Zimska škola matematike 2023.

Ogulin

2.-8.1.2023.

Sadržaj Knjige predavanja

1. Predgovor

2. Uvod

2.1. O udruzi

2.2. Povijest kampova

2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

2.4. Aktivnosti na kampu

2.4.1. Natjecanje kuća

2.5. Popis mentora

2.6. O predavanjima

2.7. Ovaj kamp - u slikama

I. Zadaci s predavanja

3. Zadaci za prvu grupu

3.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti

3.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja

3.3. A1: Mislav Plavac - KAGH

3.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

4. Zadaci za drugu grupu

4.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija

4.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja

4.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama

4.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

5. Zadaci za treću grupu

5.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje

5.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante

5.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")

5.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

6. Zadaci za četvrtu grupu

6.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice

6.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi

6.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick

6.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

II. Hintovi s predavanja

7. Hintovi za prvu grupu
7.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti
7.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja
7.3. A1: Mislav Plavac - KAGH
7.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

8. Hintovi za drugu grupu
8.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija
8.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja
8.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama
8.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

9. Hintovi za treću grupu
9.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje
9.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante
9.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")
9.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

10. Hintovi za četvrtu grupu
10.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice
10.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi
10.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick
10.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

III. Rješenja s predavanja

11. Rješenja za prvu grupu
11.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti
11.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja
11.3. A1: Mislav Plavac - KAGH
11.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

12. Rješenja za drugu grupu
12.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija
12.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja
12.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama
12.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

13. Rješenja za treću grupu
13.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje
13.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante
13.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")
13.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

14. Rješenja za četvrtu grupu
14.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice
14.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi
14.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick
14.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

IV. Projekti na Ljetnom kampu

15. Projekti
15.1. O projektima . . . .
15.2. Popis projekata na ovoj Zimskoj školi . . . .
15.2.1. Sve slučajnosti su slučajne . . . .
15.2.2. Kako rasporediti učenike na projekte? . . . .
15.2.3. Algoritmi i procesi . . . .
15.2.4. Financijska matematika . . . .
15.2.5. Funkcijske . . . .
15.2.6. Social Choice Theory . . . .
15.2.7. Skupine . . . .
15.2.8. C7,8,9 . . . .

V. Završne riječi

16. Zahvale
16.1. Kontakt . . . .

1. Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći sva predavanja koja su se održala na Zimskoj školi matematike 2023. godine, zajedno s većinom hintova i rješenja.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bismo zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na našu email adresu mnm@mnm.hr.

Autori,
22. siječnja 2023.

2. Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".

Slika 2.1.: Sastanak na kojem se formirala udruga

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema, no s vremenom se djelovanje udruge proširila i na druge aktivnosti poput zimskih škola, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama i sajmovima...

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, a članovi Udruge dolaze iz dvadesetak različitih srednjih škola, iz svih dijelova Hrvatske. Važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerenje u organiziranje važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija godišnjeg matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" već deset godina u kojem sudjeluje više od 25 država diljem svijeta!

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti sve svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te vjerujemo da kampovi svake godine postaju sve bolji. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.
Nakon nekoliko godina uspješne organizacija Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Zimska škola je jako slična Ljetnom kampu, no uvijek je manja po svojoj veličini, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta. Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce, kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa, u kojoj su projekti zauzeli i jutro i popodne svakog dana kampa. Nažalost, organizacija konferencije je zamrla tijekom pandemije, no nadamo se da će se već ovoga ljeta održati sljedeća Matematička konferencija!
Jedan od ciljeva svih kampova jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampu se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

Kao i mnogih prethodnih godina, Zimska škola matematike 2023. održala se u Ogulinu. Gotovo svi sudionici bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin, a predavanja su se održavala u Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin.

Slika 2.2.: Učenički dom Ogulin [1]

Slika 2.3.: OŠ Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin [2]

Kao i inače, Zimska škola je ove godine bila održana tijekom Zimskih praznika nastavne godine kako učenici (a ni mentori) ne bi gubili nastavu. Termin je kao i inače odabran odmah prije početka natjecanja u nadi kako će učenicima predavanja održana na kampu pomoći na školskoj, županijskoj, državnoj i višim razinama natjecanja!

[1] Izvor fotografije: Web stranica Učeničkog doma Novi Zagreb
[2] Izvor fotografije: Web stranice ogulin.eu

2.4. Aktivnosti na kampu

Kao i inače, glavne su aktivnosti na kampu bile jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici slušali su detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici se uz ručak imali priliku odmoriti i zabaciti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz natjecateljsku, primijenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik kampa na početku kampa je odabrao jedan od ponuđenih raznovrsnih projekata te na njemu radio tijekom četiri popodneva do kraja kampa učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije iz odabrane teme.
Nakon večere svaki dan odvijajale su se raznovrsne aktivnosti, kao što su Q&A, pub kviz i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi sudionici imali su slobodno vrijeme tijekom kojeg se mogu družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, Blotto, bela, Resistance, Exploding kittens, kockice ...

Jedno popodne, umjesto projekata, učenici su se okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", dok su ozbiljniji natjecatelji sudjelovali na još jednom izdanju ELMO-a.

2.4.1. Natjecanje kuća

Ove godine smo po prvi put organizirali "Natjecanje kuća", u koju su svrhu učenici bili podijeljeni u četiri (otprilike) jednakobrojne kuće *Algebra*, *Kombinatorika*, *Geometrija* i *Teorija brojeva*, a svaku kuću vodio je par mentora. Učenici su preko raznih zadataka koji su uključivali igranje mafije, Blotta, kahoot kviza o povijesti MNM-a, prepoznavanje sudionika prošlih kampova, traženje slatkih slika mačaka i mnogih drugih osvajali bodove za svoje kuće, a **pobjednici prvog natjecanja su učenici kuće *Kombinatorika* s osvojenih čak 111 bodova**.

Slika 2.4.: Pobjednička kuća "Kombinatorika" na svečanom zatvaranju

Odmah iza njih našla se kuća *Geometrija* sa 108 bodova, a treće mjesto osvojila je kuća *Teorija brojeva* s odličnih 97 bodova!

2.5. Popis mentora

Slika 2.5.: Mentorsko druženje zadnju večer kampa

Mislav Brnetić
Luka Bulić Bračulj
Andrej Čizmarević
Paula Horvat
Ivan Novak
Mislav Plavac
Hrvoje Radoš
Lucija Relić
Nika Utrobičić
Ivan Vojvodić
Matej Vojvodić

2.6. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u četiri skupine ovisno o njihovom uzrastu i predznanju. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Također smo jako zahvalni što je prof. Emir Kalajdžija, koji inače nije član Udruge, doputovao iz Sarajeva i učenike 2. grupe obradovao svojim predavanjem "Natjecateljski zadaci sa školskim idejama", koje se također nalazi u ovoj Knjizi.

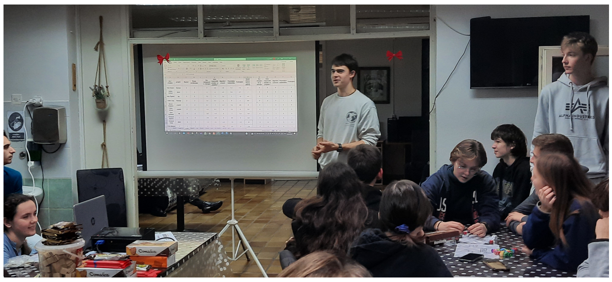
Slika 2.6.: Prof. Kalajdžija i slušatelji predavanja

2.7. Ovaj kamp - u slikama

Slika 2.7.: Jutarnja predavanja

Slika 2.8.: Pobjednici i sastavljači ELMO-a

Slika 2.9.: Kahoot (u sklopu Natjecanja kuća)



Slika 2.10.: Prezentacije projekata

Slika 2.11.: Pobjednici relija

Slika 2.12.: Ekipno natjecanje Estimathon

Dio I.

Zadaci s predavanja

3. Zadaci za prvu grupu

3.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Cilj je ovog predavanja pružiti relativno kratak uvod u to što su tetivni četverokuti, koja svojstva imaju i kako ih koristiti u zadatku kada ih primijetite. No, prije svega toga, valja se prisjetiti nekih korisnih teorema koje već znate (ili ćete barem sada naučiti):

Teorem 3.1.1: Teorem o obodnom i središnjem kutu

Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom. Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni. Odobni kutevi nad lukovima iste duljine su jednaki.

Korolar 3.1.2: Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Dokaz. Koristimo to da znamo Teorem o obodnom i središnjem kutu. Uzmimo promjer kružnice $\overline{AB}$ i lukove AB i BA. Oni su jednako dugi, pa obodni kutevi nad njima moraju biti jednaki. No, kako su međusobno suprotni lukovi, onda moraju biti suplementarni (suma im je 180°).
Dakle, obodni kut nad promjerom mora biti pravi (90°). □

Teorem 3.1.3: Teorem o kutu između tetive i tangente

Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

0. zadatak: pokaži da vrijedi Teorem o kutu između tetive i tangente.
Hint: docrtaj središte kružnice i spusti okomicu na tangentu.

Rješenje: Docrtajmo središte opisane kružnice $\triangle ABC$ i nazovimo ga S, te izaberimo neku proizvoljnu točku T na tangenti (samo kako bi mogli imenovati kuteve). Trivijalno je $\angle SBT = 90°$. Neka je $\alpha = \angle CBT$, tada je $\angle SBC = 90° - \alpha$. Kako je $\triangle SBC$ jednakokračan, onda je $\angle SBC = \angle SCB$, i vrijedi $\angle BSC = 180° - 2 \times (90° - \alpha) = 2 \times \alpha$. Kako je $\angle BSC$ središnji kut obodnog kuta $\angle BAC$, dobivamo $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo pokazati.

Definicija 3.1.4: Tetivni četverokut

Tetivni četverokut je svaki četverokut kojem se može opisati kružnica.

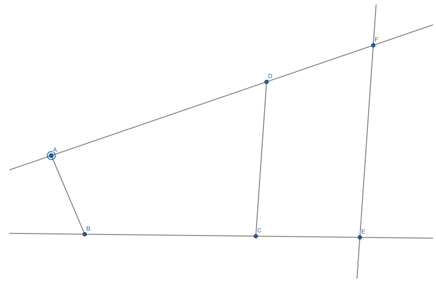
Primjetite kako je definicija dosta siromašna, nepraktična i ne daje nam puno informacija. Zato ćemo puno više koristiti sljedeću karakterizaciju (koju smijete koristiti na natjecanju kao opće poznatu):

Teorem 3.1.5: Tetivni četverokut

Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi neki od sljedećih uvjeta:

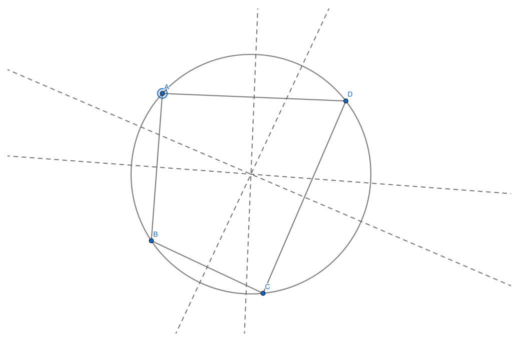
- $\angle ABC + \angle CDA = 180°$
- $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
- $\angle ABD = \angle DCA$
- $\angle BAC = \angle CDB$
- $\angle ADB = \angle BCA$
- $\angle CAD = \angle DBC$

Primjer 3.1.1 (Reimov teorem)**.** Zadan je četverokut $ABCD$. Povučena je bilo koji pravac p paralelan s CD i po potrebi su dužine AD i BC tako da se sijeku s pravcem p. Neka su E i F sjecišta pravca p s BC i AD. Dokaži da je četverokut $ABEF$ tetivan ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.



Rješenje 3.1.1. Primjetimo da se kutevi $\angle DAB$ i $\angle ABC$ zapravo ujedno i kutevi $\angle FAB$ i $\angle ABE$, pa moraju biti jednaki. Kako su pravaci p i CD paralelni, onda po teoremu o kutu uz presječnicu usporednih pravaca mora vrijediti $\angle CDA = \angle EFA$ i $\angle BCD = \angle BEF$.
Zato trivijalno vrijedi $\angle DAB + \angle BCD = \angle FAB + \angle BEF$. Pozivamo se na Teorem 1.5 i znamo da je četverokut tetivan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih kutova 180°. Ako je suma kutova stvarno 180°, onda su oba četverokuta tetivna, a inače nije ni jedan. □

Primjer 3.1.2. Pokaži da je četverokut tetivan ako i samo ako mu se simetrale sve četiri stranice sijeku u istoj točki.



Oprez: Ako i samo ako

Često ćete u zadatcima susreti izraz "ako i samo ako" koji se ponekad skraćuje u "akko".
Tada treba pokazati da iz prve tvrdnje slijedi druga i da iz druge slijedi prva.
Dokaz provodimo ovako: najprije pretpostavimo prvu tvrdnju i pokušavamo dokazati da mora vrijediti i druga tvrdnja, a zatim pretpostavimo drugu tvrdnju i pokušavamo dokazati prvu.

Rješenje 3.1.2. Pretpostavimo najprije da je četverokut tetivan. Tada mu se po definiciji može opisati kružnica, te su njegove stranice tetive te kružnice. Trivijalno vrijedi da simetrala svake tetive prolazi kroz središte kružnice, pa onda sigurno sve četiri simetrale prolaze kroz središte kružnice. Drugim riječima, sve se simetrale sijeku u istoj točki.
Pretpostavimo sad da imamo nekakav četverokut kojem se simetrale stranica sijeku u jednoj točki. Nazovimo tu točku O (izbor imena će biti jasniji za par rečenica). Iz karakterizacije simetrale dužine, znamo da je to skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine. Dakle, kako O leži na simetrali $\overline{AB}$, onda je $|OA| = |OB|$. No, kako leži i na simetrali $\overline{BC}$, onda je $|OB| = |OC|$, odnosno kako leži na simetrali $\overline{CD}$, onda je $|OC| = |OD|$.
Konačno, iz tranzitivnosti slijedi $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$, tj. O je središte kružnice na kojoj leže svi vrhovi tog četverokuta, pa je on tetivan. □

Za kraj, još dva malo jača teorema s imenom koja također možete koristiti u dokazima:

Teorem 3.1.6: Potencija točke na kružnicu

Uzmimo točku T i kružnicu k. Uzmimo pravac koji prolazi kroz T i siječe k u A i B. Umnožak $|TA| \cdot |TB|$ je konstantan bez obzira na odabir p i zove se potencija točke na kružnicu.

Teorem 3.1.7: Ptolomejev poučak

U tetivnom četverokutu $ABCD$ vrijedi sljedeće: $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$

Zadaci

Uvodni zadaci

1. Dokaži da je palalelogram tetivan ako i samo ako je pravokutnik.

2. Dokaži da je trapez tetivan ako i samo ako je jednakokračan.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da pravac BD simetrala kuta $\angle CDA = 120°$. Dokažite da je $|BD| = |CD| + |DA|$.

4. Promatrajmo trokut ABC. Neka su točke D, E, F nožišta visina trokuta iz vrhova A, B, C, redom. AD, BE, CF se sijeku u ortocentru trokuta ABC. Ortocentar se često označava s H. *Trokut DEF nazivamo **ortički trokut**.*
   a) Među točkama A, B, C, D, E, F, H postoji šest tetivnih četverokuta. Nađite ih!
   b) Dokažite da je točka H središte upisane kružnice trokuta DEF.
   c) Dokažite da su trokuti AEF, BFD i CED slični trokutu ABC.

5. Zadan je četverokut ABCD kojem se dijagonale sijeku pod pravim kutem. Ukoliko su kutevi $\angle BAC = 40°$, $\angle ACD = 50°$ i $\angle ADB = 30°$, odredi kuteve $\angle ADC$ i $\angle CBA$.

"Lakši" zadaci

6. Unutarnje simetrale kuteva nekog četverokuta sijeku se u točkama A, B, C i D. Dokažite da je $ABCD$ tetivan četverokut.

7. Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice AC odnosno AB. Dokažite da je četverokut $BCEF$ tetivan.

8. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut pri čemu je $BCDE$ kvadrat kojem je središte upisane kružnice O, a $\angle EAB = 90°$. Pokaži da je pravac AO simetrala kuta $\angle BAE$.

9. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.

"Ovo već postaje ozbiljno" zadaci

10. Dan je trokut ABC i D, E, F na BC, CA, AB redom. Dokaži da opisane kružnice trokuta AEF, BDF, CDE se sijeku u jednoj točki.

11. Dan je trokut ABC čiji je ortocentar H.
   a) Dokaži da točka osno-simetrična točki H preko stranice BC leži na opisanoj kružnici ABC.
   b) Dokaži da točka centralno-simetrična H preko polovišta BC leži na opisanoj kružnici ABC.

12. Neka je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Pravac AI ponovo siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki L. Neka je I_A točka centralno simetrična točki I preko L:

    a) pokaži da je L središte kružnice na kojoj leže točke B, C, I i I_A.

    b) pokaži da je I_A središte A-pripisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.
    (I_A tada leži na sjecištu simetrala vanjskih kuteva vrhova B i C)

Teži zadaci koje znam riješiti, valjda

13. Dan je trokut ABC čiji je ortocentar H. Dokaži da polovišta stranica AB, BC, CA, nožišta svih visina trokuta ABC i polovišta AH, BH, CH leže na istoj kružnici.

14. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut u kojem vrijedi $|DA| < |AB| = |BC| < |CD|$. E i F su redom točke na CD i AB tako da je BE okomito na AC i EF paralelno s BC.
    Dokaži da $|FB| = |FD|$.

15. Dan je trokut ABC. Upisana kružnica tom trokutu dira stranice AC, AB u E, F. Neka je X presjek simetrale $\angle ABC$ i EF.

    a) Dokaži da je $\angle BXC = 90°$.

    b) Ako su M, N polovišta BC, AC, dokaži da su M, N, X kolinearne.

16. Dan je trokut ABC i neka točka P na njemu opisanoj kružnici. Dokaži da su nožišta iz P na stranice AB, BC, CA kolinearna.

17. Neka je ABC šiljastokutan trokut kojemu su D, E, F nožišta visina iz A, B i C redom. Jedna od točaka presjeka pravca EF i opisane kružnice ABC je točka P. Pravci BP i DF se sijeku u Q. Dokaži da vrijedi $|AP| = |AQ|$.

Ovo je ovdje da Luciji trošim tintu

18. Dan je trokut ABC, njegov ortocentar H i pravac kroz ortocentar p. Dokaži da se sve tri refleksije p preko stranica ABC sijeku u jednoj točki, i to na opisanoj kružnici ABC.

19. Dan je jednakokračan ABC s osnovicom BC. Točka D je odabrana na AC i K na kraćem luku CD (luk se nalazi na opisanoj kružnici trokuta BCD). CK siječe pravac paralelan s BC kroz A u točki T. Ako je M polovište DT, onda dokaži da $\angle AKT = \angle CAM$.

20. Dan je ABC i točka P unutar njega tako da $\angle ABP = \angle PAC$. Ako je Q točka takva da je $BPCQ$ je paralelogram, onda dokaži da $\angle BAP = \angle QAC$.

Prijedlozi za daljnji samostalni rad

1. Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. Ovo je s razlogom na prvom mjestu. Sadrži više-manje svo znanje geometrije potrebno za srednjoškolska natjecanja. Najtoplija i najbolja preporuka!

2. Potencija točke, Yufei Zhao; prolazi kroz osnove o potenciji točke, radikalnim osima i radikalnim središtima. Općenito, stranica Yufeia Zhaoa sadrži jako korisne PDF-ove iz sva 4 područja koja se pojavljuju na natjecanjima.

3. Geometry 1, Alexander Remorov i Geometry 2, Alexander Remorov,
   opet postoji stranica sa korisnim PDF-ovima

Toplo vam preporučam da za više zadataka pogledate i Školjku.

Ukoliko imate bilo kakva pitanja vezana uz zadatke, slobodno mi se obratite na matej.vojvodic@mnm.hr.

3.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Bojanje u ovom kontekstu znači dijeljenje nekog skupa na više podskupova, primjerice ploče na crna i bijela polja. Ovu metodu često koristimo kad želimo doći do kontradikcije: prebrojavanjem elemenata po podskupovima zaključujemo da ih je u nekom podskupu neodgovarajući broj elemenata.

Zadaci

Uvodni zadaci

1. Može li se šahovska ploča bez gornjeg lijevog i donjeg desnog polja prekriti s 31 dominom?

2. Pravokutni pod prekriven je pločama 2×2 i 1×4. Jedna se ploča razbila, no dostupna nam je ploča drugog oblika. Dokažite da se pod ne može prekriti prerazmještajem ovih ploča.

3. Je li moguće ploču dimenzije 10×10 popločati pločicama dimenzija 4×1?

4. A L-tetrominama?

5. Je li moguće posložiti po jedan primjerak svake vrste tetromina u pravokutnik?

Lakši zadaci

6. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima. Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

7. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Na ploči dimenzija $n \times n$ postavljen je neki broj domina, tako da svaka domina pokriva točno dva polja ploče i ne postoje dvije domine koje se preklapaju. *Vrijednost* retka ili stupca je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje tog retka ili stupca. Konfiguraciju ploče zovemo *balansiranom* ako postoji prirodan broj k takav da svaki redak i svaki stupac ima vrijednost k. Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svaki prirodan broj $n \geq 3$ i odrediti minimalan broj domina potrebnih za tu konfiguraciju.

8. Prirodni brojevi su crni i bijeli. Suma 2 broja različite boje je crna, a njihov produkt je bijele boje. Koje je boje produkt 2 bijela broja? Pronađi sva takva bojanja!

Umjereni zadaci

9. Ploča dimenzija 6×6 popločana je dominama. Pokaži da uvijek možemo pronaći pravac duž kojeg ćemo prelomiti ploču tako da ne prelomimo niti jednu dominu!

10. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.

    Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

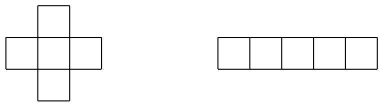
11. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj

sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak. Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

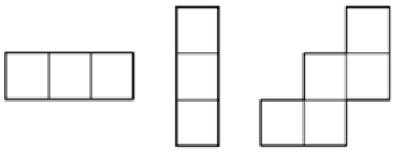
12. Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika  tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju.

    Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica.

13. Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjeg stupcu te ploče tako da dobiveno ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici? Pločice je dozvoljeno rotirati.



14. Je li moguće ploču dimenzija 1000×1000 prekriti koristeći isključivo likove prikazane na slikama:

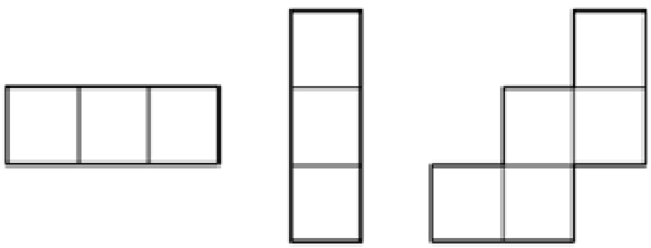


    Likove nije dozvoljeno rotirati niti zrcaliti.

15. *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh. Odredi najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

Teži zadaci

16. Ove dvije figure prikazane na slici zovemo *stubišta*.



    Promotrimo 2018×2018 ploču kojoj su uklonjena 2 polja iz istog retka. Dokaži da se ostatak ploče ne može izrezati u stubišta. Stubišta se mogu rotirati.

17. Na svakom polju 2017×2017 ploče nalazi se svjetiljka. Svaka svjetiljka je ili upaljena ili ugašena. Svjetiljka je *zločesta* ako ima parni broj upaljenih susjeda. Koji je najmanji broj zločestih svjetiljki na ploči?

18. Zemljište kvadratnog oblika dimenzija 8×8, čije su stranice orijentirane sjever–jug i istok–zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija 1×1. Na svakoj od tih parcela može se

nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne 1×1 parcele. Za kuću kažemo da je u sjeni ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća. Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni. Napomena: Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

19. Neka je $n > 2$ prirodni broj. Dana je šahovska ploča $n \times n$ koja se sastoji od n^2 polja. Raspored n topova na toj ploči je miroljubiv ako se u svakom retku i u svakom stupcu nalazi točno jedan top. Odredi najveći prirodni broj k sa svojstvom da, za svaki miroljubivi raspored n topova, postoji kvadrat $k \times k$ na čijih se k^2 polja ne nalazi niti jedan top.

3.3. A1: Mislav Plavac - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Ovo predavanje služi kao uvod u nejednakosti, algebarske strukture kojima uspoređujemo 2 izraza. Ovo predavanje pokriva primjenu KAGH nejednakosti, tj. nejednakosti među sredinama pozitivnih realnih brojeva. Za početak, definirajmo neka svojstva te što su sredine.

Teorem 3.3.1: Svojstva uređaja realnih brojeva

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \quad \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $z \geq 0 \implies xz \geq yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, a, b \geq 0$
8. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$
9. $x \geq y \implies \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Definicija 3.3.2: Sredine za 2 broja

Sredine 2 broja su algebarski izrazi koji ovise o njima. Neka su a i b dva **pozitivna** realna broja. Definiramo 4 sredine:

- aritmetička sredina
$$A_2 = \frac{a+b}{2}$$
- geometrijska sredina
$$G_2 = \sqrt{a \cdot b}$$
- harmonijska sredina
$$H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$
- kvadratna sredina
$$K_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Definicija 3.3.3: Korisne formule

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Lema 3.3.4

Za svaka dva **pozitivna** broja a, b vrijedi

$$K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2$$

Jednakost se postiže kada je $a = b$.

