Ljetni kamp mladih matematičara 2022.

Kaštel Štafilić, 16. – 23. 8. 2022.

Mladi nadareni matematičari

Marin Getaldić

Sadržaj

1. Predgovor **6**

2. Uvod **7**
2.1. O udruzi . . . 7
2.2. Povijest kampova . . . 8
2.3. Ovaj kamp . . . 8
2.4. Aktivnosti na kampu . . . 9
2.4.1. Popularno znanstvena predavanja . . . 9
2.5. Popis mentora . . . 10
2.6. O predavanjima . . . 10

I. Zadaci s predavanja **11**

3. Zadaci za prvu grupu **12**
3.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe . . . 12
3.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip . . . 16
3.3. G1: Leon Križanić - Angle chase . . . 20
3.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti . . . 22
3.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz? . . . 25

4. Zadaci za drugu grupu **31**
4.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti . . . 31
4.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante . . . 35
4.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti . . . 39
4.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije . . . 42
4.5. X2: Lucija Relić - Indukcija . . . 44

5. Zadaci za treću grupu **47**
5.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje . . . 47
5.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja . . . 51
5.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije . . . 53
5.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve . . . 56
5.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema . . . 59

6. Zadaci za četvrtu grupu **61**
6.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB . . . 61
6.2. C4: Mislav Brnetić - Igre . . . 66
6.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka . . . 69
6.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju 71
6.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe . . . 75

7. Zadaci za petu grupu **81**
7.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi . . . 81
7.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja . . . 83
7.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija . . . 85
7.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe . . . 88
7.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije . . . 90

8. Zadaci za šestu grupu **95**
8.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste . . . 95
8.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu . . . 99
8.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija . . . 102
8.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata . . . 113
8.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli . . . 115

9. Zadaci za sedmu grupu **116**
9.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe . . . 116
9.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix . . . 117
9.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske . . . 123
9.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično . . . 125
9.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate . . . 128
9.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih . . . 132
9.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive . . . 133

II. Hintovi s predavanja **136**

10. Hintovi za prvu grupu **137**
10.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe . . . 137
10.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip . . . 138
10.3. G1: Leon Križanić - Angle chase . . . 140
10.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti . . . 141
10.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz? . . . 142

11. Hintovi za drugu grupu **144**
11.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti . . . 144
11.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante . . . 146
11.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti . . . 148
11.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije . . . 149
11.5. X2: Lucija Relić - Indukcija . . . 150

12. Hintovi za treću grupu **151**
12.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje . . . 151
12.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja . . . 152
12.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije . . . 153
12.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve . . . 155
12.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema . . . 156

13. Hintovi za četvrtu grupu **157**
13.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB . . . 157
13.2. C4: Mislav Brnetić - Igre . . . 159
13.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka . . . 160
13.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju 161
13.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe . . . 162

14. Hintovi za petu grupu **164**
14.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi . . . 164
14.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja . . . 165
14.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija . . . 166
14.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe . . . 167
14.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije . . . 168

15. Hintovi za šestu grupu **169**
15.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste . . . 169
15.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu . . . 170
15.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija . . . 171
15.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata . . . 172
15.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli . . . 173

16. Hintovi za sedmu grupu **174**
16.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe . . . 174
16.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix . . . 175
16.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske . . . 176
16.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično . . . 177
16.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate . . . 178
16.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih . . . 179
16.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive . . . 180

III. Rješenja s predavanja **181**

17. Rješenja za prvu grupu **182**
17.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe . . . 182
17.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip . . . 184
17.3. G1: Leon Križanić - Angle chase . . . 187
17.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti . . . 189
17.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz? . . . 190

18. Rješenja za drugu grupu **193**
18.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti . . . 193
18.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante . . . 199
18.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti . . . 204
18.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije . . . 205
18.5. X2: Lucija Relić - Indukcija . . . 207

19. Rješenja za treću grupu **209**
19.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje . . . 209
19.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja . . . 213
19.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije . . . 215
19.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve . . . 221
19.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema . . . 223

20. Rješenja za četvrtu grupu **224**
20.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB . . . 224
20.2. C4: Mislav Brnetić - Igre . . . 227
20.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka . . . 231
20.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju 236
20.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe . . . 237

21. Rješenja za petu grupu **239**
21.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi . . . 239
21.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja . . . 240
21.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija . . . 242
21.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe . . . 244
21.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije . . . 249

22. Rješenja za šestu grupu **250**
22.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste . . . 250
22.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu . . . 251
22.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija . . . 254
22.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata . . . 255
22.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli . . . 257

23. Rješenja za sedmu grupu **258**
23.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe . . . 258
23.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix . . . 259
23.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske . . . 262
23.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično . . . 263
23.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate . . . 264
23.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih . . . 265
23.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive . . . 266

IV. Projekti na Ljetnom kampu **268**

24. Projekti **269**
24.1. O projektima . . . 269
24.2. Popis projekata . . . 269
24.2.1. Geometrijska razonoda . . . 269
24.2.2. InDizajn s MnM-om . . . 270
24.2.3. Teorija brojeva . . . 271
24.2.4. (Projekt)ivna geometrija . . . 271
24.2.5. "Preporučujemo ovaj projekt" . . . 271
24.2.6. Funkcijske jednadžbe . . . 272
24.2.7. Numerika i društvo . . . 273
24.2.8. Komba . . . 273
24.2.9. Kompresija slika . . . 273
24.2.10. Vjerojatnost i statistika . . . 273

V. Završne riječi **275**

25. Završno **276**
25.1. Zahvale . . . 276
25.2. Kontakt . . . 278

1. Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći gotovo sva predavanja koja su se održala na Ljetnom kampu mladih nadarenih matematičara 2022. godine, zajedno s većinom hintova i rješenja.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi. Trenutno je ovo jedan od najvećih natjecateljskih materijala na hrvatskom jeziku, pa se nadamo da će učenicima pružiti dovoljno zanimljivih tema na odabir.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bi zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na sljedeću e-mail adresu: mnm@mnm.hr

Autori,
15. rujna 2022.

2. Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tijekom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkim faksevima PMF-u i FER-u, gostovanjima Udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...

Slika 2.1.: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp je najveća i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarama koje nastoje ostvariti sve njihove matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te se udruga može pohvaliti time da je svake godine kamp sve bolji. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.
Jedan od ciljeva kampa jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampu možemo sresti i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

2.3. Ovaj kamp

Ovo je bio 13. ljetni kamp koji je po prvi put održan u Kaštel Štafiliću. Učenici i mentori bili su smješteni u Učeničkom domu srednje škole "Braća Radić" u kojem su održane večernje aktivnosti, a predavanja i projekti su se održavali u Srednjoj školi "Braća Radić" smještenoj pored doma.

Slika 2.2.: Učenički dom Srednje škole "Braća Radić" [1]

Slika 2.3.: Srednja škola "Braća Radić" u Kaštel Štafiliću [2]

[1] Izvor fotografije: Web stranica Srednje škole "Braća Radić"
[2] Izvor fotografije: Portal grada Kaštela

2.4. Aktivnosti na kampu

Glavne su aktivnosti na kampu jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata, te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici slušaju detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici se uz ručak imaju priliku odmoriti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analize određenih tema vezanih uz natjecateljsku, primjenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik kampa na početku kampa odabire jedan od ponuđenih projekata iz raznovrsnih područja matematike te radi na njemu do kraja kampa učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije iz odabrane teme.
Jedno popodne, umjesto projekata, učenici su se okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", dok su ozbiljnijim natjecateljima koji su se pripremali za MEMO pripremljene simulacije.
Nakon projekata slijedi kratak odmor, zatim večera nakon koje se odvijaju raznovrsne aktivnosti, kao što su kviz i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Nakon organiziranih i zajedničkih aktivnosti polaznici imaju slobodno vrijeme tijekom kojeg se mogu družiti igrajući razne društvene igre kao što su Blotto, mafija, bela, pantomima, alias i kockice, a neki su se čak okušali u spravljanju palačinki!

2.4.1. Popularno znanstvena predavanja

Na ovom kampu imali smo i tri popularno-znanstvena predavanja koja su pokrila razne zanimljive teme. Prvi gost bio je svima poznati dr.sc. Ivica Puljak koji nam je održao detaljni pregled njegovog dugogodišnjeg istraživanja na CERN-u te otkrića Higgsovog bozona. Daniel Paleka, bivši mentor naše udruge, održao je izborno predavanje o vrlo aktualnoj temi iz svijeta strojnog učenja i umjetne inteligencije. Za kraj, Borna Vukorepa, također bivši mentor, u svom predavanju dao je polaznicima kampa uvid u *green screen chromakeying* i važne napretke u tom području koje su postigli naši donatori u Stypeu.

2.5. Popis mentora

Mislav Brnetić
Luka Bulić Bračulj
Vedran Cifrek
Patricija Dovijanić
Mateo Dujić
Laura Horvat
Paula Horvat
Bernard Inkret
Krunoslav Ivanović
Luka Kraljević
Leon Križanić
Petar Nizić-Nikolac
Ivan Novak
Ivan Premuš
Lucija Relić
Ivan Sinčić
Boris Stanković
Andrija Tomorad
Nika Utrobičić
Katja Varjačić
Ivan Vojvodić
Matej Vojvodić

2.6. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u sedam skupina ovisno o njihovoj starosti i predznanju.
Među grupama posebno se ističu grupe kojima pripadaju sudionici međunarodnih natjecanja. Predavanja za te grupe namijenjena su članovima hrvatske MEMO ekipe kojima je kamp bila zadnja priprema za natjecanje koje se održavalo gotovo odmah nakon kampa, pa zbog toga imaju predavanja i prijepodne i poslijepodne, a osim predavanja imaju i simulacije. Svi ostali polaznici kampa imaju predavanja isključivo prijepodne.
Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Dio I.

Zadaci s predavanja

3. Zadaci za prvu grupu

3.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Do sada ste se već sigurno susreli sa linearnim jednadžbama i sustavima. U ovom predavanju upoznat ćemo se s nekim metodama i trikovima faktorizacija i rješavanja sustava jednadžbi, a od interesa će nam uglavnom biti nelinearne jednadžbe.
Kod nelinearnih jednadžbi mogu se pojaviti potencije (x^2, x^3, x^n), izrazi s korijenima, apsolutnim vrijednostima, racionalnim funkcijama (razlomcima sa x u nazivniku) i slično.

Definicija 3.1.1: Potenciranje i korjenovanje

Potenciranje je aritmetička operacija koja se svodi na množenje argumenta sa samim sobom onaj broj puta koliki je eksponent, ako je eksponent pozitivni cijeli broj.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ puta}}$$

Korjenovanje je potenciranje s racionalnim eksponentom, inverzna operacija potenciranju.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Prisjetimo se osnovnih pravila za potenciranje:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, za $a \neq 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Oprez

$$a^{mn} = (a^m)^n \neq a^{m^n} = a^{(m^n)}$$

Jedan od glavnih alata koje ćemo dalje koristiti su faktorizacije.

Definicija 3.1.2: Faktorizacija

Faktorizacija nekog izraza je zapisivanje tog izraza u obliku umnoška više faktora.

Za faktorizaciju obično koristimo sljedeće metode:

- izlučivanje zajedničkog faktora (svojstvo distributivnosti)

- grupiranje, zapisivanje izraza u drugom obliku - zbroj, razlika (svojstva komutativnosti i asocijativnosti)
- algebarski identiteti (formule)

Zapisivanje u drugom obliku možemo provesti i tako da cijelom izrazu dodamo i oduzmemo nešto, a da pritom ne promijenimo početni izraz.

Lema 3.1.3: Osnovni algebarski izrazi

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ proizvoljni realni brojevi, a $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj.

- kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- kvadrat trinoma: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- zbroj/razlika kubova: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- *potencija binoma: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- *zbroj neparnih potencija: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$
- *razlika potencija: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Dokaz. Pokazat ćemo dokaz za kvadrat binoma, a preostale pokušajte za vježbu.

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= (a \pm b) \cdot (a \pm b) \\ &= a^2 \pm ab \pm ba + b^2 \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 \\ &= a^2 \pm 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Oprez

Neki izrazi mogu se faktorizirati na više različitih načina:

$$\begin{aligned}a^6 - b^6 &= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) && \text{razlika šestih potencija} \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) && \text{razlika kubova} \\ &= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3). && \text{razlika kvadrata}\end{aligned}$$

Pri rješavanju jednadžbi ponekad nam mogu pomoći i nejednakosti. Primjerice, parna potencija bilo kojeg broja ili izraza uvijek je nenegativna.

Vrlo često u zadatcima je potrebno faktorizirati izraz oblika x^2+bx+c, gdje je x nepoznanica, a a, b, c su zadani realni brojevi. Za one koji se još nisu susreli s nalaženjem rješenja kvadratne jednadžbe, može se primijeniti sljedeći pristup. Ovakav izraz htjeli bismo faktorizirati, tj. napisati u obliku $(x+x_1)(x+x_2)$. Želimo naći realne brojeve x_1, x_2 takve da vrijedi

$$x^2 + bx + c = (x + x_1)(x + x_2).$$

Izmnožimo li desnu stranu, dobit ćemo

$$x^2 + bx + c = x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Dakle, želimo da vrijedi $b = x_1 + x_2$ i $c = x_1x_2$, tj. tražimo dva realna broja kojima je zbroj b, a umnožak c. Ako su b i c lijepo namješteni cijeli brojevi (a obično jesu), brojeve x_1, x_2 ćemo lako naći pogađanjem.

Primjer 3.1.1. Rastavimo na faktore izraz $x^2 + 5x - 24$.

Rješenje 3.1.1. Na prvi pogled nije očito kako ovo rastaviti na faktore. No, sjetimo se da želimo naći (po mogućnosti cijele) brojeve x_1, x_2 čiji je zbroj 5, a umnožak -24. Kako se nadamo da su x_1, x_2 cijeli, provjeravamo za x_1 sve djelitelje od -24. Provjerom ustvrdimo da su -3 i 8 traženi brojevi, pa vrijedi $x^2+5x-24 = (x-3)(x+8)$. Uočite da ovo još znači da su 3 i -8 rješenja jednadžbe $x^2+5x-24 = 0$. □

Za kraj, spomenimo i neke ideje koje se mogu koristiti i za rješavanje sustava jednadžbi:

- faktorizacija, posebno kad se jedna strana jednadžbe izjednači s nulom
- zbrajanje, oduzimanje i množenje jednadžbi, kako bismo pokratili neke nepoznanice ako možemo
- supstitucija ili izražavanje nepoznanica jedne preko druge

> ⚠ **Oprez: Dijeljenje s nulom**
>
> Dijeljenje (kraćenje) varijable dozvoljeno je samo u slučaju da je različita od nule.

