokazati da funkcija mora biti nekog oblika. $f(x) = 0\ \forall x$ je često rješenje jednadžbe koje moramo dobiti u nekom posebnom slučaju.
NAPOMENA - MORAMO PROVJERITI JESU LI SVA DOBIVENA RJEŠENJA RJEŠENJE POČETNE JEDNADŽBE: Većina tvrdnji koje dokažemo za funkciju su implikacije iz početne jednadžbe tako da uvijek moramo provjeriti da to što smo dobili zapravo vrijedi za sve brojeve za koje je zadano da vrijedi. Provjeru treba obavezno negdje napisati na papiru (koliko god ona bila trivijalna), da se izgubi bod na natjecanju.

Ideje za rješavanje:

- Pogađanje koja bi mogla biti rješenja funkcije prije ili tijekom rješavanja zadataka, da lakše usmjerimo razmišljanje i znamo kakvi bi tvrdnje mogli očekivati da ćemo dokazati.

- Uvrštavanje konkretnih vrijednosti, koje se lijepo ponašaju, u neku ili sve nepoznanice za koje znamo da vrijedi tvrdnja: Najćešće 0, 1 i -1, ponekad 2, -2 i još neki "jednostavniji" brojevi ako se čini kao da nam je potrebno odrediti $f(0)$, $f(1)$ ili slično.

- Uvrštavanje jedne varijable u zavisnosti na ostale, npr. ako funkcija vrijedi za sve x i y možemo u umjesto y uvrstiti x, $-x$, $2x$, $f(x)$ ili nešto kompliciranije. Uvrštavanje x u y i y u x tj. zamjena x i y može biti korisna ako će neki članovi izraza ostati isti, a neki će se promijeniti.

- Ako jednadžba koju rješavamo više izraza u sebi oblika f (nešto) možemo promatrati za kakve x i y će ti izrazi biti jednaki, te ih uvrstiti.

- Ako smo uvrštavanjem dobili na jednostavniji način neku specifičnu vrijednost od f, možemo probati uvrstiti nešto u početnu jednadžbu da primijenimo tvrdnju. Npr. ako pomoću uvrštavanja dobijemo $f(f(x) + x) = x$ korisno je probati dobiti izraz $f(f(x) + x)$ nekim drugim uvrštavanjem.

- Funkcija je injektivna ako $\forall x_1, x_2\ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$. Ova tvrdnja se ovako i dokazuje, pretpostavimo da neka dva broja imaju iste vrijednost funkcije i iz tvrdnji koje imamo za funkciju dokažemo da ti brojevi moraju biti jednaki. Ako smo dokazali injektivnost onda ako dobijemo jednakost f (prvi izraz) = f(drugog izraza) znamo da je prvi izraz = drugi izraz.

- Funkcija je surjektivna ako $\forall y\ \exists x\ (f(x) = y)$. Surjektivnost ćemo najćešće dokazati tako da dobijemo da je f (neki izraz) = nekom surjektivnom izrazu. A surjektivni izraz će najćešće biti neka linearna funkcija $ax + b$ gdje je $a \neq 0$. Kada smo dokazali surjektivnost smijemo za bilo koji y reći da postoji neki a takav da je $f(a) = y$ i uvrstiti takav a u neku tvrdnju. Češće se koristi surjektivnost za broj 0, ali može biti bitno i za druge brojeve i izraze. Također, nekad je bitno znati točan oblik broja a, a nekad nije.

- **Cauchijeva funkcijska jednadžba** je $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Za racionalne x i y su sva rješenja ove jednadžbe $f(x) = cx$ gdje je c konstanta. U realnim brojevima ona ima jako čudna rješenja bez dodatnih uvjeta, no uz neki dodatan uvjet je rješenje za sve realne rješenje isto $f(x) = cx$. Bitni uvjeti za koje će imati samo to rješenje u realnim su: ako je ograničena s barem jedne strane na bilo kojem intervalu (ovo je najćešći uvjet koji će te trebati pokazati na natjecanju ako trebate riješiti cauchijevu u R), ako je monotona na intervalu (možda se rijetko pojavi da sami trebate dokazati), ako je neprekidna (bit će zadano u zadatku).

- Funkcija je neparana ako je $\forall x\ f(x) = -f(-x)$. Funkcija je parna ako je $\forall x\ f(x) = f(-x)$. Ova dva svojstva je ponekad korisno promatrati, dokazati i koristiti.

Uvodni zadaci

1. Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava
$$(f(2^{x^3+x}))^2 - f(2^{2x}) \leqslant 2 \quad \wedge \quad (f(2^{2x}))^3 - 3f(2^{x^3+x}) \geqslant 2$$
za sve $x \in \mathbb{R}$.
Dokažite da ta funkcija nije injekcija.

2. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava
$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
Dokažite da je f surjekcija.

3. Dana je funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ koja zadovoljava sljedeću nejednakost $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(f(n+1) - f(n))(f(n+1) + f(n) + 4) \leqslant 0$$
Dokažite da f nije injekcija.

4. Pronađite sva rješenja *Cauchyeve funkcijske jednadžbe* iz $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$, tj. funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
za sve racionalne brojeve x i y.

Lakši zadaci

5. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$
za sve realne brojeve x i y.

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(xf(y) - y^2) = (y+1)f(x-y)$$
za sve realne brojeve x i y.

Umjereni zadaci

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$
za sve realne brojeve x i y.

8. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(f(x) + x + y) = f(x+y) + yf(y)$$
za sve realne brojeve x i y.

9. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(xy) = yf(x) + x + f(f(y) - f(x))$$
za sve realne brojeve x i y.

Teži zadaci

10. Nađi sve funkcije $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da vrijedi
$$f(x + f(y)) = yf(xy+1)$$
za sve pozitivne realne brojeve x i y.

11. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(x + yf(x^2)) = f(x) + xf(xy)$$
za sve realne brojeve x i y.

12. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$
za sve realne brojeve x i y.

Dio II

Hintovi predavanja

7. Poglavlje

Geometrija

7.1. G1: Sukladnost i sličnost - Leon Križanić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Što bi se dogodilo ako tražimo trokut čiji je zadan trokut nasuprot manjoj stranici?
2. Sukladnost trokuta
3. Sličnost trokuta ABD, ACD i ABC.
4. "Produžite" stranicu preko točke C do točke E tako da je $CD \parallel BE$.
5. Povucite paralelu iz polovišta A_P sa stranicom $\overline{AB}$
6. Povuci paralele u točkama H i G stranicama kvadrata.
7. Dovoljno je pokazati da su vrhovi P, Q, M, N pravi te da su dvije susjedne stranice jednake duljine.
8. Povucite okomicu iz točaka A, B, C, D na redom pravce CM, DN, AP, BQ.
9. Uoči sukladnost trokuta ΔBCF i ΔCEF
10. Povucite pravac AD i BC do njihovog sjecišta Q te označite polovišta L i N.
11. Produžite pravac AC preko točke C i pravac SD preko točke D.
12. Produžite pravac BC preko točke C.
13. Što dobijemo ako povučemo paralelu s pravcem BD i produžimo osnovicu AB?
14. Napravi simetralu kuta kod vrha čija je veličina kuta jednaka 2α.
15. Uoči sličnost trokuta ΔBFG i ΔBCN te trokuta ΔADE i ΔAMC.

7.2. G2: Upisana i pripisana kružnica - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uočiti sukladne trokute.
2. Uočiti sukladne trokute.
3. Za prvi smjer hint je fantomiranje, za drugi konstrukcija.
4. Podijeli trokut na manje.
5. Svedi zadatak na dokazivanje da je nešto polovište stranice.
6. Angle chasing.
7. Homotetija.
8. Podijeli na trokute.
9. Koji bi to omjer bio?
10. Angle chasing.
11. Dodaj radijus upisane kružnice u sliku. Što uočavaš?
12. Presjeci 2 pravca.
13. Iskoristi formulu za površinu.
14. Fantomiranje.
15. Iskoristi formulu za površinu.
16. Angle chasing.
17. Angle chasing.
18. Angle chasing.

Za daljnje hintove slobodno mi se javite na mail utrobicicnika@gmail.com

7.3. G3: Trigonometrija - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Sinusov poučak na trokute ABM i AMC.
2. HINT 1: $\angle EAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$
   HINT 2: sinusov poučak na AEB pa AFE
   HINT 3: adicijske formule
3. Talesov teorem (obodni kutevi nad promjerom su pravi), teorem o obodnim kutevima, sinusov poučak.
4. trisekcija kuta $\angle BAC$
5. Cevin poučak
6. Iskoristiti potenciju točke B, dovoljno je dokazati da su A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične, a u tu svrhu je dovoljno izračunati $|BA_1|$ i $|BA_2|$.
7. Dovoljno je pokazati $\dfrac{HA'}{A'K} = \dfrac{GD}{DM}$, pri čemu je A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC.

7.4. G4: Homotetija - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Homotetija ide iz težišta.
2. Homotetija ide iz ortocentra.
3. Homotetijama iz A tangente slikajte u pravac PR.
4. N je centar neke spiralne sličnosti.
5. D je centar neke spiralne sličnosti.
6. Ako je A' preslika A preko O iP sjecište $A'M$ sa (ABC). Kamo spiralna sličnost u P šalje (ABC)?
7. Zadatak 2..

7.5. G5: Projektivna geometrija - Ivan Vojvodić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. sličnost i lema 14.
2. lema 16. i lema 23.
3. lema 15.
4. lema 8.
5. lema 23. i potencija točke
6. teorem 19. i lema 14.
7. na ω nađi harmonijski četverokut
8. lema 15. i angle chase
9. $AEFP$ je harmonijski četverokut
10. $G \equiv AV \cap CD$ i P je drugi presjek (AMB) i CD. Promotri $(G, P; D, C)$.
11. $Z \equiv EF \cap BC$, a $T \equiv KI \cap \omega$, gdje je I centar ω. Što vrijedi za Z, N i T?

8. Poglavlje

Teorija brojeva

8.1. N1: Kongruencije - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Svaki prirodan broj zapiši u ovisnosti od dijeljenju s $3tj.4$.
2. Pronađi potenciju koja je kongruentna 1 modulo 7.
3. Pronađi potenciju koja je kongruentna 1 modulo 11
4. Zapiši broj pomoću sume umnoška znamenki i potencija broja 10.
5. Promatraj ostatak pri dijelju brojem 10. Pomoći će ti Eulerova funkcija.
6. Promatrajte ostatke pri dijeljenju brojem 4.
7. $8 \equiv -5 \pmod{13}$.
8. Mali Fermatov poučak.
9. Mali Fermatov poučak.
10. Mali Fermatov poučak.
11. Mali Fermatov poučak.
12. 4. zadatak.
13. Eulerova funkcija.
14. Mali Fermatov teorem.
15. $2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$,
    $2^{2n-1} \equiv 2 \pmod{3}$.

8.2. N2: Diofantske jednadžbe - Andrej Čizmarević

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Promtraj ostatke mod 3.
2. Faktoriziraj tako da s jedne strane jednadžbe bude konstanta.
3. Zapiši x kao $x' \cdot d$ i y kao $y \cdot d$ pri čemu je d najveći zajedniči djelitelj brojeva xiy
4. Promtraj ostatke mod 3.
5. Ako su a i b djeljivi s d te je $a + c = b$ tada je i c djeljiv s d. Primijeni...
6. Uočimo da je korisno izlučiti najveću zajedničku mjeru x i y. Sada imamo x' dijeli y'^2...
7. Promatramo moguću parnost pa zaključimo da moraju svi biti parni... $x = 2x'$ Nastavimo razmišljati u tom smjeru.
8. Pomnožimo s 2 pa zapišimo kao zbroj kvadrata (uz dodavanje konstanti ako nam treba za nadopunu).
9. Raspišemo pa uočimo da izraze uz n možemo zapisati kao kvadrat trinoma. Promotrimo izraz preko m s druge strane jednakosti pa razmislimo zašto imamo kontradikciju.
10. Izraz s desna nadopunimo do potpunog kvadrata pa faktoriziramo. Pogledaj uvod...
11. Mali Fermatov teorem, svođenje na kontradikciju.
12. Promotri umnožak dva broja kongruentna s 1 mod 4. Prethodni zadatak...
13. Faktorizirajmo zbroj kubova pa primijenimo lemu iz prošlog zadatka.

8.3. N3: Mali Fermat i Euler - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. $3^{100} + 5^{100} = 3^{6\cdot 16} \cdot 3^4 + 5^{6\cdot 16} \cdot 5^4$

   Koristeći mali Fermatov teorem možemo odrediti $3^{6\cdot 16}$ i $5^{6\cdot 16} \pmod 7$.
2. Slicno kao u prvom zadatku, eksponente zapišemo u obliku $6k + r$
3. 33 nije prost broj, tako da za njega ne vrijedi mali Fermatov teorem. Možemo ili promatrati mod 3 i mod 11 ili izračunati $\phi(33)$ te iskoristiti Eulerov teorem.
4. Određivanje posljednje znamenke ekvivalento je pronalasku ostatka modulo 10. Budući da je $\phi(10) = 4$, trebamo odrediti $7^7 \pmod 4$.
5. Kako bismo upotrijebili mali Fermatov teorem, trebamo odrediti $a_{n-1} \pmod 6$. Za početak nam moze pomoći promotriti ostatak modulo 6 prvih nekoliko članova niza.
6. 29 je prosti broj. Promatramo zasebno $p = 29$ i $p \neq 29$ gdje možemo primjeniti Fermatov teorem.
7. Pokažite da je $2^{6k+2} \equiv 4 \mod 18$ te primjenite Fermatov teorem.
8. Gledajte zasebno ostatak pri dijeljenju s 8 i sa 125.
9. Gledajte moguće ostatke od 2^n te probajte pretvoriti izraze u cijele brojeve. Pritom taj cijeli broj može i biti u obliku razlomka.
10.
11. $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$. Gledajte zasebno modulo 9, 13 i 17.
12. Probajte na malim brojevima i pokušajte pogodit neki niz za koji vrijedi.
13. Promatrajte ostatak pri dijeljenju prostim brojem. Iz Fermatovog teorema imamo $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 \mod p$ za $p > 3$.

8.4. N4: Polinomi u TB - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Korisna tvrdnja
2. uvrsti nultočku i odreda koja sve može biti,
   Zapis polinoma preko nultočaka ili Vieteove formule
3. Korisna tvrdnja u formi $x \equiv a \pmod{n} \implies P(x) \equiv P(a) \pmod{n}$ Dokaži da nema rješenja.
4. Koristi korisnu tvrdnju kako bi dobio da $a + b$ dijeli još nešto
5. parnost
6. Vieteove formule, dokazati da polinom nema pozitivnih nultočaka
7. potencije ne moraju biti nužno razlčite, izraz $(x - k) \cdot Q(x)$, gdje je Q bilo kakav polinom, ima vrijednost 0 u točki k.
8. Dovoljno veliki brojevi i Wilson
9. pretpostaviti suprotno;
   Dokazati $P^k(x) = x \implies P(P(x)) = x$
10. Korisna tvrdnja u formi $x \equiv a \pmod{n} \implies P(x) \equiv P(a) \pmod{n}$ Dokazati $f(1) = 2$ i slično jakom indukcijom dovršiti zadatak

8.5. N5: Brojevi - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Kineski teorem o ostacima.
2. Ima puno pristupa, probaj iskoristiti teorem kojim možeš kontrolirati ostatak od 3^n modulo velike potencije od 2. (Lifting the Exponent lema npr.)
3. Ako $p \neq 2$, probaj da niz bude što jednostavniji mod p. Slučaj $p = 2$ je zanimljiviji.
4. Kada je binomni koeficijent paran? Izvedi računski uvjet, nije teško.
5. Ako n nije specijalnog oblika, onda iz jednog a možeš konstruirat drugi i uništiti jedinstvenost. Za egzistenciju se treba malo potruditi.
6. Pretpostavimo suprotno, onda imamo jako puno malih i jako puno velikih nultočaka polinoma $x^{p-1} - 1$ modulo p^2, ali tih nultočaka ima najviše $p - 1$ (za dokaz toga može pomoći Henselova lema, guglaj).
7. Razmišljaj globalno, izmnoži prikladne stvari.
8. Eksponenti imaju svoj period, ono ispod eksponenta ima svoj period. Ukupno je period $p(p-1)$. Promatraj što se događa, možemo li kontrolirati?
9. Razmišljaj globalno, lijevo imamo umnoške a desno samo brojeve. Je li moguće da se za svaki x događa takva stvar. Promatraj djeljivosti s prikladnim djeliteljima od n.
10. Iskoristi simetriju, shiftaj za konstantu možda? Nula nije neki specifičan ostatak u ovom slučaju.
11. Uzmi prikladan q takav da $q \mid p^p - 1$ (zato jer želimo da order od p bude jednak p, da možemo kontrolirati neke stvari).
12. Pronađi A takve da ne mogu i $A! + \ell$ i $(A + 1)! + \ell$ biti kvadrati.
13. Igraj se sa multiplikativnosti Legendreovog simbola. Ako ne znaš što je Legendreov simbol, guglaj.