Dokaz. Primjetimo najprije da je zbog svojstva 2. dovoljno dokazati sljedeće 3 nejednakosti

$$K_2 \geq A_2, \quad A_2 \geq G_2, \quad G_2 \geq H_2.$$

$$G_2 \geq H_2 \iff \sqrt{a \cdot b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Nadalje, primjetimo da je H_2 dvojni razlomak, stoga ga možemo algebarskim manipualcijama pojednostaviti.

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti za H_2 i daljnje rješavanje pomoću svojstava nejednakosti dobivamo

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\iff a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$

Kako ovo vrijedi za sve realne brojeve po svojstvu 8, tvrdnja je dokazana. Druge dvije nejednakosti se analogno dokažu kvadriranjem i svođenjem na isti izraz te ih ostavljamo kao vježbu.

□

Primjetimo da se sredine mogu proširiti na n **pozitivnih** realnih brojeva.

Definicija 3.3.5: Sredine za n brojeva

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada definiramo

- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 3.3.6: KAGH nejednakost

Za gore definirane sredine vrijedi
$$K \geq A \geq G \geq H$$
Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Napomena. Najćešće se koristi nejednakost $A \geq G$, dok su ponekad korisne $K \geq A$ i $A \geq H$.

Primjer 3.3.1. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Rješenje 3.3.1. Primjenjujemo A-G nejednakost na x i $\frac{1}{x}$.

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

$\square$

Primjer 3.3.2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Rješenje 3.3.2. Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

$$\iff a + b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

Kada pomnožimo sve 3 nejednakosti dobijemo traženi izraz

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

što je trebalo dokazati. $\square$

Lakši zadaci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c.$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

4. Neka su p, q pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq.$$

5. Neka su x, y pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$x^4 + y^3 + 6x^2 + 4y + 25 \geq 16xy.$$

Umjereni zadaci

6. Neka su x, y pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

7. (*Nesbittova nejednakost*) Dokažite da za sve pozitivne realne a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

9. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$ab+bc+ac \geq 9abc.$$

10. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Dokažite da vrijedi:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8.$$

11. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

Teži zadaci

12. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)} \leq \frac{1}{81}.$$

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je a + b + c = 1. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

15. Neka su x, y pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y = 2$. Dokažite da vrijedi:

$$x^3y^3(x^3+y^3) \leq 2.$$

16. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 4$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b^2c^2+1}+\frac{b}{c^2a^2+1}+\frac{c}{a^2b^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

18. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

19. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a+c\sqrt{a}}{a^2b+c+2}+\frac{b+a\sqrt{b}}{b^2c+a+2}+\frac{c+b\sqrt{c}}{c^2a+b+2} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

Za one koji žele više

20. (Soviet MO 1984) Neka su a, b pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

21. (Ruska MO 2004) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

22. (IMO Shortlist 1998) Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+x)} \geq \frac{3}{4}.$$

23. (USAMO 1998) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Ako imate pitanje za koji zadatak slobodno šaljite upit na mplavac.math@pmf.hr.

3.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Diofantske jednadžbe su jednadžbe s dvije ili više nepoznanica čija rješenja se traže u skupu prirodnih ili cijelih brojeva.
Diofantske jednadžbe mogu se pojaviti i na školskim natjecanjima i na olimpijadama što znači da ih je potrebno dobro savladati.
S obzirom da težina ovih jednadžbi može jako varirati, ne postoji univerzalna formula za rješavanje takvih zadataka, ali postoje razne metode s kojima ćete se danas upoznati (ili ponoviti ih).

Metode

Metoda faktorizacije
Uvijek je poželjno s "desne" strane jednadžbe imati konstantu, a s lijeve neki umnožak. Volimo jednadžbe oblika:

$$(x - \text{neki broj})(y - \text{neki broj}) = \text{konstanta}.$$

Primjer 3.4.1. Riješimo jednadžbu $xy + x - 3y - 6 = 0$ u skupu cijelih brojeva.
Primjetimo da se jednadžba može faktorizirati, pa dobijemo jednadžbu $(y + 1)(x - 3) = 3$. S obzirom da su rješenja cjelobrojna, faktori $(y + 1)$ i $(x - 3)$ mogu biti ± 1 i ± 3. Sada lagano zaključimo da su rješenja $(x, y) = (2, -4), (6, 0), (4, 2), (0, -2)$.

Metoda kvocijenta
Jednu nepoznanicu želimo izraziti pomoću druge koju stavimo u nazivnik.

Primjer 3.4.2. Riješimo diofantsku jednadžbu: $xy + 3y^2 = 7$.
$x = \frac{-3y^2+7}{y} = -3y + \frac{7}{y}$; pa je $y \in \{1, -1, 7, -7\}$, što daje rješenja $x \in \{8, -8, -20, 20\}$.

Prepoznavanje algebarskih izraza
Bitno je zapamtiti osnovne algebarske izraze zbog lakše faktorizacije ili nadopune. Neki od njih su:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

Promatranje ostatka modulo n
Nije rijetka pojava da promatranjem ostataka modulo n ispadne da rješenje ne postoji. Često se ispostavi korisno znati da kvadrati cijelih brojeva daju ostatak 0 ili 1 pri djeljenju s 3 i 4.

Smještanje između kvadrata

Primjer 3.4.3. Odredimo sve prirodne brojeve x takve da je x^2+x+1 kvadrat prirodnog broja.
Primijetimo da je

$$x^2 < x^2+x+1 < x^2+2x+1 = (x+1)^2,$$

pa ako bi bilo $x^2+x+1=t^2$ za neki prirodan broj t, moralo bi vrijediti $x < t < x+1$, što je nemoguće.
Zaključujemo da jednadžba nema rješenja.

Naravno, postoji još mnogo metoda koje nam olakšavaju rješavanje diofantskih jednadžbi. Neke od njih su: metoda supstitucije, promatranje najvećeg zajedničkog djelitelja, metoda nejednakosti...

Lakši zadaci

1. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu $6x^2-13xy+6y^2=4$.

2. Za prijevoz neke robe raspolažemo vrećama od 40 kg i 60 kg. Koliko treba uzeti jednih, a koliko drugih da se prenese 500 kg robe?

3. Riješimo diofantsku jednadžbu $x^2+10y=1234567$.

4. Koliko ima uređenih parova troznamenkastih prirodnih brojeva (x,y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$3x+4y=1998.$$

5. Nađi sve parove cijelih brojeva (p,y) gdje je p prost broj koji zadovoljavaju jednadžbu

$$p-y^4=4.$$

6. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1999}$$

7. Odredi sva cijelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x+1)^4-(x-1)^4=y^3.$$

8. Odredi sve prirodne brojeve x,y,z takve da je $x^2-y^2=2xyz$.

9. Odredi sve parove (x,y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost:

$$y^2=x^3+3x^2+2x.$$

10. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba

$$3^x-2^y=5?$$

11. Odredi sve nenegativne cijele brojeve x,y takve da je

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

12. Nađi sve uređene trojke prostih brojeva (p,q,r) koje zadovoljavaju jednadžbu

$$3p^4-5q^4-4r^2=26.$$

Teži zadaci

13. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3,$$

gdje su x i y različiti od 0.

14. Nađi sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$

15. Nađi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, p) gdje je p prost broj, koje zadovoljavaju jednadžbu

$$x^5 + x^4 + 1 = p^y.$$

16. Nađi sve uređene trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da je

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$$

gdje je p prost broj veći od 3.

17. Odredi sva nenegativna cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$2^a 3^b + 9 = c^2.$$

18. Nađi sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^3 + (x + 1)^3 + ... + (x + 7)^3 = y^3.$$

4. Zadaci za drugu grupu

4.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

U trokutu $\triangle ABC$ stranice ćemo označavati s a, b, c, a kuteve s α, β, γ na standardan način. Polumjer kružnice opisane trokutu označavat ćemo sa R, a upisane r. Za kvalitetno praćenje ovog predavanja potrebno je osnovno znanje trigonometrije pravokutnog trokuta. Ponovimo, u pravokutnom trokutu u kojemu je pravi kut u vrhu C, definirano je

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

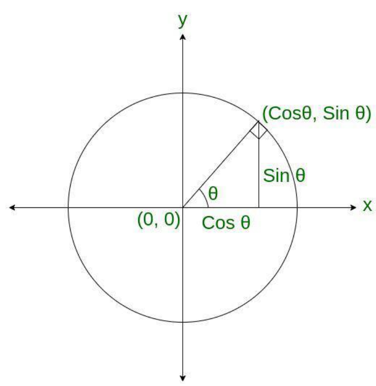
Oprez 1

Prethodne "formule" općenito ne vrijede već ih možemo primijeniti samo u pravokutnom trokutu.

Kod rješenja koje koriste trigonometriju uglavnom se prebacujemo sa promatranja kuteva na duljine stranica i obratno.

Teorem 4.1.1: Osnovni identitet

Za svaki realan broj x vrijedi
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$



Teorem 4.1.2: Adicijske formule

Za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Korolar 4.1.3

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Teorem 4.1.4: Sinusov poučak

Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Prethodni teorem bit će nam iznimno koristan u ostatku predavanja budući da veličine svih stranica trokuta možemo lako svesti na kuteve i polumjer opisane kružnice (naravno, i obratno).

Teorem 4.1.5: Kosinusov poučak

Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Teorem 4.1.6: Poučak o simetrali kuta

Neka je D presjek simetrale unutarnjeg kuta kod vrha A i stranice BC. Vrijedi:

$$\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}.$$

Teorem 4.1.7: Cevin poučak

Neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB redom. Tada vrijedi:

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Korolar 4.1.8: Trigonometrijski Cevin poučak

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC} \cdot \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA} \cdot \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB} = 1.$$

Teorem 4.1.9: Potencija točke

Neka točkom T prolazi pravac p koji siječe kružnicu k u A i B, pravac q koji siječe k u C i D. Vrijedi:

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

Primjer 4.1.1. Neka je H ortocentar trokuta ABC i D nožište visine iz A na BC. Izračunajte $|AD|$, $|BD|$, $|DC|$, $|AH|$ i $|HD|$ (preko duljina stranica trokuta i sinusa i kosinusa kuteva).

Rješenje 4.1.1. Trokuti $\triangle ADB$ i $\triangle ADC$ su pravokutni s pravim kutem u vrhu C pa direktno iz izraza za vrijednosti trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu dobivamo $|AD| = b\sin\gamma = c\sin\beta$ kao duljinu katete. Slično, iz istih pravokutnih trokuta dobivamo $|BD| = c\cos\beta$ te $|DC| = b\cos\gamma$.

Označimo sa X nožište okomice iz B na AC. Primijetimo da je četverokut $CXHD$ tetivan zbog toga što su mu nasuprotni kutevi pravi, pa zaključujemo da je $\angle AHX = \gamma$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle AXB$ imamo $|AX| = c\cos\alpha$ pa promatrajući trokut $\triangle AXH$ dobivamo

$$|AH| = \frac{|AX|}{\sin\gamma} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha,$$

pri čemu smo u zadnjem koraku iskoristili sinusov poučak.

Konačno, u pravokutnom trokutu $\triangle BDH$ znamo da vrijedi $\angle BHD = \gamma$, odnosno imamo

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{|BD|}{|HD|} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

iz čega slijedi (uz ponovnu primjenu sinusovog poučka):

$$|HD| = \frac{|BD|\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{c\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2R\cos\beta\cos\gamma.$$

□

Zadaci

1. Neka je AM težišnica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}.$$

2. U trokutu ABC ($|AB| > |AC|$) simetrala vanjskog kuta $\angle BAC$ siječe opisanu kružnicu trokuta u točki E, a F je nožište okomice iz E na AB. Dokažite da vrijedi $2|AF| = |AB| - |AC|$.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut kojemu je AC promjer opisane kružnice. Neka je P projekcija točke A na BD te neka je Q projekcija od C na BD. Dokažite da je $|BP| = |DQ|$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da vrijedi $|AB| < |AC|$. Neka su X i Y točke na manjem luku $\overset{\frown}{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC takve da je $|BX| = |XY| = |YC|$. Pretpostavimo da na dužini $\overline{AY}$ postoji točka N takva da je $|AB| = |AN| = |NC|$. Dokaži da pravac NC prolazi kroz polovište dužine $\overline{AX}$.

5. Neka je A_1 središte kvadrata upisanog u šiljastokutni trokut ABC tako da su dva vrha na stranici BC. Jedan od preostalih vrhova je na stranici AB, a drugi na AC. Točke B_1, C_1 su definirane na sličan način kao središta upisanih kvadrata kojima su dva vrha na stranicama AC i AB redom. Dokaži da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki.

6. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica Γ_A sa središtem u polovištu stranice BC koja prolazi kroz H siječe pravac BC u točkama A_1 i A_2. Točke B_1, B_2, C_1 i C_2 su definirane na sličan način. Dokaži da su točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 konciklične.

7. Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H. Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G. Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M. Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.

4.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja

Predavanje　　Hintovi　　Rješenja

Uvod

U ovom predavanju prisjetit ćemo se osnovnih principa prebrojavanja i dvostrukih prebrojavanja. Mnogi zadaci iz područja kombinatorike koriste upravo metode prebrojavanja kao glavnu ideju, a dvostruko prebrojavanje često se može iskoristiti za dokazivanje jednakosti nekih izraza ili za dokazivanje da neka konstrukcija ne postoji.
Neki od osnovnih principa prebrojavanja su:

1. Princip zbroja - broj elemenata unije dva disjunktna konačna skupa je suma brojeva elemenata tih skupova - ako imamo x crvenih majica i y plavih majica, ukupno imamo $x+y$ majica
2. Princip umnoška - broj elemenata Kartezijevog umnoška konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata tih skupova - ako na raspolaganju imamo x hlača i y majica, tada se možemo odjenuti na $x \cdot y$ načina
3. Princip bijekcije - dva skupa su ekvipotentna (imaju jednak broj elemenata) ako i samo ako postoji bijekcija između njih
4. Matematička indukcija

Kod rješavanja zadataka s prebrojavanjem, korisno se zapitati sljedeće:

1. Što želim prebrojati?
2. Koja svojstva ima to što želim prebrojati?
3. Mogu li prebrojati sve osim onoga što želim prebrojati (komplement)?
4. Mogu li riješiti zadatak za male primjere "na prste"?

Binomni koeficijenti

Definicija 4.2.1

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi, $n \geq k$.
Definiramo $\binom{n}{k}$ (i čitamo n *povrh* k) kao broj načina za odabrati k-člani podskup iz n-članog skupa.

Primijetite kako poredak izabranih elemenata ovdje nije bitan.

Vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

za n, k nenegativne cijele brojeve, $n \geq k$.

Na primjer, ako od 10 učenika biramo 3 učenika koja će biti u istoj grupi, to možemo napraviti na $\binom{10}{3}$ načina.

Formula uključivanja - isključivanja (FUI)

Ukoliko želimo odrediti broj elemenata više skupova koja nisu nužno disjunktna, korisno je tu situaciju vizualizirati pomoću Vennovih dijagrama. Za dva skupa lako se zaključuje i dokazuje da je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Isto se može primijeniti i za bilo koji broj skupova (*kako?*).

Dvostruko prebrojavanje

Osnovna ideja dvostrukog prebrojavanja je prebrojati broj elemenata istog skupa na dva različita načina. S obzirom da se radi o istom skupu, dobiveni rezultat mora biti jednak neovisno o načinu brojanja, pod pretpostavkom da smo ispravno brojali.

Primjer 4.2.1. Zbrajamo li brojeve u tablici, dobit ćemo isti rezultat zbrojimo li prvo brojeve po svim retcima te zatim zbrojimo dobivene sume, kao i ako prvo zbrojimo brojeve po stupcima.

Tako, primjerice, možemo dokazati jednakost neka dva izraza ili dokazati da neka konstrukcija nije moguća (u slučaju kada jednakost koju dobijemo prebrojavanjem na dva različita načina ne vrijedi - riječ je zapravo o metodi dokazivanja kontradikcijom).

Lakši zadaci

1. Na koliko je načina moguće složiti sendvič, ako su na raspolaganju 3 vrste peciva, 5 vrsta šunke i 4 vrste sira? Sendvič ima jedno pecivo, a može imati jednu vrstu šunke i/ili jednu vrstu sira, ali ne mora imati ni jedno od toga.

2. Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?

3. Na koliko načina možemo izabrati osobu koja će osvojiti kekse i dvije osobe koje će osvojiti sok među 15 osoba? Ista osoba može osvojiti i kekse i sok.

4. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 3 ili sa 7?

5. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5?

6. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

Umjereni zadaci

7. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju dijeli ravninu (svaka dva pravca se međusobno sijeku i nijedna tri pravca se ne sijeku u istoj točki)?

8. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

9. Učenici 6 razreda odlaze na izlet te mogu birati između tri destinacije, A, B i C pri čemu na svaku destinaciju mora otići barem jedan razred. Na koliko načina to mogu učiniti?

10. Koliko anagrama ima riječ $MATEMATIKA$?

11. 15 učenika sudjeluje na zimskoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Zimska škola traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredite k.

12. Dokažite sljedeće identitete kombinatornim argumentima (tj. pronađite dva načina prebrojavanja istog skupa takva da jedno predstavlja lijevu, a drugo desnu stranu jednakosti):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

e) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

f) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n+n^2) \cdot 2^{n-2}$

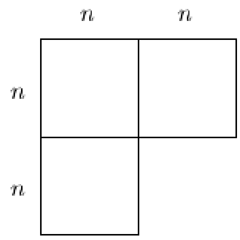
13. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

14. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

15. (*Chu Shih-Chieh*) (Kombinatorno) dokažite da vrijedi

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

16. Neka je n prirodan broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 kvadratića. Koliko je pravokutnika na slici?



Teži zadaci

17. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

18. Na koliko načina se može parkirati 10 vozila na 40 parkirnih mjesta tako da je između svaka dva vozila barem jedno prazno parkirno mjesto?

19. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist pretječe ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe. Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokažite da vrijedi

$$2A = B$$

20. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1+\sqrt{4n-3})$.

4.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Odnos natjecatelja s redovnom nastavom matematike u srednjoj školi često je turbulentan. Vrlo često učenici koji postižu i ponajbolje rezultate na olimpijadama ne vole redovnu nastavu i smatraju je dosadnom i beskorisnom, punom šablona. To je vrlo tužno obzirom da gradivo redovne nastave obično predstavlja temelj za bavljenje matematikom na fakultetu, ali i sadrži mnoge zanimljive ideje i načine razmišljanja.

Na ovom ćemo predavanju pokazati zadatke kakve možete zamisliti i na testu u školi, ali i na natjecanju jer oni koriste samo ideje iz školskog gradiva iako su prilično izazovni. Ideje potrebne za rješavanje zadataka će obično biti neka pametnija primjena školskog gradiva i pomoći će vam u produbljivanju razumijevanja istog, kao i u tome da barem malo više zavolite redovnu nastavu matematike.

Zadaci

1. Nađi sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ takve da je:

$$x^2 - yz = |y - z| + 1$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1$$

2. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra p tako da jednadžba:

$$(p-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$$

ima barem jedno realno rješenje.

3. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu:

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$$

4. Odrediti maksimum funkcije $|8x^2 - 2x - 3|$ na segmentu $[0, 1]$.

5. Neka je n prirodan broj. Promotrimo jednadžbu:

$$2\left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor - n + 1 = (n+1)(1 - nx)$$

gdje je x nepoznanica za koju rješavamo.

(a) Riješiti jednadžbu za $n = 8$.

(b) Dokaži da postoji prirodan broj n takav da ova jednadžba ima barem 2023 rješenja.

6. Odrediti sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ za koje sustav:

$$xyz + z = a$$
$$xyz^2 + z = b$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

ima jedinstveno rješenje u skupu realnih brojeva.

7. Odrediti nultočke x_1, x_2 jednadžbe $x^5 - 55x + 21 = 0$ koji zadovoljavaju $x_1 \cdot x_2 = 1$.

8. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra a za koje sustav jednadžbi:

$$(x+y)^2 = 12$$

$$x^2 + y^2 = 2(a+1)$$

ima točno 2 rješenja.

9. Promotrimo kvadratnu funkciju s realnim koeficijentima $f(x) = ax^2 + bx + c$ takvu da je $b > a$ i $f(x) \geq 0$. Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza:

$$M = \frac{a+b+c}{b-a}$$

10. Odrediti sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$x_1 + \sqrt{x_2} = 1$$

$$x_2 + \sqrt{x_3} = 1$$

$$x_3 + \sqrt{x_1} = 1$$

11. U skupu realnih brojeva riješiti jednadžbu:

$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x+1}$$

12. Dokaži da kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ i $bx^2+cx+a=0$ gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$ imaju zajedničko rješenje ako i samo ako vrijedi $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

13. Za realne brojeve a, b vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = 1$. Odrediti najveću moguću vrijednost izraza $a^3b - b^3a$.

4.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Investicija u znanje plaća najbolje kamate -Benjamin Franklin

Potrebna teorija

Definicija 4.4.1: kongruencije

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je a kongruentno b modulo n ako vrijedi $n|a-b$.
Pišemo $a \equiv b \mod n$

Teorem 4.4.2: svojstva kongruencija

Za $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ Vrijedi:
$a \equiv b \mod n \implies a \equiv kn + b \mod n$
$a \equiv b \mod n, c \equiv d \mod n \implies a + c \equiv b + d \mod n$
$a \equiv b \mod n, c \equiv d \mod n \implies ac \equiv bd \mod n$
$a \equiv b \mod n \implies a^k \equiv b^k \mod n$
$gcd(c, n) = d, a \equiv b \mod n \implies \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \mod \frac{n}{d}$

Nakon uvođenja kongruencija sljedeći logičan korak bi bio da razvijemo tehniku njihova računanja, konkrentnije zanima nas računanje ostataka potencija nekih brojeva.

Definicija 4.4.3: Eulerova funkcija

Eulerova funkcija ($\phi_{(n)}$) je funkcija koja za argument n vraća broj brojeva iz skupa {1,2,. . . ,n} koji su relativno prosti s n.

Teorem 4.4.4: Svojstva Eulerove funkcije

$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_l})$ za $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$

$\phi_{(mn)} = \phi_{(m)}\phi_{(n)}$ za $gcd(m, n) = 1$
$\phi_{(p)} = p - 1$ gdje je p prost.
$\phi_{(p^k)} = p^k - p^{k-1}$

Sada možemo uvesti jedan veoma važan teorem.

Teorem 4.4.5: Eulerov teorem

$$gcd(a, n) = 1 \implies a^{\phi_{(n)}} \equiv 1 \mod n$$

Oprez

Kada primijenjujete Eulerov teorem pazite da je $gcd(a, n) = 1$. Česta greška je da se ovaj uvjet ne provjerava.

Korolar 4.4.6: Mali Fermatov teorem

Ovo je zapravo samo poseban slučaj Eulerovog teorema gdje je p prost.

$$gcd(a,p) = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

I za kraj. Jedna korisna ideja.

Lema 4.4.7

$gcd(a,n) = 1 \implies a^b \equiv a^{b \pmod{\phi_n}} \mod n$

Dokaz Eulerovog teorema

Za one koji žele znati više dajem dokaz Eulerovog teorema. Prvo ćemo dokazati jedan jednostvniji teorem

Teorem 4.4.1

$gcd(a,m) = 1$, Definirajmo skup S koji sadrži sve brojeve relativno proste s a koji su i manji od a $S = \{a_1, a_2 ... a_{\phi(a)}\}$, ako promatramo svaki član skupa $R = \{aa_1, aa_2 ... aa_{\phi(a)}\}$ modulo m onda su ta dva skupa jednaka.

Dokaz Znamo da skup R ima jednako članova kao skup S. I znamo da je svaki element iz R modulo m relativno prost s a. Treba dokazati samo da su svi elementi skupa R modulo m različiti. Pretpostavimo suprotno:

$$aa_i \equiv aa_j \mod m \implies aa_i - aa_j \equiv 0 \implies a(a_i - a_j) \equiv 0 \mod m \tag{1}$$

znamo da $a \not\equiv 0 \mod m$ i da $a_i - a_j \not\equiv 0 \mod m$. Znači (1) je kontradikcija.
Sada možemo dokazati Eulerov teorem:
Promatramo skupove S i R iz prethodnog teorema iz kojeg slijedi:

$$a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv aa_1aa_2 \dots aa_{\phi(n)} \equiv a^{\phi(n)} a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} \mod n$$
$$a^{\phi(n)} a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} - a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv 0 \mod n$$
$$a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} (a^{\phi(n)} - 1) \equiv 0 \mod n$$

Iz $a_1a_2 \dots a_{\phi(n)} \not\equiv 0 \mod n$ slijedi $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Zagrijavanje

Izračunajte:

- $\phi(900)$
- $\phi(2023)$
- $\phi(20449)$

Lakši zadaci

1. Nađite ostatak pri dijeljenju 2^{100} s $11, 25$ i 39.
2. Nađite zadnje dvije znamenke broja $3^{3^{3^3}}$
3. Odredite zadnje 3 znamenke broja $9 \times 99 \times 999 \times \dots 999$. Zadnji broj produkta sadrži 999 devetki.
4. Koliko ima prostih brojeva p takvih da $p | 29^p + 1$?
5. Neka je $a_n = 6^n + 8^n$. Odredite ostatak dijeljena a_{83} s 49.