Primjer 3.1.2. Nađite sve realne brojeve x takve da je

$$x^5 + 10x^3 + 11x = 0.$$

Rješenje 3.1.2.

$$\begin{aligned}
0 &= x^5 + 10x^3 + 11x \\
0 &= x\left(x^4 + 10x^2 + 11\right) \\
0 &= x\left((x^2)^2 + 10x^2 + 25 - 14\right) \\
0 &= x\left((x^2+5)^2 - 14\right) \\
0 &= x\left(x^2 + 5 - \sqrt{14}\right)\left(x^2 + 5 + \sqrt{14}\right)
\end{aligned}$$

Sada vidimo da rješenja možemo dobiti tako da svaki od faktora izjednačimo s nulom jer je umnožak više faktora jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od faktora jednak nuli. Zaključujemo da je jedino moguće rješenje $x = 0$ budući da izrazi u zagradama uvijek poprimaju strogo pozitivne vrijednosti. □

> ⚠ **Oprez: Ne zaboravite provjeriti rješenja!**
>
> Kad radimo neke operacije (npr. kvadriranje) može se dogoditi da dobijemo neka nova rješenja koja nisu rješenja originalne jednadžbe.

Lakši zadaci

1. Kvadrati dvaju brojeva čija je aritmetička sredina 18, razlikuju se za 288. Koji su to brojevi?
2. Dokažite da je razlika kvadrata dva neparna prirodna broja djeljiva sa 8.
3. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 9.
4. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

   Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

5. Broj 10 napiši kao zbroj dvaju brojeva čiji se kvadrati odnose kao $1:16$.

6. Odredite vrijednost izraza $x^2+y^2+z^2$ ako je poznato da je $x+y+z=13$, $xyz=72$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$.

7. Odredite sve uređene trojke (a,b,c) realnih brojeva takve da vrijedi

$$ab=c, ac=b, bc=a.$$

8. Nađite sve realne brojeve x takve da je

$$x^3+3x^2-5x=15.$$

Teži zadaci

9. Riješite sustav jednadžbi:

$$(x+y)^2-z^2=1$$
$$(y+z)^2-x^2=5$$
$$(z+x)^2-y^2=10$$

10. (*Identitet Sophie Germain*) Faktorizirajte izraz a^4+4b^4.

11. Odredite sve trojke $(x,y,z$ realnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$

12. Riješite sustav jednadžbi:

$$2x_1-5x_2+3x_3=0$$
$$2x_2-5x_3+3x_4=0$$
$$\ldots$$
$$2x_{1994}-5x_1+3x_2=0.$$

13. Nađite sve realne brojeve x,y za koje vrijedi $x^8-y^8=x^2-y^2=1$.

14. Odredite sve trojke (x,y,z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$(x^2+1)y=z^2+1$$
$$(y^2+1)z=x^2+1$$
$$(z^2+1)x=y^2+1.$$

3.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Dirichletov princip je pravilo koje u svom najjednostavnijem obliku kaže da ako $n+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dvije kuglice.

Ime je dobio po njemačkom matematičaru Johannu Dirichletu koji ju je prvi formalizirao. Često se izriče pomoću kaveza i zečeva ili pak kutija i golubova, pa se možete susresti s Dirichletovim principom i pod imenom *princip golubinjaka (pigeonhole principle)*.

Primijetimo da tvrdnja pogotovo vrijedi ako je broj kuglica veći od $n+1$. Može u više kutija biti po dvije kuglice, može u jednoj (ili nekoliko) kutija biti po tri i više kuglica, ili neka kombinacija toga, ali ono što je sigurno je da postoji *barem* jedna kutija s *barem* dvije kuglice.

Malo kompliciraniji, ali puno korisniji oblik glasi ovako:

Teorem 3.2.1: Dirichletov princip

Ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

Dokaz. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga.
Intuitivno: koliko god se mi trudili rasporediti sve kuglice tako da ne postoji bar jedna kutija s bar $k+1$ kuglicom, ne možemo to postići. □

I u ovom obliku tvrdnja vrijedi i kada je broj kuglica veći od $nk+1$, tj. kad je jednak $nk+l$ za neki l veći od 1. Primijetite da je jednostavniji oblik s početka zapravo poseban slučaj kompliciranijeg oblika za $k=1$.

Zbog preglednosti, u ostatku predavanja koristim sljedeće oznake:

- n - ukupan broj kutija
- m - ukupan broj kuglica koji je jednak $nk+l$ za neke prirodne brojeve k i l.

U našim će zadacima neki drugi pojmovi zamijeniti kutije i kuglice, ali ideja je ista - samo treba prepoznati što nam u zadatku predstavlja kutije, a što kuglice. Kuglice su uglavnom očite, a za kutije nekad moramo biti malo kreativniji, pogotovo u geometrijskim zadacima gdje često sami moramo podijeliti neki geometrijski lik na manje dijelove koji onda predstavljaju kutije.

Primjeri

Primjer 3.2.1. Dokažite da u skupini od 5 ljudi postoji dvoje ljudi koji su rođeni u istom godišnjem dobu.

Rješenje 3.2.1. Ljudi su kuglice, a godišnja doba su kutije, tj. $n=4$, $m=5$, pa po Dirichletovom principu zbog $m=n+1=n\cdot 1+1$ slijedi tvrdnja zadatka. □

Primjer 3.2.2. U učionici ima 15 računala, a u razredu ima 35 učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.

Rješenje 3.2.2. Kutije su računala, a učenici su kuglice, tj. $n = 15$, $m = 35$. Uočimo da vrijedi $15 \cdot 2 + 5 = 35$, pa možemo iskoristiti Dirichletov princip za $k = 2$ i $l = 5$. Odatle slijedi da postoji računalo s barem $k + 1$, odnosno troje učenika.
Vrijedi, naravno, i da je $15 \cdot 1 + 20 = 35$. Tada bi, u našim oznakama, vrijedilo $k = 1$ i $l = 20$, no Dirichletovim principom tada dobijemo da postoji računalo s barem dvoje učenika, što nam je premalo - mi želimo dokazati da postoji računalo s barem troje. Obično je u zadacima najbolje odmah tražiti najveći mogući k, a da l bude "ono što ostane". U ovom zadatku najveći mogući k bio je upravo $k = 2$, točno onoliko koliko nam treba da dokažemo tvrdnju za troje učenika. □

Primjer 3.2.3. Na prozoru oblika kvadrata duljine stranice 1 m nalazi se 51 komarac. Dokažite da Luka mlatilicom oblika kruga polumjera $\frac{1}{7}$ m jednim udarcem može ubiti 3 komarca.

Rješenje 3.2.3. Ideja je podijeliti prozor na više manjih jednakih komada koji bi nam glumili kutije i koji se mogu prekriti mlatilicom. Komarci su onda kuglice koje se nalaze u njima. Pitanje je kako podijeliti prozor.
Znamo $m = 51$, i bilo bi nam taman kad bismo imali $k = 2$, jer je tada $k + 1 = 3$ i po Dirichletovom principu imali bismo da je za taj neki broj kutija u bar jednoj od njih tri komarca. Probajmo!
Za $m = 51$ i $k = 2$ je $n = 25$ i $l = 1$ zbog $25 \cdot 2 + 1 = 51$. To znači da želimo podijeliti prozor na 25 jednakih komada, a to su kvadratići duljine stranice 0.2m. Po Dirichletovom principu postoji bar jedan kvadratić s bar tri komarca, pa promatrajmo baš taj kvadratić. Radijus opisane kružnice mu je manji od radijusa Lukine mlatilice, pa njome možemo u potpunosti prekriti naš kvadratić i Luka može ubiti ta 3 komarca jednim udarcem. □

⚠ Oprez: "Najgori slučaj"

U ovakvim zadacima često je najlakše razmišljati o "najgorem slučaju", ali to nije matematički pojam! Takvo objašnjenje samo po sebi nije rješenje, iako može pomoći da dođete do točnog zaključka. Samo reći da je nešto "najgori slučaj", bez dodatnog objašnjenja, ne znači ništa. Zbog toga pazite da detaljno obrazložite svoje tvrdnje čak i ako vam je rješenje očito.

Zadaci

Lakši zadaci

1. Dokažite da u skupini od 367 ljudi postoje bar dvije osobe koje dijele rođendan.
2. U Paulinoj ladici nalazi se 15 pari čarapa. Koliko čarapa Paula mora bez gledanja izvaditi iz ladice da bi bila sigurna da ima jedan par, a koliko da bi bila sigurna da ima dvije različite čarape?
3. Kad je Nena položila vozački ispit, njen nećak kupio joj je neobičan poklon. Radilo se o kutiji s 4 zelene, 4 plave i 4 crvene pikule. Rekao joj je da će pravi dar dobiti ako bez gledanja izvadi što manji broj pikula, a da pritom bude sigurna da je izvukla tri pikule iste boje. Nena je u tome uspjela i dobila Kinder jaje od ponosnog nećaka. Koji je bio njen odgovor?
4. Dokažite da je među 37 ljudi barem četvero istog horoskopskog znaka.
5. Među 77 ljudi barem je 7 rođeno u istom mjesecu. Dokažite!

Umjereni zadaci

6. U svako polje 5x5 tablice upišemo jedan od brojeva -1, 0, 1 i izračunamo zbrojeve po retcima, stupcima, i dvije glavne dijagonale. Dokažite da će uvijek dvije od tih suma biti jednake.

7. Dano je 27 točaka raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Borna, vrli umjetnik, svaku je od točaka obojao crveno ili plavo. Dokažite da postoji pravokutnik kojem su vrhovi iste boje.

8. U stara vremena na nekoj svadbi bilo je 500 ljudi. Neki od njih međusobno su se rukovali. Dokažite da su postojale dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

9. Otvorenje *Centra za zaštitu i istraživanje velikih pandi* posjetilo je n ljudi. Dokažite da među njima postoje bar dvije osobe koje imaju isti broj poznanika. Poznanstva su uzajamna.

10. Lucija je odabrala svojih 20 omiljenih prirodnih brojeva. Dokažite da se, bez obzira na njen ukus u brojevima, između njih mogu odabrati 2 broja čija je razlika djeljiva s 19.

11. Dokažite da u sumi bilo kojih 51 prirodnih brojeva manjih od 100 postoje dva broja čija je suma 100.

12. Al je na ploči napisao 21 različit prirodan broj od 1 do 100, uključivo. Dokažite da među njima postoje dva para brojeva čiji su zbrojevi isti.

13. Yusuf i njegov đedo su nakon susreta sa zaraženim zabijačem dugova u prodavnici Game završili u samoizolaciji pa sada krate vrijeme smišljajući razne kartaške zagonetke. Đedo je na jednu kartu napisao broj 1, na dvije karte broj 2, na tri karte broj 3, ..., i na 50 karata broj 50 (ukupno ima $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = 1275$ karata u špilu). Yusuf ima dobar osjećaj. Ide ućoravo naslijepo i neće karte ni gledat. Koliko karata Yusuf mora izvući iz špila da bi bio siguran da ima 10 karata na kojima piše isti broj?

14. U pravokutnom koordinatnom sustavu Ivan je odabrao 5 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da među njima postoje dvije takve da polovište dužine koja ih spaja ima cjelobrojne koordinate.

Teži zadaci

15. Nika se preko ljeta zaposlila kao čuvarica kvoka te pazi na kvoke unutar dijela šume oblika kvadrata stranice 1 km. Ona zna da se tu nalazi 110 kvoka i želi nezadovoljnom turistu koji ih ne može pronaći, a očajnički ih želi fotografirati, dokazati da postoji dio šume u obliku kruga polumjera samo $\frac{1}{8}$ km u kojem se nalaze čak 4 kvoke. Pomozite joj!

16. Sedam točaka je smješteno unutar pravilnog šesterokuta stranice duljine 1. Dokažite da su najmanje dvije točke na udaljenosti najviše 1.

17. Dokažite da među bilo kojih 7 kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 10.

18. Šesnaest mentora bilo je na MNM sastanku za okruglim stolom, sjedeći na istoj udaljenosti jedan od drugoga. Zbog epidemioloških mjera je mjesto svakog mentora bilo na stolu označeno karticom s njegovim imenom. Nakon kratke pauze za kavu mentori su se vratili u dvoranu i zbog umora nepažljivo posjedali oko stola ne obazirući se na kartice. Ubrzo se ustanovilo da ni jedan od njih ne sjedi na svojem mjestu. Može li se okretanjem stol dovesti u takav položaj da ispred bar dva mentora stoje kartice s njihovim imenima?

19. Dokažite da među bilo koja tri cijela broja možemo odabrati dva tako da je $a^3b - ab^3$ djeljivo s 10.

20. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Napomena: poznanstva su uzajamna.

21. Dokažite da za svaki prirodan broj n postoji njegov višekratnik kojem su jedine znamenke nule i jedinice.

Slika 3.1.: Tuljko

22. Gladni (i sve više okrugli) tuljan Tuljko svaki dan pojede bar 1 kilogram ribe (i broj pojedenih kilograma u danu uvijek je prirodan). Tijekom 365 dana pojeo je čak 700 kilograma ribe. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je Tuljko ukupno pojeo 29 kilograma ribe.

23. Ploča P dobivena je uklanjanjem triju polja u kutovima ploče 7×7. U svako od 46 polja ploče P upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva polja koja imaju zajedničku stranicu je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja upisani isti brojevi.

3.3. G1: Leon Križanić - Angle chase

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Angle chasing je popularna metoda rješavanja geometrijskih problema u kojem tražimo veličinu potrebnih kuteva. Za angle chasing su potrebni razni teoremi:

Teorem 3.3.1: O sukladnosti trokuta

Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su sukladni:

- ako su im sve tri odgovarajuće stranice jednake duljine
- ako su im dvije stranice jednake duljine i kut između njih jednake veličine
- ako su im jedna stranica jednake duljine i kutevi na tu stranicu jednake veličine
- ako su im dvije stranice jednake duljine i kut nasuprot većoj od njih jednake veličine

Teorem 3.3.2: 0 sličnosti trokuta

Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su slični:

- Ako su im dva odgovarajuća kuta jednaka
- ako su im sve tri odgovarajuće stranice proporcionalne: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$
- ako su im dvije stranice proporcionalne i kut između njih jednake veličine
- ako su im dvije stranice proporcionalne i kut nasuprot većoj od njih jednake veličine

Teorem 3.3.3: O obodnom i središnjem kutu

Svi obodni kutevi nad istim lukom AB su jednaki. Središnji kut nat istim lukom AB je jednak dvostrukom obodnom kutom nad istim lukom.

Teorem 3.3.4

Četverokut je tetivan ako i samo ako vrijedi da su im nasuprotni kutevi suplementarni. Također vrijedi i Ptolomejev poučak:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako vrijedi: $a + c = b + d$.

Teorem 3.3.5: Kutevi uz transvelzalu

Ako su p i q dva paralelna pravca te k je treći pravac koji siječe ta dva pravca, onda siječe te pravce pod jednakim kutevima.