9. Poglavlje

Kombinatorika

9.1. C1: Invarijante - Marko Žagar

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Kako se mijenja broj plavih kuglica tijekom jednog koraka?
2. Promatraj parnost crnih/bijelih polja pri svakom okretu
3. Nemoj pokušavati dobiti te brojeve. Uočavaš li nešto što je jednako skupovima $\{x, y, z\}$ i $\{2x - y, 2y - z, 2z - x\}$
4. Promotri koji "tornjevi" sudjeluju u jednom potezu. Pokušaj na osnovu toga svrstati ih u dva skupa kao što su u prošlom zadatku bila crna i bijela polja.
5. Parnost zbroja svih brojeva.
6. Duljina zadnje proputovane udaljenosti.
7. Zbroj kvadrata.
8. Postavite skakavce u koordinatni sustav te promotrite kako se mijenjaju koordinate prilikom skoka.
9. U ovom zadatku nedostaje postupak koji ponavljamo konačno mnogo puta: stvorite ga!
10. Promatraj 8 polja na bridovima (rubovi bez 4 kuta).

9.2. C2: Igre - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Prisjetite se *primjera 1.*
2. Pokušajte igrati igru s manjim primjerima.
3. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača (*simetrija*)?
4. Pokušajte igrati igru s malim primjerima te tako naslutite rješenje i dokažite ga indukcijom.
5. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača?
6. Pretpostavite da drugi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu pa dokažite suprotno.
7. Tko od igrača i na koji način može osigurati da postoji dostupno neposjećeno polje nakon svakog poteza? Smislite strategiju kojom biste to osigurali.
8. Slično kao u 6. zadatku, pretpostavite da prvi igrač uvijek gubi te dokažite suprotno.
9. Obojajte crvenom bojom polja na dijagonali. Zašto nije moguće obojati manje polja crvenom bojom?
10. Dokažite da Lazo ima pobjedničku strategiju te odredite tu strategiju. Primijenite ideju kao u 7. zadatku.
11. Primijetite da su dva uzastopna broja sigurno relativno prosta, kao i da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta te iskoristite tu ideju (rješenje će se razlikovati za paran i neparan n).
12. Dokažite da, ako se na početku najveći broj ponavlja paran broj puta, tada će se i nakon svakog poteza također ponavljati paran broj puta (*Zašto je to dovoljno?*).
13. Pokušajte naslutiti rješenje na malim primjerima te zatim pronađite što jednostavnije strategije koje funkcioniraju općenito.
14. Na malim primjerima naslutite koji n su rješenje te induktivnim zaključcima to i dokažite (ti induktivni zaključci neće biti baš standardni).

9.3. C3: Prebrojavanja - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pogledati Šalabahter
2. Pogledati Šalabahter
3. Pogledati Šalabahter
4. Pogledati Šalabahter
5. Pogledati Šalabahter
6. Pogledati Šalabahter
7. Pogledati Šalabahter
8. Prikaži rezultat kao broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja neke jednadžbe.
9. Probaj nekako promotriti sve nizove čarapa i cipela, pa vidjeti možeš li od njih dobiti ove "valjane" u kojima su čarape ispred odgovarajućih cipela.
10. U svakom koraku možeš ići gore ili desno. Koliko je kojih koraka?
11. Koliko na svakom mjestu može biti različitih znamenaka ako odaberemo gdje su parne? Koliko ima mjesta?
12. Svaku možemo koristiti ili ne koristiti.
13. Razmišljaj induktivno.
14. Prvo postavi ljude maske
15. Dirichlet
16. Probaj označiti neke stolce pa nekako jednoznačno odrediti sjedala iz njih.
17. Koliko ima parnih od 1 do $4n$?
18. U nekom razredu biraš grupu od k.
19. Razdvoji na 2 slučaja ovisno o tome je li Marko odabran.
20. Biraj tim i kapetana
21. Biraj podskup
22. Od n ljudi iz razreda odaberi žene, pa od žena plavuše.
23. Biraj tim s proizvoljno članova i kapetana i zapisničara.
24. Napravi tablicu
25. Pretpostavi suprotno

9.4. C4: Grafovi - Ema Borevković

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Indukcija.
2. DFS.
3. Dokažite da postoji klika veličine barem $n + 1$.
4. Pretpostavite suprotno.
5. Teorem 3.
6. Teorem 4.
7. Pretpostavite suprtono, to jest da promjer čine neki drugi čvorovi c i d pa razdvojite na slučajeve ovisno o poziciji njihovog najmanjeg zajedničkog pretka u odnosu na čvorove v_1 i v_2.
8. Izbacite najmanje bridova tako da više nema nepoarnih ciklusa.
9. Indukcija.
10. Pohlepno uzimajte čvorove redom počevši od onog s najmanjim stupnjem dok možete.
11. Izgradite biparitan graf s $8m$ čvorova.
12. Provedite indukciju po jednom vrlo specifičnom broju.

9.5. C5: Komba mix - Andrej Čizmarević

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Želimo "obojati" određena polja u tablici tako da njihov umnožak bude invarijantan. Na koja polja ne možemo utjecati?

   Odg: Na polja u kutevima. Nakon što njih izostavimo, promatramo polja na dijagonalama duljine 3.

2. Monovarijanta je motivirana "čudnim uvjetom" nakon raspisivanja.

3. Promatrati rekurzivno.

   Princip ekstrema.

4. Dokažite najprije da je moguće pronaći grupu u kojoj je u jednoj polovici jedna djevojka više nego u drugoj neovisno o k. Potom promatrajte polja susjedna toj grupi, donesite zaključke o tome nalaze li se na tim poljima dječaci ili djevojčice te iskoristite uvjet da je k između 100 i 300.

5. Monovarijanta.

   Desniji broj stalno raste.

   Pridruži težine mjestima u nizu.

6. Na manjim primjerima pokušajte pogoditi da je odgovor $2n-1$ te svođenjem na kontradikciju (zapisivanjem nejednakosti koje su nam poznate temeljem pretpostavke da postoji izbor kada je potrebno barem $2n$ brojeva) pokažite da je $2n-1$ dovoljno.

7. Na manjim primjerima pokušajte pogoditi odgovor.

   Induktivno razmišljajte.

   Promatrajte konveksnu ljusku.

10. Poglavlje

Algebra

10.1. A2: KAGH+ - skupina mentora

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. AG na x i $\frac{1}{x}$
2. Prebacite $-4a^4$ na desnu stranu nejednakosti pa AG.
3. Pomnožite sve sa $2 \to 3$ puta primijenite AG i zbrojite dobivene nejednakosti.
4. Koristeći KG pokažite da je $(x+y)^2 \leqslant 2$.
5. Pomnožite sve sa 2 i više puta primijenite AG.
6. AG na svaki od faktora s lijeve strane
7. AG na lijevu stranu pa ponovno na $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$.
8. AG zasebno primjenite na svaku zagradu.
9. $ab^3 + a^3b = ab(a^2 + b^2)$, uočite da je ab geometrijska sredina brojeva a^2 i b^2, primijenite AG dva puta.
10. Primijenite prethodni zadatak.
11. Dodajte $2(a+b+c)$ na obje strane i više puta primijenite AG.
12. AG na $\left\{1, 1+\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \ldots, 1+\dfrac{1}{n}\right\}$ (sve skupa $n+1$ varijabli)
13. Izmnožiti zagrade, AH na $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
14. Zapisati na malo drugačiji način pa AG na 6 varijabli.
15. Napravite sličan trik kao u Nesbittovoj.
16. Supstitucija te A-G nejednakost.
17. Iskoristite Pitagorin poučak te primjenite A-G nejednakost.
18. CSB
19. $P(1) \geq 1$, zapišite polinom pomoću koeficijenata i iskoristite CSB.
20. Prvo primijeni A-G nejednokost, zatim A-H.
21. Indukcija po broju varijabli, pokazati korake $n \to 2n$ i $n \to n-1$.
22. Heronova formula, zatim A-G nejednakost.
23. CSB, zatim A-G.
24. Neka je $y_0 = 1, y_i = 1 + x + ... + x^i$. Nađite rekurzivnu vezu između x_i i y_i.
25. Primjenite Jensenovu nejednakost te iskoristite zadatak broj 6.

10.2. A4: Funkcijske jednadžbe - skupina mentora

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Za koje x je $2^{x^3+x} = 2^{2x}$? Koje vrijednosti funkcija može poprimiti u tim točkama?
2. Dokažite da je $f(t) = c + x$, gdje je t neki izraz koji ovisi o x, a c neka konstanta. (*Zašto je to dovoljno?*)
3. Dokažite da je funkcija po apsolutnoj vrijednosti padajuća.
4. Prvo riješite slučajeve kada je domena $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.
5. Korištenje $f(f(x)) = x$.
6. Promratranje za koje a vrijedi $f(a) = 0$
7. Za moje rješenje je hint promatranje slučajeva $f(0) = 0$ i $f(0) \neq 0$ i korištenje surjektivnosti, a na AOPS-u postoje razna rješenja
8. Uvrštavanja s $f(0)$.
9. Injektivnost i surjektivnost, uvrštavanje $(x, 0)$ i $(0, x)$
10. izjednačavanje izraza u f-ovima, pretpostavljanje da je $f(x)$ veći i manji od $\dfrac{1}{x}$ za neki x.
11. "ružna" uvrštavanja, neparnost, Cauchijeva
12. pametno iskoristiti da za svaki realni broj z postoje x i y takvi da je $f(x) - f(y) = z$.

Dio III

Rješenja predavanja

11. Poglavlje

Geometrija

11.1. G1: Sukladnost i sličnost - Leon Križanić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Neka su zadane stranice trokuta δABC $b, c(b < c)$ i kut β nasuprot kraćoj stranici b. Na jednom kraku kuta β nanesemo stranicu c. Time su određeni vrhovi A i B trokuta. Treći vrh C mora ležati na luku kružnice sa središtem u A i polumjerom b. Neka je v_a duljina visine trokuta spuštene iz A na drugi krak kuta β. Ako je $b < v_a$, onda taj lik neće sjeći drugi krak tog kuta β. Ako je $b = v_a$, onda je taj trokut postoji (i to pravokutan). Ako je b dulji od visine v_a, onda će postojati dvije točke na kraku β: C_1 i C_2.

2. Neka su zadane dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ takve da se međusobno raspolavljaju i označimo sjecište s S. A, B, C, D čine četverokut. Uočimo da su trokuti ΔABS i ΔCDS sukladni po SKS poučku, pa je kut BAC jednak SCD, što znači da su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednake duljine i paralelni. Analogno se dokaže da su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ paralelne. Obratno,ako je zadan paralelogram $ABCD$ i označimo sjecište dijagonala s S, uočimo također sukladnost trokut ΔABS i ΔCDS, kao i za trokute ΔASD i ΔBCS.

3. Označimo veličinu kuta kod vrha A s α, a kod vrha B s β. Kako su ΔADC, ΔDBC i ΔABC međusobno slični (poučak KK),određenim omjerimo dolazimo do traženih jednakosti.

4. Ako provučemo pravac kroz $\overline{AC}$ i označimo točku E na pravcu AC tako da je $\overline{CD} \| \overline{BE}$. Jer je $\angle EBC = \angle BCD$ (provjerite zašto?) kao i $\angle BEC = \angle EBC$, trokut ΔBCE je jednakokračan i $|\overline{BC}| = |\overline{CE}$, te primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti dobivamo zadani omjer.

5. Neka je zadan trokut ΔABC te polovišta P_1, P_2 na redom stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ te povucimo dužinu $\overline{AP_1}$ i $\overline{BP_2}$. One se sijeku u točki T, koja je težišnica. Kako je $\overline{P_1P_2} \| \overline{AB}$, trokuti ΔABT i ΔP_1P_2T su slični. Iz proporcionalnosti odgovarajućih stranica dobijemo traženu tvrdnju.

6. Povucimo okomice s točke G na stranicu $\overline{AB}$ i s točke H na stranicu BC. Tada dobijemo redom točke G' i H'. Kako su $|\overline{GG'}| = |\overline{HH'}|$, $\angle G'GE = \angle H'HF$ (kutevi s okomitim kracima), dobijemo da su trokuti $\Delta GG'E$ i $\Delta HH'F$ sukladni, te iz sukladnosti dobijemo $|\overline{EG}| = |\overline{FH}|$.

7. Izvor.

8. Izvor.

9. Zbog $|AC| = |CD|$ $|CE| = |CB$, $\angle ACE = \angle DCB = 120°$ su trokuti ΔACE i δCBD. Onda odatle slije $|AE| = |BD|$ i $\angle EAC = \angle BDC$.te su sukladni i trokuti ΔACM i ΔDCN. Dakle $|CM| = |CN|$. Kako je $\angle ACM + \angle MCD = 60°$, tada je i $\angle MCD + \angle DCN = 60°$, tj. $\angle MCN = 60°$.

10. 1.zadatak.1 razred 2002 godina.

11. Neka je $\angle CBA = 30°$.Te neka su $b = |\overline{AC}|$,$c = |\overline{AB}|$ i $a = |\overline{BC}|$. Produžimo pravac BC preko točke C i neka je E sjecište pravaca SD i AE. Primjetimo tada da su trokuti ΔABC i ΔASE slični. Tada je

$$\frac{b}{\frac{c}{2}} = \frac{a}{|\overline{SE}|},$$

tj.

$$|\overline{SE}| = \frac{ac}{2b}.$$

Kako je jedan kut u trokutu ΔABC jednak $30°$, slijedi da je $c = 2b$, pa uvrštavanjem u zadnju nejednakost dobivamo $|\overline{SE}| = a = |\overline{BC}$, iz čega slijedi da su ta dva trokuta sukladna. Prema teoremu o omjeru težišnice u trokutu ΔABE

$$|\overline{SD}| = \frac{1}{3}|\overline{SE}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}|,$$

što je trebalo i dokazati.

12. Izvor.

13. Izračunajmo površinu trokuta preko Heronove formule $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dakle iznosi $P = \frac{9\sqrt{15}}{2}$ te duljinu polumjera $r = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Duljina visina na najdulju stranicu trokuta je $v_a = \frac{3\sqrt{15}}{14}$. Označimo s A_1 i B_1 točke na redom stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ gdje paralelni pravac kroz točke središte upisane kružnice siječe te stranice. Kako su ΔABC i ΔA_1B_1C slični, vrijedi $\frac{v_a - r}{v_a} = \frac{O_1}{O_2}$. Iz ovoga slijedi $O_1 = 15$ cm.