Umjereni zadaci

6. Izračunajte zadnje dvije znamenke broja $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$. (Ima 2012 trojki)
7. Nađite sve proste p takve da $p^2|5^{p^2}+1$
8. Dokažite da ne postoji $n>1$ za koji vrijedi $n|2^n-1$
9. Odredite sve prirodne brojeve n koji su relativno prosti s $1^{\phi(n)}+2^{\phi(n)}+3^{\phi(n)}...+n^{\phi(n)}$
10. Dokaži da ako $p|a^p-b^p$ onda $p^2|a^p-b^p$

Teži zadaci

11. Dokaži da za svaki $n>3$ vrijedi $1989|n^{n^{n^n}}-n^{n^n}$
12. Dokaži da ako je prirodan broj n paran onda vrijedi $n^2-1|2^{n!}-1$
13. Dokaži da $p^2|1^{p+2}+2^{p+2}+...+(p-1)^{p+2}$

5. Zadaci za treću grupu

5.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Na ovom predavanju obrađujemo metodu fantomiranja u geometriji. Ta metoda se najčešće koristi pri dokazivanju nekog svojstva za točku T jednoznačno određenu određenim skupom poznatih svojstava. Postupak podrazumijeva definiranje nove točke T' sa svojstvom koje želimo dokazati te skupom svojstava među kojim su neka od poznatih (obično sva osim jednog). Ako za T' uspijemo dokazati i preostala poznata svojstva, onda smo dobili točku koja zadovoljava sva poznata svojstva (pa to mora biti T), ali koja zadovoljava i traženo svojstvo pa očito slijedi da je $T = T'$ i da ta točka zadovoljava svojstvo koje je trebalo dokazati.

Zadaci

1. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

2. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da vrijedi $AB = AD$. Neka je T točka na dijagonali AC takva da $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Dokaži da vrijedi $AT + AC \geq AB + AD$.

3. Četverokut $ABCD$ je opisan oko kružnice k. Sjecište dijagonale AC i kružnice k koje je bliže točki A označimo s E. Neka je točka F dijametralno suprotna točki E na kružnici k. Tangenta na k u točki F siječe prave AB i BC redom u točkama A_1 i C_1 te pravce AD i CD redom u točkama A_2 i C_2. Dokažite $A_1C_1 = A_2C_2$.

4. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC. Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M, a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N. Neka je T presjek pravaca AQ i MN. Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC.

5. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I. Kružnica kroz B koja dodiruje AI u I siječe stranicu AB u P. Kružnica kroz C koja dodiruje AI u I siječe stranicu AC u Q. Dokaži da je PQ tangenta na upisanu kružnicu trokuta ABC.

6. U četverokutu $ABCD$ vrijedi $\angle B = \angle D = 60°$. Neka je M polovište od AD. Pravac iz M paralelan s CD siječe BC u točki P. Točka X leži na CD tako da vrijedi $BX = MX$. Dokaži da vrijedi:
$$AB = BP \iff \angle MXB = 60°$$

7. Zadan je tetivni četverokut ABCD takav da se tangente u točkama B i D na njegovu opisanu kružnicu k sijeku na pravcu AC. Točke E i F leže na kružnici k tako da su pravci AC, DE i BF paralelni. Neka je M sjecište pravaca BE i DF. Ako su P, Q i R nožišta visina trokuta ABC, dokaži da točke P, Q, R i M leže na istoj kružnici.

8. Neka je ω kružnica opisana $\triangle ABC$. Neka su M i N polovišta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a T polovište kružnog luka BC od ω koji ne sadrži točku A. Opisane kružnice AMT i ANT sijeku simetrale $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u X i Y redom, pretpostavimo da su X i Y unutar trokuta ABC. Neka je K sjecište MN i XY. Dokaži $|KA| = |KT|$.

9. Zadan je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u C, H nožište visine iz C. Neka je D točka unutar trokuta BCH takva da pravac CH raspolavlja $\overline{AD}$, a P presjek pravaca BD i CH. Zatim označimo s k kružnicu s promjerom BD, a s Q diralište tangente na k kroz P pri čemu su Q i C na istoj strani pravca BD. Dokaži da se pravci AD i CQ sijeku na k.

5.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Lakši zadaci

1. Krug je podijeljen u šest sektora. U sektore su redom upisani brojevi 1, 0, 1, 0, 0, 0 (u smjeru obrnutom od kazaljke na satu). U svakom potezu možeš povećati dva broja u susjednim sektorima. Je li moguće izjednačiti sve brojeve?

2. Devet 1×1 polja ploče dimenzija 10×10 su zaražena. Svake sekunde polja koja imaju dva ili više zaražena susjeda postaju zaražena. Može li se infekcija proširiti po cijeloj ploči?

3. Počinjemo s brojevima 18 i 19 na ploči. U svakom potezu možeš na ploču dopisati zbroj nekih dvaju elemenata na ploči. Možeš li doći do broja 1994?

Srednji zadaci

4. U parlamentu Sikinije svaki član ima najviše tri neprijatelja. Dokaži da se parlament može podijeliti u dva doma tako da svaki član parlamenta ima najviše jednog neprijatelja unutar svog doma.

5. U pravilnom peterokutu/šesterokutu povučene su sve dijagonale. U početku se na svakom vrhu mnogokuta i svakom sjecištu dijagonala nalazi broj 1. U svakom koraku možeš promijeniti predznak svim brojevima na dijagonali ili stranici mnogokuta. Je li moguće postići da su na svim točkama negativni brojevi?

Teži zadaci

6. $2n$ ambasadora pozvani su na domijenak. Svaki ambasador ima $n-1$ neprijatelja. Dokaži da je ambasadore moguće posjedati oko okruglog stola tako da nitko ne sjedi pored svog neprijatelja.

7. Svaki element niza 1, 0, 1, 0, 1, 0... počevši od sedmog člana jednak je ostatku zbroja prethodnih 6 članova pri dijeljenju s 10. Dokaži da se niz ...0, 1, 0, 1, 0, 1... nikad ne pojavljuje.

8. Na beskonačnoj ploči igra se sljedeća igra. U početku su sva polja neke $n \times n$ podploče popunjena žetonima (ostala polja su prazna). Potez se sastoji u preskakanju žetona preko drugog žetona u horizontalnom ili vertikalnom smjeru na slobodno polje iza žetona. Preskočeni žeton se uklanja. Nađi sve n za koje igra može završiti s jednim preostalim žetonom na ploči.

5.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Zadaci

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da je

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

2. Neka je $a_0 > 0$ realan broj, i neka je

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + 2020 \cdot a_{n-1}^2}}, \quad \text{za } n = 1, 2, \ldots, 2020.$$

Dokaži da vrijedi $a_{2020} < \frac{1}{2020}$.

3. Za četvorku nenegativnih realnih brojeva (a, b, c, d) kažemo da je balansirana ako vrijedi

$$a + b + c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Odredi sve pozitivne realne brojeve x takve da je

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \geq 0$$

za svaku balansiranu četvorku (a, b, c, d).

4. Realni brojevi $x_1, \ldots, x_{2011}$ zadovoljavaju

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \;\; x_2 + x_3 = 2x'_2, \;\; \ldots, \;\; x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011},$$

gdje je $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2011}$ permutacija od $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$. Dokaži da vrijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2011}$.

5. Dokaži da ne postoji beskonačan niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ pozitivnih realnih brojeva takav da za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}.$$

6. Neka je n neparan prirodan broj, i neka su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nenegativni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\min_{i=1,\ldots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n} (2x_j x_{j+1}),$$

gdje je $x_{n+1} = x_1$.

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niz realnih brojeva takav da je $a_1 + \ldots + a_n = 0$. Definiramo $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pretpostavimo da vrijedi $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$ za sve $1 \leq i \leq j \leq n - 1$. Dokaži da vrijedi

$$\max_{1 \leq l \leq n} |a_l| \geq \max_{1 \leq m \leq n} |b_m|.$$

8. Odredi sve injektivne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za svaki realan broj x i svaki prirodan broj n vrijedi

$$\left| \sum_{i=1}^{n} i \left(f(x + i + 1) - f(f(x + i)) \right) \right| < 2016.$$

9. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki prirodan broj n vrijedi $f(f(n)) = n + 2022$?

Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki prirodan broj n vrijedi $f(f(n)) = n + 2023$?

Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki prirodan broj n vrijedi $f(f(n)) = n^4$?

Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki prirodan broj n vrijedi $f(f(n)) = n^2$?

10. Neka je $n \geqslant 0$ cijeli broj, i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi. Dokaži da postoji $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

za sve realne brojeve $x \in [0, 1]$.

11. Neka su u i v pozitivni racionalni brojevi. Definiramo niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rekurzivno tako da vrijedi $a_1 = u$, $a_2 = v$, te za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2 + 2 + a_n + a_{n-1}}$$

Odredi sve parove (u, v) za koje je a_n racionalan za svaki prirodan broj n.

12. Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz takav da je $x_1 = \sqrt{2}$ i

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaži da vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{2x_1x_2 - 1} + \frac{x_2^2}{2x_2x_3 - 1} + \ldots + \frac{x_{2018}^2}{2x_{2018}x_{2019} - 1} + \frac{x_{2019}^2}{2x_{2019}x_{2020} - 1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}.$$

13. Za koje prirodne brojeve n vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}?$$

14. Neka je q realan broj. Gugu ima salvetu na kojoj piše 10 različitih realnih brojeva, te napiše sljedeća tri niza realnih brojeva, u tri reda:

- U prvi red, Gugu napiše sve brojeve oblika $a - b$, gdje su a i b dva (ne nužno različita) broja s ubrusa.
- U drugi red, Gugu napiše sve brojeve oblika qab, gdje su a i b dva (ne nužno različita) broja iz prvog reda.
- U treći red, Gugu napiše sve brojeve oblika $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, gdje su a, b, c, d četiri (ne nužno različita) broja iz prvog reda.

Odredi sve q za koje vrijedi da, bez obzira što piše na salveti, svaki broj iz drugog reda se nalazi i u trećem redu.

5.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Definicija 5.4.1: Eulerova funkcija

Eulerova funkcija ϕ broj je brojeva iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji su *relativno prosti* s n.

Svojstva Eulerove funkcije:

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:

$$\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_l}).$$

- ϕ je multiplikativna, tj. vrijedi $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ ako su n i m relativno prosti.
- Ako je p prost broj, onda je $\phi(p) = p - 1$.

Teorem 5.4.2: Eulerov teorem

Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi:

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n).$$

Oprez

Eulerov teorem ne vrijedi ako a i n nisu relativno prosti!

Teorem 5.4.3: Kineski teorem o (kineskim i nekineskim) ostacima (CRT)

Neka su $m_1, m_2, \ldots, m_k$ prirodni brojevi takvid a su svaka dva međusobno relativno prosti te neka je

$$M = m_1 m_2 \ldots m_k.$$

Tada za svaku k-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ cijelih brojeva postoji točno jedan ostatak $x \pmod M$ takav da je

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv x_2 \pmod{m_2} \\ &\ldots \\ x &\equiv x_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

Lakši zadaci

1. Pokaži da $19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.
2. Dokažite da za svaki prirodni broj n postoji n uzastopnih složenih brojeva.
3. Dokažite da za svaki prirodni broj n postoji n uzastopnih brojeva koji nisu beskvardratni.
4. Izračunajte posljednje tri znamenke broja $2008^{2007^{\cdots^{2^1}}}$.

5. Za prirodni broj p definirajmo prirodan broj n kao siguran od p ako je apsolutna vrijednost razlike između n i bilo kojeg višekratnika od p veća od 2. Koliko prirodnih brojeva manjih od ili jednako 10000 koji su istovremeno sigurni od 7, 11 i 13?

6. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji n uzastopnih brojeva koji nisu potencije prostih brojeva.

Umjereni zadaci

7. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Dokaži da je $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ djeljiv s 1989.

8. Neka je točka u ravnini sa cjelobrojnim koordinatama zvjerska ako su joj koordinate relativno proste. Dokažite da postoji 100×100 kvadrat u ravnini koji ne sadrži niti jednu zvjersku točku.

9. Neka je a_n niz zadan sa

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom zadanog niza.

Teži zadaci

10. Neka je n prirodan broj. Odredi koliko postoji različitih $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ za koje je $x^2 \equiv x \pmod{n}$.

11. Neka je n prirodan broj te su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (gdje je ≥ 2) različiti prirodni brojevi iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da n dijeli $a_i(a_{i+1} - 1)$ za $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Dokaži da n ne dijeli $a_k(a_1 - 1)$.

12. Dokažite da za svaki prirodni broj n postoji n prirodnih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$ većih od jedan takvih da su svaka dva međusobno relativno prosti te da je $k_1 k_2 \ldots k_n - 1$ jednak umnošku dva uzastopna prirodna broja.

6. Zadaci za četvrtu grupu

6.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Radimo po Chenovom EGMO, ovom i ovom.
Kao i inače, najkvalitetnija predavanja otvaraju kamp. Odmah se bacamo na posao jer nema vremena za puno filozofiranja (čitaj: previše sam lijen da napišem koherentan uvod).

Definicija 6.1.1: Mikstilinearna kružnica

Dan je trokut ABC. Kružnica ω koja dira stranice AB, BC u B_1, C_1 redom, i kružnicu (ABC) iznutra u T, naziva se A-*mikstilinearna* kružnica trokuta ABC.

U ovu definiciju dodajmo i još neke točke za potpuniju konfiguraciju. Neka je I centar upisane kružnice trokuta ABC, M_A, M_B, M_C polovišta kružnih lukova na (ABC) nasuprot A, B, C redom, M polovište luka BAC, D dirалište upisane kružnice (I) s BC, E diralište A-pripisane kružnice s BC. Sada kada smo dodali sve ove točke jedino i ima smisla dokazati milijardu lema vezanih za njih.

Lema 6.1.2: Bespuće lema i lemica

- I je polovište $\overline{B_1C_1}$
- T, B_1, M_C i T, C_1, M_B su kolinearne
- T, I, M su kolinearne
- $\angle BAT = \angle CAE$, odnosno AE i AT su izogonalne u kutu $\angle BAC$
- $\angle ATB = \angle CTD$, odnosno TD i TA su izogonalne u kutu $\angle BTC$
- AMM_BM_C je jednakokračni trapez, slično su i BMM_AM_C i CMM_AM_B
- BB_1IT i CC_1IT su tetivni
- BI je tangenta na (CC_1IT) i CI je tangenta na (BB_1IT)
- AI i BC se sijeku na (DTM_A)
- BC, TM_A i B_1C_1 su konkurentni
- TM_A i AD sijeku se na mikstilinearnoj kružnici

Zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Neka je Γ opisana kružnica trokuta (ABC). Kružnica ω dira dužine $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, te dira Γ u P. Pravac paralelan s AB koji siječe unutrašnjost trokuta ABC dira ω u Q. Dokaži da je $\angle ACP = \angle QCB$.

2. Neka je I centar upisane kružnice trokuta ABC i neka je Γ njegova opisana kružnica. Neka je $M = BI \cap \Gamma$ i $N = CI \cap \Gamma$. Paralela s MN kroz I siječe AB i AC u P i Q redom. Dokaži da su kružnice opisane trokutima BNP i CNQ sukladne.

3. Neka je Ω opisana kružnica trokuta ABC i neka upisana kružnica trokuta ABC dira BC u D. Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe BC i Ω u E i F redom. Opisana kružnica (DEF) siječe A-pripisanu kružnicu u S_1, S_2 i siječe Ω u $T \neq F$. Dokaži da AT prolazi kroz S_1 ili S_2.

4. Neka je M proizvoljna točka na kružnici (ABC). Neka tangente iz M na upisanu kružnicu trokuta ABC sijeku BC u X_1 i X_2. Dokaži da se (MX_1X_2), (ABC) i A-mikstilinearna kružnica sijeku u istoj točki.

6.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci

1. (Eulerova formula) Dokažite da svako ulaganje povezanog planarnog grafa s V vrhova i E bridova u ravninu dijeli ravninu u F područja, gdje vrijedi $V - E + F = 2$.
2. Dokažite da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.
3. U sobi je $2n + 1$ ljudi, gdje je n prirodan broj. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokažite da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.
4. U državi imaju 2023 grada. Svaka dva povezana su cestom, a svaka cesta je u vlasništvu neke od 10 kompanija. Dokažite da postoji neparni ciklus kojemu su sve veze u vlasništvu iste kompanije.
5. Dokažite da graf s n vrhova i m bridova ima barem $\frac{m(4m-n^2)}{3n}$ ciklusa duljine 3.
6. Definirajmo k-kliku kao skup k ljudi tako da svaki par ljudi iz tog skupa se međusobno poznaje. Na nekoj zabavi, za svaki par 3-klika postoji barem jedna osoba koja je u obe klike, te ne postoji niti jedna 5-klika. Dokažite da postoji dvije ili manje osoba čiji bi odlazak sa zabave ostavio zabavu bez iti jedne 3-klike.
7. Petero profesora sudjelovalo je na seminaru. Svaki profesor je zaspao točno dvaput. Za svaki par profesora postoji trenutak kad su oboje spavali. Dokažite da postoji trenutak u kojemu je spavalo barem troje profesora.

Ramsey theory

Ramsey broj $R(s,t)$ definiran je kao najmanji prirodni broj n za kojeg svaki graf veličine n sadrži ili s vrhova koji su svi međusobno povezani ili t vrhova od kojih nijedna dva nisu međusobno povezani.

8. Dokažite da je $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.
9. Dokažite da je $2^{t/2} < R(t,t)$.
10. Dokažite da je $R(t,t) \leq 2^{2t}$ za $t \geq 3$.

6.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Svi znaju da se najkvalitetnija predavanja drže taman po sredini kampa da vas možemo lijepo kvalitetno iscrpiti prije slobodnog dana.
U vidu nedavnih trendova na IMO-u i povratka davno zaboravljenog područja od kojeg svi strepe, *nejednakosti*, danas se bavimo jednim magičnim trikom kojeg svi doktori mrze jer povećava broj bodova za 7 u roku od samo jednog mnm predavanja. Međutim, prije nego što do njega dođemo, moramo proći kroz neke dosadne preliminarne gluposti o derivacijama koje su nužno zlo za ovu kul metodu. Kroz sve to ćemo proći što je manje rigorozno moguće, jer na kraju dana nije nimalo bitno za zadatke.

Derivacije

Krenimo prvo s formalnom definicijom koju ćemo neposredno nakon zapisivanja odbaciti.

Definicija 6.3.1: Derivacija

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija i $c \in \mathbb{R}$. *Derivacija* funkcije f u točki c je definirana kao

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Neformalno, definicija derivacije koja je nama dovoljna i za koju ste lako moguće čuli, je da derivacija predstavlja *nagib tangente* u točki c na graf funkcije f. Ispostavi se da je pravac koji prolazi kroz točku $(c, f(c))$ i ima nagib $f'(c)$ izuzetno bitan za aproksimiranje vrijednosti funkcije f u okolini od c, što nam ilustrira sljedeći teorem.

Teorem 6.3.2: Tangenta je najbolja linearna aproksimacija

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija i $c \in \mathbb{R}$. Neka je $g(x)$ pravac dan formulom

$$g(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$$

Tada, za svaki pravac $h(x) = kx + l$ vrijedi da ako $g \neq h$, tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da

$$\forall x \in \langle c - \varepsilon, c + \varepsilon \rangle \setminus \{c\}, |f(x) - h(x)| > |f(x) - g(x)|$$

Dakle, postoji okolina oko c na kojoj je udaljenost f i g uvijek manja od udaljenosti f i h.
Stoga kažemo da je g *najbolja linearna aproksimacija* funkcije f u okolini točke c.

Još nam preostaje uočiti nešto dosta intuitivno, a to je da ako deriviramo funkciju f u svakoj točki njezine domene, dobivamo novu funkciju i nju nazivamo *derivacija* funkcije f.

Sada kada znamo dovoljno o derivacijama, možemo preći na pravila deriviranja koja nećemo dokazivati jer je to dosadno i ne zanima nas.

Teorem 6.3.3: Pravila deriviranja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Da se malo bolje upoznamo s deriviranjem, slijede nam neki primjeri derivacija.

Lema 6.3.4: Neke poznate derivacije

- Ako je $f(x) = c$ konstanta, tada je $f'(x) = 0$
- $(x^k)' = kx^{k-1}, \forall k \in \mathbb{R}$
- ako je $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom, onda je $P'(x) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$

Interludij o konveksnosti i konkavnosti

Da bismo dobro motivirali ideju, prvo ćemo definirati još dva pojma vezana za funkcije: konveksnost i konkavnost.

Definicija 6.3.1: Konveksne i konkavne funkcije

Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je *konveksna* ako je skup točaka iznad grafa od f konveksan. Slično, f je *konkavna* ako je skup točaka iznad grafa konkavan.

Ova definicija sama po sebi nije najrigoroznija, ali je za našu intuiciju jako korisna jer nam s njom sljedeća ključna lema drži vodu.

Lema 6.3.2: f konveksna akko f' raste

Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako je f' rastuća.

Sada imamo sljedeći niz *ekstremno rigoroznih* implikacija. Neka je f konveksna funkcija

$\Longrightarrow$ f' raste

$\Longrightarrow$ nagib tangente raste

$\Longrightarrow$ graf funkcije je uvijek iznad bilokoje tangente

$\Longrightarrow$ fiksiramo li neku točku i promotrimo tangentu u njoj, imamo donju ogradu za $f(x)$ koja je linearna u x

Dakle, konveksne funkcije možemo vrlo elegantno ograničiti odozdola tangentama. Analogno, konkavne funkcije možemo vrlo elegantno ograničiti odozgora tangentama. Upravo ova činjenica je ključna.

Prljavi trik

Iz prethodnog poglavlja znamo da ako imamo konveksnu funkciju f i neku njezinu tangentu g, vrijedi $f(x) \geq g(x)\ \forall x$. Međutim, to može vrijediti čak i ako f nije konveksna, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru koji koristimo da bismo predstavili dugo iščekivani trik.

Primjer 6.3.1 (autorski)**.** Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c+d=4$. Dokaži da je $a^4+b^4+c^4+d^4+22(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 8(a^3+b^3+c^3+d^3)+60$

Rješenje 6.3.1. Uočimo da, ako definiramo $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2$, tada je nejednakost ekvivalentna s

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geq 60$$

Također znamo da su a, b, c, d pozitivni realni te da se sumiraju u 4, stoga nam je dovoljno promatrati f na intervalu $\langle 0, 4\rangle$. Budući da je funkcija f nezgrapna, željeli bismo naći neku linearnu aproksimaciju g koja je na cijelom intervalu manja ili jednaka f, ali u zauzvrat je njome lakše baratati.
Točno tu nastupa Teorem 2.2 koji nam govori da nam najviše smisla ima pokušati tangentu u nekoj točki. Da bismo našli koja je to točka, jednostavno uočimo da je slučaj jednakosti $(1, 1, 1, 1)$ te stoga naša aproksimacija g **mora** biti jednaka f u točki 1, jer bi inače bila strogo manja i izgubili bismo jednakost. Dakle, definiramo

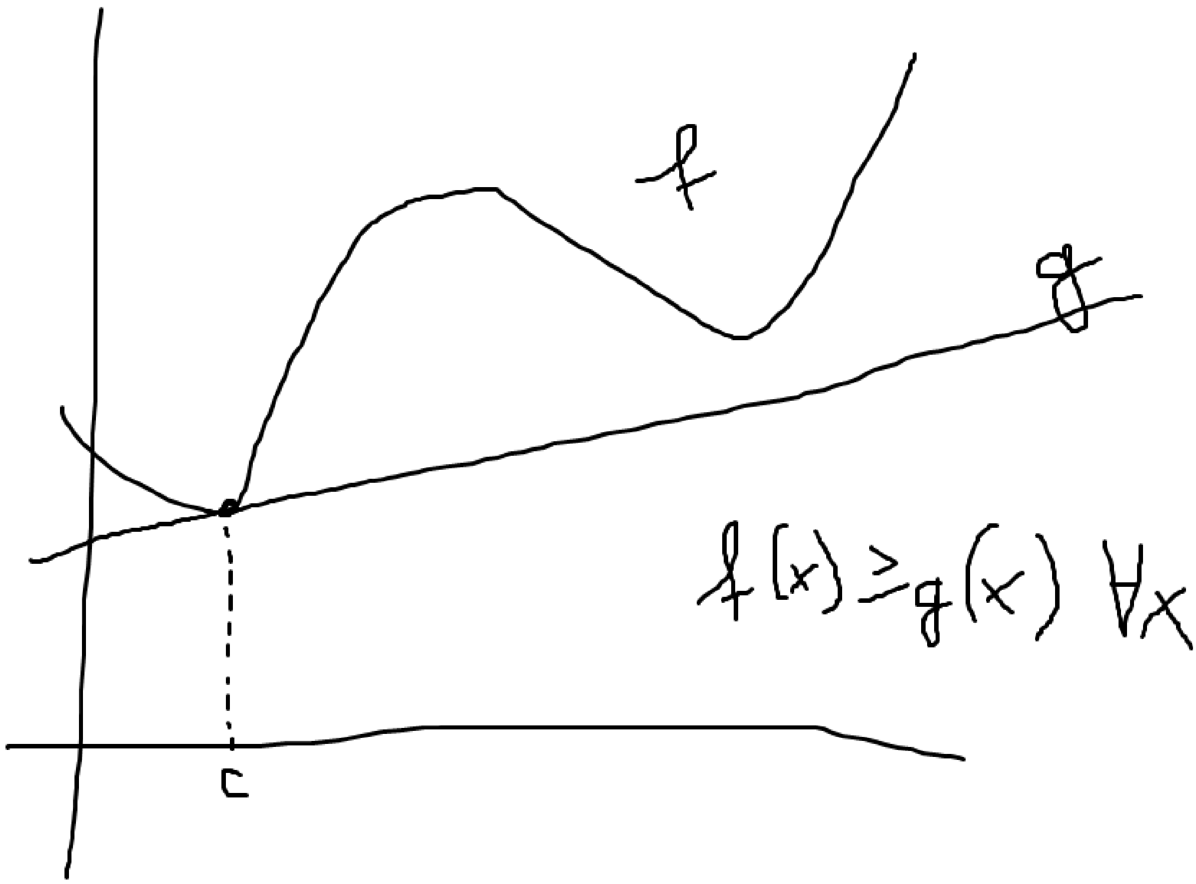
$$g(x) = f'(1)(x-1) + f(1),$$

odnosno $g(x) = 24x - 9$. Ovo nas motivira da pokušamo dokazati da $\forall x \in \langle 0, 4\rangle$ vrijedi $x^4 - 8x^3 + 22x^2 \geq 24x - 9$, što na našu sreću ispada ekvivalentno s $(x-1)^2(x-3)^2 \geq 0$. Dakle, imamo

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geq g(a)+g(b)+g(c)+g(d) = 24(a+b+c+d) - 36 = 60$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili da je $a+b+c+d=4$. $\square$

Za one kojima se nije dalo čitati treće i četvrto poglavlje, imamo atraktivan tldr na sljedećoj slici.