Lakši zadaci

1. Dokažite teorem 1.3.
2. Dokažite teorem 1.4.

3. Vanjski kut trokuta ABC jednak je zbroju preostala dva unutarnja trokuta. Dokažite.

4. Dokažite da je središte opisane kružnice pravokutnom trokutu polovište hipotenuze tog trokuta.

5. Zadan je $\triangle ABC$ i tangenta na njemu opisanu kružnicu kroz točku B. Dokažite da je tada kut između te tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak obodnom kutu $\angle BAC$ (*kut između tangente i tetive*).

6. Dokaži da se točka T nalazi na simetrali kuta ako i samo ako je ta točka jednaka udaljena od krakova kuta.

Umjereni zadaci

7. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$,točka D leži na stranici BC. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti,dokaži da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

8. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je $MN \perp AB$.

9. Osnovica $\overline{BC}$ je najdulja stranica jednakokračnog trokuta ABC. Neka je M točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je |BA| = |BM|. Nožište okomice iz točke M na $\overline{AB}$ je točka N. Dokaži da trokut BMN i četverokut ACMN imaju jednake površine i opsege.

10. Točka P je polovište stranice $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu |PT|.

11. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je |BC| > |AC|. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe pravac BC u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$ i točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokaži da pravac RS raspolavlja stranicu $\overline{AB}$.

12. Visina i težišnica trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A dijeli kut $\angle BAC$ na tri jednaka dijela. Odredi sve kuteve trokuta.

13. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

14. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

15. Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?

Teži zadaci

16. U trokutu ABC, gdje je $\overline{AB} = \overline{AC}$ točke M, N i K su polovišta dužina BC, CA i AB redom. ω_C i ω_B su polukružnice s promjerima AC i AB redom, izvan trokuta. MK i MN sijeku ω_B i ω_C u X i Y redom. Tangente na ω_B i ω_C kroz točke X i Y redom, sijeku se u točki Z. Dokažite $AZ \perp BC$.

17. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $AB < AC$. Točka D je polovište stranice BC, a p je pravac simetričan pravcu AD u odnosu na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$. Ako je P nožište okomice iz vrha C na pravac p, dokažite jednakost $\sphericalangle APD = \sphericalangle BAC$.

18. Kružnica upisana u trokut ABC u kojem vrijedi $AB < AC$ dodiruje stranice BC, CA i AB u točkama D, E i F, redom. Simetrala $\sphericalangle BAC$ siječe pravce DE i DF u točkama M i N, redom. Neka je K nožište visine iz vrha A. Dokažite da je D centar upisane kružnice trokuta MNK.

3.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Djeljivost je jedan od najosnovnijih, ali i najvažnijih pojmova u teoriji brojeva.

Definicija 3.4.1

Za brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, kažemo da a *dijeli* b i pišemo $a \mid b$ ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ak$. Kažemo da je a *djelitelj* od b, odnosno da je b *višekratnik* od a.

Ako su a, b, d, m, n prirodni brojevi, vrijede sljedeća svojstva:

- ako $d \mid m$ i $d \mid n$, onda $d \mid (am + bn)$,
- ako $d \mid n$, onda $ad \mid an$,
- ako $ad \mid an$, onda $d \mid n$,
- ako $d \mid n$, onda $(n/d) \mid n$.

Prisjetimo se i osnovnih pravila djeljivosti:

Teorem 3.4.2: Djeljivost s $2, 3, 4, 5, 8$ i 9

- Broj je djeljiv s 2 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 2.
- Broj je djeljiv s 3 ako mu je zadnja zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- Broj je djeljiv s 4 ako su mu posljednje dvije znamenke djeljive s 4.
- Broj je djeljiv s 5 ako mu je zadnja znamenka djeljiva s 5.
- Broj je djeljiv s 8 ako su mu posljednje tri znamenke djeljive s 8.
- Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Teorem 3.4.3: Teorem od dijeljenju s ostatkom

Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$, $0 \leq r < a$

U zadacima je često korisno promatrati zajedničke djelitelje brojeva, a pogovoto najveći zajednički djelitelj.

Definicija 3.4.4: Zajednički djelitelj i najveći zajednički djelitelj

Neka su a i b cijeli brojevi. Cijeli broj d takav da $d \mid a$ i $d \mid b$ zovemo *zajednički djelitelj* od a i b. Najveći takav d zovemo *najveći zajednički djelitelj (mjera)* i označavamo ga s $\mathrm{M}(a, b)$.

Sljedeći teorem omogućuje nam efikasno računanje mjere dvaju brojeva.

Teorem 3.4.5: Euklidov algoritam

Za cijele brojeve a i b vrijedi:

$$\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{M}(a, b-a)$$

Primjer 3.4.1. Izračunaj $\mathrm{M}(252, 198)$.

Rješenje 3.4.1. $\mathrm{M}(168,48) = \mathrm{M}(120,48) = \mathrm{M}(72,48) = \mathrm{M}(24,48) = 24$ □

Primjer 3.4.2. Dokaži da je razlomak $\frac{12n+3}{9n+2}$, gdje je n prirodan broj, neskrativ.

Rješenje 3.4.2. Pokažimo da brojnik i nazivnik nemaju zadjeničkih djelitelja osim 1, odnosno da su **relativno prosti**. Koristit ćemo se Euklidovim algoritmom.

$$\mathrm{M}(12n+3, 9n+2) = \mathrm{M}(3n+1, 9n+2) = \mathrm{M}(3n+1, 6n+1) = \mathrm{M}(3n+1, 3n) = \mathrm{M}(1, 3n) = 1$$

□

U zadacima koji se tiču djeljivosti često je zanimljivo i korisno promatrati proste brojeve.

Definicija 3.4.6: Prosti brojevi

Za prirodan broj $p > 1$ kažemo da je *prosti* ako nema ni jednog djelitelja d, $1 < d < p$.

Teorem 3.4.7: Osnovni teorem aritmetike

Svaki se prirodan broj može na jedinstven način rastaviti na proste faktore, odnosno za svaki prirodni broj n postoje (različiti) prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i eksponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ takvi da vrijedi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Završimo s jednim jednostavim rezultatom kojeg je ipak vrlo dobro imati na umu.

Lema 3.4.8: Euklidova lema

Neka je p prosti broj i $p \mid ab$. Tada $p \mid a$ ili $p \mid b$.

Posebno, ako je $\mathrm{M}(a,b) = 1$, p dijeli samo jedan od brojeva a i b.

Lakši zadaci

1. Dokaži da je za prirodni broj n $\frac{8n+5}{6n+4}$ neskrativ.
2. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.
3. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva 1122.
4. Dokaži pravilo djeljivosti za 3 i 9.
5. Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{a2017b}$ bude djeljiv s 72.
6. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 16 oblika $\overline{abab}$.
7. Odredi sve moguće vrijednosti od

$$\mathrm{M}(12, 3n+2)$$

8. Kažemo da je prirodni broj N zanimljiv ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \ldots k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.

9. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn^2 = 100(n+1)$$

Teži zadaci

10. Pronađi sve parove (p, n) gdje je p prosti broj, a n prirodni broj takve da je vrijedi $p^3 + 1 = n^2$.

11. Dokaži da je za svaku četvorku prirodnih brojeva a, b, c, d broj $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ djeljiv s 12.

12. Postoji li prirodni broj n takav da $4^n - 1$ dijeli $5^n - 1$?

13. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodni broj n takav da p dijeli $n^2 + 3$ i $(n+1)^2 + 3$.

14. Nađi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da razlomci $\frac{2m-1}{n}$ i $\frac{2n-1}{m}$ budu cijeli brojevi.

15. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da $4 \mid (a+b)(a+3b)$, ali $8 \nmid (a+b)(a+3b)$. Dokaži da tada $8 \mid (a+b)(a+3b)(a+5b)$, ali $16 \nmid (a+b)(a+3b)(a+5b)$.

16. Pokaži da za prirodne brojeve a i b vrijedi $\mathrm{M}(a,b) \cdot \mathrm{V}(a,b) = ab$, gdje je $\mathrm{V}(a,b)$ najmanji zajednički višekratnik od a i b.

3.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz?

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćete se s osnovama matematičke logike i raznim načinima dokazivanja. Za razliku od predavanja koje ste do sada slušali, bit će nam bitnije kako i na koji način nešto dokazati nego ono što zapravo dokazujemo. Svrha predavanja je da usvojite kako pristupiti zadacima prikladnim načinima dokazivanja te da te dokaze provedete pravilno, tj. da znate kada ste nešto zaista dokazali.

Započet ćemo s nekoliko uvodnih zadataka. Svaki ćemo dokazati na različit način. Pokušajte uočiti razlike među dokazima i razmisliti s kojima ste se već susreli. Sve načine dokazivanja uskoro ćemo detaljnije obraditi zajedno s nekim logičkim pojmovima.

Primjer 3.5.1. Dokažite da je zbroj parnog i neparnog broja neparan broj.

Rješenje 3.5.1. Zapišemo li parni broj u obliku $2k$, a neparni u obliku $2l+1$ za neke prirodne brojeve k i l, tvrdnja slijedi direktno jer je $2k+2l+1 = 2(k+l)+1$, što je neparan broj. □

Primjer 3.5.2. Dokažite da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1.

Rješenje 3.5.2. Podijelimo zadatak slučajeve ovisno o parnosti. Ako je početni prirodni broj n paran, možemo ga zapisati u obliku $2k$ za neki prirodan broj k. Sada zbog $(2k)^2 = 4k^2$, pa je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0. Slično, ako je početni broj neparan, možemo ga zapisati u obliku $2k+1$ za neki k, pa zbog $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$, pa pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1. □

Primjer 3.5.3. Dokažite da općenito ne vrijedi $x - y = y - x$, za cijele brojeve x i y.

Rješenje 3.5.3. . Dovoljno je pronaći neke x i y za koje tvrdnja ne vrijedi, npr. 2 i 7. □

Primjer 3.5.4. Ivica je na izlet ponio izvjesnu svotu novaca. Za ulazak u muzej potrošio je $\frac{3}{7}$ ukupne svote, za sok je dao $\frac{3}{5}$ ostatka, a zatim je za kupnju suvenira potrošio $\frac{3}{8}$ ostatka novca koji mu je preostao nakon kupnje muzejske ulaznice i soka. Koliko je kuna Ivica imao na početku izleta, ako mu je ostalo 8 kuna?

Rješenje 3.5.4. Rješavanjem unatrag kao u zadacima iz nižih razreda dobijemo da je imao 56kn. □

Primjer 3.5.5. Dokažite Dirichletovo pravilo: ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

Rješenje 3.5.5. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga. □

Primjer 3.5.6. Dokažite da vrijedi tvrdnja: ako je a^2 paran, onda je i a paran.

Rješenje 3.5.6. Dokazat ćemo nešto drugačiju tvrdnju: ako je a neparan, tada je i a^2 neparan. Naime, ako je n neparan, vrijedi $a = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ za neki n, što je neparno. Ukoliko vrijedi ova tvrdnja, vrijedi i tvrdnja zadatka. Za sada razmislite zašto, a kasnije ćemo to detaljno objasniti. □

Nakon uvodnih primjera vidimo da se nekih metoda dokazivanja nije lako odmah sjetiti ili nije sasvim jasno zašto takvi dokazi vrijede. U tome će nam pomoći malo znanja iz logike. Nemojte da vas zabrine količina novih pojmova - njihova jedina svrha je da nam pomognu u razumijevanju nekih vrsta dokaza. Uostalom, s mnogima ste se već prije sreli, iako možda niste bili toga svjesni. Nakon svakih nekoliko pojmova nalazi se izbor zadataka na kojima ćemo ih izvježbati.

Tvrdnja i negacija

Definicija 3.5.1: Tvrdnja

Tvrdnja ili sud je neka smislena izjava koja je ili istinita ili neistinita.

Primjer 3.5.1. "Danas je subota", "Tri je paran broj", "Sunce sija i vjetar puše", "Svaki broj djeljiv s 10 završava nulom", "Dva je paran broj ili je prost", itd. su primjeri sudova. No, "Je li Mislav popio kavu?", "zeleno", "Eci peci pec" i "asdfgh" nisu sudovi jer ili nisu smisleni ili sami po sebi nemaju istinitosnu vrijednost.

Definicija 3.5.2: Negacija

Negacija tvrdnje je tvrdnja suprotna polaznoj - govore nam istu informaciju, ali jedna drugoj su značenjem suprotne jer istinita tvrdnja negacijom postaje neistinita, i obratno.

Pokušajte negirati tj. zanijekati tvrdnje koje ste naveli kao primjere, npr. "Danas nije subota","Tri nije paran broj", "Sunce ne sija ili vjetar ne puše", "Dva nije paran ni prost". Zašto ove negacije imaju smisla?

Oprez

Pazite što se događa s veznicima poput "i" i "ili" pri negiranju jer nije sasvim očito. Naime, negacija će "pretvoriti" ta dva veznika (ili bilo koje veznike koje nose isto značenje kao oni: npr. veznici "a" i "ali" i još neki veznici u jeziku logike imaju isto značenje kao veznik "i") u onaj suprotni, i negirati tvrdnje koje su bile povezane tim veznikom. Dakle:

- negacija tvrdnje "A i B" je "ne$A$ ili ne$B$"
- negacija tvrdnje "A ili B" je "ne$A$ i ne$B$".

Dobra provjera jeste li nešto dobro negirali je da je točno jedna tvrdnja od polazne tvrdnje i njene negacije istinita te da polazna tvrdnja i negacija zajedno obuhvaćaju sve mogućnosti.

1. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite i negirajte ih: "Pravokutni trokuti su jednakostranični i dva je prost broj", "Ne pijem, ne pušim, ne psujem", "Ili sam preumoran, ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije ni prost ni složen."

Dokaz kontraprimjerom

Definicija 3.5.1: Kontraprimjer

Kontraprimjer je izuzetak od neke generalizacije ili pravila. On opovrgava polaznu općenitu tvrdnju.

Primjer 3.5.1. Kontraprimjerom smo dokazali tvrdnju u 3. uvodnom primjeru. Npr. negacija tvrdnje "Svi brojevi su parni" nije "Svi brojevi su neparni" - dovoljno je da je samo jedan broj neparan da polazna tvrdnja ne bi vrijedila i jednom kad nađemo takav primjer polazna tvrdnja ne vrijedi. Takav primjer koji opovrgava polaznu tvrdnju je upravo "kontraprimjer", a točna negacija je "Postoji neparan broj." Slično je i kada se "svaki" i "postoji" zamijene: negacija tvrdnje "Postoji paran prost broj" je "Svi prosti brojevi su neparni".

⚠ Oprez

Pazite pri negiranju tvrdnji koje sadržavaju riječi "svaki" ili "postoji".

- negacija tvrdnje "Svi A su B" je "Postoji A koji nije B"
- negacija tvrdnje "Postoji A koji je B" je "Svi A su ne$B$".

2. Dokažite da za cijele brojeve x i y općenito ne vrijedi $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ tako da nađete kontraprimjer.