14. Neka je povučena simetrala kuta iz vrha B i točka D sjecište te simetrale tog kuta sa stranicom $\overline{AC}$. Tada je $|\overline{AD}| = |\overline{BD}$. Jer je $\angle CBD = \angle BAC$ i $\angle ACD$ zajednički kut, trokuti ΔABC i ΔBDC su slični. Tada vrijedi:

$$\frac{c}{y} = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}.$$

Kako je $ac = by$, iz omjera $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}$ slijedi $b^2 - a^2 = ac$, što je trebalo i dokazati.

15. Iz sličnosti ΔBFG i ΔBCN slijedi $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{x}$,gdje je $x = |CN|$. Odatle je $x = \frac{ab}{a+b}$.Iz sličnosti ΔADE i ΔAMC slijedi $\frac{a+b}{a} = \frac{b}{y}$, gdje je $y = |CM|$.Odatle je $y = \frac{ab}{a+b} = x$. Označimo $P(\Delta ABQ) = P_1$ i $P(MCNQ) = P_2$. I sada imamo:

$$P(\Delta ABC) = P_1 + P(\Delta AMC) + P(\Delta BNC) - P_2,$$

odnosno

$$\frac{ab}{2} = P_1 + \frac{1}{2}b \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{ab}{a+b} - P_2.$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi $P_1 = P_2$.

11.2. G2: Upisana i pripisana kružnica - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Na linku
2. Na linku
3. Na linku
4. Označimo središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ sa I. Površina trokuta $\triangle ABC$ je očito suma površina $\triangle IBA$, $\triangle ICA$ i $\triangle IBC$. Kako je visina iz I na bilo koju od stranica trokuta jednaka radijusu upisane kružnice r, lako zaključujemo da su površine tih trokuta $\frac{c \cdot r}{2}$, $\frac{b \cdot r}{2}$ i $\frac{a \cdot r}{2}$ redom. Tvrdnju zadatka dobijamo zbrajanjem dobivenih površina.
5. Neka u trokutu ABC simetrala kuta $\angle BAC = \alpha$ siječe opisanu kružnicu trokuta u točki T. Povucimo okomicu iz T na BC i označimo njeno nožište s N. Kad bi N bilo polovište stranice BC, TN bi morala biti simetrala stranice pa bismo bili gotovi. Kad bismo dokazali da su trokuti CTN i TNB sukladni, iz toga bi slijedilo $CN = BN$, pa bismo bili gotovi. Uočavamo obodne kuteve u tetivnom četverokutu $ABTC$: $\angle CBT = \angle CAT = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle BCT = \angle BAT = \frac{\alpha}{2}$. Iz toga zaključujemo da je $\angle NCT = \angle NBT$, a kako je $\angle TNC = \angle TNB = 90°$ te je TN zajednička stranica tih trokuta, trokuti TNC i TNB su sukladni po poučku KSK, stoga smo gotovi.
6. Lema o trozupcu
7. Na linku
8. Općinsko natjecanje 2010 SŠ3 8
9. Općinsko natjecanje 1997 SŠ2 1
10. Općinsko natjecanje 1994 SŠ3 4
11. Županijsko natjecanje 2010 SŠ2 4
12. Županijsko natjecanje 2001 SŠ2 3
13. Županijsko natjecanje 2009 SŠ2 3
14. Državno natjecanje 2017 SŠ2
15. Državno natjecanje 2019 SŠ2
16. Državno natjecanje 2010 SŠ2
17. Državno natjecanje 2016 SŠ2
18. Skakavac 2012. prvo kolo sš2

11.3. G3: Trigonometrija - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Primjenom sinusovog poučka na trokut ABM dobivamo
$$\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle ABM} = \frac{BM}{AM}.$$
Slično, primjenom sinusovog poučka na trokut AMC dobivamo
$$\frac{\sin \angle CAM}{\sin \angle ACM} = \frac{CM}{AM}.$$
Budući da je $BM = CM$ iz prethodne dvije relacije direktno dobivamo tvrdnju zadatka.

2. Zbog vanjske simetrale kuta $\angle BAC$ imamo da je $\angle EAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Budući da je četverokut $AEBC$ tetivan, znamo da je $\angle AEB = 180°$. Kombiniranjem dobivenih veličina kuteva dobivamo $\angle ABE = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°$, odnosno primjenom sinusovog poučka
$$|AE| = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°\right).$$
Ponovnom primjenom sinusovog poučka (sada u trokutu $\triangle AFE$) dobivamo
$$\begin{aligned}|AF| &= |AE| \sin\frac{\alpha}{2} \\ &= 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°\right)\sin\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$
Tvrdnja zadatka sada postaje ekvivalentna sljedećoj (zbog $|AB| = 2R\sin\gamma$ i $|AC| = 2R\sin\beta$):
$$4R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°\right)\sin\frac{\alpha}{2} = 2R(\sin\gamma - \sin\beta).$$
Kraćenjem s $2R$ i supstitucijom $\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ dolazimo do izraza
$$2\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\gamma - \sin\beta$$
kojeg je sada lako pokazati korištenjem adicijskih formula. Budući da smo tako pokazali izvedenu ekvivalentnu tvrdnju, pokazali smo i tvrdnju zadatka.

3. Da bismo dokazali tvrdnju zadatka dovoljno je dokazati $QB = DP$. Označimo $\angle CDB = \alpha$ i $\angle DCA = \beta$. Iz sinusovog poučka na trokute DAP i QBC imamo
$$DP = AD \cdot \sin\alpha \qquad \text{i} \qquad QB = BC \cdot \sin\beta. \tag{11.1}$$
Budući da je $ABCD$ tetivan i AC je promjer opisane kružnice, vrijedi
$$AD = 2R \cdot \sin\beta \qquad \text{i} \qquad BC = 2R \cdot \sin\alpha \tag{11.2}$$
pa iz (11.1) i (11.2) slijedi $DP = QB$.

4. EMC 2021 J2

5. IMO SL 2001, G1
Skica drugačijeg rješenja:
Računamo omjere potrebne za primjenu Cevinog poučka, bez smanjenja općenitosti uzmimo $|BX| : |XC|$, pri čemu je X sjecište pravaca AA_1 i BC. Povucimo pravac paralelan stranici trokuta $\overline{BC}$ kroz središte kvadrata A_1 i označimo njegova sjecišta sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom sa W i Y. Pomoću sličnosti trokuta (KKK poučak) dobivamo
$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|WA_1|}{|A_1Y|}.$$
Korištenjem trigonometrije pravokutnog trokuta i zbrajanjem duljina dužina dobivamo
$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{1 + \operatorname{ctg}\beta}{1 + \operatorname{ctg}\gamma}.$$
Zbog cikličnosti i Cevinog poučka dobivamo tvrdnju zadatka.

6. IMO 2008
   Primijetimo da je dovoljno pokazati da su točke A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične (leže na istoj kružnici), a ostatak tvrdnje će direktno slijediti iz toga. Tvrdnju ćemo pokazati koristeći potenciju točke B, odnosno želimo pokazati $|BA_1| \cdot |BA_2| = |BC_1| \cdot |BC_2|$.

   Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ i D nožište visine iz vrha A. Za početak imamo neka trivijalna opažanja iz uvjeta zadatka i polovišta stranice:

$$|BM| = |MC| = \frac{a}{2}$$
$$|A_1M| = |HM| = |A_2M|$$
$$|BA_1| = |BM| - |A_1M|$$
$$|BA_2| = |BM| + |A_2M|$$

   iz čega slijedi
$$|BA_1| \cdot |BA_2| = |BM|^2 - |A_1M|^2 = |BM|^2 - |HM|^2$$
   pa primjenom Pitagorinog poučka ($|HM|^2 = |HD|^2 + |DM|^2$) dobivamo izraz koji trebamo izračunati:
$$|BM|^2 - |HD|^2 - |DM|^2 = ?$$

   Budući da znamo $|BM| = \frac{a}{2}$, ostaje nam izračunati preostale 2 duljine u traženom izrazu.

   Trokuti BDH i BCF (za F nožište visine iz B) su pravokutni pa imamo
$$|HD| = |BD| \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2R\cos\beta\cos\gamma.$$

   Osim toga vidimo i da je
$$|DM| = |BM| - |BD| = \frac{a}{2} - 2R\sin\gamma\cos\beta = R\left(\sin\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta\right).$$

   Uzmemo li u obzir sve izračunate veličine, raspisivanjem algebarskih izraza dobivamo
$$|BA_1| \cdot |BA_2| = 4R^2(\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - \cos^2\beta),$$
   a analogno isto dobivamo i za $|BC_1| \cdot |BC_2|$ čime smo pokazali tvrdnju zadatka.

7. državno 2017, 3A, 4. zadatak
   Skica drugačijeg rješenja:
   Označimo sa A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC. Zbog
$$GM \parallel HK \iff \triangle HKA' \sim \triangle GMD \iff \frac{HA'}{A'K} = \frac{GD}{DM}$$
   dovoljno je pokazati $\frac{HA'}{A'K} = \frac{GD}{DM}$.

   Iz prethodnih zadataka i primjera znamo
$$|HD| = 2R\cos\beta\cos\gamma$$
$$|BH| = 2R\cos\beta.$$

   Primjenom sinusovog poučka na trokut ABA' dobivamo $|BA'| = 2R\sin(90° - \beta) = 2R\cos\beta$ pa zbog sličnosti trokuta zaključujemo
$$|HA'| = 2|HD| = 4R\cos\beta\cos\gamma.$$
   Osim toga, zbog $\angle DAM = \beta - \gamma$ imamo $|A'K| = 2R\sin(\beta - \gamma)$.
   Nadalje računamo $|DM| = |DC| - |MC|$. Iz trokuta AMC dobivamo
$$MC = b\frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)},$$
   iz čega slijedi
$$|DM| = b\left(\cos\gamma - \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)}\right).$$

U računanju $|GD| = |AD| - |AG|$ koristimo trokut AGF i tetivnost četverokuta $AEHF$ (nasuprotni pravi kutevi). Iz sinusovog poučka imamo

$$\frac{|AF|}{\sin(90^\circ + \beta - \gamma)} = \frac{|AG|}{\sin \gamma},$$

odnosno imamo

$$|AG| = \frac{b \cos \alpha \sin \gamma}{\cos(\gamma - \beta)}$$
$$|AD| = b \sin \gamma = c \sin \beta.$$

Spajanjem svih dobivenih izraza i korištenjem adicijskih formula dobivamo tvrdnju zadatka.

11.4. G4: Homotetija - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Uzimamo homotetiju iz težišta sa koeficijentom $-\frac{1}{2}$. Ta homotetija vrhove šalje u polovišta nasuprotnih stranica (zbog poznate tvrdnje da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$). Nadalje, dobivamo trokut čiji su vrhovi polovišta stranica. Taj trokut je homotetična slika originalnog trokuta. Stoga se težište originalnog trokuta slika u težište malenog trokuta, a lako se da provjeriti da su pravci na kojima leže visine okomiti na stranice originalnog trokuta i prolaze kroz polovišta, pa su zapravo visine malog trokuta simetrale stranica velikog trokuta. To znači da je taj ortocentar zapravo središte opisane kružnice velikog trokuta. Dakle ta homotetija šalje ortocentar trokuta u središte opisane kružnice istog trokuta, pa je tvrdnja dokazana.

2. U ovom rješenju koristimo dvije poznate leme. Prva je da je preslika ortocentra preko nožišta visine leži na opisanoj kružnici trokutu. Druga je da preslika ortocentra preko polovišta stranica također leži na opisanoj kružnici. Sada konstruiramo homotetiju iz ortocentra s koeficijentom $\frac{1}{2}$. Ta homotetija očigledno vrhove slika u polovišta spojnica vrhova s ortocentrom. Nadalje, povučemo li polupravac iz ortocentra kroz polovište stranice, vidimo da sjecište tog polupravca siječe opisanu kružnicu u točki koja se tom homotetijom preslika u polovište stranice. Analogno se dokazuje za nožište. Stoga vidimo da homotetija iz ortocentra preslikava opisanu kružnicu trokuta upravo u kružnicu koja prolazi kroz navedenih 9 točaka.

3. Označimo zadanu kružnicu sa k. Promatrat ćemo dvije homotetije s centrom u točki A:

   Hom 1: homotetiju h_1 koja tangentu na k u točki S preslikava u pravac PR. Uočimo da je $h_1(S) = N$ pa je $h_1(k)$ pripisana kružnica trokuta $\triangle AKL$ koja dira stranicu KL u točki N.

   Hom 2: homotetiju h_2 koja tangentu na k u točki Q preslikava u pravac PR. Uočimo da je $h_2(Q) = M$ pa slijedi da je $h_2(k)$ upisana kružnica trokuta $\triangle AKL$ koja dira stranicu KL u točki M.

   Sada tvrdnja $|KM| = |LN|$ slijedi iz činjenice da je udaljenost jednog vrha trokuta od dirališta upisane kružnice na stranici čiji je to vrh jednaka udaljenosti drugog vrha te stranice od dirališta pripisane kružnice na toj stranice; štoviše, vrijedi

$$|KM| = |LN| = s - |AL|$$

   gdje je s poluopseg trokuta $\triangle AKL$.

4. Izvor.

5. Izvor.

6. Izvor.

7. Izvor.

11.5. G5: Projektivna geometrija - Ivan Vojvodić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Bucić i Ćevid, stranica 20/29
2. Bucić i Ćevid, stranica 18/29
3. Neka $Z \equiv EF \cap BC$. $(A, P; Q, D) = -1$ prebacimo iz C na EF i dobijemo $(F, E; Q, Z) = -1$, a tada je očito i $(DF, DE; DQ, DZ) = -1$, a zbog pravog kuta $\angle QDZ$ po lemi 15. slijedi tvrdnja.
4. Bucić i Ćevid, stranica 26/29, zadatak 20
5. Bucić i Ćevid, stranica 27/29, zadatak 24
6. Bucić i Ćevid, stranica 28/29, zadatak 29
7. Vietnam National Olympiad 2003
8. IMO Shortlist 1998, G8
9. Turkey TST 2018
10. IMO Shortlist 2004, G8
11. IMO Shortlist 2002, G7

12. Poglavlje

Teorija brojeva

12.1. N1: Kongruencije - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Svaki prirodan broj n može davati ostatak $0, 1$ ili 2 pri dijeljenju s 3, odnosno zapisano pomoću kongruencija: $n \equiv 0, 1 \text{ ili } 2 \pmod 3$. Znamo da $a \equiv b \pmod c \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod c$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ pa je $n^2 \equiv 0^2, 1^2$ ili $2^2 \pmod 3$, odnosno $n^2 \equiv 0, 1$ ili $4 \pmod 3$. Međutim, kako je $4 \equiv 1 \pmod 3$, onda je $n^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 3$. Na identičan način dobivamo da je $n^2 \equiv 0, 1, 4$ ili $9 \pmod 4$, a kako je $4 \equiv 0 \pmod 4$ i $9 \equiv 1 \pmod 4$, znači da je $n^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 4$, što smo i trebali pokazati.

2. Zadatak 2.

3. Zadatak 4.

4. $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_1 a_0} = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + ... + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \equiv S(n) \pmod 3$.