Za kraj, izložit ćemo ideju u najopćenitijoj formi koja bi uz pomno praćenje primjera trebala svima biti jasna.

Teorem 6.3.1: Ako se ovo može nazvat teoremom

Pretpostavimo da želimo dokazati neku nejednakost u n pozitivnih realnih varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uz uvjet $\sum_{i=1}^{n} x_i = s$ (gdje je s neka konstanta) koju smo uspjeli zapisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq d,$$

gdje je f neka funkcija i d konstanta.
Ako je slučaj jednakosti $x_i = \frac{s}{n}$ za sve i, definirajmo $c = \frac{s}{n}$ i $g(x) = f'(c)(x-c) + f(c)$ te probajmo dokazati da vrijedi $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in \langle 0, s \rangle$.
Tada imamo

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = f'(c)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nc\right) + nf(c) = nf(c),$$

što je konstanta koja (ako smo sve napravili kako treba) je jednaka d.
Naravno, uočimo da sve radi identično i ako zamijenimo $\geq$ sa $\leq$ u nejednakosti, uz to da onda dokazujemo $f(x) \leq g(x)$.

Prije zadataka ostavljam vas s 2 slatke napomene.

Oprez: Slučaj jednakosti

Uočimo da je ključno da imamo da je slučaj jednakosti kada su svi x_i jednaki jer za slučaj jednakosti moramo imati $f(x_i) = g(x_i)$, a to nam je garantirano samo u diralištu, odnosno u c.

Oprez: Jedan jednostavan nužan uvjet

Sam kraj prethodnog teorema nam i daje jednostavan nužan uvjet da bi trik prošao, a to je da naša funkcija f zadovoljava $nf(c) = d$. Drugim riječima, ako f **ne** zadovoljava $nf(c) = d$, tada smo sigurni da trik neće proći.

Zadaci

Zadaci su poredani po redu.

1. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 1$. Dokaži da vrijedi

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}.$$

2. (HMO 2019 drugi dan) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

4. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c+d = 4$. Odredi minimalnu vrijednost izraza

$$\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}.$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$18\left[\frac{1}{(3-a)(4-a)} + \frac{1}{(3-b)(4-b)} + \frac{1}{(3-c)(4-c)}\right] + 2(ab + bc + ca) \geq 15.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

6.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Danas učimo jednu slavnu metodu kojom se mogu riješiti neke diofantske jednadžbe, najčešće jednadžbe stupnja 2. Najpoznatiji primjer je IMO 1988, P6. Teorija iza Vieta jumpinga je jako jednostavna, ali treba vremena da ideje sjednu u glavu.

Lema 6.4.1

Neka su a i b cijeli brojevi. Ako jednadžba $x^2 + ax + b = 0$ ima jedno cjelobrojno rješenje, onda je i drugo rješenje cjelobrojno.

Lema slijedi direktno iz Vieta formula. Odatle dolazi ime Vieta jumping.
Bavit ćemo se s tri podvrste Vieta jumpinga (napomena: ova podjela Vieta jumpinga je izmišljotina autorova ovog predavanja i vjerojatno ju nećete naći drugdje.

- **Destruktivni Vieta jumping.** Ovo je metoda koja se proslavila na IMO-u 1988. Ovo je kad želimo dokazati da neka jednadžba nema rješenja. Kombiniramo Vieta formule i beskonačan spust.

  Krenemo od nekog rješenja jednadžbe koje je minimalno po nekom uređaju, i pomoću Vieta formula produciramo još manje rješenje, što je kontradikcija, pa ni ovo polazno rješenje nije moglo postojati.

- **Konstruktivni Vieta jumping.** Ovo je kad želimo dokazati postojanje beskonačno mnogo rješenja. Ovdje koristimo beskonačni uspon.

  Krenemo od nekog rješenja i pomoću Vieta formula konstruiramo novo, veće rješenje, pa zaključujemo da ih ima beskonačno.

- **Pseudo-Vieta jumping.** Ovo je autorova izmišljotina. Ideja je krenuti od jednog rješenja neke kvadratne jednadžbe, pomoću Vieta formula dokazati da je i drugo rješenje cjelobrojno/prirodno. Nakon toga, iskoristiti neke nejednakosti karakteristične za prirodne brojeve (najčešće $xy + 1 \geq x + y$), i preko toga dobiti kontradikciju. Najčešće se može refrazirati preko diskriminante i smještanja među kvadrate, ali ponekad se puno lakše nađu ograde preko Vieta formula nego raspisivanjem diskriminante.

Sad je vrijeme za po jedan primjer svake od metoda.

Primjer 6.4.1 (Destruktivni - Her Majesty IMO 1988 P6). Neka su a, b prirodni brojevi. Dokaži da ako je

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

prirodan broj, onda je potpun kvadrat.
Neka je k omjer od $a^2 + b^2$ i $ab + 1$, te pretpostavimo da nije potpun kvadrat.
Neka je (a, b) par koji zadovoljava uvjete zadatka za omjer k takav da je $a + b$ minimalno. Lako se vidi da ako je $a = b$, onda mora biti $a = b = 1$ i onda je $k = 1$, kontradikcija. Onda možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti $a > b$.
Broj a je rješenje sljedeće kvadratne jednadžbe:

$$t^2 + b^2 = 2ktb + k.$$

Neka je u drugo rješenje te jednadžbe. Imamo:

$$a + u = 2kb,$$
$$au = b^2 - k.$$

Iz prve jednadžbe vidimo da je u cijeli broj.
Ako je $k > b^2$, onda je $k - b^2 = -au < k$, pa je $a < k$ i onda je $a + u < k$, kontradikcija s prvom jednadžbom.
Ako je $k = b^2$, onda je kontradikcija jer je onda k kvadrat.
Ako je $k < b^2$, onda je u prirodan broj, te je $au < b^2$, pa je $u < a$. Ali onda je (b, u) rješenje zadatka manje sume od (a, b), kontradikcija.

Primjer 6.4.2 (Konstruktivni)**.** Dokaži da postoji beskonačno parova prirodnih brojeva (x, y) takvih da je

$$x^2 + y^2 = 2023xy + 1.$$

Primijetimo da je $(1, 2023)$ rješenje.
Pretpostavimo da je (x, y) rješenje, uz $x < y$. Primijetimo da x zadovoljava kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2023yt + y^2 - 1.$$

Neka je u drugo rješenje te kvadratne jednadžbe. Imamo:

$$x + u = 2023y,$$
$$xu = y^2 - 1.$$

Iz prve jednadžbe vidimo da je u cijeli, a iz druge da je u pozitivan, pa je u prirodan. Nadalje, kako je $x < y$, zbog druge jednadžbe vrijedi $u > y$, pa je (y, u) također rješenje, i to 'veće' rješenje od (x, y). Ponavljanjem ovog postupka od jednog rješenja dolazimo do beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 6.4.3 (Pseudo)**.** Odredimo sve prirodne brojeve x, y takve da

$$xy + 1 \mid x^2 + 2y - 1.$$

Neka je (x, y) par koji zadovoljava uvjete. Uvodimo broj k koji je omjer desne i lijeve strane. Imamo sljedeću kvadratnu jednadžbu koju zadovoljava x:

$$t^2 + 2y - 1 = kty + k,$$

odnosno

$$t^2 - kyt + 2y - k - 1.$$

Neka je u drugo rješenje ove jednadžbe. Imamo

$$x + u = ky,$$
$$xu = 2y - k - 1.$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je u cijeli. Sad želimo riješiti 'krive' slučajeve kad u nije prirodan.
Ako je $u < 0$, stavimo $v = -u$. Onda je $x - v = ky, xv = k - (2y - 1)$. Ali $xv > x - v$ jer su oba prirodni, i to je kontradikcija jer je $ky > k - (2y - 1)$.
Ako je $u = 0$, onda je $x = k = 2y - 1$ i vidimo da su $(2y - 1, y)$ rješenja.
Konačno, neka je $u > 0$. Sada koristimo najbolju nejednakost na svijetu: $xu + 1 \geq x + u$, odnosno

$$2y - k \geq ky.$$

Iz toga vidimo da je $k = 1$. Znači, preostaje riješiti jednadžbu

$$xy + 1 = x^2 + 2y - 1.$$

To se preuredi u $y(x - 2) = x^2 - 2$. Onda $x - 2 \mid x^2 - 2$, ali onda $x - 2 \mid 2$, i preostaje riješiti konačno mnogo malih slučajeva.
Sad ćemo skočiti na zadatke.

Zadaci

1. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da $ab \mid a^2+b^2+1$. Dokaži da je
$$3ab = a^2+b^2+1.$$
2. Postoji li beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva (m,n) takvih da $m \mid n^2+1$ i $n \mid m^2+1$?
3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj m takav da $mn-1 \mid n^3+1$.
4. Odredi sve prirodne brojeve koji se mogu zapisati u obliku
$$\frac{a^2+b^2+ab}{ab-1}$$
za neke prirodne brojeve a, b.
5. Odredi sve prirodne brojeve koji se mogu zapisati u obliku
$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$$
za neke prirodne brojeve x, y, z.
6. Nađi sve proste brojeve p takve da je p^2-p+1 kub prirodnog broja.
7. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je
$$0 < a^2+b^2-abc < c.$$
Dokaži da je a^2+b^2-abc potpun kvadrat.
8. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a,b,c) takve da je
$$a^3+b^3+c^3 = (abc)^2.$$
9. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da
$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2.$$
Dokaži da je $a=b$.
10. Odredi sve parove polinoma (P,Q) s kompleksnim koeficijentima i vodećim koeficijentom 1 takve da $P(x) \mid Q(x)^2+1$ i $Q(x) \mid P(x)^2+1$.
11. Odredi sve prirodne brojeve d za koje postoje polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ s realnim koeficijentima takvi da je stupanj od P jednak d i
$$P(x)^2+1 = (x^2+1)Q(x)^2.$$
12. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x,y) takve da $xy^2+1 \mid x^2+y^3$.

Dio II.

Hintovi s predavanja

7. Hintovi za prvu grupu

7.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti

Predavanje　　Hintovi　　Rješenja

Hintovi

1. Što znaš o palalelogramima? Koji su kutevi jednaki?
2. Što znaš o trapezima? Kakvi su kutevi?
3. Ptolomej
4. Gledaj koji su kutevi pravi za a). Druga dva podzadatka su samo chase.
5. Pokaži da je četverokut tetivan.
6. Pokušaj dobiti kuteve četverokuta preko kuteva početnog četverokuta.
7. Koji četverokut je sigurno tetivan? Primjeni karakterizaciju.
8. Kolkiko veliki kutevi moraju biti da bi to bila simetrala?
9. Teorem o kutu između tangente i tetive, a zatim o kutu presječnice paralelnih pravaca.
10. Pokaži da sjecište dvije leži i na trećoj. Možda treba rastaviti na slučajeve gdje se točka nalazi.
11. Uoči da je reflektirani trokut sukladan početnom pa samo trebaš naći kut $\angle BHC$.
12. Prvi dio je samo chase. Za drugi dio uoči da je središte pripisane kružnice presjek simetrala vanjskih kutova u B i C.
13. Nećeš dokazivati odjednom da svih 9 točaka leži na kružnici od jednom. Fiksiraj 3 točke, uzmi četvrtu i dokaži da je taj četverokut tetivan (analogno vrijedi da sve točke istog tipa kao četvrta leže na kružnici sa prve tri). Ponovi dok ne pokažeš da su sve tražene točke na kružnici.
14. Ovaj zadatak ima više pristupa, ali u svakom trebaš chaseati i možda Reimov teorem pomogne u jednom trenutku.
15. a) Pokušaj naći P, Q (nisu nasumične već skrivene u konfiguraciji) tako da $QCXP$ je tetivan i $\angle QXC = 90°$. b) Nije težak, prisjeti se da je srednjica paralelna sa pripadajućom stranicom.
16. Sjeti se zadatka 4. Ako imaš prave kutove vjerojatno imaš i tetivne četverokute.
17. Na skici su četiri tetivna četverokuta, iz koji se može zaključiti da je trokut APQ jednakokračan.
18. Umjesto gledanja da trebaš dokazati kako su pravci konkurentni i još povrh toga na kružnici, pokušaj iskoristiti višak informacija kako bi mogao pametnije fantomirati.
19. Pokušaj polovište iskoristiti tako da je to presjek dijagonala nekog palalelograma.
20. Jedina bolja stvar od jednog paralelograma je nekoliko njih.

7.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Koliko crnih, a koliko bijelih polja zauzima domina?
2. Možeš li smisliti bojanje poda gdje jedna od pločica prekriva parno, a druga neparno crnih polja?
3. Smisli bojanje gdje svaka pločica zauzima točno jedno crno polje!
4. Može li se ploča popločati sa parno L-tetromina? Podijeli L-tetromine u 2 kategorije!
5. pronađi bojanje gdje će 4 vrste tetromina pokrivati parno crnih polja, a samo jedna neparno.
6. Možeš li obojati nešto osim polja?
7. Riješi male slučajeve! Što uočavaš?
8. Prvi dio: trebaš nešto saznati o brojevima iste boje, a znaš dosta o brojevima različite boje. Možeš li dodati pomoćni broj?
   Drugi dio: ako je k bijele boje, što možeš zaključiti o njegovim višekratnicima? A o brojevima koji mu to nisu?
9. Pretpostavi suprotno. Koliko je najmanje domina na pravcu koji prelama dominu?
10. Možeš li saznati koliko točno treba biti crvenih bridova?
11. Možeš li obojiti ploču na način da, ako je bubamara na početku bila na polju X, sa sigurnošću znaš da je nakon određenog broja koraka bubamara završila na polju Y?
12. Možeš li ploču podijeliti na segmente u kojima mora biti zauzeto barem pola pločica?
13. Označiš li boje brojevima, možeš ih i zbrajati!
14. Ovaj zadatak je sličan prethodnom!
15. prikaži strelicama u kojim smjerovima ludi lovac napada. Kada 2 luda lovca smiju biti na istoj dijagonali?
16. Pokušaj obojiti ploču tako da prva dva reda budu bijela, druga dva crna, treća dva bijela, i tako dalje. Razmisli kako ti to pomaže.
17. Pokušaj obojiti ploču šahovski. Vidi možeš li riješiti posebno za crna, posebno za bijela polja.
18. Na kojim poljima se čini da sigurno može biti kuća? Probaj prvo dokazati da ona moraju biti popunjena u idealnoj konfiguraciji. Onda nešto zaključi za ostatak polja.
19. Odgovor je $k = \lceil\sqrt{n}\rceil - 1$. Dokaži da u svakoj mirnoj konfiguraciji postoji $k \times k$ dobri kvadrat, i da postoji mirna konfiguracija koja nema $(k + 1) \times (k + 1)$ dobri kvadrat.

7.3. A1: Mislav Plavac - KAGH

Predavanje | Hintovi | Rješenja

Hintovi

1. Primjenite A-G nejednakost.

2. Uparite po 2 člana i zbrojite dobivene nejednakosti.

3. Uparite po 2 člana i zbrojite dobivene nejednakosti.

4. A-G zasebno primjenite na svaku zagradu.

5. Iskoristite $x^4 + 25 \geq 10x^2$ i $y^3 + 4y \geq 4y^2$.

Umjereni zadaci

6. Izmnožiti zagrade, AH na $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

7. *1. način* Supstituirajte izraze $(a+b), (b+c), (c+a)$. Koristite A-G nejednakost na lijevoj strani kako biste dobili da je zadani izraz veći ili jednak od nekog fiksnog broja. *2. način* Promatrajte $a+b, b+c, a+c$ te primjenite A-H nejednakost.

8. Primjenite zadatak 3.

9. Pomnožite početnu nejednakost s uvjetom te primjenite A-G na oba izraza.

10. Promatrajte $\frac{x-1}{x}$. Iskoristite da vrijedi

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

te primjenite A-G na svaki izraz.

11. Iskoristite

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a.$$

Teži zadaci

12. Promatrajte samo nazivink i na svaki faktor zasebno primjenite A-G na pametan način.

13.

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a^3 + ab^2 - ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

14. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i $b^2 + 1 \geq 2b$

15. Uočite da je $xy \leq 1$ te koristite $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ i $x^2 - xy + y^2 = ((x+y)^2 - 3xy$.

16.

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{1+a^2-a^2}{1+a^2} = 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \geq 1 - \frac{a}{2}.$$

17. *Hint 1*

$$\frac{a}{b^2c^2+1} = \frac{a + ab^2c^2 - ab^2c^2}{b^2c^2+1} = 1 - \frac{ab^2c^2}{b^2c^2+1}.$$

Hint 2 Iskoristite uvjet i dokazujte lakšu nejednakost. Primjenite A-G na nazivnik.

18. Prvo primijenite A-G nejednakost, zatim A-H.

19.

$$a^2b + c + 2 = (a^2b+1) + (c+1) \geq 2(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 2(\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{c}}) = \frac{2}{\sqrt{c}}(\sqrt{a} + c).$$

Za one koji žele više

20. Rastaviti član s kvadratom pa A-G.

21. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ te pametno primjenite A-G.

22. Dodajte izraze da se lijepo pokrate nazivnici u A-G nejednakosti.

23. $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

7.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Metoda faktorizacije.
2. Izrazi jednu varijablu pomoću druge.
3. Promatraj zadnju znamenku.
4. Metoda modularne aritemtike.
5. Metoda kvocijenta
6. Metoda faktorizacije.
7. Metoda faktorizacije i nadopunjavanja,
8. Promatraj najveći zajednički djelitelj.
9. Faktoriziraj i promatraj najveći zajednički djelitelj.
10. Promatraj djeljivost s potencijama broja 2.
11. Metoda faktorizacije.
12. Metoda modularne aritmetike (prvo mod 3 pa mod 5).
13. Promatraj kvadratnu jednadžbu po varijabli y.
14. Metoda faktorizacije.
15. Faktoriziraj pa promatraj najveći zajednički djelitelj.
16. Faktoriziraj pa promatraj mod 3.
17. Faktoriziraj pa promatraj slučajeve ovisno o djeljivosti s 6.
18. Raspiši pa smjesti među kubove.

8. Hintovi za drugu grupu

8.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Sinusov poučak na trokute ABM i AMC.
2. HINT 1: $\angle EAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$
   HINT 2: sinusov poučak na AEB pa AFE
   HINT 3: adicijske formule
3. Talesov teorem (obodni kutevi nad promjerom su pravi), teorem o obodnim kutevima, sinusov poučak.
4. trisekcija kuta $\angle BAC$
5. Cevin poučak
6. Iskoristiti potenciju točke B, dovoljno je dokazati da su A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične, a u tu svrhu je dovoljno izračunati $|BA_1|$ i $|BA_2|$.
7. Dovoljno je pokazati $\dfrac{HA'}{A'K} = \dfrac{GD}{DM}$, pri čemu je A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC.

8.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Primijenite princip umnoška. Na koliko načina možemo izabrati šunku za svaki izbor peciva? A na koliko načina sir?

2. Koliko najviše topova smije biti u istom stupcu, odnosno retku?

3. Primijetite da ne razlikujemo kojim redom su 2 osobe osvojile sok te primijenite princip umnoška.

4. Primijenite FUI.

5. Umjesto brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5, promatrajte one koji nemaju niti jednu.

6. Označite broj šahista s x, a broj penzionera s y te zapišite uvjet zadatka u jednadžbu.

7. Promotrite male primjere.

8. Na koliko bismo načina mogli rasporediti figure na ploču kojoj ta 2 polja nisu uklonjena? Koje slučajeve bismo tada nepotrebno brojali?

9. Promotrite prvo koliko će razreda ići na koje odredište.

10. Prvo odredite broj permutacija svih slova (pod pretpostavkom da razlikujemo i slova koja se ponavljaju).

11. Odredite broj parova učenika. Koliko parova učenika čisti učionicu svaki dan?

12. Što predstavlja lijeva strana jednakosti? Zašto je to jednako kao i desna?

13. Na koji način svaki pravokutnik na ploči doprinosi sumi brojeva?

14. Koliko različitih parova kuša svaku vrstu vina? Koliko ukupno postoji parova kušača?

15. Krenite od desne strane jednakosti te pronađite odgovarajuću kombinatornu interpretaciju lijeve strane.

16. Primijenite FUI ili promotrite više vrsta pravokutnika ovisno o pozicijama vrhova.

17. Prikažite ocjene sudaca tablično (po sucima i natjecateljima).

    Dokažite da je traženo rješenje 7.

18. Prvo poredajte automobile te između svaka dva automobila osigurajte po jedno prazno mjesto. Kako možemo zatim rasporediti preostala prazna mjesta? Primijetite da pri takvom raspoređivanju mjesta ne razlikujemo.

19. Rekurzivno prikažite vrijednosti A i B za n biciklista.

20. Prikažite ocjene u tablici (prema nastavnicima i studentima). Prebrojite broj parova ocjena *prošao* danih od strane istog nastavnika. Koliko najviše takvih parova može biti u cijeloj tablici?

8.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Sustav je simetričan po x, y, z pa možemo WLOG $x \geq y \geq z$.
2. Promotri zadatak kao kvadratnu jednadžbu po $t = 2^x$. Zanima nas kada ova kvadratna jednadžba ima barem jedno pozitivno realno rješenje.
3. Promotri zadatak kao kvadratnu jednadžbu po y.
4. Odredi prvo na kojim dijelovima segmenta $[0, 1]$ je $f(x) = 8x^2 - 2x - 3$ pozitivna, a na kojim negativna. Analiziraj zasebno te dijelove.
5. Na početku možemo zaključiti $n(n+1)x \in \mathbb{Z}$. Dalje iskoristi definiciju funkcije najveće cijelo.
6. Ako je (x, y, z) rješenje datog sistema onda je i $(-x, -y, z)$. Šta onda znamo kakvo mora biti to jedinstveno rješenje ako pretpostavim oda sistem ima jedinstveno rješenje.
7. Želimo zapisati $x^5 - 55x + 21$ kao proizvod polinoma trećeg stupnja i polinoma 2. stupnja čije su nultočke x_1, x_2. Šta znamo o koeficijentima tih polinoma?
8. Hint za I rješenje: Probaj sličnu ideju kao u 6. zadatku. Ako je par x, y rješenje datog sustava koji su još parovi tada sigurno rješenja ovog sustava?
   Hint za II rješenje: Možemo izraziti xy iz uvjeta zadatka i svesti zadatak na kvadratnu jednadžbu po x^2. Šta znamo da mora vrijediti za tu jednadžbu ako polazni sustav ima točno 2 rješenja?
9. Iz uslova $f(x) \geq 0$ za sve realne x možemo dobiti uvjet za diskriminantu i to da su a, b, c svi pozitivni. Zapiši M u pogodnijem obliku. Razmisli za koju minimalnu vrijednost bismo mogli adekvatno u dokazu pomoću AG nejednakosti iskoristiti uvjet za diskriminantu?
10. Oduzmi date jednadžbe i razmotri poredak brojeva.
11. Podijeli datu jednadžbu sa $\sqrt[4]{x}$. Uvedi supstitucije $m = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}}, n = \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}$.
12. Za smjer kada je $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ da bismo dokazali da jednadžbe imaju zajedničko rješenje prisjeti se faktorizacije $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Za drugi smjer pretpostavi da jednadžbe imaju zajedničko rješenje t i vidi što možeš dobiti iz izraza da je t rješenje obje jednadžbe.
13. Hint za I rješenje: Svedi izraz na kvadratnu funkciju po jednoj promjenjivoj (npr. a^2b^2)
    Hint za II rješenje: Uvjet $a^2 + b^2 = 1$ moli nas da napravimo trigonometrijsku supstituciju.