3. Dokažite da nije istina da su svi složeni brojevi djeljivi svim prostim brojevima koji su manji od njih.

4. Dokažite da nisu svi trokuti jednakokračni.

Direktan dokaz

Definicija 3.5.1: Implikacija

Implikacija je tvrdnja koja je sastavljena od uzroka i posljedice. U matematici ćemo uzrok često nazivati pretpostavkom, a posljedicu tvrdnjom. Oznaka za implikaciju je $\Rightarrow$ i zapisuje se u obliku $A \Rightarrow B$.

Primjer 3.5.1. "Ako kiša pada, onda trava raste", "Ako je geometrijski lik kvadrat, onda je taj lik i pravokutnik", "Ako je broj prirodan, onda je i cijeli", itd. su primjeri implikacija.

Dokaz iz 1. uvodnog zadatka zapravo je samo niz implikacija koje se nadovezuju jedna na drugu. Kada dokaz slijedi direktno kao posljedica nekog slijeda istinitih tvrdnji, kažemo da se radi o direktnom dokazu.

5. Dokažite da je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$.

6. Dokažite da je umnožak parnog i neparnog broja paran broj.

7. Dokažite da je peteroznamenkast broj djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4.

Dokaz podjelom na slučajeve

Drugi zadatak dokazan je na sličan način kao prvi, samo je prvo bila potrebna podjela na slučajeve. To je korisno imati na umu ako ne znate pristupiti zadatku: podijelite ga na više slučajeva, a ako niste sigurni kako napraviti podjelu, pokušajte uočiti neke pravilnosti na nekoliko primjera da lakše dobijete ideju za moguće slučajeve. Pazite da obuhvatite sve moguće slučajeve svojom podjelom!

8. Dokažite da kub prirodnog broja pri dijeljenju s 9 daje ostatak 0, 1 ili 8.

Dokaz svođenjem na kontradikciju

Kako negiramo implikaciju? Razmislite što bi imalo smisla! Točne negacije gornjih tvrdnji su "Kiša pada i trava ne raste", "Geometrijski lik je kvadrat, ali nije pravokutnik", "Broj je cijeli i nije prirodan". Dakle, negacija implikacije je tvrdnja u kojoj je istovremeno pretpostavka ostala ista, a posljedica je negirana. Važno je i da "ako... onda" zamijenimo veznikom poput "i", "a", "ali".

⚠ Oprez: Negacija implikacije

Negacija implikacije nije opet implikacija! Negacija tvrdnje "Ako A, onda B " je "A i ne$B$".

Dokaz kontradikcijom vrsta je indirektnog dokaza jer tvrdnju ne dokazujemo izravno već tako da dobijemo **kontradikciju**, tj. proturječnost, nešto besmisleno. Kada to koristimo?

Ako nismo sigurni kako dokazati da neka implikacija vrijedi, možda je lakše pokušati dokazati da njena negacija ne vrijedi. Sjetimo se: to znači da istovremeno vrijedi uzrok (pretpostavka), a ne vrijedi posljedica (tvrdnja). To napravimo tako da pretpostavimo da vrijedi negacija tvrdnje i dođemo do neke tvrdnje koja nema smisla, tj. do kontradikcije.

Peti uvodni primjer dokazali smo svođenjem na kontradikciju: pretpostavili smo da vrijedi uzrok i posljedica ne vrijedi, ali polazeći od toga dobili nešto što nema smisla, dakle naša pretpostavka nije bila istinita, što znači da je njena negacija (tj. početna tvrdnja) istinita, što smo i htjeli dokazati.

9. Tri dječaka došla su na igralište s loptama A, B, C različitih boja. Jedna lopta je siva, druga bijela, a treća plava. Koje su boje lopte ako je samo jedna od tri izjave istinita: A je plava, B nije plava, C nije siva?

10. Tri osumnjičenika dali su sljedeće iskaze:
A: Iskaz osobe B je neistinit.
B: Iskaz osobe C je neistinit.
C: Lagale su i osoba A i osoba B.
Tko govori istinu?

11. U seocu Istinolažje žive Istinići koji uvijek govore istinu i Lažići koji uvijek lažu. Susreli ste četiri stanovnika A, B, C, D i rekli su vam sljedeće:
A: Mi smo sva četvorica Lažići.
B: Ne, samo je jedan od nas Lažić.
C: Među nama su točno dva Lažića.
D: Ja sam Istinić.
Je li stanovnik D uistinu Istinić?

12. Neka su a, b i c međusobno različite znamenke različite od nule. Može li zbroj troznamenkastih brojeva nastalih od tih znamenaka (bez ponavljanja) biti jednak kvadratu nekog prirodnog broja?

13. Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

14. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Još malo o implikaciji

Definicija 3.5.1: Obrat

Obrat implikacije je implikacija nastala tako da zamijenimo uzrok i posljedicu polazne implikacije, tj. obrat od $A \Rightarrow B$ je $B \Rightarrow A$.

Primjer 3.5.1. Obrati prijašnjih tvrdnji su "Ako trava raste, onda kiša pada", "Ako je geometrijski lik pravokutnik, onda je kvadrat", itd. Uočite da čak i ako je tvrdnja istinita, njen obrat uopće ne mora biti istinit, kao što je slučaj u ovim primjerima.

15. Smislite tri istinite implikacije o matematičkim pojmovima i negirajte ih. Napišite njihov obrat i odredite je li istinit ili ne.

16. Napišite obrat Talesovog teorema: Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.

17. Dokažite da ne vrijedi obrat sljedeće tvrdnje: Umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv je nekim prirodnim brojem c kada je barem jedan od faktora umnoška djeljiv brojem c.

18. Dokažite sljedeću tvrdnju i provjerite vrijedi li obrat: Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je s 8.

19. Provjerite vrijedi li obrat ove tvrdnje: Ako je prirodan broj djeljiv s 12, onda je djeljiv s 3 i 4.

20. Pronađite grešku u dokazu (neistinite!) tvrdnje "Ako je geometrijski lik pravokutnik, onda je i kvadrat.": *Dokazujemo obrat tvrdnje koji glasi "Ako geometrijski lik nije pravokutnik, onda nije ni kvadrat". Ova tvrdnja očito vrijedi, pa vrijedi i polazna.*

21. Pronađite grešku u implikacijama $x^2 = 5x \Rightarrow x = 5$, $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$, $(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ i $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$. Vrijede li obrati tih implikacija?

Ekvivalencija

Definicija 3.5.1

Dvije tvrdnje su ekvivalentne ukoliko su uvijek ili obje istovremeno istinite ili obje istovremeno neistinite. Oznaka za ekvivalentne tvrdnje je $A \Leftrightarrow B$.

Uočimo da ekvivalenciju zapravo čine dvije implikacije, $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$, koje su ili obje istinite ili obje neistinite. Primjer implikacije kojoj su oba smjera istinita, odnosno ekvivalencije, je npr. Talesov ili Pitagorin poučak. U vašoj srednjoškolskoj matematičkoj karijeri susrest ćete se s dokazivanjem ekvivalencija i bit će jako važno da uvijek dokažete obje implikacije, tj. oba smjera.

U slučaju ekvivalencije ne koristimo riječi "ako" i "onda", već izraz **"ako i samo ako"**: "Trokut je pravokutan ako i samo ako je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze."

Kad pišemo više jednakosti jednu ispod druge, zapravo podrazumijevamo da su sve ekvivalentne, osim ako ne naglasimo drugačije - tu se često može potkrasti greška.

Na temelju ekvivalencije možemo dokazivati neke vrste zadataka "unatraške", jer oba smjera rješavanja vrijede. To smo napravili u 4. zadatku iz uvoda. Danas se nećemo previše baviti takvim zadacima, ali imajte na umu ovu metodu rješavanja i zašto je povezana s ekvivalencijom.

22. Dokažite ekvivalenciju: Prirodan broj je paran ako i samo ako mu je posljednja znamenka parna.

23. Provjerite vrijedi li sljedeća ekvivalencija: Trokut je jednakokračan ako i samo ako ima dvije stranice duljine 5 centimetara.

24. Pronađite grešku:

a)

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a+b)(a-b) &= b(a-b) \\ a+b &= b \\ 2b &= b \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+5} &= 2x+1 \\ x^2+5 &= 4x^2+4x+1 \\ 3x^2+4x-1 &= 0 \\ 3(x-\frac{2}{3})(x+2) &= 0 \\ x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

25. Pronađite grešku:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 1-\sqrt{3}$$

Dokaz obratom po kontrapoziciji

Definicija 3.5.1: Obrat po kontrapoziciji

Obrat po kontrapoziciji implikacije "Ako A, onda B" je "Ako ne$B$, onda ne$A$".

Iako obrat implikacije ne mora uvijek biti istinit kada je polazna implikacija istinita, obrat po kontrapoziciji je vrsta obrata koja je uvijek istinita ako je polazna tvrdnja istinita i obratno, tj. **ima istu istinitosnu vrijednost kao polazna implikacija**. To je korisno jer ako ne znamo dokazati tvrdnju zadatka, možda znamo dokazati njen obrat po kontrapoziciji, a tada će vrijediti i polazna tvrdnja zadatka jer znamo da je tada i ona istinita.

Ukratko, tvrdnje "Ako A, onda B" i "Ako ne$B$, onda ne$A$" su ekvivalentne.

Primjer 3.5.1. Obrati po kontrapoziciji prijašnjih tvrdnji bili bi "Ako trava ne raste, onda kiša ne pada", "Ako geometrijski lik nije pravokutnik, onda nije ni kvadrat", "Ako broj nije cijeli, nije ni prirodan". Dakle, napravimo "običan" obrat i zatim obje tvrdnje u implikaciji negiramo.

Na ovaj način riješili smo 6. uvodni primjer. Dokaz obratom po kontrapoziciji je indirektan jer nismo dokazali polaznu tvrdnju već njen obrat po kontrapoziciji, odakle je tek slijedila polazna tvrdnja (jer znamo da ako vrijedi obrat po kontrapoziciji neke tvrdnje, onda vrijedi i polazna tvrdnja).

26. Smislite tri implikacije o matematičkim pojmovima i napišite kako glasi njihov obrat po kontrapoziciji. Uvjerite se da su istinitosne vrijednosti implikacije i njenog obrata po kontrapoziciji jednake.

27. Zadana je tvrdnja: "Ako je n prirodan broj, onda je i cijeli broj". Napišite ovoj tvrdnji negaciju, obrat, obrat po kontrapoziciji, te za svaku tvrdnju dokažite je li istinita ili ne.

28. Dokažite koristeći obrat po kontrapoziciji: ako je kvadrat nekog broja višekratnik broja 5, onda je i on sam višekratnik broja 5.

29. Dokažite obratom po kontrapoziciji da ako je $x^2 - 6x + 5$ paran broj, onda je x neparan broj.

30. Dokažite direktno, metodom dokazivanja unatrag, pomoću kontradikcije i pomoću obrata po kontrapoziciji da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

4. Zadaci za drugu grupu

4.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Zadaci u kojima je potrebno dokazati da vrijedi neka nejednakost se vrlo često pojavljuju na raznim razinama natjecanja pa je zato poznavanje nejednakosti, makar i samo osnovnih principa rješavanja, vrlo bitno, s obzirom da težina zadataka može jako varirati.
Ovo predavanje je uvod u osnovne principe dokazivanja nejednakosti te u nejednakost među sredinama (kvadratne, aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine) kao osnovne nejednakosti, što je u principu dovoljno za rješavanje nejednakosti do državne razine.
Zainteresiranima kao prirodni nastavak ovog predavanja preporučam predavanje o *CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski)* nejednakosti.

Za početak, primijetimo da vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Primjer 4.1.1. Dokažite da za sve realne brojeve vrijedi:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Rješenje 4.1.1. Prebacivanjem izraza s desne strane dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

što je poznato da vrijedi. □

U dokazivanju nejednakosti tipičan pristup je krenuti s jednom stranom nejednakosti te pomoću niza nejednakosti doći do tražene druge strane ili zapisati nejednakost u drugom ekvivalentnom obliku koji možemo lako dokazati.

⚠ Oprez

Ukoliko tražite niz ekvivalentnih nejednakosti, pripazite da nejednakosti zaista i jesu ekvivalentne. Naime, djelovanje nekih operacija nad nejednakostima nije jednako kao kod jednakosti (npr. množenje negativnim brojem).
Jednako tako, ako krećete s jedne strane željene nejednakosti, pripazite da možete dokazati preslabu nejednakost - npr. da je neki izraz veći od 3, iako treba dokazati da je veći i od 5.

KAGH nejednakosti (nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom) su jedne od temeljnih nejednakosti. Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu (za n pozitivnih realnih brojeva označenih $x_1, x_2, ..., x_n$):

Definicija 4.1.1

- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 4.1.2

Za pozitivne realne brojeve $x_1, ..., x_n$ vrijedi nejednakost među sredinama:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Dodatno, jednakost vrijedi samo za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz. Prvo dokazujemo AG nejednakost.
Dokažimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ \iff &(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0 \\ \iff &(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

što vrijedi.
Ovdje lako slijedi kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.
Dokaz za $n > 2$ ostavljam za vježbu čitatelju (hint: pokušajte primijeniti ovaj dokaz na $n = 4$) □

KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Dokaz za KA i GH nejednakost slijedi kao zadatak 7.

Primjer 4.1.2. Korištenjem AG nejednakosti dokažite nejednakost iz Primjera 1.1.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Rješenje 4.1.2. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = |ab| \geq ab$$

□

Lakši zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z za koje je $x+y+z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 8$$

   Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

   Kada vrijedi jednakost?

5. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \geq 2^n$$

   Kada vrijedi jednakost?

6. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y vrijedi nejednakost:

$$(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) \geq 9xy$$

Umjereni zadaci

7. Dokažite KA i GH nejednakost.

8. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

9. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Za pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$$

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq a+b+c$$

12. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b i prirodan broj n vrijedi nejednakost:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

13. Ako je $b > a > 0$, odredite minimalnu vrijednost izraza:

$$b+\frac{1}{a(b-a)}$$

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2a^2+2b+2c^2}+\frac{1+9c^2}{1+2a^2+2b^2+2c} < 4$$

Teži zadaci

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2c-1} \leq 3$$

16. Dani su realni brojevi $x_0, x_1, ..., x_n$ takvi da vrijedi $x_0 > x_1 > ... > x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$x_0-x_n+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq 2n$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3} \leq 4$$

18. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$$

19. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složimo kutiju bez poklopca.

Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.

4.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante

Link na hintove. Link na rješenja.

Invarijanta

U ovom ćemo predavanju naučiti primjenjivati invarijante i monovarijante u raznim kombinatornim zadatcima. Zato prvo uopće moramo definirati što je invarijanta:

Definicija 4.2.1: Invarijanta

Invarijanta (*in* ne + *variare* mijenjati) **neke transformacije** (odnosno poteza) sve je ono što je na određeni način povezano s razmatranim matematičkim objektima (npr. udaljenost točaka, parnost brojeva, brojnost objekata s nekim svojstvom itd.), a **ne mijenja se pri toj transformaciji**, odnosno preslikavanju.