5. Zadatak 3.

6. Izvor.

7. $$2^{12n+9} = 2^{3(4n+3)} = 8^{4n+3} \equiv (-5)^{4n+3} \equiv -5^{4n+3} \pmod{13}.$$
$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} \equiv -5^{4n+3} - 5^{4n+1} \equiv -5^{4n+1}(25+1) \equiv 0 \pmod{13}.$$

8. Zadatak 4.

9. Example 2.3.2.

10. Izvor.

11. Izvor

12. Iz dokazane tvrdnje 2. zadatka, znamo da vrijedi $S(2^n) \equiv 2^n \pmod 3$. Neka je a zadnja znamenka broja 2^n. Imamo:
$$a(S(2^n) - a) \equiv a(2^n - a) \pmod 3.$$
Sada uočimo da, za parni n, $2^n \equiv 1 \pmod 3$, dok za neparni n $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Gledamo slučajeve ovisno o kongruenciji od $n \pmod 4$:
    1) $n \equiv 0 \pmod 4 \implies a = 6$ ili $2^n = 1$. U oba slučaja dobivamo $a(2^n - a) \equiv 0 \pmod 3$.
    2) $n \equiv 1 \pmod 4 \implies a = 2$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 2(2-2) \equiv 0 \pmod 3$.
    3) $n \equiv 2 \pmod 4 \implies a = 4$ i $2^n \equiv 1 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 4(1-4) \equiv 0 \pmod 3$.
    4) $n \equiv 3 \pmod 4 \implies a = 8$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 8(2-8) \equiv 0 \pmod 3$.

13. Example 2.3.1

14. Zadatak 8.

15. Example 2.3.4.

12.2. N2: Diofantske jednadžbe - Andrej Čizmarević

Link na zadatke. Link na hintove.

- Problem solving strategies Zadaci 6. poglavlja u knjizi pod rednim brojevima: 46, 47 a), 47 b), 48 a), 48 b), 49, 49, 50, 76, 78, 96. Rješenja se nalaze na kraju poglavlja.
- Dokaz leme o prostim djelitelja broja oblika $x^2 + 1$ je na linku: Izvor

12.3. N3: Mali Fermat i Euler - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Kako su 3 i 7 relativno prosti te 5 i 7 relativno prosti uz $\phi(7) = 6$ po Fermatovom teoremu imamo $3^6 \equiv 5^6 \equiv 1 \mod 7$

$$3^{100} + 5^{100} \equiv 3^{6\cdot 16} \cdot 3^4 + 5^{6\cdot 16} \cdot 5^4 \equiv (3^6)^{16} \cdot 3^4 + (5^6)^{16} \cdot 5^4 \equiv 1^{16} \cdot 3^4 + 1^{16} \cdot 5^4 \equiv 706 \equiv 6 \mod 7$$

2. Problem 6.

3. Poglavlje 2.3., Example

4. Određivanje posljednje znamenke ekvivalento je pronalasku ostatka modulo 10. Budući da je $\phi(10) = 4$, trebamo odrediti $7^7 \pmod 4$.

   Kako je $\phi(4) = 2$ po Eulerovom teoremu vidimo da je $7^7 \equiv 7^(2 \cdot 3 + 1) \equiv (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$

   Tada je $7^{7^7} \equiv 343 \equiv 3 \pmod{10}$. Dakle, ostatak je 3.

5. Problem 7.

6. Poglavlje 2.3., Example 2.3.2.

7.

$$19 \mid 2^{2^{6k+2}}+3 \iff 2^{2^{6k+2}}+3 \equiv 0 \pmod{19} \iff 2^{2^{6k+2}} \equiv -3 \equiv 16 \pmod{19} \iff 2^{2^{6k+2}-4} \equiv 1 \pmod{19}$$

   Ovo je niz ekvivalencija pa je dovoljno samo pokazati da zadnji izraz vrijedi a s obzirom da je 19 prost ($\phi(19) = 18$) zbog Fermatovog teorema želimo dokazati da je $2^{6k+2} - 4 \equiv 0 \pmod{18}$. (Općenito ne mora vrijediti da je dijeljivo s $\phi(n)$ nego može i samo s djeliteljem od $\phi(n)$.)

   Kako bismo dokazali da je $2^{6k+2} - 4 \equiv 0 \pmod{18}$ možemo gledati izraz $2^{6k+2} - 4$ modulo 2 i modulo 9 zasebno. Za modulo 2 očito vrijedi, a budući da je $\phi(9) = 6$ imamo da je $2^6 \equiv 1 \pmod 9$. Podizanjem na k-tu potenciju i množenjem s 4 dobivamo željeni izraz.

   Dakle, $2^{6k+2} - 4 = 18n, n \in \mathbb{N}$.

$$2^{2^{6k+2}-4} \equiv 2^{18n} \equiv (2^{18})^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{19}$$

   što smo i htjeli pokazati, gdje $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ slijedi iz Fermatovog teorema.

8. Poglavlje 2.3., Example 2.3.6.

9. Poglavlje 2.3., Example 2.3.4.

10. Tekst

11. Poglavlje 2.3., Example 2.3.10.

12. Odredimo prvo proste brojeve za koje ovo vrijedi. Neka je $n = p$ gdje je p prosti broj. Očito je $p \neq 2$ jer je $2^p + 1$ uvijek neparan. Budući da $p \mid 2^p + 1$ imamo da je $2^p + 1 \equiv 0 \pmod p$. S druge strane kako je $p \neq 2$ onda je p relativno prost s 2 pa po Fermatovom teoremu imamo $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ te stoga $2^p + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod p$. Stoga $p \mid 3$ te vidimo da $n = 3$ zadovoljava ujvet. Dakle, jedini prosti broj za koji ovo vrijedi je 3.

    Provjeravanjem dalje vidimo da vrijedi i za $n = 9$, ovo nas motivira da dokažemo da vrijedi za svaki $n = 3^k, k \in \mathbb{N}$. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom, već imamo bazu $n = 3$. Neka ovo vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. $2^{3^k} + 1 = 3^k \cdot n, n \in \mathbb{N}$. Promatrajmo $k + 1$.

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = (2^{3^k} + 1)((2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1)$$

    Iz pretpostavke vidimo da 3^k dijeli prvu zagradu te uvrštavanjem $2^{3^k} = 3^k \cdot n - 1$ u drugu zagradu dobivamo da je druga zagrada djeljiva s 3. Dakle, $3^{k+1} \mid 2^{3^{k+1}} + 1$, a kako postoji beskonačno prirodnih brojeva oblika 3^k smo dokazali tvrdnju.

13. IMO 2005 Problem 4.

12.4. N4: Polinomi u TB - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na hintove.

1. USAMO 1974

2. Cjelobrojna nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima mora dijeliti slobodan član, pa su jedini moguće nultočke 1 i -1. Pretpostavimo da je vodeći koeficijent 1 jer svako rješenje zadatka možemo pomnožiti s -1 tako da vodeći koeficijent postane 1, pa ćemo na kraju samo morati sva dobivena rješenja pomnožiti s -1. Zapis polinoma preko nultočaka je: $P(x) = (x-1)^k(x+1)^t$.
   Koristeći binomni teorem na obje zagrade i kada pogledamo koji je koeficijent uz x toga umnoška dva polinoma dobijem $(-1)^k \cdot t + k \cdot (-1)^{k-1} = \pm 1$ jer su svi koeficijenti polinoma ± 1
   Kada podijelimo tu jednako s $(-1)^{k-1}$ dobimo $-t + k = \pm 1$ što nam daje dva slučaja:
   1. slučaj $k = t + 1$: $P(x) = (x^2 - 1)^t(x-1)$
   Ako je $t = 0$ ili $t = 1$ dobijemo rješenja $x - 1$ i $x^3 - x^2 - x + 1$ te pomnožena s -1: $-x + 1$ i $-x^3 + x^2 + x - 1$
   Sada pretpostavimo da je $t \geqslant 2$:
   Koristeći binomni teorem na prvu zagradu dobivamo da je koeficijent uz x^2 jednak $t \cdot (-1)^t$ i budući da je druga zagrada samo $(x-1)$ koeficijent uz x^2 početnog polinoma će biti -$t \cdot (-1)^t$, što vidimo da je po apsolutnoj vrijednosti veće jednako 2 jer je $t \geqslant 2$, pa taj koeficijent ne može biti ± 1, pa u ovom podslučaju nema rješenja.
   2. slučaj $k = t - 1$: $P(x) = (x^2 - 1)^k(x+1)$. Ovaj slučaj rješavamo analogno kao prvi.
   Za $k = 0, 1$ se dobiju rješenja $x + 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$, $-x - 1$, $-x^3 - x^2 + x + 1$.
   Kada je $k \geqslant 2$ koeficijent uz x^2 je $(-1)^{k-1} \cdot k$ što je po apsolutnoj vrijednosti veće jednako 2 pa nema rješenja u ovom podslučaju.

3. Baltic Way 2019

4. Baltic Way 2021

5. Turkey TST 2009

6. Baltic Way 2015

7. BMO SL 2017

8. BMO 2016

9. IMO SL 2006 N4

10. IRAN TST 2004

12.5. N5: Brojevi - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Izvor.
2. Izvor.
3. Izvor.
4. Izvor.
5. Izvor.
6. Izvor.
7. Neka su $a_1, \dots, a_n$ brojevi iz S takvi da $ma_1, \dots, ma_n$ nije u S, te neka su $b_1, \dots, b_k$ preostali elementi iz S. Onda je $S = \{-ma_1, \dots, -ma_n, mb_1, \dots, mb_k\} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$. Množenjem svih elemenata imamo kongruenciju
$$(-1)^n m^{n+k} \equiv 1 \pmod{p},$$
što je zbog $n + k = \frac{p-1}{2}$ i malog Fermatovog teorema točno ono što treba dokazati.
8. Izvor.
9. Prvo, ako je p prost broj koji dijeli i m i n, onda je za svaki x, broj $f(x)g(x)$ djeljiv s p, ali takvih x-eva ima najviše $2n/p$, pa je $p \leqslant 2$, ali m je neparan. Zaključujemo da su m i n nužno relativno prosti. Ali onda je $x \mapsto m \cdot h(x)$ isto bijekcija, pa bez smanjenja možemo pretpostaviti $m = 1$.

   Sada tvrdimo da je n kvadratno slobodan. Uistinu, ako $p^2 \mid n$ za neki prost broj p, onda brojimo x-eve takve da $p \mid f(x)g(x)$ i $p^2 \nmid f(x)g(x)$. Takvih ima $n/p - n/p^2$ jer je $h(x)$ toliko puta traženog oblika. S druge strane, pretpostavimo da $p \mid f(y)$ za neki y i $p \nmid g(y)$ za taj y. Onda je broj x-eva takvih da $p \mid f(x)g(x)$ strogo veći od n/p, ali s druge strane mora biti jednak n/p, kontradikcija. Međutim, onda kad god $p \mid f(x)g(x)$, mora biti i $p^2 \mid f(x)g(x)$, što je nemoguće, osim ako $p^2 \nmid n$.

   Sada neka je p djelitelj od n. Gledamo f, g, h na skupu $\{n/p, 2n/p, \dots, (p-1)n/p\}$. Dokazali smo u gornjem dijelu da n/p dijeli f, g, h od svih tih brojeva, pa su restrikcije od f, g, h na ovaj skup permutacije tog skupa. Međutim, uzmimo umnožak kongruencija $f(x)g(x) \equiv h(x) \pmod{p}$ po svim x iz tog skupa. Po Wilsonovom teoremu, imamo $(-1)^2 \equiv -1 \pmod{p}$, što je moguće samo za $p = 2$. Zaključujemo da je n kvadratno slobodan i djeljiv jedino možda s 2 od prostih faktora. Lako se vidi da su $n = 1$ i $n = 2$ rješenja.
10. Izvor.
11. Izvor.
12. Izvor.
13. Izvor.

13. Poglavlje

Kombinatorika

13.1. C1: Invarijante - Marko Žagar

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Promotrimo kako se mijenja broj plavih kuglica u jednom koraku. Pri izvlačenju kuglica mogu se dogoditi 3 različita slučaja: da budu izvučene dvije crvene, dvije plave ili jedna crvena i jedna plava kuglica. Analizom svih slučajeva odmah dolazimo do zaključka da se broj kuglica ili ne promijeni ili smanji za 2, tj. mijenja se uvijek za paran broj. U a) dijelu to znači da će broj plavih kuglica uvijek biti paran, pa kad ostane samo jedna kuglica u kutiji ona će morati biti crvena. U b) dijelu će pak broj plavih kuglica uvijek biti neparan, pa će upravo plava kuglica ostati zadnja u kutiji.

2. Uočite da je broj bijelih (ili ekvivalentno) crnih polja uvijek paran: ako je u retku/stupcu bilo b bijelih polja, nakon poteza bit će ih $8-b$. Odmah vidimo da su b i $8-b$ iste parnosti, pa kad svaki od tih brojeva dodamo broju preostalih bijelih polja, ta 2 broja bit će iste parnosti. Kako krećemo s parnim brojem bijelih polja, ne možemo postići da ih bude neparno.

3. Ne u oba slučaja. U prvom je invarijanta broj parnih brojeva, a u drugom zbroj.

4. Nije moguće. Nazovimo ih redom A, B, C, D, E, F. U jednom potezu za 1 povećamo jednoga od A, C, E i jednog od B,D,F pa je invarijanta razlika sume A, C i E i sume B, D i F.

5. Zbroj svih brojeva na početku je paran. Ako Janko odabere dva parna broja, zamijenit će ih s jednim parnim. Ako Janko odabere dva neparna broja zamijenit će ih sa jednim neparnim. Ako Janko odabere paran i neparan broj, zamijenit će ih s jednim neparnim. U svakom slučaju, parnost zbroja svih brojeva ostaje ista, dakle zadnji broj će biti paran.

6. Zadnja proputovana udaljenost uvijek ili raste ili ostaje jednaka. Pošto je udaljenost od B do Ca veća nego bilo koja udaljenost do grada A, putnik se nikada neće vratiti u A.

7. Neka je S zbroj kvadrata svih brojeva. Na početku:

$$S = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$$

Nakon nekog koraka S postaje:

$$S \Rightarrow S - (a^2 + b^2) + (0.6a - 0.8b)^2 + (0.8a + 0.6b)^2$$

$$= S - a^2 - b^2 + 0.36a^2 - 0.96ab + 64b^2 + 0.64a^2 + 0.96ab + 0.36b^2$$

$$= s - a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = S$$

Pošto je $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$, odgovor je ne.

8. Postavimo skakavce u koordinatni sustav na način da skakavci na početku stoje u točkama $(0,0), (0,1)$ i $(1,0)$. Sada možemo uočiti da se skakavcu ne mijenja parnost pojedine koordinate nakon skoka. Prvo, jasno je da će skakavci skakati samo po točkama s cjelobrojnim koordinatama. Ako skakavac skače s točke (a,b) i preskače skakavca u točki (c,d), lako dobijemo da će skakavac doskočiti u točku $a+2(c-a), b+2(d-b)$. Kako nijedan skakavac ne kreće iz točke koja ima obje koordinate neparne, nijedan neće moći doskočiti u točku $(1,1)$.

9. Kako je konačan broj polja obojan crnom bojom, možemo postaviti zadatak na ovaj način: recimo da je Anica počevši od bijele ploče bojala jedno po jedno polje u crno. Na početku je zbroj svih brojeva na ploči bio 0, dakle bio je djeljiv s 4. Kada dodamo novo crno polje, ono može zamijeniti bijelo koje je imalo 0, 1, 2, 3 ili 4 susjeda. Raspisom tih 5 slučajeva vidimo da se dodavanjem crnog polja zbroj brojeva na ploči nužno mijenja za višekratnik od 4. Time smo dokazali tvrdnju zadatka.

10. Umnožak brojeva u bridovima bez kutova uvijek ostaje -1, dakle barem jedan broj mora biti 1.

13.2. C2: Igre - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ovaj zadatak je zapravo generalizacija uvodnog primjera.

   Kao i u primjeru, ovdje vidimo da su sve pozicije $1, 2, ..., k$ pobjedničke (u jednom potezu moguće je doći do broja 0).