8.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Trivijalno
2. Lemma 1.7
3. Lagano
4. Vjera u sebe je najbitnija
5. Zna netko kako se računa inverz?
6. Lemma 1.7
7. Lemma 1.7
8. Pretpostavite suprotno
9. Promatrajte proste faktore od n
10. Dokažite $p|a-b$
11. Rastavite 1989 na proste faktore
12. n=m-1 (supstitucija)
13. faktorizacija, pametne kongruencije

9. Hintovi za treću grupu

9.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Neka je P sjecište pravca TH s dužinom BC. Pokažimo da je P polovište od B. (Koristimo da je $AHTC$ tetivan četverokut).

2. Odaberimo točku T' tako da su trokuti ABC i $AT'B$ slični. Pokažimo da je $T' = T$.

3. Hint 1: Neka je točka X presjek pravca AC i A_1C_1.
   Hint 2: Povucimo tangentu na k u točki E.

4. Hint 1: Neka je T' druga točka u kojoj pravac AQ siječe opisanu kružnicu trokuta BOC.
   Hint 2: Pokažimo da je $AT'CM$ tetivan četverokut.

5. Hint 1: Neka su QX i PY tangente na kružnicu upisanu trokutu ABC, pri čemu su X i Y na toj kružnici, a nisu na pravcima AB, tj. AC. Pokažimo $X = Y$.
   Hint 2: Pokažimo $\angle AQX = \beta$ i $\angle APY = \gamma$.

6. Hint 1: Neka je X' takva da je trokut MBX' jednakostraničan te da X i X' leže s iste strane pravca MB. Pokažimo
   $$AB = BP \iff X = X'$$
   Hint 2: Definirajmo D' kao presjek pravca kroz X' paralelnog s CD i pravca AD te pokažimo da je $D = D'$.

7. Razmisli malo izvan okvira. Što bi mogla biti točka M ?

8. K neće biti samo na simetrali $\overline{AT}$, nego i na simetralama $\overline{MX}$ i $\overline{NY}$ (AT, MX i NY će biti paralelni pravci). Fantomiraj X' kao sjecište kružnice i pravca kroz M paralelnog s AT (AT je simetrala kuta u A). Želimo dokazati da je X' na simetrali $\overline{AC}$, tj. $|AX'| = |X'C|$.

9. Čemu još pripada sjecište AD i CQ ? Definiraj ga kao presjek toga i k, zatim kreni length-chaseati (u ovom zadatku ima lijepih stvari za to, uključujući neke sličnosti).

9.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

1. Probaj podijeliti sektore u dvije skupine.

2. Promatraj opseg zaraženih polja.

3. Nije uvijek odgovor "Ne može".

Srednji zadaci

4. Probaj dokazati da je, dok god se ne postigne traženo stanje, uvijek moguće smanjiti ukupni broj neprijateljstava.

5. Probaj se ograničiti samo na neke točke i preko njih definirati invarijantu. Probaj obojati paran broj točaka na svakoj dijagonali/stranici.

Teži zadaci

6. Kreni od nekog proizvoljnog rasporeda pa pokušaj razdvojiti neprijatelje tako da što manje "poremetiš" odnose između drugih parova susjeda (znači, pri "razbijanju" para neprijatelja želiš osigurati da ti ne nastane novi par neprijatelja).

7. Probaj pretpostaviti da je invarijanta oblika $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = A*x_1+B*x_2+C*x_3+D*x_4+E*x_5+F*x_6$ pa nađi uvjete za koeficijente A, B, C, D, E i F tako da f daje istu vrijednost mod 10 kada se primjeni na $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ i na $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)$

8. Odgovor je da igra može završiti u traženom stanju kad je n djeljiv s 3. Za dokaz da ne može za $n = 3*k$ probaj standardno bojanje u 3 boje. Za dokaz da inače može, probaj naći neki niz koraka koji uklanja neke žetone, ali istovremeno ne "remeti" stanje na ploči (ne utječe na druge žetone).

9.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Ogradi $a-b$ pomoću desne nejednakosti.

2. Dokaži $a_n \leq 1/\sqrt{2020n}$.

3. Balansiranost je ekvivalentna s

$$(a-1/2)^2+(b-1/2)^2+(c-1/2)^2+(d-1/2)^2=1.$$

4. Princip ekstrema, dokaži da su svi x_i jednaki maksimalnom.

5. Primijeti da (ako postoji) taj niz raste, i dokaži da je $x_n < 1$ za svaki n.

6. Promotri tri uzastopna u krugu za koje je $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2}$. Takvi postoje zbog neparnosti od n.

7. Dovoljno je promatrati uvjet za $j=i+1$. Uvjet kaže da ako je b_i pozitivan, onda je $a_{i+2} \geq a_{i+1}$. Uzmi maksimalan b_i koji je pozitivan. Onda je a_{i+1} negativan.

8. Želimo dokazati $f(f(x))=f(x+1)$. Onda pretpostavi da za neki x to ne vrijedi. Ideja je nekako promatrati $n(f(f(x))-f(x+1))$ za neki veliki n. To ne smije biti preveliko zbog uvjeta zadatka, ali ima tendenciju biti jako veliko za veliki n.

9. Odgovor na 1. i 3. pitanje je jako lagan. Za 2. pitanje, promotri skup svih brojeva koji nisu u slici od f, te svih brojeva koji nisu u slici od $f \circ f$. Za $f \circ f$ taj skup je $\{1,2,\ldots,2023\}$, a što onda može taj skup biti za f?

Za 4. pitanje, odgovor je DA. Ali nećeš naći lijepu eksplicitnu funkciju.

10. Indukcija i to takva da je a_0 novi dodani u koraku indukcije.

11. Prvo dokaži da su svi članovi niza prirodni, a onda se svede na neko ograđivanje.

12. Kvadriraj uvjet, probaj drugačije zapisati članove sume.

13. Prebaci iz floorova na razlomljene dijelove. Probaj sparivati.

14. Probaj dokazati da je q nužno cijeli. Probaj dokazati da je $|q| \leq 2$.

9.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Zanima nas ostatak od $2^{2^{6k+2}}$ modulo 19 za što nam je korisno promotriti ostatak od 2^{6k+2} modulo $\phi(19) = 18$ kako bismo mogli iskoristiti Eulerov teorem.

Sad nas zanima ostatak od 2^{6k+2} modulo 18 za što nam je korisno promotriti ostatak od $6k + 2$ modulo $\phi(18)$.

2. Tražena svojstva n uzastopnih brojeva $x, x + 1, \ldots, x + n - 1$ možemo zapisati kao n svojstava broja x, nakon čega možemo iskoristiti CRT.

Alternativno, postoji i izravna konstrukcija traženih brojeva.

3. Rješenje je vrlo slično 2. zadatku.

4. Posljednje tri znamenke ekvivalentne su ostatku mod 1000, kojeg pak možemo jednostavnije odrediti promatrajući odvojeno mod 8 i mod 125.

Također, postoje situacije kada postoji bolja metoda od korištenja Eulerovog teorema pri određivanju ostatka neke potencije. Primjerice, stoga može biti korisno ručno provjeriti ostatke prvih nekoliko potencija.

5. Koristeći CRT možemo pronaći neki broj x takav da svakih x uzastopnih brojeva ima jednako brojeva koji su sigurni od $7, 11$ i 13.

6. Koristimo CRT slično kao u 2. i 3. zadatku.

Umjereni zadaci

7. Tvrdnja je ekvivalentna dokazivanju da je $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ djeljiv s 9, 13 i 17, što možemo dokazati promatrajući razne slučajeve i koristeći Eulerov teorem više puta. Ne zaboravite pripaziti na uvjet Eulerovog teorema da a i n moraju biti relativno prosti!

8. Koristeći CRT konstruirajte dva niza od po 100 uzastopnih brojeva takvih da za svaki par brojeva iz različitih nizova postoji prost broj koji dijeli oba ta broja.

9. Koristeći Eulerov teorem (odnosno MFT), promotrite ostatke $a_n \pmod p$ za neki prost broj p.

Teži zadaci

10. Zapišimo ubjet zadatka kao $n|x(x - 1)$ i rastavimo n na proste faktore.

11. Pretpostavimo suprotno. Zatim nekako koristeći CRT zaključimo da $a_1, \ldots, a_k$ nisu svi različiti.

12. Tvrdnja zadatka ekvivalentna je tvrdnji da postoji t takav da $t^2 + t + 1$ ima barem n različitih prostih faktora.

10. Hintovi za četvrtu grupu

10.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Lagano je.
2. P i Q su dobro nam poznate točke.
3. T je dobro poznata točka; korijen iz bc inverzija.
4. Ponceletova porizma.

10.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promotrimo što se dogodi ako nekom grafu dodamo ili uklonimo brid.
2. Ako je graf jednostavan, onda je svako područje omeđeno s bar 3 brida.
3. Promotrimo najveću kliku (skup ljudi koji se svi međusobno poznaju) u sobi.
4. Postojanje neparnog ciklusa u kojemu su sve veze u vlasništvu kompanije X ekvivalentno je tome da, ako uzmemo graf takav da čvorovi odgovaraju gradovima te su povezani ako su ti gradovi povezani cestom kompanije X, onda takav graf nije bipartitan.
5. Za svaki brid prebrojimo koliko najmanje ciklusa duljine 3 sadrži taj brid.
6. Može nam pomoći ako zadatak rastavimo u dva slučaja ovisno o tome postoji li par 3-klika za koji postoje dvije osobe koje se nalaze u obe klike.
7. Pretpostavimo suprotno. Zatim, nakon što zaključimo još nešto, informacije iz zadatka možemo zapisati pomoću usmjerenog grafa.

   Napomena: postoji i rješenje koje ne koristi teoriju grafova.
8. Dokažimo $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

   Dodatni hint: tvrdnju iznad možemo dokazati ako u najvećem grafu koji ne sadrži ili s vrhova koji su svi međusobno povezani ili t vrhova od kojih nijedna dva nisu međusobno povezani fiksiramo neki vrh v i podijelimo ostale vrhove u dvije skupine.
9. Vjerojatnosna metoda.
10. Indukcija + 8. zadatak.

10.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Samo nađi šta je f, očit izbor radi.
2. Uvedi uvjet na sumu, nakon toga direktno po receptu.
3. Uvjet na sumu, pojednostavni.
4. Provedi više od jedne minute u traženju minimalne vrijednosti.
5. Riješi se druge zagrade.
6. Uvjet na sumu.

10.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promotri jednadžbu $t^2 - kbt + b^2 - 1 = 0$. Umnožak nultočki je manji od b^2, pa je manja nultočka manja od b.
2. Pomnoži uvjete da dobiješ jedan uvjet ekvivalentan s početnima.
3. Dođi do $mn - 1 \mid m^2 + n$. To je kvadratno po m. Uvedi omjer i drugu nultočku kao prirodne brojeve i koristi neke ograde na veličinu.
4. Ponovno se probaj spustiti iz minimalnog rješenja u manje rješenje. Za većinu k-ova će se to moći i onda je to kontradikcija, a za nekoliko njih neće i to će dati rješenja.
5. Uzmi najmanje rješenje (x, y, z) i uzmi da je x najveći u trojci. Onda je druga nultočka u veća od y i od z. Probaj dobiti gornju i donju ogradu na $x + u$ u terminima $y + z$.
6. $p^2 - p = (n-1)(n^2+n+1)$. Dokaži da $n - 1 \mid p - 1$ i uvedi k kao omjer $(p-1)/(n-1)$. Zanemari prostost i pseudo-skoči.
7. Ista ideja kao i npr. u prvom zadatku.
8. Gledaj kao kubnu jednadžbu po a, uvedi druge dvije nultočke u i v, te onda dokaži da su $u + v$ i uv cijeli brojevi, a neki od njih je i prirodan. Onda koristi ograde. Vjerojatno je korisno i nekako poredati a, b, c.
9. Svedi na $4ab - 1 \mid (a - b)^2$.
10. Ideja je skakati, ali sad će veličina po kojoj skačemo biti stupanj polinoma.
11. Ovdje možda skakanje nije najprirodnija ideja, ali probaj nekako iz manjeg rješenja doći do većeg.
12. Probaj dokazati da je ili $x > y$ ili $x^3 = y$. Nakon toga koristi početnu kvadratnu.

Dio III.

Rješenja s predavanja

11. Rješenja za prvu grupu

11.1. G1: Matej Vojvodić - Tetivni četverokuti

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

0. (Dokaz teorema o kutu između tangente i tetive) Docrtajmo središte opisane kružnice $\triangle ABC$ i nazovimo ga S, te izaberimo neku proizvoljnu točku T na tangenti (samo kako bi mogli imenovati kuteve). Trivijalno je $\angle SBT = 90°$. Neka je $\alpha = \angle CBT$, tada je $\angle SBC = 90° - \alpha$. Kako je $\triangle SBC$ jednakokračan, onda je $\angle SBC = \angle SCB$, i vrijedi $\angle BSC = 180° - 2 \times (90° - \alpha) = 2 \times \alpha$. Kako je $\angle BSC$ središnji kut obodnog kuta $\angle BAC$, dobivamo $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo pokazati.

1. Promatrajmo paralelogram $ABCD$. Ako je taj paralelogram pravokutnik, onda $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, pa $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Dakle, $ABCD$ je tetivan.
Ako je $ABCD$ tetivan, onda vrijedi $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Kako je $ABCD$ paralelogram, znamo da vrijedi $\angle ABC = \angle ADC$. Dakle, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Analogno dobivamo $\angle DAB = \angle DCB = 90°$, i zaključujemo da je $ABCD$ pravokutnik.

2. Promatrajmo trapez $ABCD$. Ako je $ABCD$ jednakokračan, onda $\angle ABC = \angle DCB$ i $\angle BAD = \angle ADC$. Ali, kako je $ABCD$ trapez, vrijedi $\angle DAB + \angle BAD = 180°$. Dakle, $\angle DAB + \angle BAD = \angle DAB + \angle BCD = 180°$ i zaključujemo da je $ABCD$ tetivan.
Drugu stranu ekvivalencije dokazujemo jednakim tvrdnjama, u obrnutom redoslijedu.

3. Kako je $ABCD$ tetivan, iz karakterizacije vrlo brzo dobijemo da je $\angle ABC = \angle BCA = \angle CBA = 60°$, tj. ABC je jednakostraničan. Primjenimo Ptolomejev poučak na četverokut $ABCD$. Vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$. Kako je ABC jednakostraničan, možemo iz svakog člana maknuti tu stranicu i dobivamo ono što je trebalo pokazati.

4.
a) Radi se o četverokutima: $AEHF, BFHD, CDHE, BCEF, CAFD, ABDE$. Dokaz za svakog slijedi direktno iz karakterizacije i pravih kuteva kod nožišta visina trokuta.

b) Dovoljno je pokazati da je H sjecište simetrala kuteva trokuta DEF.
$\angle EFH = \angle EAH$ jer je $AEHF$ tetivan. $\angle HFD = \angle HBD$ jer je $HFBD$ tetivan. $\angle EAH = \angle EAD = \angle EBD = \angle HBD$ jer je $EABD$ tetivan. Dakle $\angle EFH = \angle HFD$. Analogno dobivamo za preostala dva kuta.

c) $BCEF$ je tetivan, pa $\angle EFB = 180° - \angle ACB$. Prijetimo $\angle AFE = 180° - \angle EFB = 180° - (180° - \angle ABC) = \angle ABC$. Dakle AFE i ABC su slični po KK poučku. Analogno pokažemo za preostala dva trokuta.

5. Ključno je primijetiti da je četverokut iz zadatka tetivan. Neka je S sjecište dijagonala. Vrijedi da je $\angle SBA = 50°$ iz zbroja kuteva trokuta ABS. Dakle, vrijedi $\angle DBA = \angle DCA$, što je dovoljno da zaključimo da je četverokut $ABCD$ tetivan. Sada preko obodnih kuteva nad ostalim tetivama možemo zaključiti sve ostale kuteve. Rješenje je $\angle ADC = 70°$ i $\angle CBA = 110°$.

6. Neka su kutevi četverokuta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tada ih simetrale dijele na dva jednaka dijela, a kako je zbroj kuteva u trokutu $180°$, onda su kutevi dobivenog četverokuta (kojem su vrhovi sjecišta simetrala) redom $180° - (\alpha+\beta)/2, 180° - (\beta+\gamma)/2, 180° - (\gamma+\delta)/2$ i $180° - (\delta+\alpha)/2$. Iz zbroja nasuprotnih kuteva je očito da je četverokut tetivan.

7. MNM online predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 11.

8. Četverokut $EABO$ je tetivan jer je zbroj kuteva $|\angle EAB| + |\angle BOE| = 180°$. Dakle, samo je potrebno gledati kuteve nad tetivama EO i BO, a kako su tetive jednako duge, tada i kutovi nad njima moraju biti jednake veličine, tj. $|\angle EAO| = |\angle BAO| = 45°$.

9. Označimo $\angle ABC = x$ i $\angle CDE = y$. Četverokut $ABCE$ je tetivan, pa je zato $\angle AEC = 180° - x$. Analogno zaključujemo da je $\angle CAE = 180° - y$. Kut $\angle ACE$ je pravi jer je to obodni kut nad promjerom kružnice. Dakle, mora vrijediti da je $\angle CAE + \angle AEC = 90°$, odnosno

$$180° - y + 180° - x = 90°,$$

iz čega slijedi $x + y = 270°$.

10. Rastavimo na tri slučaja: kada je Miquelova točka unutar, na ili izvan trokuta.
1. slučaj: točka unutar trokuta - definirajmo presjek kružica BDF i CDE kao neku točku M. Vrijedi $\angle DMF = 180° - \beta$ i $\angle DME = 180° - \gamma$. To znači da je $\angle EMF = 360° - (\angle DME + \angle DMF) = 180° - \alpha$, što znači da je i $AEFM$ tetivno, tj. M leži i na kružnici AEF.
2. slučaj: točka na trokutu - BSOMP $M = D$. Definirajmo središta opisanih kružnica BFD i CDE kao S_1 i S_2, redom. Vrijedi $\angle FBD = \beta \Rightarrow \angle FS_1D = 2\beta \Rightarrow \angle S_1DF = 90° - \beta$. Analogno pokazujemo $\angle S_2DE = 90° - \gamma$. Kada promatramo dužinu S_1S_2, vidimo da mora vrijediti $\angle FDE = 180° - (\angle S_1DF + \angle S_2DE) = 180° - \alpha$, pa D mora biti na kružnici opisanoj AEF.

3. slučaj: točka izvan trokuta - BSOMP da se M nalazi sa suprotne strane BC od A. Neka je M presjek kružnica opisanih CDE i BDF. Tada vrijedi $\angle EMD = \angle DCE = \gamma$ (obodni nad ED) i $\angle FMD = \angle DBF = \beta$ (obodni nad FD), pa vrijedi $\angle EMF = \gamma + \beta = 180° - \alpha$, tj. M leži na opisanoj AEF.

11.
a) Neka je D nožište visine iz A, i H' kao presjek AH i kružnice ABC. Vrijedi $\angle HCB = 90° - \angle ABC = 90° - \beta$, $\angle BHC' = \angle BAH' = 90° - \angle ABC = 90° - \beta$, pa je DCH' sukladan DHC po KSK (zajednička stranica $\overline{DC}$, $\angle HCD = \angle DCH'$ i $\angle CDH' = \angle CDH = 90°$, pa je $|HD| = |DH'|$ tj. H' je preslika H preko BC.

b) Neka je E nožište visine iz B, i M polovište $\overline{BC}$, te neka je H_1 preslika H preko M. Po SKS je trokut MBH sukladan trokutu MH_1C pa $\angle BHM = \angle MH_1C$ tj. BH je usporedno s H_1C, pa je MHC sukladan MBH_1 po SKS, pa $MHC = HH_1B$ tj. HC je usporedno s BH_1, pa je $HCBH_1$ paralelogram $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BHC = 180° - \angle EHC = 180° - \alpha \Rightarrow \angle BH_1C + \angle BAC = 180° \Rightarrow H_1$ se nalazi na opisanoj kružnici ABC.

12. Najprije pretpostavimo da je S sjecište opisane kružnice ABC i simetrale kuta $\angle BAC$, i želimo pokazati da simetrala BC prolazi kroz S. Da bi S ležala na simetrali, mora biti jednako udaljena od B i C, tj. $\angle SBC = \angle SCB$. To očito vrijedi jer gledamo obodne kutove $\angle BAS = \angle BCS$ i $\angle CAS = \angle CBS$, a kutovi $\angle BAS$ i $\angle CAS$ su jednaki jer je AS simetrala kuta BAC.

13. Neka su D, E, F redom nožišta visina iz A, B, C, A_1, B_1, C_1 redom polovišta BC, CA, AB, i A_2, B_2, C_2 redom polovišta AH, BH, CH. Dokažimo da D, E, F, A_1 leže na istoj kružnici. $\angle A_1EB = \angle A_1BE = 90° - \gamma$, $\angle FEB = \angle FAD = 90° - \beta$, $\angle BDF = 90° - \angle FDA = 90° - \angle FBE = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$, $\angle FEA_1 = 90° - \gamma + 90 - \beta = 180 - \beta - \gamma = \alpha = \angle BDF \Rightarrow$ D, E, F, A_1 je na istoj kružnici. Analogno pokazujemo i za B_1 i C_1. Sada ćemo dokazati da D, E, F, A_2 leže na istoj kružnici. $\angle A_2EH = \angle A_2HE = \gamma$, $\angle HED = \angle HCD = 90° - \beta$, $\angle BFD = \angle BHD = \angle AHE = 90° - \angle HAE = 90° - (90 - \gamma) = \gamma$, $\angle AFH = \angle FAH = 90° - \beta$, $\angle HFD = 180 - \angle BFD - \angle AFH = 180 - (\gamma + 90° - \beta)$, $\angle HFD + \angle HED = 180° - (\gamma + 90° - \beta) + (\gamma + 90° - \beta) = 180° \Rightarrow D, E, F, A_2$ je na istoj kružnici. Analogno pokažemo za B_2 i C_2. Iz prethodno dokazanog slijedi da su sve točke na istoj kružici.

Alternativno rješenje: Pogledaj prošli zadatak. Što se dogodi ako primijenimo homotetiju iz H s faktorom $1/2$. (A ide u polovište AH, točka koja je bila simetrična preko polovišta ide u polovište, a točka koja je bila simetrična preko stranice ide u nožište)

14. Najprije primijetimo da kako je $|AB| = |BC|$, onda je visina iz B na AC ujedno i simetrala AC. Kako E leži na simetrali, vrijedi $\angle EAC = \angle ACE$. Kako je $ABCD$ tetivan, vrijedi $\angle ABD = \angle ACD$. Iz zadatka 1. slijedi da je i $AFED$ tetivan, pa vrijedi $\angle FAE = \angle FDE$. No, kako je $ABCD$ tetivan vrijedi $\angle CAB = \angle CDB$, pa mora vrijediti i $\angle EAC = \angle FDB$. Konačno, zapisujemo produženu jednakost svega što znamo: $\angle FDB = \angle EAC = \angle ECA = \angle DBA$, a uvijet $\angle FDB = \angle DBF$ je dovoljan za pokazati jednakokračnost FBD, tj. $|FB| = |FD|$.

15. a) Neka je I centar upisane kružnice. Prvo pokušamo dobiti direktno $BXC = 90°$, no nakon chaseanja svih kutova na slici vidimo da jedini kut vezan uz X koji možemo dobiti je $\angle FXB = \gamma/2$. To se dobiva iz slijedećeg chasea: $\angle FXB = 180° - (\angle XBF + \angle BFX) = 180° - (180° - \angle EFA + \beta/2) = \angle EFA - \beta/2 = 90° - \alpha/2 - \beta/2 = \gamma/2$.

Ideja je naći proxy točke P na FX i Q na BX takve da $\angle PCQ = \gamma/2$ i $\angle CPQ = 90°$. Ako uspijemo naći takve točke onda smo gotovi jer je tada $XPQC$ tetivan pa $90° = \angle PXC = \angle BXC$. Nakon promatranja vidimo da E, I zadovoljavaju te uvijete pa smo gotovi.

b) Ovaj dio je lakši. Uočimo da x leži na kružnici sa središtem M i radijusa $|BC|/2$. Kako je MN srednjica, želimo dokazati da je MX paralelno sa AB. To je lagano jer $\angle BMX = 2\angle BCX = 2 \cdot (90° - \beta/2) = 180° - \beta$ i gotovi smo!