Primjer 4.2.1. Zmaj ima 100 glava. Borna želi zmaju odsjeći sve glave svojim moćnim mačem. Borna nije još iskusan vitez pa zna samo sljedeće poteze:

- Ako odsječe 1 glavu, izrast će ih 19.
- Ako odsječe 15 glava, izrast će ih 0.
- Ako odsječe 22 glave izrast će 4.
- Ako odsječe 2 glave izrast će ih 11.

Može li Borna zmaju odsjeći sve glave i ubiti ga? Ako da, kako? Ako ne, zašto?

Rješenje 4.2.1. Primijetimo da se djeljivost broja glava zmaja s brojem 3 ne mijenja nakon poteza. Zato ćemo odabrati invarijantu "ostatak broja glava pri dijeljenju s brojem 3".
Pokažimo najprije da navedena veličina zaista i je invarijanta. Ako primijenimo prvi potez, zmaj će imati 18 glava više, što ne mijenja ostatak pri dijeljenju s 3 jer je 18 djeljivo s 3. Ako primijenimo drugi potez, zmaj će imati 15 glava manje što ponovno ne mijenja ostatak pri dijeljenju s 3. Ako primijenimo treći potez, zmaj će imati 18 glava manje, a ako primijenimo četvrti potez će imati 9 glava više, što opet ne mijenja ostatak pri dijeljenju s 3.
Sada dovršavamo rješenje nakon što smo pronašli invarijantu i pokazali ju: kako na početku broj glava zmaja nije djeljiv s 3, onda nikada neće moći biti djeljiv s 3. Da broj glava može pasti na 0, tada bi bio djeljiv s 3. Dakle, broj glava zmaja koristeći ove poteze nikada ne može pasti na nula, pa zato Borna ne može ubiti zmaja.

□

⚠ Oprez: Je li ovo zaista invarijanta?

Pazite da invarijanta koju promatrate zaista je invarijanta na sve poteze. Ne smijete za neke poteze definirati jednu varijantu, a za druge drugu - jer tada ni jedna "invarijanta" nije zaista invarijanta.

Primjer 4.2.2. Dodajmo na primjer sa zmajem odozgo potez koji će odrezati samo jednu glavu, a narasti će ih još 101. Može li sada Borna ubiti zmaja?

⚠ Oprez: Je li ovo moguće?

Proveli ste neko vrijeme na zadatku s invarijantom, no sve invarijante koje ste probali prolaze - ne možete nikako pokazati da nije moguće. Jeste li probali pokazati primjerom da je moguće?
U većini zadataka u kojima je odgovor da je nešto moguće, od vas se očekuje da date primjer u kojem će se postići to što je moguće, ili barem neki algoritam koji onda morate pokazati da će zaista dati

to neko rješenje.

Rješenje 4.2.2. Sada je moguće ubiti zmaja. Na primjer, Borna može dva puta primijeniti novi potez i tada će zmaj imati točno 300 glava. Nakon što još dvadeset puta primijeni drugi potez, ubit će zmaja. □

Ostavljeno čitateljima na razmatranje: navedeno rješenje koristi 22 poteza. Koliko najmanje poteza (i koje) koristi rješenje koje koristi najmanje poteza?

Monovarijanta

Sada kada smo se upoznali s invarijantom, možemo definirati i monovarijantu:

Definicija 4.2.1: Monovarijanta

Monovarijanta (*mono* jedno/jednolično + *variare* mijenjati) neke transformacije (odnosno poteza) sve je ono što je na određeni način povezano s razmatranim matematičkim objektima, no za razliku od invarijante se **može mijenja pri toj transformaciji**, no kada se mijenja **uvijek se ili samo povećava ili samo smanjuje**.

Primjer 4.2.1. Na kampu je svaki mentor neprijatelj s najviše druga tri mentora, a sva neprijateljstva su obostrana. Pokaži da je moguće mentore raspodijeliti na dvije polovice kampa tako da je svaki mentor neprijatelj s najviše jednim drugim mentorom na dodijeljenoj polovici.

Rješenje 4.2.1. Za početak, podijelimo mentore nasumično na polovice. Promatrajmo monovarijantu "ukupan broj neprijatelja na istoj polovici". Primijetimo da se nužno radi o nenegativnom cijelom broju, tj. broj neprijatelja na istoj polovici nikad ne može biti negativan.
Ukoliko postoji neki mentor koji ima barem dva neprijatelja na istoj polovici, tada ga možemo prebaciti na drugu polovicu jer će se tada ukupni broj neprijateljstava sigurno smanjiti. Zašto? Jer smo sigurno smanjili broj neprijateljstava za barem 4 jer više ne postoje obostrana neprijateljstva s ta dva neprijatelja, a povećali smo za najviše dva jer mentor kojeg smo premjestili može imati najviše jednog neprijatelja u drugoj polovici.

⚠ Oprez: Zašto koristimo monovarijante

Primijetimo da gore navedeni argument sam po sebi (bez uporaba monovarijanta) nije dovoljan jer neprijatelj mentora kojeg smo premjestili možda već ima neprijatelja na toj polovici. Dakle, sada ćemo morati premjestiti i njega, ali opet se slično može dogoditi i kad njega premjestimo.
Dakle, problem kada ne koristimo monovarijante je da ne možemo lagano pokazati da proces završava. Naravno da bi mogli komplicirati i nekako drukčije dovršiti zadatak nakon ovog argumenta, no završetak koristeći monovarijante je najelegantniji i najkraći!

Dakle, kako se broj neprijatelja stalno smanjuje kada možemo napraviti potez, a ne može postati negativan, to znači da u nekom trenutku više nećemo moći napraviti potez, tj. izabrati mentora koji ima barem dva neprijatelja na istoj polovici. U tom trenutku smo pronašli konstrukciju koju tvrdimo da postoji, jer svatko ima najviše jednog neprijatelja na istoj polovici. □

Zadaci

Ovo ćemo zajedničkim snagama...

1. Na stolu je 100 čaša od kojih je samo jedna trenutno napunjena sokom. Mali Marko će nekoliko puta odabrati po dvije susjedne čaše. Ukoliko su obje čaše prazne, napunit će ih sokom, a ukoliko su obje čaše pune, popit će sok iz njih. Ako je jedna čaša puna, a druga nije, onda će Marko preliti sok iz pune čaše u praznu. Može li Marko postići da nekad sve čaše budu prazne?

2. Matej je Ivi poklonio kutiju u kojoj su neke kutije. Za svaku kutiju vrijedi da se u njoj nalazi ili još točno dvije kutije (s moguće nekim brojem kutija u njima) ili nijedna. Je li moguće da je Matej Ivi poklonio točno 1000 kutija?

3. Je li moguće šahovsku ploču kojoj su uklonjena dva nasuprotna vrha popločati s dominama?

4. Postoji li niz od 1000 prirodnih brojeva koji sadrži točno 37 prostih brojeva?

Što je uopće *optimalna* strategija?

5. Lucija i Anja kupile su čokoladu dimenzija $n \times m$. U potezu mogu uzeti bilo koji pravokutnik čokolade i prelomiti ga na dva pravokutnika prirodnih dimenzija. Gubitnica je ona koja ne može napraviti potez. Ako Lucija ide prva, tko će pobijediti (u ovisnosti o n i m)?

6. Lana i Mare imaju n hrpa žetona takvih da je na prvoj hrpi jedan žeton, na drugoj dva žetona, na trećoj tri žetona... i na n-toj n žetona. U potezu mogu izabrati jednu hrpu sa barem dva žetona i razdvojiti je na dvije manje hrpe. Gubitnica je ona koja ne može napraviti potez. Ako Lana ide prva, tko će pobijediti?

7. Brojevi od 1 do 6 napisani su jedan za drugim. Martin i Tomislav naizmjenično stavljaju između brojeva znak plus ili minus. Prvi ide Tomislav. Nakon što je svih 5 mjesta između brojeva popunjeno znakom, izračunaju rezultat. Ako je rezultat paran, pobjeđuje Tomislav, a ako je neparan pobjeđuje Martin. Tko pobjeđuje ako oba igrača igraju optimalno?

8. Na ploči je zapisano po 100 brojka 1 i 2. Ita i Maja mogu odabrati par brojeva s ploče, i ako su isti obrišu ih i napišu 2, a ako su različiti ih obrišu i napišu 1. Ita pobjeđuje ako na ploči ostane 1, a Maja ako ostane 2. Brojeve biraju naizmjenično. Ako Ita ide prva, tko će pobijediti?

9. Matej je na ploču zapisao sve prirodne brojeve od 1 do n. Zatim Mihael bira po dva broja s ploče i obriše ih, a na ploču zapiše apsolutnu vrijednost njihove razlike. Potez ponavlja dok ima barem dva broja na ploči. U ovisnosti o n, hoće li zadnji broj na ploči biti paran ili neparan?

10. Na ploči je 2021 nula, 2022 jedinice i 2023 dvojki. Dozvoljeno je u svakom potezu izbrisati dva različita broja i napisati onaj treći.

a) Ako je na ploči ostao samo jedan broj, koji je?

b) Je li moguće da su u nekom trenutku na ploči bile samo nule?

11. Nera može pretvoriti mačku u psa i obratno. Postavila je 11 mačaka i jednog psa u krug. Kako još nije iskusna, čaroliju može primijeniti samo na tri uzastopne životinje. Može li uzastopnim ponavljanjem te čarolije, postići da oko stola opet bude 11 mačaka i jedan pas, ali tako da pas sjedi na mjestu neposredno pored onog na kojem je sjedio na početku?

12. Na stol je postavljeno 2022 karte pri čemu su sve okrenute na zlatnu stranu, a plava strana je na stolu. Matej i Emanuel igraju sljedeću igru: igrač koji je na potezu bira neku kartu koja trenutno pokazuje zlatnu stranu i okreće nju i 49 karata njoj s lijeva na drugu stranu (one koje su pokazivale zlatnu stranu sad pokazuju plavu, a one koje su pokazivale plavu stranu sad pokazuju zlatnu). Pobjednik je onaj koji odigra zadnji potez. Ako Matej ide prvi, tko će pobijediti?

Invarijante na pločama

13. Je li moguće ploču 10×10 popločati s 25 pločica dimenzija 1×4?

14. Može li se ploča dimenzija 10×10 popločati T tetranominama?

15. Patricija je popločala pod oblika $2n \times 2m$ pločicama oblika 2×2 i 1×4. No, usred noći joj je netko ukrao jednu pločicu, a ostala joj je samo još jedna pločica druge vrste. Može li Patricija ponovo popločati pod ako može pomicati sve neukradene pločice?

16. Nika želi popločati pod svog vrta oblika $2n+1 \times 2n+1$, s time da se zemlja nalazi u poljima koja su presjek redova i stupaca parnih rednih oznaka, a na ostalim mjestima se nalazi pod. Za koje vrijednosti n Nika može popločati svoj vrt dominama?

17. Može li skakač obići ploču veličine 4×40 počevši iz proizvoljnog polja tako da svako polje posjeti točno jednom i vratiti se na početno polje?

Neke *trivijalne* transformacije

18. Na ploči je zapisan broj 2021^{2022}. Potez se sastoji od toga da uzmemo najljeviju znamenku, maknemo ju iz broja i pribrojimo ju ostatku (npr. za broj $2021 \Rightarrow (0)21 + 2 = 23$). Pokaži da u trenutku kada ostane broj s točno 10 znamenki, da su neke dvije jednake.

19. Na školskoj ploči je napisano 5 brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo bilo koja tri broja, nazovimo ih x, y i z i mijenjamo ih u $2x-y$, $2y-z$ i $2z-x$. Ako su na početku bili napisani brojevi 7, 10, 12, 15, 17, možemo li, uzastopnim ponavljanjem tog postupka, doći do (neuređene) petorke brojeva:

a) 9, 11, 13, 14, 16? b) 6, 7, 11, 17, 20? c) 6, 8, 10, 18, 19?

20. Na ploči je zapisano n brojeva: $x_1, x_2, \ldots x_n$. U potezu može zamijeniti brojeve a i b s brojem $ab+a+b$. Koja je vrijednost broja koji će posljednji ostati na ploči?

21. Stella je postavila tri žetona na polja $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,0)$ u koordinatni sustav. U potezu izabire dva žetona koja se trenutno nalaze na koordinatama A i B. Tada žeton sa točke A prebacuje na točku A' tako da je B polovište dužine $\overline{AA'}$. Može li nekim žetonom doći do $(1,1)$?

22. Na otoku sreće se nalazi 100 zelenih, 200 crvenih i 300 plavih kameleona. Kada se dva kameleona različitih boja sretnu, oba odmah promijene boju u treću boju. Mogu li svi kameleoni u nekom trenutku postati iste boje? Ako ne, koliko najmanje kameleona treba dodati kako bi mogli svi nakon nekog vremena biti istih boja?

23. Iz točke (x,y) možemo preći u točku $(0.6x+0.8y, 0.8x-0.6y)$ ili u točku (y,x). Možemo li iz točke $(3,7)$ doći u točku $(4,5)$?

24. U vrtu oblika 10×10 polja neka su polja obrasla korovom. Ukoliko čisto polje dijeli stranicu s barem dva polja obrasla korovom, preko noći će i ono biti obraslo korovom. Koliko najmanje polja mora na početku biti obraslo korovom da nakon nekog vremena sva polja budu obrasla korovom? Što ako je vrt oblika 5×10?

25. Zadani su $(x,y) = (19,94)$. Potez je uređeni par (x,y) zamijeniti bilo kojim od parova: $(x-y,y), (x+y,y), (y,x)$. Je li moguće doći do $(19,95)$? Je li moguće doći do $(19,96)$?

Ukoliko imate bilo kakva pitanja vezana uz zadatke, slobodno mi se obratite na matej.vojvodic00@gmail.com.

4.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 4.3.1: Tetivni četverokut

Četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut.

Znamo otprije da svakom trokutu možemo opisati kružnicu, no isto ne vrijedi i za četverokute. Tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Vrlo često pokaže se korisnim u zadacima prepoznati tetivne četverokute i koristiti njihova svojstva s kojima ćemo se danas upoznati. Prisjetimo se najprije nekih važnih teorema vezanih za kružnicu:

Teorem 4.3.2: O obodnom i središnjem kutu

Središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta.

Teorem 4.3.3: Obodni kutovi

Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni.

Teorem 4.3.4: Talesov teorem

Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.

Vrijedi i **obrat Talesovog teorema**: ako je AB proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$.