   Međutim, tada vidimo kako je broj $k+1$ gubitnička pozicija, s obzirom da s nje možemo doći samo na brojeve $1, 2, ..., k$ koji su pobjedničke pozicije.

   Sada, potpuno analogno, induktivno možemo zaključiti da su (samo) pozicije oblika $l \cdot (k+1)$, $l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su sve ostale pobjedničke.

   Dakle, prvi igrač ima pobjedničku strategiju ako n nije oblika $l \cdot (k+1)$, inače drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

   Sama strategija je prilično jednostavna, igrač koji pobjeđuje mora oduzeti takav broj da nakon oduzimanja na ploči ostane broj oblika $l \cdot (k+1)$ (što sa svake pobjedničke pozicije sigurno može), a to je i korak indukcije u gornjem dokazu.

2. Želimo dokazati da su sve pozicije oblika $3l, l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su ostale pobjedničke.

   Naime, niti jedan od brojeva $1, 2, ..., 2^k$ nije oblika $3l$.

   Tada zaključujemo da sa svake pozicije oblika $3l$ nužno dolazimo na poziciju koja nije oblika $3l$ (tj. poziciju oblika $3l+1$ ili $3l+2$). S tih pozicija uvijek možemo doći na neku drugu poziciju oblika $3l$, oduzimanjem brojeva 1 ili 2.

   Sada, analogno kao u 1. zadatku, induktivno dokazujemo da su pozicije oblika $3l$ gubitničke, a ostale pobjedničke (baza indukcije $n = 1, 2, 3$).

3. Želimo dokazati da Vlatka ima strategiju. Ovo je primjer strategije u kojoj jedan igrač samo oponaša strategiju drugoga (*simetrija*).

   Vlatka pritom prvi žeton postavi na sredinu ploče.

   Nakon svakog poteza drugog igrača, svoj žeton postavlja na centralnosimetrično polje u odnosu na sredinu ploče (takvim postavljanjem je i cijela ploća centralnosimetrična pa je to uvijek moguće učiniti).

   Dakle, drugi igrač će u nekom trenutku ostati bez poteza pa pobjeđuje prvi igrač.

4. a) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, a inače prvi.

      Pokažimo to indukcijom s korakom 4. Baza uključuje provjeru za $n = 1, 2, 3, 4$.

      Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

      Tada ako je broj kamenčića na hrpi na početku $4k+1, 4k+2$ ili $4k+3$, prvi igrač uzme redom 1, 2 ili 3 kamenčića, čime na hrpi ostane $4k$ kamenčića, a po pretpostavci ta pozicija je pobjednička za igrača koji tad nije na redu, dakle za onog koji je prvi uzeo kamenčiće s hrpe.

      Za $n = 4k+4$ prvi igrač ne može uzeti broj kamenčića djeljiv s 4 (jer je to sigurno složen broj), pa će se, štogod odigra, naći u za njega gubitničkoj poziciji.

   b) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n \in \{2, 5, 7\}$, a inače prvi.

      Za $n \leqslant 8$ direktno provjerimo koji igrač ima pobjedničku strategiju.

      Pretpostavimo da za neki $k \geqslant 8$ vrijedi da jedino za $n \in \{2, 5, 7\}$ drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

      Dokažimo da za $n = k+1$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

      Ako je $k+1$ paran broj, prvi igrač uzme $k-1$ kamenčić čime ostanu samo 2, pa je to pobjednička pozicija za prvog igrača po pretpostavci indukcije. Inače prvi igrač uzme $k-4$ ili $k-6$ kamenčića, ovisno o tome koji od tih brojeva je djeljiv s 4 (čime znamo da je složen), te ostaje 5 ili 7 kamenčića, zbog čega znamo da prvi igrač pobjeđuje.

5. Možemo naslutiti da prvi igrač ima pobjedničku strategiju onda kada je na početku na hrpama različit broj kamenčića, a inače drugi.

   Ako je na početku različit broj kamenčića na hrpama, prvi igrač može uzeti kamenčiće s hrpe na kojoj ih se nalazi više, i to tako da izjednači broj kamenčića na obje hrpe.

Igrač koji igra drugi tada mora uzeti kamenčiće s neke od hrpa te će tada broj kamenćića na hrpama ponovno biti različit.

Prvi igrač zatim ponavlja svoju strategiju sve dok na taj način ne uzme i posljednji kamenčić (nakon što je drugi igrač ispraznio jednu od hrpa). Ovo je sigurno moguće s obzirom da se na hrpama nalazi konačan broj kamenčića te se u svakom potezu uzima barem jedan kamenčić.

Ako se pak na početku na hrpama nalazi jednak broj kamenčića, nakon poteza prvog igrača broj kamenčića će sigurno biti različit. Tada se drugi igrač nalazi u poziciji prvog igrača iz prethodnog slučaja te ima već opisanu pobjedničku strategiju.

6. U ovom rješenju nećemo određivati strategiju, već samo dokazati njeno postojanje.

   Pretpostavimo da drugi igrač ima strategiju kojom osigurava neriješen ishod ili pobjedu. To znači da, neovisno o potezima prvog igrača, može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

   Neka prvi igrač odigra svoja dva poteza nekim skakačem, tako da ga drugim potezom vrati na početnu poziciju. Stanje na ploči je tada isto kao i na početku.

   No, drugi igrač je tada u poziciji prvog igrača, a ta pozicija je po pretpostavci gubitnička (odnosno igrač koji tada nije na redu ima pobjedničku strategiju).

   Dakle, dobili smo kontradikciju te drugi igrač nema pobjedničku strategiju, odnosno prvi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

7. Dokažimo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

   Podijelimo ploču u 4 kvadrata dimenzija 4×4, te svaki obojimo u 8 boja (ukupno 32 boje): ako boje označimo brojevima od 1 do 8, retke obojimo redom s (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (2, 1, 4, 3), te (6, 5, 8, 7) (bit je da su 2 po 2 polja obojena istom bojom i da skakač može skočiti u jednom skoku između 2 polja iste boje).

   Sada kada prvi igrač stavi skakača na proizvoljno polje, drugi igrač pomakne skakača na preostalo drugo polje te boje u istom kvadratu. Zatim prvi igrač sigurno mora pomaknuti skakača na polje dosad neposjećene boje (ili na polje u drugom kvadratu). Međutim, onda drugi igrač sigurno može pomaknuti skakača na drugo polje te boje, budući da je tek u prethodnom skoku skakač po prvi puta posjetio polje te boje.

   Dakle, nakon što prvi igrač odigra potez, drugi igrač će također moći odigrati potez. Stoga će prvi igrač biti prvi koji neće moći napraviti potez.

8. Pretpostavimo da prvi igrač uvijek gubi.

   Tada on gubi i ako odlomi samo kockicu u desnom donjem kutu. No, nakon što drugi igrač odigra svoj potez, komad čokolade koji je ostao mogao je ostati i odmah nakon prvog igrača.

   Stoga je drugi igrač u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće. Dakle, prvi igrač uvijek ima pobjedničku strategiju.

9. Želimo dokazati da je najmanji takav n jednak 13.

   Ako poljima pridružimo oznake (i, j), gdje i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi polje, te Anica u crveno oboji polja $(1, 1), (2, 2), ..., (8, 8), (1, 8), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)$, Božica ne može nikako prebojati sva crvena polja u crno na dopušteni način. Ostaje pokazati da kako god Anica rasporedi 12 crvenih polja, Božica ih može sve prebojati u crno.

   U tu svrhu, uočimo da 4 retka koja imaju najviše crvenih polja moraju sadržavati barem njih 8. Naime, u suprotnom bi jedan od tih redaka imao najviše jedno crveno polje. S druge strane, preostala 4 retka imala bi barem 5 crvenih polja, dakle jedan redak bi imao barem 2 polja. No, tada nismo odabrali 4 retka s najviše crvenih polja, čime dolazimo do kontradikcije.

   Sada ta 4 retka Božica preboji u crno, a preostala do 4 crvena polja se očito mogu prebojati odabirom 4 stupca.

10. Pokazat ćemo da Lazo uvijek može namjestiti da nakon njegovog poteza suma ostane djeljiva s p. Naime, podijelimo skup $\mathcal{M}$ u parove oblika $(i, i+p) : i \in \{1, 2, 3, ..., p\}$. Lazo će u svakom svom potezu odabrati drugi broj iz tog para. Ideja je da nakon svaka dva poteza eliminiramo jedan uređeni par, te Lazo na taj način uvijek može odigrati takav potez.

    Sada preostaje dokazati da je nakon svaka dva poteza S djeljiv s p. To dokazujemo indukcijom.

    Baza indukcije je $S = 0$, što je očito djeljivo s p.

    Sada pretpostavimo da je suma nakon k-tog poteza S_k djeljiva s p. Sada je Goci na potezu.

Goci odabire a i sada imamo

$$S_{k+1} = p(a) - S_k.$$

Nakon toga Lazo odabire b takav da su a i b upareni. Tada imamo

$$S_{k+2} = p(b) - S_{k+1} = p(b) - p(a) + S_k.$$

Po pretpostavci indukcije $p \mid S_k$. Preostaje dokazati $p \mid p(b) - p(a)$. Vrijedi $a - b \mid p(a) - p(b)$ (*razmislite zašto*), a po načinu biranja parava imamo da je $a - b = \pm p$ pa je tvrdnja dokazana.

11. *1. slučaj*

    n je neparan.

    Dokažimo da tada Anica ima pobjedničku strategiju.

    Anica u prvom potezu briše prvi broj s lijeve strane, a ostale brojeve dijeli u parove uzastopnih brojeva.

    Primijetimo da su dva uzastopna prirodna broja sigurno relativno prosta.

    Dakle, Anica ima cilj da nakon njenog zadnjeg poteza ostane točno jedan od ovih parova brojeva.

    To i može lako učiniti tako da nakon svakog Božičinog poteza obriše drugi broj iz istog para u kojem se nalazio taj broj.

    2. slučaj

    n je paran.

    Dokažimo da tada Božica ima strategiju.

    Primijetimo da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta, a Božica će igrati zadnji potez.

    Na ploči se nalazi jednako parnih i neparnih brojeva.

    Dakle, ako Anica u nekom trenutku obriše neparan broj, Božica pobjeđuje (jer može lako ostvariti da su svi neparni brojevi obrisani, odnosno na ploči ostaju dva parna broja).

    Sada, ako Anica briše samo parne brojeve, Božica treba brisati samo neparne brojeve, sve do zadnjeg poteza, kada će na ploči ostati još 3 broja.

    Kako je na ploči barem 12 brojeva, među njima su barem 2 neparna koja su djeljiva sa 3, pa Božica, dok briše neparne brojeve, treba za kraj "ostaviti" dva koja su djeljiva sa 3.

    Tada u zadnjem koraku briše preostali parni broj, a na ploči su ostala dva neparna broja, oba djeljiva sa 3, čime Božica pobjeđuje.

12. Dokažimo da Božica može ostvariti svoj naum.

    Neka Božica napiše brojeve $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2$ (bitno je da se parno mnogo puta ponavlja najveći broj).

    Sada lako dokažemo da će se, bez obzira na Aničine poteze, najveći broj uvijek ponavljati parno mnogo puta (promotrite sve slučajeve izbora brojeva).

    No, tada je nemoguće postići da su svi brojevi jednaki (naime, tada bi bilo nužno da se najveći ponavlja neparno mnogo puta), pa je dokaz završen.

13. Provjerom malih primjera naslućujemo da Božica pobjeđuje ako je n potencija broja 2.

    Ukoliko n nije potencija broja 2, n možemo zapisati u obliku $n = 2^k \cdot m$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, a m neparan prirodni broj veći od 1.

    Anica slijedi ovaj algoritam: prvo Anica makne 2^k novčića, a zatim kad Božica makne $2^{k'} \cdot m'$ kamenčića, Anica makne $2^{k'}$ kamenčića (koliko ih zaista smije uzeti). Uočimo da je $k' \leqslant k$ (jer Božica može uzeti najviše $2^{k+1} - 1$ kamenčića, te se analogno ovome k' iz poteza u potez neće povećati. Stoga će nakon Aničinog poteza broj kamenčića biti djeljiv s $2^{k'+1}$, a u sljedećem potezu Božica može uzeti najviše $2^{k'+1} - 1$ kamenčića, pa ne može uzeti zadnji. Dakle, Anica će uzeti zadnji kamenčić u ovome slučaju.

    Ukoliko je n potencija broja 2, Božica će igrati na isti način kao Anica u gornjem slučaju. Stoga u ovom slučaju Božica ima pobjedničku strategiju.

14. Pokazat ćemo da su traženi n oni koji se mogu prikazati kao zbroj različitih potencija broja 2 s neparnim eksponentima. Na početku uočimo da za neparne n Anica ima pobjedničku strategiju. Naime, prvi broj koji će Božica napisati bit će broj 2 (dakle paran), pa zatim ako Anica stalno dodaje broj 1 prethodnom, Božica će stalno pisati parne, a Anica neparne, pa će Anica biti ta koja će napisati broj n.

Nadalje, dokazujemo sljedeću tvrdnju: Božica ima pobjedničku strategiju za broj n ako i samo ako ima pobjedničku strategiju za $4n$ i $4n+2$. Neka Božica ima pobjedničku strategiju za n. Ona stoga može igrati kao da se igra do broja n, čime će natjerati Anicu da prva napiše broj j koji je veći od n (a on će biti i manji ili jednak od $2n$). Tada Božica napiše $2j$, te je $2n+2 \leqslant 2j \leqslant 4n$. Sada je jedini dopušteni potez povećanje broja za 1, a kako su $2j, 4n$ i $4n+2$ parni, jasno je da će Božica pobijediti.

Analogno zaključimo da ako Anica ima pobjedničku strategiju za neki n, onda ju ima i za $4n$ i $4n+2$. Ovi zaključci su dosta da na osnovi ručne provjere za $n = 1, 2, 3, 4$ dokažemo početnu tvrdnju.