16. Četverokuti $TPAR$, $TRQC$ i $TABC$ su tetivni, pa vrijedi $\angle PRT = \angle PAT = 180° - \angle TAB = \angle TCB = \angle TCQ = 180° - \angle TRQ$. Tj., dobili smo $\angle PRT = 180° - \angle TRQ$, iz čega zaključujemo da su P, R i Q kolinearne.
Dokaz možete pronaći i ovdje: http://proofsfromthebook.com/2013/07/13/simpson-line-theorem-proof/

17. Zadatak je inače G1 s IMO shortlista 2010. Službeno rješenje možete naći na: https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf, a kraće na: https://artofproblemsolving.com/community/c151709h1472875_2010_imo_shortlist_g1

18. https://artofproblemsolving.com/community/c1646h1025320s3_antisteiner_point

19. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1831604p12264958

20. https://artofproblemsolving.com/community/c3103h1226690_parallelogram_isogonality_lemma

11.2. C1: Nika Utrobičić - Bojanja i popločavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. MNM online predavanje, primjer 1
2. MNM online predavanje, zadatak 1
3. MNM online predavanje, zadatak 3
4. Obojimo stupce naizmjence crno bijelo. Svaki L zauzima jedno crno i tri bijela ili jedno bijelo i tri crna polja. Dakle, ima ih jednako jednog i drugog tipa, dakle ima paran broj figura, dakle broj polja je djeljiv s 8, ali 100 nije djeljivo s 8.
5. "Problem solving strategies", Coloring , zadatak 2.
6. Državno 2019., 3. razred, A
7. EGMO 2018. zadatak 4
8. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 38.
9. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 28.
10. Državno 2018. , 2. razred, A
11. Državno 2017. , 4. razred, A
12. Državno 2015. , 4. razred, A
13. Državno 2016. , 2. i 3. razred, A
14. HMO 2019., MEMO test
15. HMO 2017., MEMO test
16. MEMO 2018., I2
17. MEMO 2017., T3
18. MEMO 2016., T3
19. IMO 2014., 2. zadatak

11.3. A1: Mislav Plavac - KAGH

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci

1. Primjenimo A-G nejednakost

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}} = 1.$$

Množenjem obje strane s 3 dobivamo izraz koji smo htjeli dokazati.

Napomena. Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

2. Uočimo da prema A-G nejednakosti vrijedi sljedeće:

$$\frac{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}\frac{bc}{a}} = b \iff \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \geq 2b$$

te analogno dobivamo

$$\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} \geq 2c, \quad \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b} \geq 2a.$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti i dijeljenjem s 2 dobivamo traženu.

3. Primijenom A-G nejednakosti na sljedeći način, dobivamo:

$$a^2+b^2 \geq 2ab, \quad b^2+c^2 \geq 2bc, \quad c^2+a^2 \geq 2ca.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo početnu.

4. Primjenom A-G nejednakosti na p^2+p+1 dobivamo:

$$p^2+p+1 \geq 3\sqrt[3]{p^2 \cdot p \cdot 1} = 3p$$

Analogno dobivamo

$$q^2+q+1 \geq 3q.$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost:

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq.$$

5. Primjenom A-G na x^4+25 te zbrajanjem s $6x^2$ dobivamo:

$$x^4+6x^2+25 \geq 2\sqrt{25 \cdot x^4}+6x^2 = 16x^2.$$

Analogno primjenom A-G na y^3+4y dobivamo:

$$y^3+4y \geq 2\sqrt{y^3 \cdot 4y} = 4y^2.$$

Uvrštavanjem ovog u početni izraz te još jednom primjenom A-G nejednakosti dobivamo:

$$\iff x^4+y^3+6x^2+4y+25 \geq 16x^2+4y^2 \geq 2\sqrt{16x^2 \cdot 4y^2} = 16xy$$

što smo i htjeli dokazati.

Umjereni zadaci

6. Neka su x, y pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff \frac{xy}{\geq}4.$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq 1 + \frac{4}{x+y} + 4 = 9.$$

7. (*Nesbittova nejednakost*) Dokažite da za sve pozitivne realne a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

1. način Uvedimo supstitucije $x = a + b, y = b + c, z = a + c$. Promatrajmo sada izraz:

$$\frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+x}{y}.$$

Primjenjivanjem A-G nejednakosti dobivamo:

$$\frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq \sqrt[6]{\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x}} = 6.$$

$$\iff \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+x}{y} \geq 6.$$

Uvrštavanjem natrag i pojednostavljivanjem dobivamo traženu nejednakost.

2. način Promatrajmo $a + b, b + c, a + c$ te primjenimo A-H nejednakost na njihov zbroj:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}}.$$

Unakrsnim množenjem dobivamo

$$((a+b)+(b+c)+(a+c))\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right) \geq 9.$$

Kada se izmnoži i pojednostavi, dobiva se traženi izraz.

8. Iz 3. zadatka znamo da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Prema tome, znamo da je

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a+b+c)$$

gdje prva nejednakost slijedi iz 3. zadatka za $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, a druga nejednakost slijedi iz $x = ab, y = bc, z = ca$.

9. Kako je $a+b+c = 1$, početni izraz možemo pomnožiti s time i ne utjecati na njegovu vrijednost. Stoga množimo izraz s $a + b + c$ te primjenujemo A-G na oba izraza

$$ab + bc + ac = (ab + bc + ac)(a + b + c) \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} \cdot 3\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = 9\sqrt[3]{(abc)^2}\sqrt[3]{abc} = 9abc.$$

10. Promatrajmo $\frac{x-1}{x}$. Zbog zadanog uvjeta je to jednako:

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Primjenom A-G nejednakosti imamo

$$\frac{x-1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}.$$

Analogno dobivamo:

$$\frac{y-1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xz}}, \quad \frac{z-1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

Množenjem sve 3 jednakosti zajedno dobivamo:

$$\frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y} \cdot \frac{z-1}{z} \geq \frac{8}{\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{xz}} = \frac{8}{xyz}$$

Nadalje, množenjem s xyz dobivamo traženu nejednakost.

11. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Primjetimo da primjenom A-G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a.$$

Te analogno onda

$$\frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c.$$

Zbrajanjem te 3 nejednakosti dobivamo:

$$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c.$$

Oduzimanjem $a + b + c$ s obje strane dobivamo traženu nejednakost.

Teži zadaci

12. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.14

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je a + b + c = 1. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Izraze raspišemo tako da dodamo 0 u brojnik:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a^3 + ab^2 - ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Analogno se ostali raspišu, zbrajanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} &= a - \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} + b - \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2} + c - \frac{c}{2} \cdot \frac{2ac}{a^2+c^2} \\ &= a + b + c - \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{2ac}{a^2+c^2} \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem uvjeta nejednakost se svodi na:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2ac}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Iskoristimo A-G nejednakost na nazivnicima te dobivamo:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2ac}{a^2+c^2} \leq \frac{b}{2} \cdot \frac{2ab}{2ab} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2bc}{2bc} + \frac{c}{2} \cdot \frac{2ac}{2ac} = \frac{1}{2}.$$

14. Vrijedi $a^2+b^2 \geq 2ab$ i $b^2+1 \geq 2b$, odnosno

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} \leq \frac{1}{2ab+2b+2}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2ab+2b+2}+\frac{1}{2bc+2c+2}+\frac{1}{2ca+2a+2}$$

Uvodimo supstituciju $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2ab+2b+2}+\frac{1}{2bc+2c+2}+\frac{1}{2ca+2a+2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1}+\frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+1}+\frac{1}{\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}\right)\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

15. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.15

16. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.16

17. Neka su a,b,c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b^2c^2+1}+\frac{b}{c^2a^2+1}+\frac{c}{a^2b^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\frac{a}{b^2c^2+1}=a-\frac{ab^2c^2}{b^2c^2+1}.$$

Kada sva 3 izraza tako raspišemo lijeva strana postane:

$$LHS=a+b+c-\frac{ab^2c^2}{b^2c^2+1}-\frac{a^2bc^2}{c^2a^2+1}-\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+1}$$

Zbog zadanog uvjeta je sada dovoljno dokazati

$$\frac{ab^2c^2}{b^2c^2+1}+\frac{a^2bc^2}{c^2a^2+1}+\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

Primjenom A-G nejednakosti na nazivnike imamo:

$$b^2c^2+1 \geq 2bc, \quad c^2a^2+1 \geq 2ca, \quad a^2b^2+1 \geq 2ab$$

pa je

$$\frac{ab^2c^2}{b^2c^2+1}+\frac{a^2bc^2}{c^2a^2+1}+\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+1} \leq \frac{ab^2c^2}{2bc}+\frac{a^2bc^2}{2ca}+\frac{a^2b^2c}{2ab}=\frac{3}{2}abc.$$

Kako vrijedi $1=\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ dobivamo da je $abc \leq 1$ te je time tvrdnja dokazana.

18. Državno natjecanje 2015. SŠ A-2.4.

19. Državno natjecanje 2022. SŠ A-2.5.

Za one koji žele više

Rješenja posljednja 3 zadatka možete naći ovdje.

20. All Soviet Union MO 1984

21. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.1, str. 17

22. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.2, str. 18

23. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.7, str. 20

11.4. N1: Paula Horvat - Diofantske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Zapišimo jednadžbu kao: $(2x-3y)(3x-2y)=4$. Daljnjim rješavanjem dobivamo $(x,y)=(-2,-1),(-1,-2),(1,2),(2,1)$.
2. Zadatak 1.
3. Kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da $10y$ završava znamenkom 0, zadnja znamenka od x^2+10y može biti 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 7, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.
4. Državno 1998., 8.razred, 3. zadatak.
5. 1999 SŠ2 1. zadatak
6. str. 195., 5. zad.
7. str. 203., 4.zad.
8. Neka je d najveći zajednički djelitelj od x i y, te neka su $x=da$, $y=db$. Onda je jednadžba zapravo
$$a^2-b^2=2abz,$$
ali imamo uvjet da su a i b relativno prosti. Sada je lagano, jer imamo da a dijeli b^2 pa je a nužno jednak 1, i analogno za b. Zaključujemo da je $2z=0$, što je nemoguće jer je z prirodan. Zaključujemo da nema rješenja.
9. Državno SŠA 2013., 2.3
10. Zadatak 6.
11. Example 3., str. 6
12. JBMO 2014.
13. Zad. 7, str. 196
14. Example 4., str. 7
15. Str. 200, zad. 12.
16. Example 6., str. 9
17. $2^a3^b+9=c^2 \iff 2^a3^b=(c+3)(c-3)$. $M(c+3,c-3)=M(c+3,6)$ Sada rastavljamo zadatak na slučajeve. Prva dva će pokriti one gdje lijeva strana nije djeljiva s 6, tj $a=0$ ili $b=0$.

   1. Slučaj: $a=0$: $3^b=(c+3)(c-3)$. Lijeva strana je pozitivna pa $c-3>0$, ako je b = 0, onda je lijeva strana 1, a desna barem 4 što nije moguće. znači $b\geq 1$, tj 3 dijeli c+3 ili c-3, a ako dijeli jednog dijeli i drugog. Također, znamo da najviše 3 može dijeliti oba, pa je jedan jednak 3, a drugi 3^{b-1}. Znamo da su oba djeljiva s 3, pa je b barem 2, pa je 3 sigurno manji jednak od 3^{b-1}, tj. manji od njih $c-3$ je jednak 3. $c-3=3 \implies c=6 \implies 3^b=27 \implies b=3$. Rješenje $(0,3,6)$.

   2. Slučaj: $b=0$: $2^a=(c+3)(c-3)$, Iz prvog slučaja znamo da je a $>$ 0, pa 2 | (c+3)(c-3), tj. c je neparan. Isto kao i u prvom slučaju c - 3 $>$ 1, i 2 dijeli i c+3 i c-3 pa je faktor 2^{a-1} veći od faktora 2, pa je manji od faktora $c-3=2 \implies c=5 \implies 2^a=16 \implies a=4$.

Rješenje (4, 0, 5).

Sada znamo da 6 dijeli barem jednog od c+3 i c-3, pa dijeli oba. A osim te šestice, brojevi su relativno prosti, pa su svi ostali faktori 2 u jednom od njih i svi ostali faktori 3 u u drugom od njih.
3. Slučaj: $c - 3 = 6$ i $c + 3 = 2^{a-1}3^{b-1}$. Znači $c = 9 implies 12 = 2^{a-1}3^{b-1}$, tj. $2^2 \cdot 3 = 2^{a-1}3^{b-1}$, Znači $a - 1 = 2 \implies a = 3$ i $b - 1 = 1 \implies b = 2$. Rješenje (3, 2, 9).

4. Slučaj: $c-3 = 6 \cdot 2^{a-2}$ i $c+3 = 6 \cdot 3^{b-2}$. Uvrstimo jednu u drugu i podijelimo s 6. $2^{a-2}+1 = 3^{b-2}$. Za $a - 2 \geq 2$. Promatramo jednadžbu modulo 4, lijeva strana je kongruetna 1, pa i desna mora biti 1 tj. $b - 2$ koji određuje $3^{b-2} \pmod 4$ mora biti djeljiv s 2. $(3^{\frac{b-2}{2}} + 1)(3^{\frac{b-2}{2}} - 1) = 2^{a-2}$. Najveći zajednički djelitelj dva faktora je 1 i umnožak im djeljiv s 4, te su obojica potencije od dva, pa je manji od njih jednak 2. $\implies 3^{\frac{b-2}{2}} - 1 = 2 \implies b - 2 = 2 \implies b = 4$. Rješenje (5, 4, 51).
Sada nam ostaje podslučaj gdje je $a - 2 manjiod 2$, Ako je $a - 2 = 0$ onda je to isto kao slučaj 3 koji smo riješili, pa ostaje $a - 2 = 1 \implies a = 3 \implies b - 2 = 1 \implies b = 3$. Rješenje (3, 3, 15).

5. Slučaj: $c-3 = 6 \cdot 3^{b-2}$, $c+3 = 6 \cdot 2^{a-2}$ Uvrstimo jednu u drugu i podijelimo s 6. $3^{b-2}+1 = 2^{a-2}$. Ako je $a - 2 \geq 3$. Promotrimo jednadžbu modulo 8, 3^{b-2} daje samo ostatke 3, i 1, pa $3^{b-2} + 1$ daje samo 4 i 2, a desna strana ima ostatak 0, pa nema rješenja.
Ako je $a - 2 \implies 3^{b-2} = 0$, nema rješenja.
Ako je $a - 2 = 1 \implies a = 3 \implies b = 2$. Rješenje (3, 2, 9) koje smo već dobili.
Ako je $a - 2 = 2 \implies a = 4 \implies b = 3$. Rješenje (4, 3, 21).

Pokrili smo sve slučajeve pa zaključujemo da zadatak ima 6 rješenja : (0, 3, 6), (4, 0, 5), (5, 4 51), (3, 3, 15), (3, 2, 9), (4, 3, 21).

18. Example 4., str. 15

12. Rješenja za drugu grupu

12.1. G2: Lucija Relić - Trigonometrija

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Primjenom sinusovog poučka na trokut ABM dobivamo
$$\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle ABM} = \frac{BM}{AM}.$$
Slično, primjenom sinusovog poučka na trokut AMC dobivamo
$$\frac{\sin \angle CAM}{\sin \angle ACM} = \frac{CM}{AM}.$$
Budući da je $BM = CM$ iz prethodne dvije relacije direktno dobivamo tvrdnju zadatka.

2. Zbog vanjske simetrale kuta $\angle BAC$ imamo da je $\angle EAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Budući da je četverokut $AEBC$ tetivan, znamo da je $\angle AEB = 180^\circ$. Kombiniranjem dobivenih veličina kuteva dobivamo $\angle ABE = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ$, odnosno primjenom sinusovog poučka
$$|AE| = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right).$$
Ponovnom primjenom sinusovog poučka (sada u trokutu $\triangle AFE$) dobivamo
$$\begin{aligned} |AF| &= |AE| \sin\frac{\alpha}{2} \\ &= 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right) \sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$
Tvrdnja zadatka sada postaje ekvivalentna sljedećoj (zbog $|AB| = 2R\sin\gamma$ i $|AC| = 2R\sin\beta$):
$$4R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right) \sin\frac{\alpha}{2} = 2R(\sin\gamma - \sin\beta).$$
Kraćenjem s $2R$ i supstitucijom $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ dolazimo do izraza
$$2\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\gamma - \sin\beta$$
kojeg je sada lako pokazati korištenjem adicijskih formula. Budući da smo tako pokazali izvedenu ekvivalentnu tvrdnju, pokazali smo i tvrdnju zadatka.

3. Da bismo dokazali tvrdnju zadatka dovoljno je dokazati $QB = DP$. Označimo $\angle CDB = \alpha$ i $\angle DCA = \beta$. Iz sinusovog poučka na trokute DAP i QBC imamo
$$DP = AD \cdot \sin\alpha \qquad \text{i} \qquad QB = BC \cdot \sin\beta. \tag{12.1}$$
Budući da je $ABCD$ tetivan i AC je promjer opisane kružnice, vrijedi
$$AD = 2R \cdot \sin\beta \qquad \text{i} \qquad BC = 2R \cdot \sin\alpha \tag{12.2}$$
pa iz (12.1) i (12.2) slijedi $DP = QB$.

4. EMC 2021 J2

5. IMO SL 2001, G1

Skica drugačijeg rješenja:

Računamo omjere potrebne za primjenu Cevinog poučka, bez smanjenja općenitosti uzmimo $|BX| : |XC|$, pri čemu je X sjecište pravaca AA_1 i BC. Povucimo pravac paralelan stranici trokuta $\overline{BC}$ kroz središte kvadrata A_1 i označimo njegova sjecišta sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom sa W i Y. Pomoću sličnosti trokuta (KKK poučak) dobivamo

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|WA_1|}{|A_1Y|}.$$

Korištenjem trigonometrije pravokutnog trokuta i zbrajanjem duljina dužina dobivamo

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{1 + \operatorname{ctg}\beta}{1 + \operatorname{ctg}\gamma}.$$

Zbog cikličnosti i Cevinog poučka dobivamo tvrdnju zadatka.

6. IMO 2008

Primijetimo da je dovoljno pokazati da su točke A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične (leže na istoj kružnici), a ostatak tvrdnje će direktno slijediti iz toga. Tvrdnju ćemo pokazati koristeći potenciju točke B, odnosno želimo pokazati $|BA_1| \cdot |BA_2| = |BC_1| \cdot |BC_2|$.

Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ i D nožište visine iz vrha A. Za početak imamo neka trivijalna opažanja iz uvjeta zadatka i polovišta stranice:

$$\begin{aligned}
|BM| = |MC| &= \frac{a}{2}\\
|A_1M| = |HM| &= |A_2M|\\
|BA_1| &= |BM| - |A_1M|\\
|BA_2| &= |BM| + |A_2M|
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$|BA_1| \cdot |BA_2| = |BM|^2 - |A_1M|^2 = |BM|^2 - |HM|^2$$

pa primjenom Pitagorinog poučka ($|HM|^2 = |HD|^2 + |DM|^2$) dobivamo izraz koji trebamo izračunati:

$$|BM|^2 - |HD|^2 - |DM|^2 = ?$$

Budući da znamo $|BM| = \frac{a}{2}$, ostaje nam izračunati preostale 2 duljine u traženom izrazu.

Trokuti BDH i BCF (za F nožište visine iz B) su pravokutni pa imamo

$$|HD| = |BD| \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2R\cos\beta\cos\gamma.$$

Osim toga vidimo i da je

$$|DM| = |BM| - |BD| = \frac{a}{2} - 2R\sin\gamma\cos\beta = R\left(\sin\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta\right).$$

Uzmemo li u obzir sve izračunate veličine, raspisivanjem algebarskih izraza dobivamo

$$|BA_1| \cdot |BA_2| = 4R^2(\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - \cos^2\beta),$$

a analogno isto dobivamo i za $|BC_1| \cdot |BC_2|$ čime smo pokazali tvrdnju zadatka.

7. državno 2017, 3A, 4. zadatak

Skica drugačijeg rješenja:

Označimo sa A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC. Zbog

$$GM \parallel HK \iff \triangle HKA' \sim \triangle GMD \iff \frac{HA'}{A'K} = \frac{GD}{DM}$$

dovoljno je pokazati $\dfrac{HA'}{A'K} = \dfrac{GD}{DM}$.

Iz prethodnih zadataka i primjera znamo

$$|HD| = 2R\cos\beta\cos\gamma$$
$$|BH| = 2R\cos\beta.$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABA' dobivamo $|BA'| = 2R\sin(90^\circ - \beta) = 2R\cos\beta$ pa zbog sličnosti trokuta zaključujemo

$$|HA'| = 2|HD| = 4R\cos\beta\cos\gamma.$$

Osim toga, zbog $\angle DAM = \beta - \gamma$ imamo $|A'K| = 2R\sin(\beta - \gamma)$.

Nadalje računamo $|DM| = |DC| - |MC|$. Iz trokuta AMC dobivamo

$$MC = b\frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)},$$

iz čega slijedi

$$|DM| = b\left(\cos\gamma - \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)}\right).$$

U računanju $|GD| = |AD| - |AG|$ koristimo trokut AGF i tetivnost četverokuta $AEHF$ (nasuprotni pravi kutevi). Iz sinusovog poučka imamo

$$\frac{|AF|}{\sin(90^\circ + \beta - \gamma)} = \frac{|AG|}{\sin\gamma},$$

odnosno imamo

$$|AG| = \frac{b\cos\alpha\sin\gamma}{\cos(\gamma - \beta)}$$
$$|AD| = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

Spajanjem svih dobivenih izraza i korištenjem adicijskih formula dobivamo tvrdnju zadatka.

12.2. C2: Mislav Brnetić - Prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Pecivo se može izabrati na 3 načina, šunka na 6 načina (bez šunke ili sa jednom od vrsta), a sir na 5 načina. Dakle rješenje je, prema principu umnoška, $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

2. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po točno jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje 8!.

3. Osobu koja će osvojiti kekse možemo izabrati na 15 načina. Zatim, prvu osobu koja će osvojiti sok možemo izabrati na 15 načina, a drugu na 14, no kako poredak tih osoba nije bitan, ukupni broj načina za izabrati 2 osobe koje osvajaju sok je $\frac{15 \cdot 14}{2}$, s obzirom da smo svaki par osoba prethodno brojali 2 puta. Dakle, rješenje je $\frac{15 \cdot 15 \cdot 14}{2}$.

4. Brojeva manjih od 1000 i djeljivih sa 3 je 333, a djeljivih sa 7 je 142. Broj je djeljiv i sa 3 i sa 7 ako i samo ako je djeljiv sa 21, a takvih manjih od 1000 ima 47 pa je po FUI rješenje $333 + 142 - 47 = 428$.

5. Svih peteroznamenkastih brojeva ima 90000, a onih koji nemaju znamenku 5 ima $8 \cdot 9^4$. Dakle, peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5 ima $90000 - 8 \cdot 9^4$.

6. Ako broj šahista označimo s x, a broj penzionera s y, iz uvjeta zadatka vrijedi da je broj ljudi koji su i šahisti i penzioneri jednak:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$$
$$\implies 3x = 4y$$
$$\implies x > y$$

   Dakle, u tom društvu ima više šahista nego penzionera.

7. Prvo primijetimo kako 1 pravac dijeli ravninu na dva dijela. Ako je a_{n-1} broj dijelova ravnine na koji ju dijeli $n-1$ pravac, dodavanjem još jednog pravca (koji će postojeće sijeći u $n-1$) točki se broj dijelova ravnine povećava za n odnosno vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + n$$

   Kako vrijedi $a_1 = 2$, indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

8. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A-4.3.

9. Županijsko natjecanje 1999., SŠ A-4.3. - rješenje za 3 destinacije je analogno

10. Ukupno permutacija slova u riječi (ako sva slova međusobno razlikujemo) ima 10!. S obzirom da se slovo M ponavlja dvaput, slovo A 3 puta i slovo T 2 puta, svaku riječ smo zapravo brojali $2 \cdot 6 \cdot 2$ puta. Naime, fiksirani anagram mogli smo dobiti bilo kojim poretkom jednakih slova, tj. bilo kojom permutacijom tih slova, a broj tih permutacije je upravo jednak $2 \cdot 6 \cdot 2$.

    Zato je ukupni broj anagrama jednak

$$\frac{10!}{2 \cdot 6 \cdot 2}.$$

11. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$ različitih parova.

Svaki dan, među 3 učenika koja čiste učionicu, pojavljuju se točno 3 različita para.

Dakle, kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, broj parova učenika jednak je i $3 \cdot k$.

Imamo $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.

12. a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

b) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.

S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.

Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.

To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.

S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

d) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

e) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba.

S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru :)).

f) Biramo ekipu od k osoba, a zatim predsjednika i podpredsjednika, koji mogu biti i jedna te ista osoba.

S druge strane, raspišemo li izraz s desne strane, dobivamo

$$(n+n^2) \cdot 2^{n-2} = (n+n+n \cdot (n-1))2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

što je jednaku zbroju načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao istu osobu (i preostale članove između ostalih ljudi) i načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao različite osobe (i zatim preostale članove između ostalih ljudi).

13. Azra Tafro, Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, 3. zadatak

Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima. Drugim riječima, za svaki pravokutnik na ploči treba odrediti koliko doprinosi zbroju brojeva na ploči, a to je jednako njegovoj površini. Preostaje odrediti tu sumu koja je oblika

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij \cdot (n-i+1)(n-j+1))$$

14. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak

15. Krenimo od desne strane jednakosti.

Desna strana jednakosti predstavlja broj $k+1$-članih podskupova $n+1$-članog skupa.

Neka je naš skup oblika $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$.

S lijeve strane promatrajmo koji je prvi element (s najmanjim indeksom) koji je izabran. Ako je prvi izabrani element x_i, preostale elemente možemo izabrati na $\binom{n-i}{k}$ načina.

Dakle, lijeva strana je upravo suma broja načina izbora podskupova za svaki izbor prvog elementa, pa predstavlja istu stvar kao i desna strana.

16. Županijsko natjecanje 2013., SŠ A-4.3.

17. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 10. zadatak

18. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!.