Teorem 4.3.5: O kutu između tetive i tangente

Kut izmedu tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Također, vrijede ove (vrlo) korisne tvrdnje:

Teorem 4.3.6: Neke korisne tvrdnje o trokutu i kružnici

1. Simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku se na opisanoj kružnici tog trokuta.
2. Polovišta stranica trokuta i nožišta visina trokuta leže na istoj kružnici. (Na toj kružnici još leže i polovišta dužina AH, BH i CH, gdje je H ortocentar trokuta ABC. Ta kružnica zove se Feuerbachova kružnica ili kružnica 9 točaka.).
3. Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
4. Centralnosimetrične slike ortocentra s obzirom na polovišta stranica trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Dokazi ovih tvrdnji jako su lijepo objašnjeni u obliku videa u sklopu MNM on-line predavanja *Tetivni četverokuti*, zadaci 4, 5, 6 i 7. Znam da nitko ne voli zadaće, ali zaista vam toplo savjetujem da ih proučite za domaću zadaću jer vam neće oduzeti puno vremena, a znaju se koristiti u zadacima, pogotovo u kombinaciji s tetivnim četverokutima. Nećemo se baviti ovim tvrdnjama na današnjem predavanju, ali dobro je susresti se s njima što ranije bar na informativnoj razini i da vam potaknu znatiželju :)

Sada smo spremni krenuti s tetivnim četverokutima!

Teorem 4.3.7: Karakterizacije tetivnog četverokuta

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne (dakle, ako vrijedi bilo koja od njih, tada vrijede i sve ostale):

- četverokut $ABCD$ je tetivan
- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\angle ABC + \angle ADC = 180°$
- $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
- $\angle ABD = \angle ACD$
- $\angle ADB = \angle ACB$
- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle CAD = \angle CBD$
- $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Posljednja tvrdnja poznata je kao **Ptolomejev poučak**.

Sada ćemo zajedničkim snagama riješiti par uvodnih zadataka, a onda se bacamo na posao :)

1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

2. Neka je S središte kružnice k, a $\overline{AB}$ jedan njen promjer. Neka su P i Q točke na istom luku AB. Označimo s M sjecište pravaca AP i BQ, te s N sjecište pravaca AQ i BP. Dokažite $MN \perp AB$.

   Hint: Talesov teorem o obodnom kutu.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da je trokut ABD jednakostraničan. Dokažite da je $|AC| = |BC| + |CD|$.

   Hint: Ptolomejev poučak.

Zadaci

Lakši zadaci

1. Dokažite teorem o kutu između tetive i tangente: neka je dan trokut ABC u ravnini i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B. Treba dokazati da je tada kut između tangente i tetive BC jednak obodnom kutu $\angle BAC$.

2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

3. Neka se simetrale kutova četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama E, F, G i H. Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.

4. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

5. Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AC}$. Dokažite da je četverokut $BCFE$ tetivan.

6. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

Teži zadaci

7. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

8. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E. Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici, tj. te točke su *konciklične*.

9. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

10. U trokutu ABC vrijedi $\angle CAB = 50°$ i $\angle ABC = 60°$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30°$. Izračunajte mjeru kuta $\angle CDE$.

11. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

12. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka M nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je F polovište dužine $\overline{BC}$, te neka je točka H na $\overline{AF}$ tako da su MH i AF međusobno okomiti. Dokažite da tada vrijedi $\angle BHF = \angle ABC$.

13. Točka M dana je kao sjecište dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$, pri čemu je kut $\angle AMB$ šiljast. Neka je točka K izvan četverokuta $ABCD$ takva da je trokut BCK jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$ i da vrijedi $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Dokažite da su pravci KM i AD međusobno okomiti

14. U trokutu ABC, udaljenost vrha A od ortocentra H jednaka je udaljenosti vrha A od središta trokutu opisane kružnice O. Odredite veličinu kuta u vrhu A.

4.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Promotrimo sljedeće skupove $\{1, 5, 9, 13, \ldots\}, \{2, 6, 10, 14, \ldots\}, \ldots, \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$. Vidimo da se svaki od prirodnih brojeva nalazi u točno jednom od tih skupova. Ono što te skupove čini posebnima jest to što svaka dva člana u nekom od skupova daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 4, odnosno, ako odaberemo neke brojeve a i b iz jednog od skupova, imamo $4 \mid a - b$.
Zanima nas što se događa s ostatcima promatranih brojeva prilikom vršenja operacija nad njima, odnosno mijenjaju li se ostatci usklađeno s brojevima prilikom tih operacija? Odgovor je da, i zbog toga ima smisla govoriti o **modularnoj aritmetici**, aritmetici ostataka.

Definicija 4.4.1: Kongruencije

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a **kongruentan** broju b **modulo** n ako vrijedi $n \mid a - b$. Pišemo: $a \equiv b \ (mod\ n)$.

Propozicija 4.4.2: Svojstva kongruencija

$a \equiv a + kn \pmod{n},\ a, k, n \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{n},\ a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies ac \equiv bd \pmod{n},\ a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{n} \implies a^k \equiv b^k \pmod{n},\ a, k, n \in \mathbb{Z}$

$ac \equiv bc \pmod{n}$ i $\gcd(c, n) = 1 \implies a \equiv b \pmod{n},\ a, b, c, n \in \mathbb{Z}$.

Primjer 4.4.1. Dokažite da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 3 može isključivo dati ostatke 0 ili 1.

Rješenje 4.4.1. Prvo možemo primijetiti da broj pri dijeljenju s 3 može dati ostatke 0, 1 ili 2.
Sada zadatak možemo podijeliti u 3 slučaja, ovisno o tome koji ostatak prirodan broj n daje pri dijeljenju s 3.

1. slučaj $n \equiv 0 \pmod{3}$
Zaključujemo $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

2. slučaj $n \equiv 1 \pmod{3}$
Zaključujemo $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

3. slučaj $n \equiv 2 \pmod{3}$
Zaključujemo $n^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Stoga tvrdnja zadatka vrijedi u sva tri slučaja. □

Lakši zadaci

1. Dokažite da kvadrat cijelog broja daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 4.
2. Koja je posljednja znamenka broja 3^{33}?
3. a) Pokaži da 4 ne dijeli $n^2 + 2n - 1$ za sve prirodne brojeve n.
   b) Pokaži da 7 dijeli $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ za sve prirodne brojeve n
4. Odredite posljednju znamenku broja $7^{7^{100}}$.
5. Za koje cijele brojeve x vrijedi $2x + 3 \equiv 4 \pmod{7}$?

Umjereni zadaci

6. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da $6 \mid a+b+c$. Dokažite da $6 \mid a^3+b^3+c^3$.

7. Dokažite: $13|2^{12n+9} - 5^{4n+1}$.

8. Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva a, b, c prost broj, dokažite da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3.

9. Pronađite sve proste brojeve p i q takve da $p^2 - 2q^2 = 1$.

10. Je li moguće posložiti brojeve $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$ jedan za drugim tako da broj dobiven spajanjem znamenaka bude kvadrat nekog prirodnog broja?. (Na primjer, broj dobiven spajanjem $\overline{3^3 1^1 2^2}$ je 2714.)

11. Dokažite da je umnožak zadnje znamenke broja 2^n i sume njegovih znamenaka bez zadnje djeljiv s 3.

12. Nađite sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^n - 3$ djeljiv s 10.

13. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $3^m + 3^n + 1$ kvadrat prirodnog broja.

Teži zadaci

14. Postoji li prirodan broj n takav da je $8^n + 47$ prost broj?

15. Odredi sve pozitivne cijele brojeve a, b, c i prost broj p takve da vrijedi

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2$$

4.5. X2: Lucija Relić - Indukcija

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Princip matematičke indukcije moćan je i elegantan alat za dokazivanje tvrdnji T_n koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj k pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $k+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi). Ako tvrdnju pokazujemo za sve prirodne brojeve, tada moramo provjeriti tvrdnju za $n = 1$, a onda pokazati da ako vrijedi za neki k, mora vrijediti i za $k+1$. Budući da smo na početku pokazali da tvrdnja vrijedi za 1, zbog indukcije vrijedi i za $1+1 = 2$ pa za $2+1 = 3$, $3+1 = 4$, itd. dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.
Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama, zamislimo da smo ih složili u red i cilj nam je sve ih srušiti jednim potezom. Za početak provjerimo možemo li direktno srušiti prvu pločicu (baza indukcije). Zatim pretpostavimo da se neka domina uspjela srušiti (pretpostavka) i provjerimo izaziva li to rušenje i sljedeće domine u redu (korak indukcije). Ako rušenje proizvoljne domine znači rušenje i sljedeće, po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da će se tada srušiti sve domine. Naime, uspješno smo srušili prvu dominu, a budući da rušenje neke domine izaziva rušenje i sljedeće znamo da će se srušiti i druga. Međutim, tada znamo da će se srušiti i treća i tako dalje.

> **⚠ Oprez: Provjera baze**
>
> Ne smijemo zaboraviti provjeriti vrijedi li baza indukcije. Beskorisno nam je da svaka domina koja se ruši uzrokuje rušenje sljedeće ako nismo uspjeli srušiti prvu.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije.
Ponekad nam je potrebno više informacija (pretpostavki) da bismo pokazali korak indukcije. Tada u drugom koraku indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za sve $n \leq k$ za neki proizvoljan k prirodan broj umjesto samo za k (takav slučaj indukcije nazivamo **jaka indukcija** iako se ne razlikuje posebno od "obične" indukcije).

Primjer 4.5.1. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi $n+1 > n$.

Rješenje 4.5.1. Tvrdnju ćemo pokazati koristeći matematičku indukciju.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Očito je $n+1 = 1+1 = 2 > 1$ pa smo pokazali bazu indukcije.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $k+1 > k$.

korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $(k+1)+1 > k+1$, odnosno da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Iz pretpostavke direktno imamo:

$$\begin{aligned} n+1 &> n && /+1 \\ n+2 &> n+1 \\ (n+1)+1 &> n+1 \end{aligned}$$

Time smo pokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. □

Primjer 4.5.2. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Rješenje 4.5.2. Tvrdnju ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n=1$. Očito je $1=\frac{1\cdot 2}{2}$ pa smo pokazali bazu indukcije.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k\in\mathbb{N}$ vrijedi $1+2+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$.

korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $1+2+\ldots+k+k+1=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ odnosno da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Iz pretpostavke direktno imamo:

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+k &= \frac{k\cdot(k+1)}{2} \qquad \Big/ +(k+1)\\
1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1\\
1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2}\\
1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Time smo dokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. □

> **⚠ Oprez**
>
> Pripazite da korak indukcije zaista vrijedi za svaki $k\in\mathbb{N}$.

Zagrijavanje

1. Dokažite da je n-ti neparan broj jednak $2n-1$ za svaki prirodan broj n.
2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n broj $n(n+1)$ paran.
3. Dokažite da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Dokažite da je $n!>2^n$ za $n\geq 4$.
5. Koliko je
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}?$$

Zadaci

6. Dokažite indukcijom da je broj dijagonala konveksnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.
7. U ravnini je dano n pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Dokažite da se ti pravci sijeku u ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
8. U ravnini je nacrtano n kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da se svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.
9. Dokažite da je broj nepraznih podskupova n-članog skupa jednak 2^n-1, za svaki prirodan broj n.

10. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn ili više.

11. Dokažite da se, za proizvoljan prirodni broj n, bilo koja $2^n \times 2^n$ šahovska ploča s uklonjenim jednim poljem može popločati koristeći samo tromine oblika slova L s jednakim krakovima (dakle kao 2×2 kvadrat, samo bez jednog vrha).

12. Koji je najveći broj područja na koje se ravnina može razdijeliti pomoću n pravaca?

13. Dokažite da se za svaki $n \geq 6$ kvadrat može razrezati na n manjih kvadrata.

14. *Hanojski tornjevi* se sastoje od tri tornja, gdje se na prvom nalazi n diskova naslaganih jedan na drugi po veličini tako da je na dnu najveći, a na vrhu najmanji disk. Cilj je prebaciti diskove s prvog na treći toranj tako da u svakom potezu pomičemo *samo jedan* disk te da ni u jednom trenutku ne smijemo staviti veći disk na manji (dakle, na kraju završavamo s identičnim poretkom diskova kao na početku). Dokaži da se to može ostvariti u $2^n - 1$ poteza.

15. Promotrimo 3^n novčića identičnog izgleda, pri čemu je n prirodan broj. Znamo da je jedan od tih novčića teži od ostalih, a ostali su jednake težine. Na raspolaganju imamo balansirajuću vagu pomoću koje možemo uspoređivati težine dvije hrpe novčića (vaga nam samo daje informaciju koja hrpa je teža). Dokažite da je moguće otkriti teži novčić pomoću n vaganja.

16. n automobila nalazi se na kružnoj cesti. Zajedno imaju točno onoliko goriva koliko je potrebno jednom automobilu da napravi cijeli krug. Dokažite da postoji automobil koji može napraviti cijeli krug, na način da preuzme gorivo iz svakog od ostalih automobila u trenutku kad prođe kraj njih.

17. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n + 1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

18. Je li moguće poredati brojeve $1, 2, \ldots, 2020^{2020}$ u niz tako da se prosjek bilo koja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih?

5. Zadaci za treću grupu

5.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju susrest ćemo se s različitim primjerima teleskopiranja kao ideje u rješavanju zadataka.
Ukoliko se do sada niste čuli s ovim pojmom, vjerojatno ste već ranije susreli i riješili zadatak koristeći ideju teleskopiranja.
Općenito, teleskopiranje je ideja, odnosno metoda, koju koristimo kako bismo pojednostavili kompliciraniji izraz drugačijim zapisivanjem dijelova tog izraza.
Zato nije potrebno nikakvo posebno predznanje, već samo prava ideja za drugačiji zapis dobivenog izraza koja će omogućiti "lijepo" pojednostavljivanje.

Primjer 5.1.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Rješenje 5.1.1. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Sada je naša suma jednaka

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}.$$

□

Primjer 5.1.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > 10$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{2^2-1}{2^2+3\cdot 2+2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2+3\cdot 3+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2+3n+2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2+3k+2}.$$

Rješenje 5.1.2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{k^2-1}{k^2+3k+2}=\frac{(k-1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k-1}{k+2}.$$

Sada je naš umnožak jednak

$$\frac{2-1}{2+2}\cdot\frac{3-1}{3+2}\cdot\frac{4-1}{4+2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}.$$

Primijetimo da će se pokratiti svi brojnici i nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, tako da ostaje

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Napomena. Uvjet $n > 10$ nam je trebao da ne bismo imali preklapanja brojeva koji se nisu pokratili. Na primjer za $n = 3$ ne postoje brojnici niti nazivnici koji su veći od 3 i manji od n, pa treba zasebno argumentirati takav slučaj. □

Primjer 5.1.3. Izračunajmo sljedeću sumu

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

Rješenje 5.1.3. Odmah napominjemo da rješenje, iako je malo dulje, zapravo nije teško. Opći član sume rastavljamo na parcijalne razlomke

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

Dobivamo

$$2n+1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

Riješimo ovu jednadžbu:

$$\begin{aligned}2n+1&=An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn\\2n+1&=An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn\\0\cdot n^2+2\cdot n+1&=(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+(2A)\end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}&0=A+B+C \qquad 2=3A+2B+C \qquad 1=2A\\&\implies \boxed{A=\frac{1}{2}}\\&\implies 0=\frac{1}{2}+B+C \qquad 2=3\cdot\frac{1}{2}+2B+C\\&\implies B+C=-\frac{1}{2} \qquad 2B+C=\frac{1}{2}\\&\implies \boxed{B=1} \qquad \boxed{C=-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Zato se početna suma zapisuje kao

$$\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right]\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$

U ovoj se sumi član s istim nazivnikom nalazi na tri mjesta: posljednjem u prvom pribrojniku, u sredini drugog i na početku trećeg. Ako je taj nazivnik k, onda ti članovi u sumi daju:

$$\frac{-\frac{3}{2}}{k}+\frac{1}{k}+\frac{\frac{1}{2}}{k}=0$$

dakle, međusobno se krate. Zato se ova suma na koncu postupka svodi na šest pribrojnika, po dva iz prvog i posljednjeg sumanda i po jedan iz drugog i pretposljednjeg. To su:

$$\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}\right]+\left[\frac{-\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+2}\right]=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}+\frac{\frac{3}{2}}{n+2}$$

□

Lakši zadaci

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{n^2+1}{n^2-1}.$$

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{1 \cdot (1+3)} + \frac{6}{2 \cdot (2+3)} + \ldots + \frac{6}{n \cdot (n+3)}.$$

Umjereni zadaci

5. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{2}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{2}{4 \cdot 2^2 - 1} + \ldots + \frac{2}{4 \cdot n^2 - 1}.$$

6. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n.$$

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!.$$

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$(1^2+1+1) \cdot 1! + (2^2+2+1) \cdot 2! + \ldots + (n^2+n+1) \cdot n!.$$

11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

12. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno:

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{ako } n = 0, \\ 2 + a_0 a_1 \ldots a_{n-1} & \text{ako } n \geq 1. \end{cases}$$

Odredi a_{2007}.

13. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^4+n^2+1}.$$

Teži zadaci

14. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

15. Neka su $(F_n)_{n \geq 0}$ Fibonaccijevi brojevi, odnosno

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1},$$

za svaki prirodan broj k. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1} F_{n+1}} < 1.$$

16. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj sljedeću sumu:

$$\frac{6}{(3-2)(3^2-2^2)} + \frac{6^2}{(3^2-2^2)(3^3-2^3)} + \ldots + \frac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}.$$

17. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 100$. Izračunaj sljedeći umnožak:

$$\frac{(3^3+3\cdot 3)^2}{3^6-64} \cdot \frac{(4^3+3\cdot 4)}{4^6-64} \cdot \ldots \cdot \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$$

5.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Počnimo s važnom definicijom: INVARIJANTA je neki objekt koji se ne mijenja primjenjunjujemo li određenu transformaciju (npr. postavljanje pločice). U "najobičnijim" zadacima s invarijantima, promatramo neke zadane varijable, a invarijanta je nešto poput vrijednosti njihovog zbroja (ili neke druge funkcije) ili nešto slično što još uključuje parnost (ili djeljivost nekim drugim brojem). U ovim zadacima idemo korak dalje. Trebamo si sami namijestiti varijable potrebne za pronalaženje invarijante - to će biti boje polja, tj. brojevi polja određenih boja. To je najčešći, ali ne jedini razlog za bojanje, nekad ćemo bojati jer to daje obično praktično rješenje. Također, važno je napoenuti da ako jedno bojanje ne dokazuje neku tvrdnju, ne možemo zaključiti da tvrdnja ne vrijedi.
Slijede jednostavni zadaci koje ste možda vidjeli. Ako jeste, to je zato jer su dobri alati za demonstraciju metoda. U svim zadacima pod opločavanjem podrazumijevamo da se pločice ne preklapaju.

1. Možemo li šahovsku ploču bez polja A1 i H8 opločiti 2×1 dominima?
2. Možemo li 10×10 ploču opločiti T-tetrominima?
3. Koja polja 8×8 ploče imaju sljedeće svojstvo, a koja ne? Svojstvo: ako uklonimo to polje, ploču možemo opločiti 3×1 pločicama.
4. Ne će svi zadaci biti s pločama. Imamo kocku ABCDEFGH. Svakom polju je pridružen broj, na početku je poljima A i C pridružen 1, a ostalima nula. U jednom potezu možemo odabrati brid ili prostornu dijagonalu kocke te obama vrhovima povećati brojeve za 1. Možemo li postići da svi brojevi budu jednaki?

Hintovi/rješenja:

1. šahovsko bojanje, brojevi crnih i bijelih polja
2. šahovsko bojanje, parnost/neparnost broja tetromina
3. obojamo u 3 boje tako da počinjemo s 1 u gornjem lijevom kutu, te ponavljamo ciklus 1,2,3 nadolje i nadesno. Isto to možemo i iz drugih kutova, ako brojimo polja svake boje u svakom bojanju i izvedemo zaključak kao u 1. zadatku, dobijemo da mogu ostati samo polja C3, C6, F3 i F6 (konstrukcija!)
4. obojamo vrhove A, C, F, H u crno, ostale bijelo. Promatramo sume crnih i bijelih brojeva.

Lakši zadaci

1. Možemo li 10×10 ploču opločiti 1×4 pravokutnicima?

2. Na svakom polju 5×5 ploče nalazi se žeton. U potezu možemo pomaknuti dva žetona na neko susjedno polje (sa zajedničkom stranicom). Nakon nekoliko poteza, svi žetoni su na istom polju. Na kojim poljima mogu biti?

3. Na kvadratnoj mreži se nalazi 9 žetona postavljenih u 3×3 kvadrat. U potezu možemo odabrati neki žeton, prebaciti ga na slobodno polje preko susjednog (sa zajedinčkom stranicom) koje sadrži žeton, te ukloniti preskočeni žeton. Možemo li postići da ostane samo jedan žeton?

4. Ploča ima N redaka i 9 stupaca. Za koje N ju možemo opločiti L-trominima?

5. Na svakom polju 4×4 ploče nalazi se žeton. Na početku su svi osim onog u prvom retku i drugom stupcu okrenuti na pismo. U potezu možemo okrenuti sve novčiće u nekom retku, stupcu ili pravcu paralelnom dijagonali (to uključuje i pravce koji sadrže samo jedno kutno polje). Je li moguće postići da svi budu okrenuti na pismo?

6. Dva igrača imagraju igru s šahovskom pločom i figurom skakača. Prvo igrač A postavi skakača na bilo koje polje, a nakon toga igrači u svakom potezu (prvo B) trebaju pomaknuti skakača onako kako se kreće u šahu, ali ne na polje na kojem je bio. Igrač koji ne može povući potez, izgubio je. Ako oba igrača igraju optimalno, tko pobjeđuje? UPUTA: Riješi isti zadatak s ostalim figurama (osim pješaka).

Teži zadaci

7. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su "prijateljska" ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

8. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje. Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

9. Može li skakač obići ploču 4×2012 tako da prođe svako polje točno jednom i vrati se na početno?

10. Na ploči nalaze se automobili. Svaki automobil je okrenut u neki od četiri smjerova i može se kretati samo tim smjerom. Na jednom polju ima mjesto samo za jedan automobil. Automobil može izaći s ploče ako se nalazi na rubnom polju i gleda prema van. Ako je polje ispred svakog automobila slobodno te ne nikoja dva automobula u istom retku/stupcu ne gledaju jedan prema drugome, dokaži da svi automobili mogu izaći s ploče.

11. Ukrug je zapisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni pozezi su:

i) Svakom broju istovreneno oduzeti dva susjedna broja;

ii) Odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja i oba uvećati za 1.

Je li moguće konačnim nizom poteza postići sljedeća stanja)

a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula.

b) tri uzastopne jedinice i 297 nula.

12. "Plus" je pločica koja pokriva jedno polje i sva njegova susjedna. "Minus" je pločica koja pokriva pet polja u istom retku ili stupcu. Kako bi broj polja bio djeljiv s 5, ploči s 2016 redaka i 2017 stupaca moramo ukloniti dva polja kako bismo ju mogli opločiti plusevima i minusima. Smiju li oba uklonjena polja biti u zadnjem stupcu?

13. "N-stepenice" su pločica koja pokriva sva polja na dijagonali $N \times N$ kvadrata i ispod nje. Možemo li 3-stepenicama i 4-stepenicama opločiti 2022×2022 ploču bez neka dva polja koja pripadaju istom retku?

5.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom ćemo se predavanju fokusirati na neke elemente koje često možemo uočiti u geometrijskim zadacima i naučiti par činjenica koje je o njima dobro zapamtiti.

Lema 5.3.1: Lema o trozupcu

Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D sjecište BI (simetrala kuta $\angle ABC$) i opisane kružnice trokuta ABC. Lema o trozupcu kaže da je

$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte trokutu pripisane kružnice koja dira AB, BC i $\overline{AC}$.

Teorem 5.3.2: Poučak o tetivi i tangenti

Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut izmedu tangente t i tetive AB jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Teorem 5.3.3: Preslike ortocentra

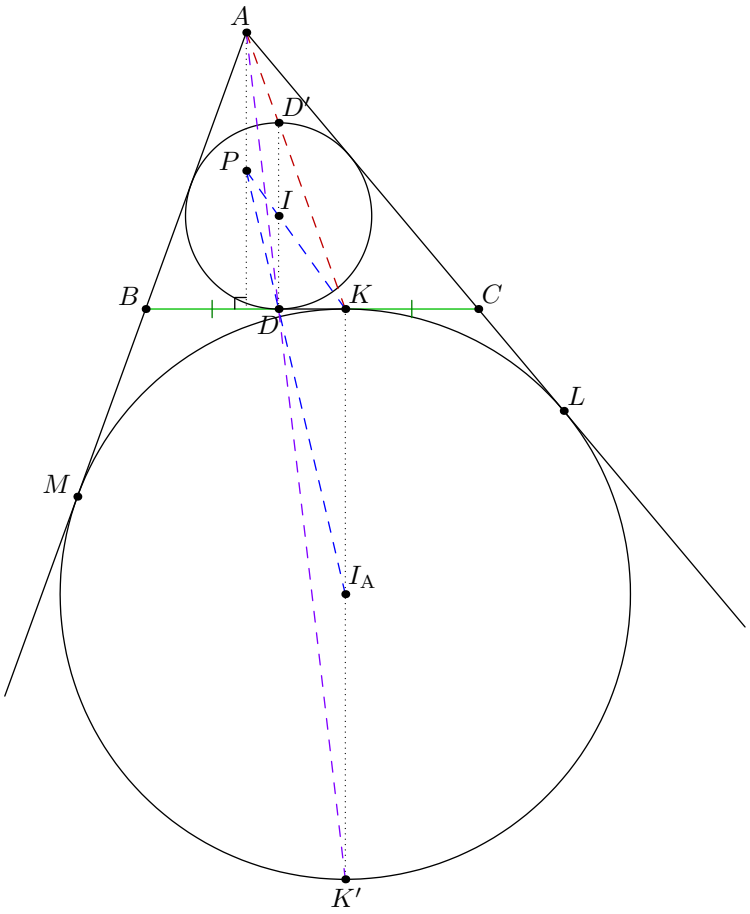
1. Preslika ortocentra trokuta preko stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.
2. Preslika ortocentra trokuta preko polovišta stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.

Teorem 5.3.4: Eulerov pravac

Ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta leže na istom pravcu kojeg zovemo Eulerov pravac. Vrijedi $|HT| : |TO| = 2 : 1$

Teorem 5.3.5: Feuerbachova kružnica

Polovišta stranica trokuta, polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta i nožišta visina nalaze se na jednoj kružnici koju nazivamo kružnica 9 točaka ili Feuerbachova kružnica. Središte te kružnice leži na Eulerovom pravcu i polovište je $|OH|$.



Slika 1

Teorem 5.3.6

Na konfiguraciji sa Slike 1 vrijede sljedeće činjenice:

- Vrijedi $BD = CK$.
- Točke A, D' i K su kolinearne.
- Točke A, D i K' su kolinearne.
- Točke P, I, K i P, D, I_A su kolinearne.

Zadaci

1. Dokažite da se simetrala stranice i simetrala pripadnog kuta sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
2. Dokažite da je površina trokuta jednaka umnošku radijusa upisane kružnice i njegovog poluopsega.
3. Dokažite Teorem 1.2.
4. Dokažite Lemu 1.1
5. Dokažite teorem 1.3.
6. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica. Dokažite!

7. Neka je H ortocentar, O središte opisane kružnice trokuta ABC, M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je P sjecište pravaca HM i AO. Tada P leži na opisanoj kružnici trokuta. Dokažite!

8. Dokažite Teorem 1.4

9. Dokažite Teorem 1.5

10. Dokažite Teorem 1.6

11. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

12. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

13. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

14. U šiljastokutnom trokutu ABC označimo s D diralište pripisane kružnice i stranice $\overline{BC}$, a E diralište upisane kružnice i stranice $\overline{BC}$. Neka je I_1 središte upisane kružnice trokuta ABD, a I_2 središte upisane kružnice trokuta ADC. Dokažite da je EDI_1I_2 tetivan.

15. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

16. Dokažite da ako je H ortocentar, a O centar opisane kružnice trokuta ABC tada je

$$\angle BAC = 60^\circ \Leftrightarrow AH = AO.$$

17. Dan je šiljastokutni trokut ABC. Tangente u točkama A i B na kružnicu opisanu tom trokutu sijeku se u točki M. Paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz točku M siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki N. Dokaži da je $|BN| = |CN|$.

18. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

19. Dan je trokut ABC. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom BC siječe dužinu LM u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

20. Neka je ABC trokut i H njegov ortocentar. G je točka takva da je $ABGH$ paralelogram. Neka je I točka na GH takva da AC raspolavlja HI. Neka AC siječe opisanu kružnicu trokuta GCI u C i J. Dokažite da $IJ = AH$.

5.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve

Link na hintove. Link na rješenja.

Danas ćemo proučavati neke od najosnovnijih dijelova teorije brojeva. Najprije ćemo obraditi Mali Fermatov teorem i naučiti ga primijeniti u zadacima. Nakon toga pozabavit ćemo se zanimljivim svojstvima kvadratnih ostataka.

Prisjetimo se najprije prostih brojeva, kongruencija i njihovih svojstava.

Definicija 5.4.1

Kažemo da je prirodan broj $p > 1$ **prost** ako p nema djelitelja d takvog da je $1 < d < p$. Ako prirodan broj a nije prost, kažemo da je **složen**.

Definicija 5.4.2

Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, kažemo da je a **kongruentan** b modulo m i pišemo

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Propozicija 5.4.3

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(1) $a \equiv b \pmod{m} \quad \wedge \quad c \equiv d \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}, \quad ac \equiv bd \pmod{m}$

(2) $a \equiv b \pmod{m} \quad \wedge \quad d \mid m \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod{d}$

(3) $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bc \pmod{mc}, \quad c \neq 0$

Mali Fermatov teorem

Teorem 5.4.4: Mali Fermatov teorem

Za relativno proste a i p, te p prost vrijedi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Primjer 5.4.1. Pronađi ostatak pri dijeljenju broja 3^{31} sa 7.

Rješenje 5.4.1. Koristimo MFT: $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
$3^{31} \equiv (3^6)^5 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 1 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}$ □

Primjer 5.4.2. Riješi kongruenciju: $x^{103} \equiv 4 \pmod{11}$.