13.3. C3: Prebrojavanja - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. To je zapravo slučaj 1 iz prve točkice Šalabahtera
2. To je zapravo slučaj 2 iz prve točkice Šalabahtera
3. To je zapravo slučaj 3 iz prve točkice Šalabahtera
4. To je zapravo slučaj 4 iz prve točkice Šalabahtera
5. To je zapravo slučaj 1 iz druge točkice Šalabahtera
6. To je zapravo slučaj 2 iz druge točkice Šalabahtera
7. To je zapravo slučaj 3 iz druge točkice Šalabahtera
8. Tražimo broj kutija domaćica koje imaju paran broj svakog od keksića. Neka je n keksića u kutiji. Tada je traženi broj zapravo broj rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n/2$ (gdje su $2x_1$, $2x_2$, ... $2x_5$ broj svake vrste keksića u kutiji), pa samo primijenimo formulu 2 iz druge točkice šalabahtera.
9. Zadatak 2.8
10. (a) Promotrimo najkraće puteve od točke (a, b) do točke (c, d), pri čemu je $a \leqslant c$ i $b \leqslant d$. Najkraći putevi u tom slučaju sastoje se samo od pomaka gore i desno, i to točno $(c-a)$ desno i $(d-b)$ gore. Shvatimo li cijeli put kao niz određenog broja znakova G (gore) i D (desno), broj različitih puteva dobit ćemo kao broj različitih takvih nizova. Niz dobijemo odabirom mjesta za znakove (recimo) G, a to možemo učiniti na sljedeći broj načina:

$$\binom{\text{ukupno pomaka}}{\text{pomaka gore}} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$$

    Sada uz $a = -1$, $b = 0$, $c = 5$ i $d = 7$ dobivamo rješenje

$$\binom{(5-(-1))+(7-0)}{7-0} = \binom{13}{7}.$$

    (b) Da bismo pronašli odgovor na ovo pitanje potrebno je prebrojati puteve koji prolaze točkom $(2, 3)$ i taj broj oduzeti od ukupnog broja puteva od $(-1, 0)$ do $(5, 7)$.
    Da bi put prolazio zadanom točkom moramo pronaći broj najkraćih puteva od početne točke do usputne zadane točke i od zadane točke do završne točke (i tada primijenimo princip produkta jer zapravo imamo uređen par dva puta). Tako dobivamo da je rješenje

$$\underbrace{\binom{13}{7}}_{\text{svi putevi}} - \underbrace{\binom{2-(-1)+3-0}{3-0}}_{\text{prvi dio puta}} \cdot \underbrace{\binom{5-2+7-3}{7-3}}_{\text{drugi dio puta}} = \binom{13}{7} - \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{4}.$$

    (c) Kolokvij iz Diskretne matematike 16/17
11. Županijsko 2003, SŠ4A, 2
12. Budući da svaku olovku možemo i ne moramo staviti u podskup odabranih olovaka, imamo točno 2 mogućnosti za svaku. Ako svaki podskup olovaka shvatimo kao niz 0 i 1 (pri čemu 0 označavam da ta olovka nije odabrana, a 1 da je) trebamo samo naći broj svih takvih uređenih nizova. Za svako od 7 mjesta (imamo 7 olovaka na raspolaganju) imamo 2 opcije (0 ili 1) pa je broj takvih nizova 2^7.
13. Državno 2014, SŠ2A, 5
14. DM kolokvij 21/22
15. JBMO 2012 SL C1

16. Označimo k stolaca: prvih $k-1$ stolaca su stolci na koje učenici nikako ne smiju sjesti (stolci između učenika), a zadnji je stolac gdje sjedi zadnji učenik. Između svih oznaka mora postojati razmak osim zadnje. Prvi učenik sjedne neposredno prije prve oznake, drugi neposredno prije druge, ..., dok zadnji sjedne gdje je određeno. Takvih odabira je isto koliko zbrojeva $x_1+x_2+x_3+...+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=n-k$, gdje $x_1, ...x_{k-1}$ moraju biti pozitivni, a ostala 2 nenegativna (x predstavlja broj sjedala između 2 oznake, s tim da je x_{k+1} broj sjedala iza zadnje oznake.). Sad je to broj zbrojeva $y_1 = x_1 - 1$, ... $y_{k-1} = x_{k-1} - 1$, $y_k = x_k$, $y_{k+1} = x_{k+1}$ koji svi moraju biti nenegativni. Dakle, tražimo broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $y_1 + ... + y_{k+1} = n - 1$, što se lako dobije po formuli 2 iz druge točkice šalabahtera.
17. Primjer 4.6
18. Propozicija 1.3.2.
19. Propozicija 1.3.2.
20. Propozicija 1.3.2.
21. Propozicija 1.3.2.
22. Primjer 1.3.7.
23. DM kolokvij 20/21
24. Memo pripreme 2015., Prebrojavanje, Ilko Brnetić
25. imomath predavanje dvostruko prebrojavanje

13.4. C4: Grafovi - Ema Borevković

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po broju čvorova u grafu. Baza je kad je jedan čvor. Po pretpostavci znamo da u svakom grafu s n čvorova postoji Hamiltonov put. Dodajmo još jedan čvor u taj graf i povežimo ga nekako u taj Hamiltonov put. Ako je brid iz njega u početni čvor puta usmjeren prema početnom čvoru puta gotovi smo. Isto vrijedi i ako je brid iz njega u završni čvor puta usmjeren prema njemu, a od završnog čvora. U suprotnom moraju postojati dva susjedna čvora u Hamiltonovom putu takva da postoji brid iz ranije posjećenog u dodani čvor i brid iz dodanog čvora u kasnije posjećeni. Ovo znači da možemo na tom mjestu ubaciti dodani čvor u Hamiltonov put. Ovime je proveden korak indukcije.
2. IMO 1991., 4.
3. Domagoj Bradač - Teorija grafova
4. Domagoj Bradač - Teorija grafova
5. Domagoj Bradač - Teorija grafova
6. Diskretna matematika PMF - Skripta iz vježbi
7. Poznata tvrdnja
8. Domagoj Bradač - Teorija grafova
9. Poznata tvrdnja
10. Codeforces runda 626., zadatak F
11. EGMO 2016. 3.
12. IMO Shortlist 2013. C3.

13.5. C5: Komba mix - Andrej Čizmarević

Link na zadatke. Link na hintove.

1. 11. zadatak iz prvog poglavlja invarijante
2. 10 zadatak iz prvog poglavlja invarijante
3. C1 2011
4. C2 2011
5. C1 2012
6. C1 2013
7. C2 2013

14. Poglavlje

Algebra

14.1. A2: KAGH+ - skupina mentora

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Primijenimo li AG nejednakost na $a_1 = x > 0$ i $a_2 = \frac{1}{x} > 0$ dobivamo

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

odnosno

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

što je trebalo i pokazati.

2. Pokazujemo

$$a^8 + a^6 + a^2 + 1 \geq 4a^4.$$

Označimo $a_1 = a^8 > 0$, $a_2 = a^6 > 0$, $a_3 = a^2 > 0$ i $a_4 = 1 > 0$ i primijenimo AG nejednakost na sredine brojeva a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &\geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \\ \frac{a^8 + a^6 + a^2 + 1}{4} &\geq \sqrt[4]{a^8 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot 1} = \sqrt[4]{a^{8+6+2}} \\ a^8 + a^6 + a^2 + 1 &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^{16}} = 4 \cdot a^4 \end{aligned}$$

Napomena: Za realan broj $x \geq 0$ i $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

3. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c) = a + b + c$$

što je i trebalo dokazati.

4. Primjetimo da je tvrdnja zadatka ekvivalenta s tim da je $(x+y)^2 \leqslant 2$.

   Iz KG dobivamo:
$$\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \iff xy \leqslant \frac{1}{2}$$
   Tada imamo
$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 1+2xy \leqslant 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

5. *1. način*

   Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost
$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$
   Oduzimanjem $2ab+2bc+2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$
   Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

   2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

   Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost
$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$
   Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:
$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
   Analogno dobivamo i
$$b^2+c^2 \geq 2bc$$
$$c^2+a^2 \geq 2ca$$
   Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

   Napomena.

   Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:
$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

6. Example 1.1.3

7. Riješeni primjeri, zadatak 1.

8. Primjenom A-G nejednakosti na p^2+p+1 dobivamo:
$$p^2+p+1 \geqslant 3\sqrt[3]{p^2\cdot p\cdot 1} = 3p$$
   Analogno dobivamo
$$q^2+q+1 \geq 3q.$$
   Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost:
$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq.$$

9. Riješeni primjeri, zadatak 3.

10. Riješeni primjeri, zadatak 4.

11. Example 1.1.4.

12. Zadatak 3.

13.

$$\frac{1}{2} = \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \iff \frac{1}{xy} \geqslant 4.$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geqslant 1 + \frac{4}{x+y} + 4 = 9.$$

14. Nesbittova nejednakost

15. Pham Kim Hung - Secrets in Inequalities (Volume 1) stranica 16. propozicija (proposition) 1

16. Riješeni primjeri, zadatak 12.

17. Državno natjecanje 2013 SŠ1 3. zadatak

18. 9.15.

19. Zadatak 3.

20. 2. razred, 4. zadatak.

21. Dokaz AG nejednakosti

22.

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} \cdot \frac{a+b+c-2c}{2}},$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leqslant \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Iz toga imamo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ &\leqslant \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(a+b+c)^4}{3^3}} = \frac{(a+b+c)^2}{4\cdot 3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Iz K-A nejednakosti imamo:

$$\frac{a+b+c}{3} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$(a+b+c)^2 \leqslant 9 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Iz toga imamo:

$$S \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4\cdot 3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$$

$$4S\sqrt{3} \leqslant a^2+b^2+c^2.$$

23.

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{1}{c} \quad \to xyz = \frac{1}{abc} = 1.$$

$$b+c = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y+z}{yz},$$

$$c+a = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{x+z}{xz},$$

$$a+b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{yx}.$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu:

$$\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3xz}{x+z} + \frac{z^3yx}{y+x} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}.$$

Primijenimo CSB nejednakost:

$$((\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{z+x})^2)\left(\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{y+x}}\right)^2\right) \geqslant (x+y+z)^2,$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2x+2y+2z} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$
$$x+y+z \geqslant 3.$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geqslant \frac{x+y+z}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

24. Riješeni primjeri, zadatak 20. (IMO SL 2001.)

25. IMO 2001. zadatak 2

14.2. A4: Funkcijske jednadžbe - skupina mentora

Link na zadatke. Link na hintove.

1. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 2
2. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 1
3. A.H. Parvardi: Functional Equations in Mathematical Olympiads: Problems and Solutions, Vol. 1, Example 3
4. Evan Chen: Introduction to Functional Equations, Example 3.1
5. BMO 2000
6. Baltic Way 2019
7. Baltic Way 2015
8. Baltic Way 2020
9. BMO SL 2019
10. MEMO 2012
11. BMO SL 2017
12. BMO SL 2007
    Ovo je rješenje koje sam hintirao: Rješenje

Dio IV

Natjecanja

15. Poglavlje

Natjecanje ELMO

Na ovoj Zimskoj školi održalo se još jedno izdanje našeg natjecanja ELMO (Ekstremno loša matematička olimpijada) koje su idejno osmislili Ivan Novak i Borna Šimić.
Našim najboljim srednjoškolskim natjecateljima zadali smo pet dosad neviđenih zadataka, a najbolje prigodno nagradili slatkišima kako tradicija nalaže!

15.1. Zadaci

1. Neka su x i y pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$3\sqrt{x^2+(y-4)^2}+4\sqrt{(x-3)^2+y^2}=5\sqrt{x^2+y^2}.$$

Odredi najveću vrijednost koju može poprimiti izraz x^2+y^2.

2. Neka je n prirodan broj. *Particija* od n je konačan niz prirodnih brojeva $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ takav da vrijedi $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_k$ i $a_1+a_2+\dots+a_k=n$. Označimo s P_n broj particija od n, te stavimo $P_0=1$. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\sum_{d \mid n} P_{d-1} \leqslant P_n.$$

3. Neka je $\mathbb{N}_0$ skup svih nenegativnih cijelih brojeva. Nađi sve injektivne funkcije $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da

$$f(x)-f(y) \mid x^2-yf(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}_0$ takve da je $x \neq y$.

4. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ prirodni brojevi. Za $j \in \{1, 2, \dots, 101\}$, označimo sa b_j najveći zajednički djelitelj brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{101}$. Pretpostavimo da vrijedi

$$b_1+b_2+\dots+b_{101}=30^{30}.$$

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz $a_1+a_2+\dots+a_{101}$.

5. Neka je n neparan prirodan broj. Za permutaciju $p=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ skupa $\{1, 2, \dots n\}$, neka je $S(p)$ broj parova (i, j) takvih da je $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ i vrijedi

$$n \mid p_i+p_{i+1}+\dots+p_j.$$

Odredi najveću vrijednost koju može poprimiti $S(p)$.

15.2. Rješenja

Zadatak 1. (Ivan Novak)

Neka su x i y pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$3\sqrt{x^2+(y-4)^2}+4\sqrt{(x-3)^2+y^2}=5\sqrt{x^2+y^2}.$$

Odredi najveću vrijednost koju može poprimiti izraz x^2+y^2.

Prvo rješenje.

Neka su A, B, C, D redom točke $(0,0),(3,0),(0,4)$ i (x,y) u ravnini $\mathbb{R}^2$. Definicijski izraz se tada pretvara u:

$$|AB||CD|+|AC||BD|=|BC||AD|,$$

odnosno četverokut $ABCD$ zadovoljava Ptolomejevu jednakost, pa je po obratu Ptolomejevog teorema tetivan. Prema tome, točka D je na opisanoj kružnici trokuta ABC.
Moramo odrediti najudaljeniju točku te kružnice od ishodišta A koordinatnog sustava. Po nejednakosti trokuta, to je upravo točka na pravcu koji povezuje ishodište A i središte opisane kružnice trokuta ABC. Lako se vidi da je središte opisane kružnice ABC polovište dužine $\overline{BC}$, odnosno $(3.5,2)$. Zaključujemo da je najudaljenija točka onda $(3,4)$, i pripadni kvadrat udaljenosti je jednak 25.

Drugo rješenje.

Neka je $z=x+yi$. Tada jednakost možemo zapisati kao

$$3|z-4i|+4|z-3|=5|z|.$$

Primijetimo $3|z-4i|=|3z-12i|$, $4|z-3|=|12i-4zi|$ te $5|z|=|3z-4zi|$, odnosno vrijedi jednakost

$$|3z-12i|+|12i-4zi|=|3z-4zi|,$$

pa po uvjetu jednakosti u nejednakosti trokuta vrijedi da postoji $a\geqslant 0$ takav da je $a(3z-12i)=12i-4zi$, odnosno

$$\frac{12i-4zi}{3z-12i}\in\mathbb{R},$$

pa je jednak svom konjugatu, tj. imamo jednakost

$$(12i-4zi)(3\overline{z}+12i)=(3z-12i)(4\overline{z}i-12i),$$

koja se može zapisati kao

$$2|z|^2-6\Re(z)-8\Im(z)=0.$$

Uvrštavanjem $z=x+yi$, dobivamo

$$x^2+y^2-3x-4y=0.$$

Skup točaka (x,y) koje to zadovoljavaju je kružnica sa središtem $(1.5,2)$ radijusa 2.5. Sada dalje zaključujemo kao i u prvom rješenju.

Zadatak 2. (Ivan Novak)

Neka je n prirodan broj. *Particija* od n je uređena n-torka nenegativnih cijelih brojeva $(a_1, \ldots, a_n)$ takva da vrijedi $a_1 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot n = n$. Označimo s P_n broj particija od n, te stavimo $P_0 = 1$. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\sum_{d|n} P_{d-1} \leqslant P_n.$$

Prvo rješenje.

Fiksirajmo $d \mid n$. Neka je $P = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ neka particija od $d-1$. Njoj pridružimo particiju $P' = (a_1, \ldots, a_r, 1)$ od d. Lako se vidi da je pridruživanje $P \mapsto P'$ bijekcija iz skupa particija od $d-1$ u skup particija od d koje sadrže jedinicu. Particiji P' pridružimo particiju P'' od n koju dobijemo tako da svaki element particije pomnožimo s $\frac{n}{d}$. Lako se vidi da je $P' \mapsto P''$ bijekcija iz skupa svih particija od d koje sadrže 1 u skup svih particija od n čiji minimum je jednak $\frac{n}{d}$ i kojima je svaki element djeljiv s $\frac{n}{d}$. Onda je i $P \mapsto P''$ bijekcija. Kako su za različite vrijednosti od d slike tih bijekcija disjunktni skupovi jer im se minimalni elementi razlikuju, zaključujemo da vrijedi tražena nejednakost, jer unija ovih bijekcija čini injekciju iz unije skupa particija od $d-1$ u skup particija od n.

Drugo rješenje.

Označimo za svaki d sa Q_d broj primitivnih particija od d, odnosno broj particija od d kojima su elementi relativno prosti. Tada vrijedi $P_{d-1} \leqslant Q_d$ jer je P_{d-1} po prošlom rješenju broj particija od d koje sadrže 1, a svaka particija od d koja sadrži 1 je ujedno i primitivna particija od d.

Nadalje, primijetimo da vrijedi

$$P_n = \sum_{d|n} Q_d,$$

jer svakoj particiji od n možemo pridružiti jedinstvenu primitivnu particiju, dobivenu tako da podijelimo sve elemente particije njihovim najvećim zajedničkih djeliteljem. Sada iz nejednakosti $P_{d-1} \leqslant Q_d$ sumiranjem slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 3. (Borna Šimić)

Nađi sve injektivne funkcije $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da

$$f(x) - f(y) \mid x^2 - yf(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}_0$ takve da $x \neq y$.