Zatim fiksirajmo redoslijed vozila te njima pridružimo parkirna mjesta. Prvo između svaka dva vozila postavimo po jedno parkirno mjesto. Preostalo je još 21 neupotrijebljenih parkirnih mjesta od kojih svako možemo postaviti na 11 lokacija u odnosu na automobile, a to možemo promatrati kao kombinaciju s ponavljanjem te napraviti na $\binom{31}{10}$ načina.

Zato je traženi broj rasporeda $\binom{31}{10} \cdot 10!$

Primijetite kako je navedeni način prebrojavanja ispravan s obzirom da ne razlikujemo parkirna mjesta, već samo njihov broj i položaj u odnosu na automobile (što je ekvivalentno početnom problemu raspoređivanja automobila).

19. Državno natjecanje 2016. SŠ A-4.5.

20. Državno natjecanje 2001., SŠ-A 4.4

12.3. A2: Emir Kalajdžija - Natjecateljski zadaci sa školskim idejama

Predavanje Hintovi Rješenja

-

Rješenja

1. Rješenje
2. Rješenje
3. Rješenje
4. Rješenje
5. JBMO 2021. 1. zadatak
6. Rješenje
7. Rješenje
8. Oba rješenja možete pogledati na sljedećem linku.
9. Nakon što zbog uslova $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ zaključimo da svi koeficijenti moraju biti pozitivni možemo nastaviti kao u rješenju na linku. Na 3. slici je motivacija, odnosno kako smo nadošli koja vrijednost će biti minimum.
10. Rješenje
11. Rješenje
12. Rješenje
13. I rješenje
    II rješenje

12.4. N2: Hrvoje Radoš - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Primijenjujemo Eulerov teorem za sve tri kongruencije:

$$\phi_{(11)} = 10, \phi_{(25)} = 20, \phi_{(39)} = 24$$

$$2^{10} \equiv 1 \mod 11 \implies 2^{100} \equiv 1 \mod 11$$
$$2^{20} \equiv 1 \mod 25 \implies 2^{100} \equiv 1 \mod 25$$
$$2^{24} \equiv 1 \mod 39 \implies 2^{96} \equiv 1 \mod 39 \implies 2^{100} \equiv 16 \mod 39$$

2. Služimo se Lemmom iz predavanja. Prvo računamo $3^{3^3} \equiv 3^{3^3 \mod \phi(40)} \equiv 3^{11} \equiv 27 \mod \phi_{(100)}$
Slijedi:

$$3^{3^{3^3}} \equiv 3^{3^{3^3} \mod \phi_{(100)}} \equiv 3^{27} \equiv 109 \mod 100$$

3. Za brojeve veće ili jednako 999 vrijedi $999 \equiv -1 \mod 1000$
Slijedi:

$$9 \times 99 \times 999 \times \ldots 999 \equiv 9 \times 99 \times (-1)^{997} \mod 1000$$
$$9 \times 99 \times (-1) \equiv -871 \equiv 129 \mod 1000$$

4. Zapišimo izraz preko kongruencija: $29^p + 1 \equiv 0 \mod p$
S obzirom da $p \neq 29$ prema malom Fermatu vrijedi $29^p \equiv 29 \mod p$
kombiniranjem to dva izraza dobije se:

$$30 \equiv 0 \mod p$$

Očito p pripada skupu:$\{2, 3, 5\}$ Provjerom se dobije $p = 2, 3, 5$

5. Služit ćemo se Eulerovim teoremom. $\phi_{(49)} = 42$.

$$6^{42} \equiv 1 \mod 49 \implies 6^{84} \equiv 1 \mod 49$$
$$8^{42} \equiv 1 \mod 49 \implies 8^{84} \equiv 1 \mod 49$$

Sada samo treba izračunati $6^{-1} \mod 49$ i $8^{-1} \mod 49$. Dobije se:

$$6^{84}6^{-1} + 8^{84}8^{-1} \equiv 6^{83} + 8^{83} \equiv 35 \mod 49$$

6. Služit ćemo se lemmom i to više puta!!!
2012 dvojki

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod \phi_{(100)} \equiv 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod 100$$

2011 dvojki

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod \phi_{(40)} \equiv 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod 40$$

2010 dvojki

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod \phi_{(16)} \equiv 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod 16$$

2009 dvojki

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \bmod \phi_{(8)} \equiv 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod 8$$

2008 dvojki

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \bmod \phi_{(4)} \equiv 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \mod 4$$

Iz zadnje kongrencije s 2008 trojki imamo:

$$3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \bmod \phi_{(4)} \equiv 3^1 \mod 4$$

I sad se vraćamo unazad tako da uvršavamo ovaj posljendnji rezultat.
Na kraju se dobije rješenje 87.

7. Lakši je posao riješiti $p|5^{p^2}+1$

$$\phi_{(p^2)} = p^2 - p = p(p-1)$$

$$5^{p^2}+1 \equiv 5^{p^2-p+p}+1 \equiv 5^{p(p-1)+p}+1 \equiv 0 \mod p \tag{1}$$

Prema MFTu vrijedi $5^{p-1} \equiv 1 \mod p$ za $p \neq 5$(pretpostavka)
Sada ovo kombiniramo s (1), iskoristimo još koji put MFT i dobijemo:

$$5^{p(p-1)+p}+1 \equiv (5^p)^{(p-1)}5^p+1 \equiv 5^p+1 \equiv 6 \mod p$$

Kandidati za p su $\{2,3,5\}$ (2 i 3 su kandidati zbog prethodne kongruencije, a 5 moramo provjeriti jer smo sve radili pod pretpostavkom da $p \neq 5$)
Rješenje je $p = 3$.

8. Promatramo dva slučaja n je prost i n je složen.
Prvi slučaj je trivijalan $2^n - 1 \equiv 1 \mod n$. Prema MFTu.
Drugi slučaj je zeznutiji. Zapišimo $n = kp$ gdje je p najmanji prost djelitelj od n. S obzirom da n očito nije paran onda $p > 2$. Iz uvjeta zadatka i iz činjenice da $p|2^n - 1$ slijedi:

$$2^{kp} - 1 \equiv (2^k)^p - 1 \equiv 0 \mod p$$

A iz MFTa slijedi:

$$(2^k)^p - 1 \equiv 2^k - 1 \equiv 0 \mod p$$

Sada zapišimo $k = qd + r$ gdje je d najmanji prirodni broj za kojeg vrijedi $2^d - 1 \equiv 0 \mod p$

$$2^k - 1 \equiv 2^{qd+r} - 1 \equiv (2^q)^d 2^r - 1 \equiv 2^r - 1 \mod p$$

No, s obzirom da $r < d$, d nije najmanji prirodan broj za kojeg vrijedi $2^d - 1 \equiv 0 \mod p$. Kontradikcija.

9. Zapišimo sumu na ljepši način (Da, ovo je ljepše!!!):$\sum_{i=1}^{n} i^{\phi_{(n)}}$
Ovo izgleda savršeno za Eulerov teorem samo trebamo razdvojiti sumu na dvije sume jedna za čije članove $(i^{\phi_{(n)}})$ vrijedi $p \mid i$ i $p \nmid i$, gdje je p neki prosti djelitelj od n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\phi_{(n)}} = \sum_{p|i} i^{\phi_{(n)}} + \sum_{p\nmid i} i^{\phi_{(n)}} \tag{1}$$

Ako promatramo jednakost (1) $\mod n$ prva suma je jednaka nuli dok je druga jednaka broju svih i-ova relativno prostih s p. Odnosno $n - \frac{n}{p}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\phi(n)} = \sum_{p|i} i^{\phi(n)} + \sum_{p\nmid i} i^{\phi(n)} \equiv 0 + n - \frac{n}{p} \mod p$$

$$n - \frac{n}{p} \equiv 0 - \frac{n}{p} \mod p \tag{2}$$

(2) će biti konruentan s nula modulo p ako i samo ako $p^2 \mid n$. Stoga je rješenje svaki n za kojeg vrijedi $p^2 \nmid n$ tkz. "squarefree integers".

10. rješenje

11. 51. str

12. rješenje

13. $p > 3 \implies$ p je neparan, pa je i p+2 neparan, a p+1 je paran. $x = 1^{p+2} + 2^{p+2} + \cdots + (p-1)^{p+2} = 1^{p+2} + (p-1)^{p+2} + 2^{p+2} + (p-2)^{p+2} + \cdots (\frac{p-1}{2})^{p+2} + (\frac{p+1}{2})^{p+2} = (1+p-1)(1-(p-1)+(p-1)^2 \ldots - (p-1)^p + (p-1)^{p+1}) + (2+p-2)(2^{p+1} - 2^p(p-2) + \ldots - 2(p-2)^p + (p-2)^{p+1}) + \ldots + (\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2})((\frac{p-1}{2})^{p+1} \ldots (\frac{p+1}{2})^{p+1}) = p(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p-k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i)$

$y = \frac{x}{p} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p-k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (-k)^{p+1-i)} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k)^{p+1} \cdot (-1)^{p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} k^{p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (p+1)k^{p+1} \pmod p$ Svi k-evi su relativno prosti s p, pa možemo primijeniti MFT:

$y \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2 \equiv (\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2} + 1)(p) \equiv 0 \pmod p$

Dokazali smo da je y djeljiv s p, a $x = py$, pa je x djeljiv s p^2.

13. Rješenja za treću grupu

13.1. G3: Nika Utrobičić - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Državno 2009., 4.razred
2. Baltic Way 2016., Problem 17
3. Baltic Way 2018., Problem 14
4. Državno 2017., 4.razred, 4.zadatak
5. EGMO 2019., 2.dan, Problem 4.
6. IGO 2014., Senior level, Problem 6.
7. HMO 2016. (1. dan, 3. zadatak)
8. IMO SL 2013. G2
9. IMO SL 2015. G3

13.2. C3: Andrej Čizmarević - Invarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Svi zadaci su iz prve cjeline knjige Problem solving strategies (Arthur Engel).
Zadaci su redom: primjer 3 (E3), zadatak 43, zadatak 46, primjer 4 (E4), zadatak 47, primjer 8 (E8), zadatak 16 i zadatak 42.

13.3. A3: Ivan Novak - Zadaci koji izgledaju zastrašujuće ("nestandardna algebra")

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. JBMO 2022
2. Baltic Way 2020
3. EMC 2021
4. Baltic Way 2011
5. Očito niz raste. Onda imamo $x_{n+1} < x_{n+2} < \sqrt{x_{n+1}}$, pa je $x_{n+1} < 1$.

   Ali ono što također vrijedi je da se i razlike između uzastopnih članova korijenovanog niza povećavaju, pa je $\sqrt{x_{n+1}} \geq \sqrt{x_1} + n(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})$, što bi postalo veće od 1 za n dovoljno velik, pa zaključujemo da takav niz ne postoji.
6. EGMO 2016, P1
7. Benelux
8. BMO 2016, P1
9. Za prvo i treće pitanje pripadne f su $x \mapsto x + 1011$ i $x \mapsto x^2$.

   Za drugo pitanje, odgovor je NE. Očito takva f mora biti injekcija. Neka je S skup svih brojeva koji nisu u slici od f. Tada je S podskup od $\{1, 2, \dots, 2023\}$ jer su svi ostali u slici od $f \circ f$. Međutim, primijetimo da je i $f(S)$ podskup od $\{1, 2, \dots, 2023\}$ jer bi inače neki element iz $f(S)$ bio $f(f(u))$ za neki u, pa bi zbog injektivnosti bilo $f(u) \in S$, kontradikcija. Nadalje, S i $f(S)$ su očito disjunktni. Još nadalje, svaki broj iz $\{1, 2 \dots, 2023\}$ je ili u S ili u $f(S)$, jer bi inače bio u slici od $f \circ f$.

   Dakle, S i $f(S)$ particioniraju $\{1, 2, \dots, 2023\}$. Međutim, zbog injektivnosti oni imaju isti broj elemenata. To je nemoguće jer 2023 nije paran.

   Za 4. pitanje, odgovor je DA. Stavimo $f(1) = 1$ i podijelimo $\mathbb{N} \backslash \{1\}$ u lance oblika $x, x^2, x^4, x^8, \dots$. Tih lanaca ima beskonačno, pa ih možemo spariti. Recimo da je (A, B) sad neki par lanaca. Stavimo da se i-ti najmanji element od A šalje u i-ti element od B, te da se i-ti element od B šalje u $i + 1$-ti element od A. Lako se vidi da ovo funkcionira.
10. Link.
11. 3. ELMO, 2. zadatak
12. EMC 2019, J2
13. IMO Shortlist 2017, A2
14. IMO Shortlist 2021, A2

13.4. N3: Luka Bulić Bračulj - Euler i CRT

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. 250 problema elementarne teorije brojeva, 5
2. Ideja je uzeti dovoljno velike brojeve, tako da možemo osigurati da je svaki dijeljiv s nekim drugim brojem. Recimo da uzmemo niz $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n+1$ koji očito radi jer je prvi broj dijeljiv s 2, drugi s 3, treći s $4 \ldots$ a n-ti s $n+1$.

   Alternativno rješenje bi mogli dobiti sličnom metodom primjenjujući CRT. Ovdje samo valja paziti da moduli moraju biti međusobno relativno prosti, pa gore navedeni niz ne bi mogli dobiti koristeći CRT. Jedan mogući način je da kažemo da tražimo da prvi broj x bude dijeljiv s 2, tj. $x \equiv 0 \pmod 2$, pa da sljedeći broj $(x+1)$ bude dijeljiv s 3, što ćemo lakše zapisati kao $x \equiv -1 \pmod 3$, pa da sljedeći broj (umjesto s 4 kao gore) bude dijeljiv s 5, tj. $x \equiv -2 \pmod 5$, i tako tražimo da svaki idući broj bude dijeljiv s idućim prostim brojem (pa će onda sigurno u parovima biti relativno prosti, tj. možemo koristiti CRT).
3. Koristit ćemo sličnu ideju kao u alternativnom rješenju prošlog zadatka: osigurat ćemo da je svaki od brojeva $x, x+1, \ldots, x+n-1$ dijeljiv s nekim kvadratom, a kako CRT traži da moduli budu u parovima relativno prosti, bit će nam to najlakše tražiti od kvadrata prostih brojeva. Uzmimo zato x takav da vrijedi $x \equiv 0 \pmod{2^2}$, pa $x \equiv -1 \pmod{3^2}$, pa $x \equiv -2 \pmod{5^2}$, i tako sve do $x \equiv -n+1 \pmod{p_n^2}$. Smijemo primjeniti CRT, pa očito postoji neki dobar izbor za x (iako za razliku od prošlog zadatka ne možemo naći lijep opis za njega).
4. Poglavlje 2.3., Example 2.3.7.
5. Poglavlje 2.2., Example 2.2.2.
6. IMO 1989 Problem 5 - Solution 2
7. Poglavlje 2.3., Example 2.3.10.
8. Poglavlje 2.2., Example 2.2.4.
9. IMO 2005 Problem 4
10. Mathematics - Stack Exchange
11. IMO 2009 Problem 1 (Napomena: rješenje sadrži tipfeler, u izrazima $a_4 \equiv 0 \pmod q$ i $a_5 \equiv 0 \pmod q$ treba pisati 1 umjesto 0.)
12. Example 3.1 (USAMO 2008 Problem 1)

14. Rješenja za četvrtu grupu

14.1. G4: Ivan Vojvodić - Mikstilinearne kružnice

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. example 1, EGMO 2013/5
2. Centroamerican Olympiad 2016/6
3. example 3, USATST 2016/2
4. Taiwan TST3 2014/3

14.2. C4: Luka Bulić Bračulj - Grafovi

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Diskretna matematika PMF - Skripta iz predavanja
2. Diskretna matematika PMF - Skripta iz vježbi
3. Domagoj Bradač - Teorija grafova, 4. zadatak
4. Domagoj Bradač - Teorija grafova, 3. zadatak
5. APMO 1989., 4. zadatak
6. IMO Shortlist 2001., C3
7. Domagoj Bradač - Teorija grafova, 7. zadatak (USAMO 1986., 2. zadatak)
8. Zadatke 8., 9. i 10. (kao i mnoge druge) možete pronaći na MIT biljaškama s predavanja.

14.3. A4: Ivan Vojvodić - Tangent line trick

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Prva stranica, example 1
2. BSOMP $a+b+c=1$, tada jednakost postaje

$$\frac{1}{1-\sqrt{a}}+\frac{1}{1-\sqrt{b}}+\frac{1}{1-\sqrt{c}} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}.$$

   Jednakost je u $a=b=c=\frac{1}{3}$ i stoga uzmemo $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ pa želimo dokazati

$$f(x) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

   odnosno

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} \geq \left(\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x+\frac{3}{4}$$

   što je ekvivalentno s

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\left(\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{x}+\frac{3}{4}\right) \geq 0$$

   što vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa tako i za svaki $x \in \langle 0,1\rangle$.

   Sumiranje dokazane nejednakosti za a,b,c i korištenje uvjeta $a+b+c=1$ daje traženu nejednakost.

   Lošije rješenje možete naći na HMO 2019, drugi dan
3. Prva stranica, example 3
4. USAMO 2017/6
5. stranica 5
6. Prva stranica, example 2

14.4. N4: Ivan Novak - Vieta jumping

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Wikipedia
2. Primijetimo da su m i n nužno relativno prosti, pa je uvjet ekvivalentan s $mn \mid (m^2+1)(n^2+1)$, što je isto kao $mn \mid m^2+n^2+1$. Motivirani prvim zadatkom, gledamo jednadžbu $m^2+n^2+1 = 3mn$. Očito imamo rješenje $(1,1)$. Sad je ideja iz rješenja (m,n) sa $m \leq n$ skočiti u rješenje (n,m') sa $m' > m$. Iz Vieta formula vidimo da $m' = \frac{n^2+1}{m}$ funkcionira.
3. Uvjet je ekvivalentan s $mn-1 \mid m^2+n$. Uzmimo k da bude omjer desne i lijeve strane. Promotrimo jednadžbu $t^2+t = ktn-k$. Neka su m i u njene nultočke. Imamo

$$\begin{aligned} m+u &= kn \\ mu &= k+n. \end{aligned}$$

   Lako slijedi da je u prirodan. Sad treba riješiti ovaj sustav jednadžbi u prirodnim brojevima. Ako su svi brojevi veći od 1 i ako je ikoji veći od 2, recimo m, dobivamo $mu > m+u$, ali onda je $kn < k+n$, što je nemoguće jer je $kn-k-n+1 = (k-1)(n-1) \geq 1$. Dakle, opcije su da su svi jednaki 2, što daje rješenje $n=2$, ili da je neki od brojeva jednak 1.

   Pa neka je bez smanjenja općenitosti (jer je sve dovoljno simetrično po ove četiri varijable) $m=1$. Onda je $u = k+n$ i $u+1 = kn$ iz čega slijedi $(k-1)(n-1) = 3$. Dobivamo da n može biti 2 ili 4.

   Dakle, n može biti $1,2$ ili 4. (Rješenje 1 bi dobili da zamijenimo uloge od m i n sad na kraju).
4. Neka je k omjer brojnika i nazivnika. Ako je $a=b$ lako dobivamo da je nužno $k=4$. Pretpostavljamo nadalje da k nije 4 i da je $a \neq b$. Neka je (a,b) minimalno rješenje za fiksni k, za koje je $a > b$.

   Neka je u drugo rješenje pripadne kvadratne jednadžbe po a. Imamo

$$\begin{aligned} a+u &= (k-1)b \\ au &= b^2+k. \end{aligned}$$

   Dobivamo iz prve jednadžbe da je u cijeli, a iz druge da je pozitivan. Onda je i (u,b) rješenje za ovaj k, pa mora biti $u \geq a$ jer bi inače to bilo manje rješenje.

   Onda imamo $a \geq b+1$, $u \geq b+1$, pa je $au = b^2+k \geq b^2+2b+1$ tj. $k \geq 2b+1$. S druge strane imamo $au+1 \geq a+u$ pa je $b^2+k+1 \geq (k-1)b$, odnosno

$$b^2+b+1 \geq k(b-1) \geq (2b+1)(b-1).$$

   Međutim, jedini b za koje vrijedi $b^2+b+1 \geq (2b+1)(b-1)$ su 1 i 2, pa je dovoljno provjeriti za koje k postoji rješenje sa $b=1$ ili $b=2$.

   Za $b=1$ imamo $(a^2+a+1)/(a-1) = k$, iz čega se dobiva $a-1 \mid 3$, pa je $a=2$ ili $a=4$. Dobiva se (opet) $k=4$ i $k=7$.

   Za $b=2$ imamo $(a^2+2a+4)/(2a-1) = k$ iz čega se opet lako dobije da je $k=4$ ili $k=7$.

   Dakle, skup rješenja je $\{4,7\}$.
5. Opet uvedimo k da bude omjer.

   Zapišimo jednadžbu koju x zadovoljava (t je varijabla):

$$t^2-(kyz-2y-2z)t+(y+z)^2 = 0.$$

Uzmimo da je (x, y, z) najmanje rješenje (s najmanjom sumom) za taj fiksni k, uz $x \geq y \geq z$. Neka je u drugo rješenje gornje jednadžbe. Imamo

$$x + u = kyz - 2(y + z)$$
$$xu = (y + z)^2.$$

Lako se vidi da je u prirodan.

Imamo $u \geq x \geq y \geq z$, pa su svakako x i u oba veći ili jednaki $(y+z)/2$. Ali onda su zbog druge jednadžbe oba manji ili jednaki $2(y + z)$, a jedan od njih je i manji ili jednak od $y + z$, te se ne mogu obje jednakosti postići istovremeno. Zaključujemo $x + u < 3(y + z)$. Ali onda je

$$5(y + z) > kyz.$$

Drugim riječima $5(1/y+1/z) > k$. Vidimo da za $k \leq 5$ to nije problem (njih ćemo riješiti kasnije) te da za $k \geq 10$ to nije moguće jer je $1/x + 1/y \leq 20$.

Za $k = 9$ jedini način da ova nejednakost vrijedi je da je $y = z = 1$. I onda stvarno dobivamo za $x = 1$ da je $k = 9$ rješenje.

Za $k = 8$: uzmemo isto $y = 1$, $z = 1$ i onda $x = 2$ daje $k = 8$.

Za $k = 7$: vidimo da nema rješenja, jer za svaki par (y, z) (kojih je samo nekoliko) za koji vrijedi nejednakost $1/z + 1/y > 7/5$ direktno provjerimo da ne postoji pripadni x za koji bi bilo $k = 7$.

Konačno, za sve $k < 7$ na sličan način konstruiramo neka mala rješenja i dobijemo da je odgovor sljedeći: svi k manji od 10 osim 7.

6. Imamo $p(p - 1) = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Ako $p \mid n - 1$, onda se raspiše da je $n^2 + n + 1 > p - 1$ i dobivamo kontradikciju. Dakle, $p \mid n^2 + n + 1$, pa onda $n - 1 \mid p - 1$. Stavimo $p - 1 = k(n - 1)$, tj. $p = kn - k + 1$. Imamo

$$n^2 + n + 1 = k(kn - k + 1).$$

Ovo je kvadratno po n. Neka je u drugo rješenje te kvadratne.

Imamo

$$n + u = k^2 - 1$$
$$nu = k^2 - k + 1.$$

Onda je u prirodan osim za $k = 1$, ali za $k = 1$ nema rješenja. Onda imamo $nu + 1 \geq n + u$ odnosno $k^2 - k + 2 \geq k^2 - 1$, iz čega lijepo slijedi $k \leq 1$, kontradikcija. Dakle, nema rješenja.

7. Crux Mathematoricum

8. IMO Shortlist 2019, N2, post #8 je pseudo jumping rješenje

9. IMO 2007, P5

10. IMC

11. EMC 2021, S4

12. Srpsko državno za 3. razred 2018.

Dio IV.

Projekti na Ljetnom kampu

15. Projekti

15.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 3 do 8 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz nekoliko popodneva detaljnije odabranu temu. Na ovogodišnjem je kampu bilo ponuđeno sveukupno 8 projekata.
Većina projekata može se svrstati u sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema, a što su naučili na projektima možete pročitati u nastavku!

15.2. Popis projekata na ovoj Zimskoj školi

15.2.1. Sve slučajnosti su slučajne

Working name: vjerojatno sve o vjerojatnostima

Vrsta: natjecateljski / primjena **Mentor:** Matej Vojvodić

Na projektu „Sve slučajnosti su slučajne“ svaki dan smo imali predavanja o određenim temama:
1. Klasična vjerojatnost, 2. Uvjetovana vjerojatnost, 3. Geometrijska vjerojatnost i 4. Očekivanje. Klasična vjerojatnost bila je uvodna tema s kojom smo se svi već prije susreli na natjecanjima i drugim predavanjima te nije bila teška za shvatiti. Otkrili smo neke nove načine prebrojavanja u zadacima koje smo možda prije vidjeli, ali nismo znali riješiti.

Definicija 15.2.1: Vjerojatnost slučajnog događaja

U svim tim slučajevima **vjerojatnost nekog slučajnog događaja** definiramo kao **omjer broja povoljnih elementarnih događaja i broja svih elementarnih događaja**.