Prvo rješenje.

Neka $P(x, y)$ označava tvrdnju

$$f(x) - f(y) \mid x^2 - yf(y).$$

Kako je f injekcija, za sve osim konačno mnogo prostih brojeva vrijedi $f(p) > f(0) + 1$. Neka je p neki takav prost broj.

$$P(p, 0) \implies f(p) - f(0) \mid p^2,$$

pa je $f(p) \in \{p + f(0), p^2 + f(0)\}$ za sve osim konačno mnogo prostih brojeva p.

Pretpostavimo da postoji beskonačan strogo rastući niz prostih brojeva $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi $f(p_n) = p_n^2 + f(0)$.

$$P(p_n, p_m) \implies p_n^2 - p_m^2 \mid p_n^2 - p_m^3 - p_m f(0) \implies p_n^2 - p_m^2 \mid p_m^2 - (p_m^3 + p_m f(0)),$$

ali za n dovoljno velik će vrijediti $|p_n^2 - p_m^2| > |p_m^2 - (p_m^3 + p_m f(0))|$, što je kontradikcija. Dakle, $f(p) = p + f(0)$ za sve osim konačno mnogo prostih brojeva p.

Neka je $(q_n)_n$ strogo rastući niz svih prostih brojeva.

$$P(q_n, q_m) \implies q_n - q_m \mid q_n^2 - q_m^2 - q_m f(0) \implies q_n - q_m \mid q_m f(0).$$

Za n dovoljno velik je $|q_n - q_m| > |q_m f(0)|$, pa je nužno $f(0) = 0$. Dakle, f ima beskonačno fiksnih točaka.

Uvrštavanjem (x, p), gdje je p fiksna točka, dobivamo

$$f(x) - p \mid x^2 - p^2 + p^2 - f(x)^2 = x^2 - f(x)^2,$$

pa $f(x)^2 - x^2$ ima beskonačno djelitelja, pa je jednako 0, odnosno $f(x) = x$ za svaki x. Lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je uvjet ekvivalentan s

$$f(x) - f(y) \mid x^2 - yf(x).$$

Pretpostavimo da je p prost broj takav da $p \nmid f(p)$. Onda po Dirichletovom teoremu postoji beskonačno brojeva y takvih da je $yf(p) - p^2$ prost. Za sve osim možda konačno mnogo takvih y zbog injektivnosti onda vrijedi $f(y) - f(p) = yf(p) - p^2$, odnosno

$$f(y) = f(p)(y + 1) - p^2.$$

Neka je S skup svih y koji zadovoljavaju tu jednakost. Onda uvrštavanjem $a, b \in S$ imamo

$$f(p)(a - b) \mid a^2 - b(f(p)(b + 1) - p^2).$$

Promatranjem desne strane modulo $a - b$, imamo da $a - b$ dijeli $b^2 - b(f(p)(b + 1) - p^2)$. Variranjem a zaključujemo da $b^2 - b(f(p)(b + 1) - p^2)$ ima beskonačno djelitelja, pa mora vrijediti $b^2 = b(f(p)(b + 1) - p^2)$, odnosno $f(p) = \frac{b+p^2}{b+1}$. Međutim, za b dovoljno velik, to je racionalan broj strogo između 1 i 2, što je kontradikcija. Zaključujemo da $p \mid f(p)$ za svaki prost broj p.

Nadalje, uvrštavanjem (a, y), gdje je $f(a) \neq 0$, imamo $f(y) - f(a) \leqslant yf(a) - a^2$, odnosno postoji konstanta A takva da je $f(y) \leqslant Ay$ za sve osim konačno mnogo y. Međutim, onda za proste brojeve p postoji konačno mnogo mogućnosti za $f(p)/p$, pa po Dirichletovom principu postoji $c \in \mathbb{N}$ i beskonačno p takvih da je $f(p) = cp$. Onda za svaki takav p imamo $cp - f(0) \mid p^2$. Iz ovog zaključujemo da je nužno $c = 1$ i $f(0) = 0$. Dakle, imamo beskonačno fiksnih točaka od f.

Uvrštavanjem (x, p), gdje je p fiksna točka, dobivamo

$$f(x) - p \mid x^2 - p^2 + p^2 - f(x)^2 = x^2 - f(x)^2,$$

pa $f(x)^2 - x^2$ ima beskonačno djelitelja, pa je jednako 0, odnosno $f(x) = x$ za svaki x. Lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

Treće rješenje.

Ponovno promatramo uvjet

$$f(x) - f(y) \mid x^2 - yf(x).$$

Pretpostavimo $f(1) = 0$. Uvrštavanjem $(1, y)$ dobivamo $f(y) \mid 1$ za sve $y \neq 1$, što je nemoguće. Dakle, $f(1) \neq 0$.

Uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo

$$f(y) - f(1) \mid yf(1) - 1.$$

Po Dirichletovom teoremu, postoji beskonačno prostih brojeva oblika $yf(1) - 1$, pa nužno postoji beskonačno y takvih da je $f(y) - f(1) = yf(1) - 1$, odnosno $f(y) = f(1)y + f(1) - 1$ za beskonačno vrijednosti y.
Uvrštavanjem $(y, 1)$ za takav y dobivamo

$$yf(1) - 1 \mid y^2 - yf(1) + yf(1) - 1 = y^2 - 1.$$

Euklidovim algoritmom onda dobijemo $yf(1) - 1 \mid y^2 f(1) - f(1) - y^2 f(1) + y = y - f(1)$. Zaključujemo da je nužno $f(1) = 1$ jer je inače $yf(1) - 1 > y - f(1)$. Posljedično, vrijedi da f ima beskonačno fiksnih točaka.

Uvrštavanjem (x, p), gdje je p fiksna točka, dobivamo

$$f(x) - p \mid x^2 - p^2 + p^2 - f(x)^2 = x^2 - f(x)^2,$$

pa $f(x)^2 - x^2$ ima beskonačno djelitelja, pa je jednako 0, odnosno $f(x) = x$ za svaki x. Lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

Zadatak 4. (Ivan Novak)

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ prirodni brojevi. Za $j \in \{1, 2, \ldots, 101\}$, označimo sa b_j najveći zajednički djelitelj brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{101}$. Pretpostavimo da vrijedi

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{101} = 30^{30}.$$

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_{101}$.

Rješenje.

Fiksirajmo prirodan broj d koji dijeli 30^{30}. Prvo ćemo naći minimum izraza iz zadatka uz dodatni uvjet da je $\frac{30^{30}}{d}$ najveći zajednički djelitelj od $a_1, \ldots, a_{101}$. Označimo sa m_d taj minimum. Onda će rješenje zadatka biti minimum svih m_d, kako d varira po djeliteljima od 30^{30}.

Neka je $c_j = \frac{d \cdot a_j}{30^{30}}$, $d_j = \frac{d \cdot b_j}{30^{30}}$ za $j \in \{1, \ldots, 101\}$. Primijetimo da je onda d_j najveći zajednički djelitelj od $c_1, \ldots c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_{101}$, te je

$$d_1 + \ldots + d_{101} = d,$$

a treba minimizirati izraz

$$\frac{30^{30}}{d}(c_1 + \ldots + c_{101}).$$

Lako se vidi da je nužno $d > 100$. Primijetimo da su brojevi $(d_k)_k$ u parovima relativno prosti. Naime, ako prost broj p dijeli neki broj d_k, onda dijeli svaki broj c_ℓ osim možda c_k, a znamo da su brojevi $(c_k)_k$ relativno prosti, pa p ne može dijeliti dva različita d_{k_1} i d_{k_2}.

Nadalje, vidimo da je za svaki $j \in \{1, \ldots, 101\}$, broj c_j djeljiv sa d_i za svaki $i \neq j$, pa je, jer su $(d_i)_i$ u parovima relativno prosti, c_j djeljiv s umnoškom $\prod_{i \neq j} d_i$. Dakle, $c_j \geqslant \prod_{i \neq j} d_i$.

Sada primijetimo da ako su $d_1, \ldots, d_{101}$ neki prirodni brojevi za koje je $d_1 + \ldots + d_{101} = d$, da se suma

$$S := \prod_{j \neq 1} d_j + \ldots + \prod_{j \neq 101} d_j$$

minimizira kad je $d_1 = d - 100$, $d_2 = d_3 = \ldots = d_{101} = 1$. Naime, ako bismo imali dva broja $d_a \geqslant d_b$ koji su oba veći od 1, onda bismo mogli d_a povećati za 1 a d_b smanjiti za 1, te tvrdimo da smo time smanjili S.

Vrijedi $(d_a + 1)(d_b - 1) < d_a d_b$, pa su se svi pribrojnici u S osim a-tog i b-tog smanjili. Nadalje, a-ti pribrojnik se povećao za $\prod_{j \neq a,b} d_j$, dok se b-ti pribrojnik smanjio za $\prod_{j \neq a,b} d_j$, pa se S uistinu smanjio.

Zaključujemo

$$c_1 + \ldots + c_{101} \geqslant \prod_{j \neq 1} d_j + \ldots + \prod_{j \neq 101} d_j \geqslant 100(d - 100) + 1.$$

Jednakost se stvarno i postiže, ako uzmemo $c_1 = 1, c_2 = c_3 = \ldots = c_{101} = d - 100$. Zaključujemo

$$m_d = \frac{30^{30}}{d}(100d - 100^2 + 1).$$

Sada treba minimizirati m_d, gdje d ide po svim djeliteljima od 30^{30} većim od 100. Da bismo to minimizirali, primijetimo da je m_d rastuća funkcija, pa treba samo naći najmanji djelitelj od 30^{30} veći od 100. Direktnom provjerom brojeva između 101 i 108, dobivamo da je 108 traženi broj. Rješenje zadatka je onda

$$m_{108} = \frac{30^{30} \cdot 801}{108}.$$

Zadatak 5. (Borna Šimić)

Neka je n neparan prirodan broj, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ neka permutacija $(1, 2, \ldots n)$ i neka je S broj parova (i, j) takvih da je $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ i vrijedi
$$n \mid p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j.$$
Koliko najviše može iznositi S?

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da je maksimum jednak
$$M = \frac{(n+1)(n+3)}{8}.$$
Promotrimo permutaciju
$$\left(n, 1, n-1, 2, n-2, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$
Lako se može prebrojati da je za nju $S = M$. Dokažimo sada da je $S \leqslant M$ za svaku permutaciju.

Neka je p neka permutacija. Segment $[i, j]$ i interval $[i, j)$ definiramo kao skup svih brojeva između brojeva i i j u permutaciji, gdje u prvom slučaju ubrajamo j, a u drugom ne. Za par (i, j) koji zadovoljava uvjet, te za pripadni segment $[i, j]$ kažemo da su *lijepi*.

Primijetimo da lijepih segmenata koji počinju ili završavaju s n ima najviše $\frac{n+1}{2}$, jer ako su i i j uzastopni brojevi u permutaciji, onda bar jedan od $[i, n]$, $[j, n]$ nije lijep.

Sada je dovoljno dokazati da je broj lijepih segmenata kojima n nije jedan od krajeva manji ili jednak $\frac{(n+1)(n-1)}{8}$.

Možemo iz permutacije sada izbaciti n i gledati ju kao permutaciju od $\{1, \ldots, n-1\}$. Na tom skupu, kojem dodamo još element o koji ćemo zamišljati kao desni kraj permutacije, promotrimo usmjeren graf kojem su bridovi parovi (i, j) takvi da je $[i, j)$ lijep, gdje dodatno definiramo $[i, o)$ kao skup svih elemenata desno od i, uključujući i. Neka su $C_1, \ldots, C_k$ veličine komponenata tog grafa. Tada je broj lijepih segmenata jednak
$$\sum_{i=1}^{k} \binom{C_i}{2}.$$
Također, vrijedi $\sum_{i=1}^{k} C_i = n$. Dokažimo da za sve $i \neq j$ vrijedi
$$C_i + C_j \leqslant \frac{n+3}{2}.$$
Pretpostavimo da je $C_i + C_j \geqslant \frac{n+5}{2}$. Primijetimo da nikad nisu dva uzastopna elementa u istoj komponenti. Također, ako je a neposredno desno od c i b neposredno desno od d, nije moguće da postoji brid između a i b te između c i d, jer bi tada bilo $c = d$. Međutim, kako je $C_i + C_j \geqslant \frac{n+5}{2}$, onda se lako vidi da postoje barem tri para uzastopnih elemenata permutacije koji su svi u nekoj od te dvije komponente. Ako s A i B označimo te komponente, onda je po jedan element svakog para u A, a drugi u B. Onda po Dirichletovom principu postoje dva para koji imaju istu 'orijentiranost', tj. čiji lijevi elementi su u A i čiji desni elementi su u B ili obratno. Međutim, to je nemoguće zbog maloprije dokazane tvrdnje.

Sada je preostalo maksimizirati sumu
$$T = \sum_{i=1}^{k} \binom{C_i}{2}$$
uz uvjete $\sum C_i = n$ i $C_i + C_j \leqslant \frac{n+3}{2}$. Dovoljno je maksimizirati sumu $\sum C_i^2$, i dovoljno je dokazati da se maksimum postiže kad je jedna komponenta veličine $\frac{n+1}{2}$, a ostale veličine 1. Neka su C_a i C_b dva najveća broja. Ako je $C_a + C_b < \frac{n+3}{2}$, samo povećamo C_a za 1 i smanjimo C_b za 1. Prepostavimo sada $C_a + C_b = \frac{n+3}{2}$. Primijetimo da je sve brojeve manje od C_a i manje ili jednake C_b, iz istog argumenta kao i prije (konveksnost) optimalno rasporediti u grupe veličine C_b i možda još jednu grupu veličine $C_c < C_b$, tj. da je dovoljno riješiti taj slučaj. Dakle, tražimo maksimum zbroja $a^2 + kb^2 + c^2$, gdje je $a + b = \frac{n+3}{2}$, k neki prirodan broj, $c < b \leqslant a$ i $a + kb + c = n$. Može se pokazati da se maksimum uz te uvjete postiže za $a = \frac{n+1}{2}$, $k = \frac{n-1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$, kao što smo i tvrdili.

Drugo rješenje.

Na isti način kao i u prvom rješenju zanemarimo broj n jer se pojavljuje u najviše $\frac{n+1}{2}$ dobrih segmenata, te promatramo permutaciju od $\{1, \ldots, n-1\}$. Za par (i, j) kažemo da je odličan ako je dobar i ako je $i + j = n$, te kažemo da je loš ako nije dobar. Primijetimo da ima najviše $\frac{n-1}{2}$ odličnih parova.

Sada svakom dobrom paru koji nije odličan pridružimo tri loša para, to su parovi $(s(i), j)$, $(i, p(j))$ te $(s(i), p(j))$, gdje je $s(k)$ oznaka za broj nakon k u permutaciji, a $p(k)$ oznaka za broj neposredno prije k u permutaciji. Odličnom paru (i, j) pridružimo dva para koja nisu dobra, $(s(i), j)$ i $(i, p(j))$. Lako se vidi da su pridruženi parovi stvarno loši i da su dobro definirani. Također, pripadni skupovi loših parova su disjunktni za svaka dva dobra para. Onda je trostruki broj dobrih parova manji ili jednak broju loših parova kojem dodamo još $\frac{n-1}{2}$ (za svaki odlični par smo pridružili 2 permutacije umjesto 3, pa dodajemo još taj broj). Ako s D označimo broj dobrih parova, to znači

$$3D \leqslant \frac{n(n-1)}{2} - D + \frac{n-1}{2},$$

odnosno $D \leqslant \frac{(n-1)(n+1)}{8}$. Kad dodamo još da je doprinos dodavanja n na bilo koju poziciju najviše $\frac{n+1}{2}$, dobivamo ogradu $\frac{(n+1)(n+3)}{8}$, kao što smo i tvrdili.

16. Poglavlje

Natjecanje JELMO

Ove smo godine za mlađe sudionike Zimske škole umjesto ekipnog natjecanja reli, u skladu s epidemiološkim mjerama, pripremili pojedinačno natjecanje: Juniorski ELMO, tj. JELMO. Natjecateljima je bilo zadano sljedećih šest zadataka.

16.1. Zadaci

1. Odredi sve realne brojeve x takve da vrijedi

$$|x + |2x - |3x + |4x|||| = 2022.$$

2. Neka su x i y pozitivni realni brojevi takvi da je $x^{1000} + y^{1000} = 100$. Dokaži da je

$$x^{1001} + y^{9999} > 99.$$

3. Za niz prirodnih brojeva kažemo da je *osječki* ako je $a_1 > 3$ i

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 9$$

vrijedi za svaki $n \geqslant 1$. Nađi sve proste brojeve p takve da svaki osječki niz sadrži broj djeljiv s p.

4. Na 2022×2022 ploči sva su polja bijela. Teodor želi obojati neka polja u crno tako da ploča postane šahovski obojana. U jednom potezu, Teodor bira redak ili stupac, bira polje P u tom retku ili stupcu te mijenja boje svih polja u tom retku ili stupcu osim P. Koliko će Teodoru najmanje trebati poteza da ostvari svoj cilj?

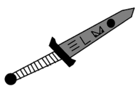
5. Odredi znamenke a, b, c, d ako je poznato da je decimalni zapis umnoška prvih 26 prirodnih brojeva jednak

$$\overline{4032a14b112660563558cd00000}.$$

6. Za trokut $\triangle XYZ$, označimo s $[XYZ]$ njegovu površinu. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut, i neka je P točka unutar $ABCD$ takva da je

$$[APB] \cdot [CPD] = [BPC] \cdot [DPA].$$

Dokaži da P leži na nekoj od dijagonala od $ABCD$.



16.2. Rješenja

Zadatak 1.

Odredi sve realne brojeve x takve da vrijedi

$$|x + |2x - |3x + |4x|||| = 2022.$$

Rješenje.

Općenito, $|x| = x$ za $x \geqslant 0$ te $|x| = -x$ za $x \leqslant 0$. Zbog $|4x|$ promatramo dva slučaja: $x \geqslant 0$ i $x < 0$.

I. slučaj: $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
|x + |2x - |3x + 4x||| &= 2022 && (4x \geqslant 0)\\
|x + |2x - |7x||| &= 2022 && \\
|x + |2x - 7x|| &= 2022 && (7x \geqslant 0)\\
|x + | - 5x|| &= 2022 && \\
|x + 5x| &= 2022 && (-5x \leqslant 0)\\
|6x| &= 2022 && \\
6x &= 2022 && (6x \geqslant 0)\\
x &= 337 \geqslant 0 &&
\end{aligned}$$

II. slučaj: $x \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
|x + |2x - |3x - 4x||| &= 2022 && (4x \leqslant 0)\\
|x + |2x - | - x||| &= 2022 && \\
|x + |2x - (-x)|| &= 2022 && (-x \geqslant 0)\\
|x + |3x|| &= 2022 && \\
|x - 3x| &= 2022 && (3x \leqslant 0)\\
| - 2x| &= 2022 && \\
-2x &= 2022 && (-2x \geqslant 0)\\
x &= -1011 \leqslant 0 &&
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su jedina rješenja $x = 337$ i $x = -1011$.

Zadatak 2.

Neka su x i y pozitivni realni brojevi takvi da je $x^{1000} + y^{1000} = 100$. Dokaži da je

$$x^{1001} + y^{9999} > 99.$$

Rješenje.

Razlikujemo četiri slučaja ovisno o tome jesu li x i y veći od 1 ili ne.

Ako je $x < 1$ i $y < 1$, onda je $x^{1000} + y^{1000} < 2$, što je kontradikcija.

Ako je $x \geqslant 1$ i $y \geqslant 1$, onda je $x^{1001} \geqslant x^{1000}$ i $y^{9999} \geqslant y^{1000}$, pa je

$$x^{1001} + y^{9999} \geqslant 100 > 99,$$

pa tvrdnja vrijedi.

Ako je $x \geqslant 1$ i $y < 1$, onda je $x^{1001} > x^{1000}$ i $x^{1000} = 100 - y^{1000} > 99$, pa je i $x^{1001} > 99$, pa je posebno i $x^{1001} + y^{9999} > 99$.

Ako je $x < 1$ i $y \geqslant 1$, onda je $y^{9999} > y^{1000}$ i $y^{1000} = 100 - y^{1000} > 99$, pa je i $y^{9999} > 99$, pa je posebno i $x^{1001} + y^{9999} > 99$.

Zadatak 3.

Za niz prirodnih brojeva kažemo da je *osječki* ako je $a_1 > 3$ i

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 9$$

vrijedi za svaki $n \geqslant 1$. Nađi sve proste brojeve p takve da svaki osječki niz sadrži broj djeljiv s p.

Rješenje.

Za proste brojeve koji zadovoljavaju tvrdnju zadatka kažemo da su *dobri*.

Dokažimo prvo da je 3 dobar. Ako je $a_1 \equiv 0 \pmod 3$, onda smo gotovi. Ako je $a_1 \equiv 1 \pmod 3$, onda je

$$a_2 \equiv 1^2 + 1 - 9 \equiv 2 \pmod 3,$$

pa je onda

$$a_3 \equiv 2^2 + 2 - 9 \equiv 0 \pmod 3,$$

pa smo gotovi. Ako je $a_1 \equiv 2 \pmod 3$, onda smo isto gotovi jer je tada $a_2 \equiv 0 \pmod 3$. Neka je sada $p \neq 3$. Onda ako stavimo $a_1 = p + 3$ i promotrimo pripadni osječki niz, vrijedit će $a_n \equiv 3 \pmod p$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime, ako je $a_n \equiv 3 \pmod p$, onda je

$$a_{n+1} \equiv 3^2 + 3 - 9 \equiv 3 \pmod p,$$

pa tvrdnja vrijedi po principu matematičke indukcije.

Zadatak 4.

Na 2022×2022 ploči sva su polja bijela. Teodor želi obojati neka polja u crno tako da ploča postane šahovski obojana. U jednom potezu, Teodor bira redak ili stupac, bira polje P u tom retku ili stupcu te mijenja boje svih polja u tom retku ili stupcu osim P. Koliko će Teodoru najmanje trebati poteza da ostvari svoj cilj?

Rješenje.

Dokazat ćemo da je Teodoru potrebno barem 2022 poteza, te da može obojati ploču na traženi način s 2022 poteza. Neka je $n = 2022$ zbog olakšavanja zapisa.

Primijetimo da će nakon Teodorovog bojanja $n^2/2$ polja biti crno. Međutim, u svakom koraku on promijeni boju od $n/2$ polja koja su na kraju crna. Dakle, ako je nakon k poteza postigao da je ploča šahovski obojana, mora biti $k \cdot n/2 \geqslant n^2/2$, odnosno $k \geqslant 2022$.

S druge strane, ako Teodor izabere po jednom svaki redak i stupac neparnog indeksa tako da promijeni boju svim poljima osim dijagonalnog, onda će polja koja su u parnom retku i parnom stupcu promijeniti boju 0 puta, polja u parnom retku i neparnom stupcu ili parnom stupcu i neparnom retku će promijeniti boju 1 put, a polja u neparnom retku i neparnom stupcu 2 puta, pa će ostati iste boje. Dakle, tim nizom poteza dobivamo šahovsko bojanje ploče.

Zadatak 5.

Odredi znamenke a, b, c, d ako je poznato da je decimalni zapis umnoška prvih 26 prirodnih brojeva jednak

$$\overline{4032a14b112660563558cd00000}.$$

Rješenje.

Neka je N broj iz zadatka. Primijetimo da je djeljiv s 5^6 jer sadrži brojeve $5, 10, 15, 20, 25$, od kojih prva četiri doprinose eksponentom 1, a 25 s eksponentom 2. Slično, djeljiv je s 2^9, jer je djeljiv s $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$. Zaključujemo da je djeljiv s 10^6, pa mu je zadnjih 6 znamenki jednako 0. Posebno, $d = 0$. Odredimo sada c. Ako podijelimo N sa 10^6, dobiveni broj je djeljiv s 8 jer je N bio djeljiv s 2^9. Stoga zadnje tri znamenke tako dobivenog broja moraju činiti broj djeljiv s osam. Iz tog razloga $\overline{58c}$ mora biti broj djeljiv s 8. Tada jedini takav broj nužno mora biti 584 jer je jedini broj u toj desetici djeljiv s 8. Zaključujemo $c = 4$. Još ostaje odrediti a i b. To dobivamo iz činjenice da je broj djeljiv s 9 pa mu zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 9. Ostatak zbroja ostalih znamenaka pri dijeljenju s 9 je 3 to znači da mora biti $a + b = 6$ ili $a + b = 15$. S druge strane, kriterij za djeljivost s 11 je da alternirajuća suma znamenaka bude djeljiva s 11. Sada imamo

$$4-0+3-2+a-1+4-b+1-1+2-6+6-0+5-6+3-5+5-8+4-0+0-0+0-0+0 = 8+a-b$$

Dakle, ili je $a - b = 3$ što daje rješenja $a = 9, b = 6$ ili je $a - b = -8$ što bi značilo da su rješenja $0, 8$ i $1, 9$, no to ne zadovoljava niti jednu od ranijih dvaju jednadžbi. Sada imamo da je rješenje zadatka
$a = 9, b = 6, c = 4, d = 0$.

Zadatak 6.

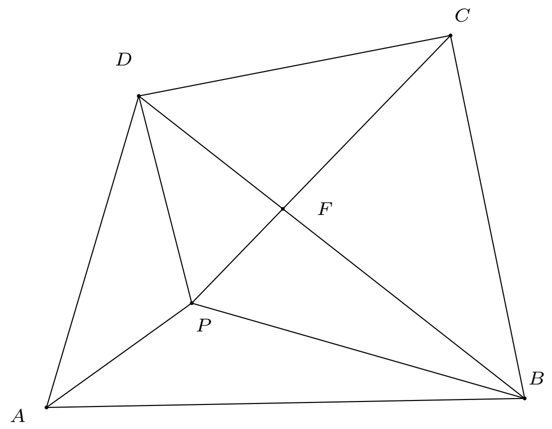
Za trokut $\triangle XYZ$, označimo s $[XYZ]$ njegovu površinu. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut, i neka je P točka unutar $ABCD$ takva da je

$$[APB] \cdot [CPD] = [BPC] \cdot [DPA].$$

Dokaži da P leži na nekoj od dijagonala od $ABCD$.

Rješenje.

Neka je dana situacija kao na skici. Prvo dokazujemo obrat. Ukoliko je P na nekoj dijagonali, vrijedi jednakost kao u zadatku.



Naime, neka P leži na recimo AC. Tada su $\triangle APD$ i $\triangle PCD$ trokuti koji dijele vrh i pravac na kojem leže osnovice pa dijele i jednu visinu. To znači da je $\frac{[APD]}{[PCD]} = \frac{|AP|}{|PC|}$. Na identičan se način dobiva da je i $\frac{[ABP]}{[PBC]} = \frac{|AP|}{|PC|}$. To znači da vrijedi

$$\frac{[APD]}{[PCD]} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{[ABP]}{[PBC]}$$

Množenje nam daje upravo $[APB][PCD] = [BPC][DPA]$. Sada dokažimo tvrdnju zadatka. Neka je P neka točka koja zadovoljava gornju jednakost, ali ne leži niti na jednoj dijagonali. Tako ne leži ni na BD pa postoji presjek jedne od dužina iz P u vrh s tom dijagonalom. Recimo točka F. Sada imamo da je $[PFD][FBC] = [FCD][FPB]$, odnosno

$$\frac{[FDC]}{[FBC]} = \frac{[DFP]}{[FPB]} = \frac{|FD|}{|FB|}$$

Sada zbog pretpostavke da P zadovoljava jednakost iz zadatka možemo zaključiti da je

$$\frac{[APD]}{[APB]} = \frac{[PCD]}{[PCB]} = \frac{[PFD] + [FDC]}{[PFB] + [FBC]} = \frac{|FD|}{|FB|}$$

To znači da je omjer površina

$$\frac{[APFD]}{[ABFP]} = \frac{|FD|}{|FB|}$$

S druge strane, ako povučemo $\overline{AF}$ imamo

$$\frac{[AFD]}{[AFB]} = \frac{|DF|}{|FB|}$$

$$\implies \frac{[APFD]}{[ABFP]} = \frac{[AFD] + [APF]}{[AFB] - [APF]} = \frac{[AFD]}{[AFB]}$$

Sada vidimo da je u prethodnoj jednakosti lijeva strana veća od desne osim ako je $[APF] = 0$, a to se događa samo kada su te tri točke kolinearne, odnosno kada su A, P, F i C kolinearne, pa onda P leži na dijagonali AC.

Dio V

Završne riječi

17. Poglavlje

Završno

17.1. Zahvale

Organizacija Zimske škole matematike ne bi bila moguća bez volje, truda i nesebičnosti svih onih koji su nam pomogli da ju i ove godine uspješno održimo. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su nam u tom pothvatu pomogli i izašli nam u susret.

Zahvaljujemo Srednjoškolskom đačkom domu Osijek što nas je tako lijepo ugostio i osigurao nam smještaj i prehranu. Zahvaljujemo i Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku koji nam je pružio prostor za održavanje predavanja i projekata, a osim toga su naši vjerni partneri u Osijeku i kroz školsku godinu.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim donatorima: Jane Street, Photomath i Hashcode. Posebno želimo zahvaliti i Hrvatskom matematičkom društvu i Ministarstvu znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske. Omogućili ste da se Zimska škola održi, ali i da bude sufinancirana ili besplatna mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše udruge.

Posebno zahvaljujemo Ministarstvu znanosti i obrazovanja što su prepoznali naš rad te nam omogućili ne samo održavanje Zimske škole, već i da bude sufinancirana mnogim nadarenim učenicima, te što nas uvijek podržavaju u svim našim aktivnostima.

MINISTARSTVO ZNANOSTI I OBRAZOVANJA REPUBLIKE HRVATSKE

Jane Street

photomath
smart camera calculator

HashCode

Zahvaljujemo, naravno, i svim mentorima čiji je volonterski rad omogućio mladim matematičarima da prodube svoja matematička znanja, bolje se pripreme za natjecanja, dobiju savjete od bivših natjecatelja i budu u društvu ostalih zainteresiranih učenika iz cijele države i šire.

Za kraj, zahvaljujemo svima ostalima koji su nam na bilo kakav način pomogli i bili dio ovog projekta, a posebno svim vrijednim učenicima koji su sudjelovali u Zimskoj školi i njihovim roditeljima koji su ih u tome podržali. Hvala vam na odazivu i nadamo se da smo vas potakli na daljnji rad i bavljenje matematikom, jer upravo to je jedan od naših glavnih ciljeva. Nadamo se ponovnom odazivu svih uključenih i dogodine!

17.2. Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Možete nas kontaktirati i osobno:

Lucija Relić
Predsjednica Udruge
e-mail: lucija.relic@mnm.hr
mob: +385 95 845 2964

Mislav Brnetić
Dopredsjednik Udruge
e-mail: mislav.brnetic@mnm.hr
mob: +385 91 395 8198

Mateo Dujić
Tajnik Udruge
e-mail: mateo.dujic@mnm.hr
mob: +385 91 955 0282

Ukoliko nam u daljnjem radu želite financijski pomoći simboličnom donacijom,
uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.