Na primjer, za događaj "na igraćoj kockici je pao paran broj", vjerojatnost tog događaja je $\frac{3}{6} = 50\%$ jer ima 3 povoljna elementarna događaja (da padne 2, 4 ili 6), a ukupno ima 6 elementarnih događaja (da padne broj između 1 i 6) koji su svi jednako vjerojatni.
Drugi dan smo se upoznali s novom temom „Uvjetovana vjerojatnost“ te smo naučili kako se računa vjerojatnost pomoću Bayesove formule, koja slijedi nakon što vjerojatnost unije dva događaja pokažemo na dva načina.

Definicija 15.2.2: Uvjetovana vjerojatnost

Često želimo odrediti vjerojatnost da se dogodio događaj A uz to da se dogodio događaj B. Pišemo $\mathbb{P}(A|B)$, a računamo po sljedećoj formuli:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ovo nam je otvorilo vrata u neke nove činjenice npr. vjerojatnost da se izvuče crna kuglica od 6 bijelih i 4 crne na bilo kojem mjestu je jednaka za sva mjesta što smo pokazali i algebarski i kombinatorno. Posebno nas je zaintrigirao „Boy or Girl paradox“ koji objašnjava kako se vjerojatnost mijenja s obzirom na dobivene informacije.

Zadatak 15.2.1. (Prema Boy or Girl paradox) Patricija ima dvoje djece. Koja je vjerojatnost da ima (barem jednog) sina ako:

(a) (nema dodatnih uvijeta)

(b) ima kći.

(c) njeno starije dijete je kći.

(d) ima kći rođenu u četvrtak.

Na predavanju „Geometrijske vjerojatnosti" prestali smo se baviti konačnim skupovima te smo počeli s beskonačnim skupovima. Skupovi koje smo promatrali su neprekinuti, gusti i po prirodi beskonačni (poput vremena, površine, duljine, volumena, mase, ...). Naučili smo procjenjivati površinu ispod grafova u ravnini i u prostoru.
Na predavanju o očekivanju slučajne varijable naučili smo još malo teorije:

Definicija 15.2.3: Slučajna varijabla

Slučajna varijabla bit će svaka funkcija koja ishodima pokusa pridružuje broj. Dakle, to je bilo koja funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (Grčkim slovom Ω označavamo vjerojatnostni prostor).
Specijalno, funkciju slučajnu varijablu $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ zvat ćemo **indikatorska funkcija**

Definicija 15.2.4: Očekivanje slučajne varijable

Očekivanje slučajne varijable X koja za neki elementarni događaj poprima realnu vrijednost označava se s $\mathbb{E}(X)$ i definira se kao:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Pritom suma ide po vrijednostima koje slučajna varijabla može poprimiti.

Očekivanje slučajne varijable možemo shvatiti kao svojevrsni težinski prosjek: u obzir uzimamo vrijednost varijable samo onoliko koliko je vjerojatno da se postigne. Tu smo posebnu pažnju posvetili Sanktpetersburgskom paradoksu, igri u kojoj je očekivani dobitak beskonačan, no očito se ne isplati platiti beskonačnu cijenu za igranje.

Zadatak 15.2.2. (Varijacija Sanktpeterburškog paradoksa) Igrate sljedeću igru: bacate pravedan novčić sve dok ne padne pismo. Ako je pismo palo u n-tom bacanju dobivate 2^n kuna.

(a) Koliki je očekivani dobitak u ovoj igri?

(b) Recimo da igra završava nakon 40 bacanja, pri čemu ako ne padne pismo u tih 40 bacanja dobivate 2^{40} kuna (što je oko 1.1 bilijuna kuna). Koliki je sada očekivani dobitak?

(c) Koliki je očekivani dobitak ako nakon 40 bacanja u kojima nije palo pismo ostajete bez svega?

Paradoks smo riješili koristeći Bernulijevu utility funkciju, tj. zaključili smo da više novca ne znači proporcionalno više sreće. Ukratko, spremni smo platiti 11kn da zaigramo. Također smo izračunali koliko pakiranja sličica trebamo kupiti kako bismo ispunili album s igračima sa Svjetskog prvenstva – oko 900 pakiranja.
Fun factovi koje smo naučili iz tema koje su vezane uz vjerojatnost i statistiku: zašto se rađa više muškaraca nego žena (pogotovo nakon rata), kako se mjeri IQ (i ukratko o normalnoj distribuciji), ovisnost sreće o mjesečnim primanjima (čak pada nakon nekog iznosa), koliko su testovi na Covid-19 dobri (i primjere jako specifičnih ili jako osjetljivih)...

15.2.2. Kako rasporediti učenike na projekte?

Vrsta: primjena **Mentor:** Lucija Relić

Naš projekt imao je za cilj pronaći rješenje za pojednostavljenje i automatiziranje procesa raspoređivanja učenika na projekte. Rad na ovom zadatku bila nam je odlična prilika da naučimo i primijenimo naše vještine rješavanja problema.
Već prvi dan raspravili smo svu matematiku vezanu uz projekt i riješili nekoliko zadačića. Bavili smo se maksimiziranjem i minimiziranjem nekih matematičkih izraza uz zadovoljavanje određenih restrikcija. Konkretnije, bavili smo se problemima oblika

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min \\ x &\in \mathcal{P} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(x) &\to \max \\ x &\in \mathcal{P} \end{aligned}$$

gdje je $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ realna *funkcija cilja*, a $\mathcal{P}$ *dopustivi skup*. Započeli smo rješavanjem primjera bez znanja o optimizaciji koristeći stvari koje su nam poznate od prije (npr. geometrijsku interpretaciju).

Zadatak 15.2.3.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\to \max \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Naučili smo kako problem maksimizacije svesti na problem minimizacije, a prateći prošli primjer uspjeli smo i izvesti simpleks algoritam koji je bio potreban za rješavanje osnovnih problema linearnog programiranja:

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Idućeg dana vježbali smo postavljanje problema linearnog programiranja kako bismo se što bolje pripremili za glavni zadatak. Primjer takvog zadatka je sljedeći:

Zadatak 15.2.4. Tvornica sladoleda treba izraditi plan prizvodnje za iduću godinu. Njihovo predviđanje je da će i-tog mjeseca u godini prodati d_i tona sladoleda. Promjena u količini proizvodnje iz mjeseca u mjesec iznosi 350 po toni, a trošak skladištenja za mjesec dana iznosi 140 po toni. Tvornica nije radila prijašnju godinu i nisu imali ništa na zalihama. Postavite optimalni plan proizvodnje.

Za kraj upoznavanja s matematičkom pozadinom prošli smo neke moguće probleme na koje možemo naići rješavajući problem simpleks algoritmom. Primjerice, restrikcije mogu biti zadatke jednakostima ili varijable ne moraju biti nenegativne.

Treći dan proveli smo primjenjujući što smo naučili do tada: izradili smo najosnovniji model smještanja učenika po projektima, uzimajući u obzir samo njihove ocjene, ali ne i primjerenost projekta njihovim uzrastima. Pretpostavili smo da imamo N učenika i M projekata na koje ih želimo rasporediti te da je učenik i ocijenio projekt j ocjenom $a_{i,j}$. Označili smo sa $x_{i,j} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$ indikatorsku varijablu koja nam govori jesmo li učenika i rasporedili na projekt j. Naša funkcija cilja (odnosno kod nas funkcija zadovoljstva) koju smo maksimizirali bila je

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{i,j} x_{i,j} \to \max .$$

Restrikcije smo postavili tako da svaki učenik može biti raspoređen na točno jedan projekt (odnosno $\sum_{j=1}^{M} x_{i,j} = 1$) i da na svakom projektu moramo imati između 4 i 6 učenika (tj. $4 \leq \sum_{i=1}^{N} x_{i,j} \leq 6$). Primijetili smo da učenici koji daju nekim projektima iste ocjene budu smješteni na projekt na kojem

je manji interes, pa zato savjetujemo da ne daju iste ocjene osim ako im je zaista potpuno svejedno na kojem će biti projektu, inače će biti na projektu kojeg ostali baš i ne žele.
Sličan model pokušali smo primijeniti za raspodjelu ekipa za Reli, ali to je bio preveliki zalogaj i na kraju smo završili teško mašući rukama i izmišljajući budući da nismo uspjeli "popraviti" funkciju cilja da bude linearna.

Zadnji dan vratili smo se nadogradnji modela raspoređivanja po projektima. Shvatili smo da učenici često ocjenjuju dobrim ocjenama i projekte koji nisu baš primjereni njihovom uzrastu i predznanju. Ovoga smo puta uzeli u obzir i primjerenost projekta određenom uzrastu i za to smo morali odraditi terenski zadatak kako bismo saznali razred za koji je svaki projekt najviše prilagođen. Početni model nismo previše mijenjali, već smo nove parametre uklopili tako da smo modificirali ocjene koje su učenici dali projektima na način da se ocjena smanjuje što je veća razlika uzrasta pojedinog učenika i primjerenosti projekta uzrastu.

Unatoč nekim sputavanjima, uspjeli smo učinkovito surađivati kako bismo došli do rješenja za automatiziranje podjele učenika po projektima. Na kraju smo uspješno izradili željeni model i usput puno naučili. Bilo nam je izrazito drago što smo na ovom projektu napravili nešto korisno što se zapravo može primijeniti na budućim kampovima.

15.2.3. Algoritmi i procesi

Vrsta: primjena **Mentor:** Mislav Brnetić

Na Zimskoj školi matematike 2023. u Ogulinu sudjelovali smo na projektu Algoritmi i procesi izabranom iz bogatstva mogućih projekata. Na već spomenutom projektu objasnili smo značenje pojma *algoritam* te smo govorili o algoritmima često korištenima u računarstvu i radi dobivanja boljeg razumijevanja njihove unutarnje logike analizirali ih u matematičkom smislu te dokazivali njihovo ispravno djelovanje.

Također, uveli smo koncept i definiciju složenosti algoritma i proučavali načine za matematičko izražavanje funkcije složenosti. Kako bismo izrazili složenost algoritma uveli smo takozvanu $\mathcal{O}$ notaciju.

Prvi analizirani algoritmi bili su oni klasični korišteni u matematici i informatici kao što su Euklidov i različiti pohlepni algoritmi. Analizom pohlepnog algoritma otkrili smo razlog specifične distribucije apoena među kovanicama, a razmatranjem Euklidovog algoritma proširili smo svoje znanje o svojstvima prirodnih brojeva korištenim za dobivanje najvećeg zajedničkog djelitelja u teoriji brojeva.

Rješavali smo zadatke u kojima je bio cilj dokazati da se postiže određeno stanje ili određeni rezultat nakon provođenja nekog algoritma ili procesa.

Koristeći se razumijevanjem složenosti, bili smo u mogućnosti analizirati vremensku složenost najčešćih algoritama za sortiranje korištenih u računarstvu. Analizirani algoritmi bili su *bubble sort*, *selection sort*, *merge sort* i *quick sort*, a nakon rasprave odredili smo njihove složenosti kao: $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n \log n)$, $\mathcal{O}(n \log n)$.

Bavili smo se i granom matematike usko vezanom uz informatiku – teorijom grafova. Definirali smo grafove kao i mnoge druge pojmove – stabla, šumu, ciklus, povezani graf, vrhove, bridove, put, stazu itd. te tražili algoritme za traženje najkraćeg puta između dva vrha na grafu i traženje najmanjeg razapinjućeg stabla.

U zaključku, na ovom vrlo zanimljivom projektu analizirali smo, proučili i dokazali ispravnost čestih algoritama te naučili njihove primjene. Sigurni smo da će nam njihovo poznavanje u budućnosti biti iznimno korisno.

15.2.4. Financijska matematika

Vrsta: primjena **Mentor:** Paula Horvat

Pitate li se u što uložiti svoju ušteđevinu? Pitate li se kako pametno napraviti investiciju?
E, pa mi smo skoro stigli to obraditi.

Na početku smo definirali važne pojmove vezane uz financije, ulaganja, ukamaćivanje, inflaciju. Neki od njih su:

Definicija 15.2.5

Novčani tok je niz (konačan ili prebrojiv) uređenih parova $\{(t_1, c_1), ..., (t_n, c_n)\}$.

Definicija 15.2.6

Akumulacijski faktor je funkcija $A : D \to \mathbb{R}$, $D = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, t_1 \leq t_2\}$ tako da $A(1, 1) = 1$.

Intuitivno, $A(t_1, t_2)$ je vrijednost iznosa "1" u t_1 u trenutku t_2. To se zove ukamaćivanje.

Nakon toga smo naveli neke vrste akumulacijskih faktora, npr. jednostavna i složena kamata.

Definicija 15.2.7: Jednostavna kamata

$$A(t_1, t_2) = 1 + i(t_2 - t_1)$$

Definicija 15.2.8: Složena kamata

$$A(t_1, t_2) = (1 + i)^{t_2 - t_1}$$

Kako bi nam sjelo računanje kamata, rješili smo nekoliko zadataka.

Primjer 15.2.5. Ovog ljeta, kada je kupovni tečaj kuna-euro bio 1 €= 7,31 kn, Ivica je kupio 2000 €, i oročio ih na 6 mjeseci uz godišnji kamatnjak 2,2. Očekuje se da će u vrijeme dospijeća oročenja Ivica moći prodati eure po tečaju 1€= 7,65 kn.

1. Koliku je zaradu Ivica ostvario? Da je Ivica ljetos oročio kune na šest mjeseci koliki bi trebao biti godišnji kamatnjak kojim bi ostvario jednaku zaradu?

2. Cim je istekao rok oročenja, Ivica je prodao eure i dobijene kune oročio na 6 mjeseci uz godišnji kamatnjak 4,5. Koliku je zaradu Ivica ostvario u jednogodišnjem ciklusu? Da je Ivica ljetos oročio kune na godinu dana koliki bi trebao biti godišnji kamatnjak kojim bi ostvario jednaku zaradu?

Nakon laganog uvoda, krenuli smo u dublje vode. Uveli smo pojmove poput intenziteta kamate te proučavali promjenjive kamatne stope.

Definicija 15.2.9

Intenzitet kamate je $r = \ln(1 + i)$.

Podmuklim uvodnim zadatkom mučili smo se dobrih 2 sata, ali smo uspjeli naučiti razliku između nominalne i efektivne kamatne stope. S obzirom da je nama trebao skoro cijeli projekt da prokužimo formule, to ostavljamo čitatelju za vježbu.

Primjer 15.2.6. Dana je fiksna godišnja kamatna stopa i, ali ju plaćamo p puta godišnje u intervalima. Kolika je ukupna plaćena godišnja kamata?

Definicija 15.2.10

Nominalna godišnja kamatna stopa plativa p puta godišnje je

$$i^{(p)} = p((1+i)^{1/p} - 1)$$

gdje je i efektivna godišnja kamatna stopa.

To je iznos kojim računamo koliko plaćamo p puta godišnje ako svaki p.-ti put želimo platiti isti iznos. Znaći, svaki p.-ti put plaćamo $\frac{i^{(p)}}{p}$.

Sada dolazimo do najbitnije formule financijske matematike koju smo iskoristili možda jedanput. U pitanju je formula za vrijednost novčanog toka. Pomoću te formule rade se procjene vrijednosti svih firmi. Npr. tako se može izračunati vrijednost Netflixa, Ubera, Applea...

Definicija 15.2.11

Vrijednost novčanog toka je

$$V_0(C) := \sum_{j=1}^{n} c_j A(t_0, t_j)^{-1}.$$

gdje je C novčani tok.

Napomena. $c_j A(t_0, t_j)^{-1}$ je vrijednost iznosa c_j iz trenutka t_0 u trenutku t_j.

Zbog velikog interesa učenika i njihove aktivnosti na projektu, nismo stigli obraditi dalje pojmove poput prinosa i uspoređivanja financijskih projekata, ali nadamo se da smo vam barem malo uspjeli približiti kako se pametno kla... ovaj, investirati.

15.2.5. Funkcijske

Vrsta: natjecateljski **Mentori:** Nika Utrobičić i Mislav Plavac

Funkcijske jednadžbe su zadaci koji se pojavljuju na olimpijadama iz matematike, i to su jednadžbe u kojima su nepoznanice cijele funkcije, a ne samo brojevi kao u običnim jednadžbama.

Na projektu smo svaki dan obrađivali različitu temu, ali sve vezano uz funkcijske jednadžbe. Prva dva dana projekta smo obrađivali Chenovu skriptu "*Introduction to Functional Equations*". Prvi dan smo radili teorijski uvod u funkcijske jednadžbe te definirali što su. Zatim smo spomenuli standardne i vrlo česte funkcijske jednadžbe - Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ nad $\mathbb{Q}$ te da su tada jedina rješenja $f(0) = 0$ i $f(x) = kx$ za neku konstantu $k \in \mathbb{R}$.
Još smo i radili sličnu, manje poznatu Jensenovu funkcijsku jednadžbu tako da smo ju sveli na Cauchyevu te dobili sve funkcije oblika $f(x) = kx - c$ zadovoljavaju za neke konstane $k, c \in \mathbb{R}$.

Drugi dan projekta smo definirali posebna svojstva funkcija te koristili ta svojstva pri rješavanju zadataka. Neka od svojstava su bila injekcija, surjekcija te i bijekcija, te također omeđenost i monotonost uz pomoć koje smo i definirali kada se Cauchyjeva funkcijska jednadžba može proširiti nad $\mathbb{R}$. Uz to smo pokazali razne metode i opise što raditi tijekom rješavanja funkcijskih jednadžbi na raznim primjerima i s olimpijada i sa zadataka specifično konstruiranih za taj trik.

Treći dan smo rješavali razne zadatke sa stranih olimpijada i ispita za IMO izbor stranih država. Zadaci su koristili razne metode poput:

- konstrukcija funkcijskih jednadžbi kao i u:

  (Pan African MO 2003) Neka je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ za koju vrijedi:

  $$f^{2003}(n) = 5n$$

  gdje je $f^{k+1}(n) = f^k(f(n))$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

- korištenja injekcije i surjekcije funkcije kao i u:

  (Japan 2004) Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi:

  $$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

- supstituiranjem određenih vrijednost u funkciju kao i u:

  (Moldova 1998) Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi:

  $$xf(x) = \lfloor x \rfloor f(\{x\}) + \{x\} f(\lfloor x \rfloor).$$

Četvrti dan smo obradili teorijski dio Chenove skripte "*Monsters*", tj. pronalaženje aditivnih nekonstantnih i nelinearnih rješenja Cauchyeve funkcijske jednadžbe nad $\mathbb{R}$. Spomenuli smo malo linearne algebre kako bi definirali što je baza nekog skupa te zatim definirali Hamelovu bazu (*Hamel basis*) te svojstva nelinearnih rješenja poput toga da je graf aditivne nelinearne funkcije f gust u $\mathbb{R}$. A za kraj smo rješili kompleksniju funkcijsku jednadžbu kakva se ne bi ni pojavila na natjecanju, ali služi kao dobar način za demonstrirati neke složenije trikove i proces te pristup u rješavanju takvih funkcijskih jednadžbi.

15.2.6. Social Choice Theory

Vrsta: primjena **Mentor:** Luka Bulić Bračulj

Na ovome projektu proučavali smo izbore iz matematičke perspektive, promatrajući izborne sustave kao funkcije kojima je argument jednak preferencama svih birača, a vrijednost jednaka pobjedničkom kandidatu. To nam je pomoglo u razmišljanju o izbornim sustavima i svojstvima koja želimo da zadovoljavaju. Također nam je omogućilo da dokažemo generalne tvrdnje koje vrijede za sve izborne sustave koji zadovoljavaju određena svojstva.

Najviše smo proučavali izbore u kojima od nekoliko kandidata treba izabrati jednog pobjednika. Neki od izbornih sustava kojima smo se bavili analizirajući njihove dobre i loše strane su first-past-the-post (FPTP) voting, instant-runoff voting (IRV), Borda count, Schulzeova metoda te approval voting. Upoznali smo se s pojmom Condorcetovog pobjednika (kandidata koji pobjeđuje sve druge u direktnom okršaju jedan na jedan) i nekim problemima vezanim za njegovu egzistenciju. Naučili smo neke kriterije koje je poželjno da izborni sustav zadovoljava kao što su later-no-harm kriterij, no-favorite-betrayal kriterij, monotonicity kriterij i participation kriterij.

Nakon tog pregleda postojećih izbornih sustava bilo nam je i više nego jasno da savršen izborni sustav ne postoji, a to smo i formalno pokazali kroz dokaz Arrowljevog teorema. Naime, Arrowljev teorem tvrdi da niti jedan izborni sustav u kojem glasači slobodno rangiraju kandidate po svojim preferencama ne može ispuniti sva tri od sljedećih kriterija:

1. Jednoglasnost – Ako svi glasači preferiraju kandidata A nad kandidatom B, kandidat B ne smije pobijediti

2. Nezavisnost irelevantnih alternativa – Ako kandidat A pobjeđuje kandidata B, kandidatura trećeg kandidata C ne smije uzrokovati pobjedu kandidata B

3. Nediktatura – Izborni sustav ne smije biti diktatura, odnosno ne smije postojati birač čije preference određuju ishod izbora neovisno o preferencama svih ostalih birača

Projekt se pokazao kao veoma izazovan, samo dokazivanje Arrowljevog teorema je bilo zahtjevan kombinatoran problem i za iskusne natjecatelje. Nakon tog dokaza riješili smo i C6 sa IMO Shortlista 2014 koji je zapravo simpatična varijacija ovog teorema.

Također, bavili smo se modeliranjem birača i kandidata kao točaka u n-dimenzionalnom prostoru, gdje birači preferiraju točke koje su im bliže po euklidskoj udaljenosti, te smo pomoću kombinatorne geometrije dokazali:

- Median Voter Theorem (Condorcetov pobjednik uvijek postoji ako su glasači neparno mnogo točaka u jednodimenzionalnom prostoru, odnosno na pravcu),

- Plott's Condition (Condorcetov pobjednik u n-dimenzionalnom prostoru za $n \geq 2$ postoji ako i samo ako postoji glasač koji je točka za koju vrijedi da za svaki pravac kroz tu točku vrijedi da sa svake strane točke na pravcu leži jednak broj točaka odnosno glasača) i

- McKelvey's Chaos Theorem (Ako Condorcetov pobjednik ne postoji, od bilo koje točke X možemo doći do bilo koje točke Y nizom točaka $A_0 = X, A_1, A_2, \ldots, A_k = Y$ tako da za svaki $0 \leq i \leq k-1$ vrijedi da točka A_{i+1} pobjeđuje točku A_i u okršaju jedan na jedan).

15.2.7. Skupine

Vrsta: fakultetski **Mentori:** Ivan Novak i Ivan Vojvodić

Na ovom projektu uveli smo neke osnovne pojmove iz teorije grupa: grupa, podgrupa, homomorfizam, koset, red grupe. Dokazali smo Lagrangeov teorem da red podgrupe dijeli red grupe. Posebno, onda i red elementa dijeli red grupe. Samo što smo red zvali order jer se jedan od mentora pravio Englez.
Onda smo to koristili u nekim više ili manje natjecateljskim zadacima. Na primjer, dokazali smo da je (n^2)!-ti Fibonaccijev broj djeljiv s n, te da $n \mid \varphi(2^n - 1)$.
Nakon toga smo se bavili djelovanjima grupa, te definirali još novih pojmova: orbitu, stabilizator, skup fiksnih točaka. Na kraju smo uspješno dokazali poznatu Burnsideovu lemu, koja nam pomaže brojati koliko nekih objekata ima ako ne računamo neku simetriju. Na primjer, odredili smo formulu za broj načina bojanja ogrlice u n boja ako dva bojanja smatramo istima ako se može rotacijom doći iz jednog u drugo.
Zatim smo rješavali još neke zadatke s tim, i dokazali ovaj kul identitet:
Broj djelitelja prirodnog broja n je jednak

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k \leq n, \gcd(k,n)=1} \gcd(k-1, n).$$

15.2.8. C7,8,9

Vrsta: natjecateljski **Mentor:** Andrej Čizmarević

Na ovom smo projektu rješavali teže zadatke iz kombinatorike s IMO Shortlista. Ideja je bila rješavati C7, C8 i C9 s IMO shortlista iz 2019., ali mentor nije uspio riješiti C9 pa smo od tog zadatka odustali te ga zamijenili s IMO3 iz 2007. godine. Svaki dan smo rješavali po jedan zadatak. Kombiniralo se zajedničko i samostalno rješavanje. Cilj projekta je bilo pokazati da se i u najtežim olimpijskim zadacima može naći motivirano rješenje te da se ne radi o zadacima za čija se rješenja pitamo: „Kako sam se ovog mogao ikada sjetiti?“

Dio V.

Završne riječi

16. Zahvale

Organizacija Zimske škole bila je, kao i svake godine, zahtjevna i nepredvidljiva, no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jedne Zimske škole.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu Ogulin i Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Ogulinu.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim donatorima: Photomath, Jane Street, Visage i Stype. Posebno želimo zahvaliti i Hrvatskom matematičkom društvu i Ministarstvu znanosti i obrazovanja. Omogućili ste da se Zimska škola održi, ali i da bude sufinancirana ili besplatna mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše udruge.

MINISTARSTVO ZNANOSTI
I OBRAZOVANJA
REPUBLIKE HRVATSKE

photomath
smart camera calculator

Jane Street

Visage Technologies

Naravno, kamp ne bi bio moguć bez svih mentora koji su omogućili još jednu Zimsku školu. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i nakon što kamp završi.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem bez obzira na okolnosti. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv potvrđuje da ono što radimo zaista čini razliku.

Veliko vam hvala svima na svemu!

16.1. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: mnm.hr

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Ferenščica I. 70, 10000 Zagreb

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.