Rješenje 5.4.2. Primijetimo da su x i 11 relativno prosti. Prema tome, možemo upotrijebiti MFT.
$x^{103} \equiv (x^{10})^{10} \cdot x^3 \pmod{11} \equiv x^3 \pmod{11}$.
Dakle, $x^3 \equiv 4 \pmod{11}$.
Uvrštavanjem brojeva između 1 i 10 u kongruenciju dobivamo $5^3 = 125 \equiv 4 \pmod{11}$. Konačno, $x \equiv 5 \pmod{11}$. □

Kvadratni ostatci

Ponekad dijeljenje potpunih kvadrata s nekim brojem može dati samo nekoliko različitih ostataka. Ta je činjenica vrlo korisna pri rješavanju primjerice diofantskih jednadžbi, ali i mnogih drugih zadataka.

Primjer 5.4.3. Pronađi kvadratne ostatke modulo 5.

Rješenje 5.4.3.

$$\begin{aligned} x \equiv 0 \pmod 5 &\Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 5 &\Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 5 &\Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod 5 &\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

Dakle, kvadratni ostatci pri dijeljenju s 5 su 0, 1 i 4. □

Primjer 5.4.4. Dokaži da 337 nije potpuni kvadrat.

Rješenje 5.4.4. $337 \equiv 2 \pmod 5$. U prethodnom primjeru pokazali smo da su kvadratni ostatci modulo 5 0, 1 i 4, iz čega slijedi da 337 nije potpuni kvadrat. □

Zadaci za MFT

1. Pronađi ostatak pri dijeljenju broja 29^{25} s 11.
2. Izračunaj $2^{98} \pmod{33}$.
3. Broj googolplex je $10^{10^{100}}$. Ako je danas srijeda, koji će dan u tjednu biti za googolplex dana?
4. Neka su p i q različiti prosti brojevi. Nadalje, neka je a takav da vrijedi $a^p \equiv a \pmod q$ i $a^q \equiv a \pmod p$. Dokaži da je $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.
5. Neka je p prost, a a cijeli broj. Dokaži da vrijedi $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod p$.
6. Dokaži da za svaki prost broj p postoji prirodni broj n takav da je $2^n + 3^n + 6^n - 1$ djeljivo s p.
7. Pronađi prirodne brojeve x takve da je $2^{2^x+1} + 2$ djeljivo sa 17.
8. Dokaži da sustav

$$\begin{aligned} x^6 + x^3 + x^3y + y &= 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 &= 157^{147} \end{aligned}$$

   nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Zadaci za kvadratne ostatke

9. Dokaži da 391 nije potpuni kvadrat.
10. Dokaži da ne postoje cijeli brojevi koji zadovoljavaju $x^2 - 3y^2 = -1$.
11. Dokaži da jednadžba $x^5 - y^2 = 4$ nema cjelobrojnih rješenja.
12. Prirodni brojevi a, b i c su duljine stranice nekog pravokutnog trokuta. Dokažite da je abc djeljiv brojem 60.

13. Dokaži da jednadžba $x^2 - 3y^2 = p$ nema cjelobrojnih rješenja za $p = 2, 3$.

14. Pronađi sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje jednadžba $x^2 - y! = 2001$ ima smisla.

15. Neka su a, b, c, k prirodni brojevi $a, b, c \geq 3$ takvi da vrijedi $abc = k^2 + 1$. Dokaži da je barem jedan od $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ složen.

16. Dokaži da sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 &= z^2 \\ 6x^2 + y^2 &= t^2 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje u skupu cijelih brojeva

17. Neka je $N = \overline{abcd}$ četveroznamenkasti potpuni kvadrat takav da vrijedi $\overline{ab} = 3\overline{cd} + 1$ Odredite sve moguće vrijednosti N.

5.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Princip ekstrema metoda je rješavanja zadataka (najčešće iz kombinatorike) u kojoj promatramo nekakav ekstrem, odnosno element ili situaciju koji su minimalni/maksimalni po nekom svojstvu. Princip ekstrema često se kombinira s metodom kontradikcije. Prvo pretpostavimo suprotno od onoga što želimo dokazati, zatim odaberemo neki ekstrem, a onda konstruiramo još ekstremniji element ili situaciju. Time postignemo kontradikciju i dokažemo originalnu tvrdnju zadatka.
Prije nego krenemo rješavati zadatke, podsjetiti ćemo se nekih dobro poznatih činjenica:

1. Svaki konačan neprazan skup prirodnih ili realnih brojeva ima (ne nužno jedinstveni) minimalan i maksimalan element.
2. Svaki neprazni podskup prirodnih brojeva ima najmanji element.
3. Beskonačni podskup realnih brojeva ne mora imati minimum i maksimum, čak i ako je ograničen.

Prije nego što se započnemo samostalno rješavanje zadataka, prođimo zajedno nekoliko primjera.

Primjer 5.5.1. U ravnini se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

Rješenje 5.5.1. Pretpostavimo suprotno, da nisu sve točke na istom pravcu. To znači da postoje neke tri točke (barem jedan skup od tri točke) koje su vrhovi trokuta. Među svim trokutima (ima ih konačno jer je točaka konačno) odaberemo onaj najmanje površine. Budući da trokut ima tri vrha, barem dva vrha su iste boje (recimo plave i nazovimo ih A i B, a preostalu točku C). Tada na stranici $\overline{AB}$ točaka postoji crvena točka D. Ako promotrimo neki od trokuta $\triangle ADC$ ili $\triangle BCD$, oni imaju strogo manju površinu od pretpostavljenog "minimalnog" trokuta. Kontradikcija. Dakle, ne postoje tri točke koje čine trokut pa sve točke leže na istom pravcu. □

Primjer 5.5.2. Dvadeset realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka dva broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.

Rješenje 5.5.2. Uzmimo najveći od danih brojeva. Kako je taj broj aritmetička sredina brojeva slijeva i zdesna, ta dva broja su jednaka najvećem broju (inače bi jedan morao biti manji, a drugi veći, što bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom da smo uzeli najveći broj). Sada možemo induktivno dokazati da su svi preostali brojevi također jednaki, jer ako su dva susjedna broja jednaka, onda su i brojevi oko njih jednaki njima ($a = \frac{a+b}{2} \implies a = b$). □

Primjer 5.5.3. Riješite sustav u skupu $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= z\\ (y+z)^3 &= x\\ (x+z)^3 &= y\end{aligned}$$

Rješenje 5.5.3. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je x najveći (ne nužno jedinstveno najveći) od triju brojeva. Tada iz $x \geq y$ uvrštavanjem druge i treće jednakosti dobijemo $(y+z)^3 \geq (x+z)^3$ iz čega slijedi $y^3 \geq x^3$ odnosno $y \geq x$. Ali pretpostavili smo da $x \geq y$ dakle mora vrijediti $x = y$. Analogno dokažemo da $x = z$ i preostaje nam riješiti jednadžbu $(2x)^3 = x$. Zaključujemo da su jedina rješenja jednadžbe $(x,y,z) = (0,0,0)$, $(x,y,z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ i $(x,y,z) = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$. □

Primjer 5.5.4. Dokažite da ne postoji prirodan broj n takav da je $n\sqrt{2}$ cijeli broj.

Rješenje 5.5.4. Pretpostavimo suprotno, odnosno postoje neki prirodni brojevi za koje je $n\sqrt{(2)}$ cijeli broj. Uzmimo najmanji od tih brojeva (koji postoji jer svaki podskup prirodnih brojeva ima najmanji element) i označimo ga s k.
Promotrimo sad broj $(\sqrt{2}-1)k)$. Prvo, primjetimo da je taj broj manji od k jer je $\sqrt{2}-1<1$. Drugo, primjetimo da je $(\sqrt{2}-1)k)\sqrt{2}=2k-\sqrt{2}k$ cijeli broj jer su k i $\sqrt{2}k$ cijeli brojevi prema pretpostavci zadatka. Zaključujemo da smo našli broj koji ispunjava uvjete zadatka koji je manji od k što nas dovodi do kontradikcije. Dakle, ipak ne postoje prirodni brojevi za koje je $n\sqrt{(2)}$ cijeli broj. □

Lakši zadaci

1. Na beskonačnom pravcu označene su točke razmaknute po 1 cm (njih beskonačno mnogo). Svakoj od tih točaka pridružen je prirodan broj, a svaki je broj jednak prosjeku svojih susjeda. Dokažite da su svi brojevi na pravcu jednaki.

2. Neparan broj ljudi stoji u ravnini tako da su sve međusobne udaljenosti različite. Istovremeno svatko upuca svog najbližeg susjeda. Dokažite da:
   (a) postoji par ljudi koji su pucali jedno u drugog.
   (b) skup dužina koje čine putanje metaka ne sadrži zatvorenu liniju tj. poligon.
   (c) barem jedna osoba preživi, tj. postoji osoba koju nitko nije upucao.
   (d) svaku osobu upucalo je najviše 5 ljudi.

3. U ravnini se nalazi skup točaka takav da je svaka točka polovište neke dužine čije su krajnje točke također iz tog skupa. Dokažite da je taj skup točaka beskonačan.

Umjereni zadaci

4. U tablici $n\times n$ napisani su brojevi od 1 do n^2. Dokažite da postoje dva susjedna polja koja se razlikuju za barem $n+1$. Susjednim poljima podrazumijevamo ona koja dijele barem jedan vrh.

5. Dano je $2n$ točaka u ravnini. Točno n od tih točaka su farme, a ostalih n točaka su bunari. Plan je izgraditi n ravnih cesta koje spajaju po točno jednu farmu s jednim bunarom. Dokažite da je ceste moguće izgraditi tako da se nikoje dvije međusobno ne sijeku.

6. Dano je n točaka u ravnini, od kojih svake tri tvore trokut površine ≤ 1. Dokažite da sve točke leže unutar nekog trokuta površine ≤ 4.

7. U Sikinijskom Parlamentu svaki zastupnik ima najviše tri neprijatelja. Dokaži da je zastupnike moguće podijeliti u dva doma tako da svaki ima najviše jednog neprijatelja u svome domu. Neprijateljstva su uzajamna.

8. Dokažite da ne postoji uređena četvorka prirodnih brojeva (x,y,z,u) za koju vrijedi
$$x^2+y^2=3(z^2+u^2).$$

Teži zadaci

9. Na ploči je napisano n realnih brojeva. Suma umnožaka svih $\binom{n}{2}$ mogućih parova brojeva manja je od 1. Dokažite da je moguće obrisati jedan broj tako da je suma preostalih $n-1$ brojeva manja od $\sqrt{2}$.

10. (Sylvester-Gallai teorem) Dano je konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nisu sve kolinearne. Dokaži da postoji par točaka koje leže na pravcu na kojem ne leži nijedna od preostalih zadanih točaka.

11. Dokažite da se oko svakog konveksnog mnogokuta površine ≤ 1 može nacrtati pravokutnik površine ≤ 2 takav da se mnogokut u potpunosti nalazi unutar pravokutnika.

6. Zadaci za četvrtu grupu

6.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB

Link na hintove. Link na rješenja.

Nejednakosti među sredinama

U ovom ćemo predavanju naučiti primjenjivati nejednakosti među sredinama te CSB nejednakost u natjecateljskim zadacima. One su sve što vam je potrebno za rješiti veliku većinu zadataka s nejednakostima. Za početak, objasnimo što uopće mislimo pod pojmom "sredina".

Definicija 6.1.1: Aritmetička sredina

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova aritmetička sredina

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Definicija 6.1.2: Geometrijska sredina

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

Definicija 6.1.3: Harmonijska sredina

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova harmonijska sredina

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

Definicija 6.1.4: Kvadratna sredina

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova kvadratna sredina

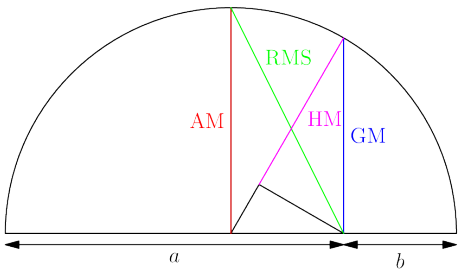
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Teorem 6.1.5: KAGH nejednakost

Za gore definirane sredine vrijedi

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.



Slika 6.1.: Geometrijska interpretacija sredina - uvjerite se da duljine označenih dužina odgovaraju sredinama

Primjer 6.1.1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Rješenje 6.1.1. Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$
$$\iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad b+c \geq 2\sqrt{bc} \qquad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Zbog čega vrijedi

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

što je trebalo dokazati. □

Primjer 6.1.2 (Nesbittova nejednakost)**.** Dokažite da za pozitivne realne a, b, c vrijedi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Rješenje 6.1.2. Ova nejednakost ima puno različitih dokaza, a u ovom ćemo demonstrirati primjenu A-H nejednakosti. Primijetimo da ako svakom od razlomaka s lijeve strane dodamo jedan, dobijamo razlomke s istim brojnikom. U natjecateljskim je zadacima često korisno namjestiti iste brojnike.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
$$\iff \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{3}{2} + 3$$
$$\iff \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$
$$\iff (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$
$$\iff (2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$
$$\iff ((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

Pomnožimo sada nejednakost s izrazom $\frac{\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}{3}$ Dobivamo da je sljedeća nejednakost ekvivalentna početnoj:

$$\frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3} \geq \frac{3}{\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}$$

Kako je ta nejednakost upravo nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za brojeve $b+c$, $c+a$, $a+b$, znamo da vrijedi, pa onda vrijedi i početna, što je trebalo dokazati. □

CSB

Teorem 6.1.1: CSB nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i i y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $k > 0$ takav da je $y_i = kx_i,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$).

CSB nejednakost često se na natjecanjima primjenjuje u takozvanoj Engel formi.

Teorem 6.1.2: CSB - Engel forma

Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ realni brojevi i $y_1, y_2, \ldots y_n$ pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

Primjer 6.1.1 (Nesbittova nejednakost). Dokažite da za pozitivne realne a, b, c vrijedi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Rješenje 6.1.1. Nesbittovu nejednakost možemo dokazati i primjenom CSBa, i to na nekoliko načina. Primjetimo da je nejednakost ekvivalentna

$$((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$$

a ova nejednakost direktno slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti.

□

Rješenje 6.1.2. Nejednakost možemo riješiti i primjenom Engelove forme tako da proširimo razlomke,

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

gdje smo na kraju koristili već poznatu nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. □

Zadaci

1. Dokažite da za svaki pozitivan realan broj x vrijedi
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2. Dokažite da za svaki realan broj a vrijedi
$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geq 0$$

3. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi
$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$$

4. Neka su x, y realni brojevi takvi da vrijedi $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da za takve brojeve vrijedi
$$-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}$$

5. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

6. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

7. Dokaži da za sve pozitivne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

8. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

9. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b vrijedi:

$$ab^3 + a^3b \leq a^4 + b^4.$$

10. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$(a+b+c)abc \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

11. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

12. Dokažite nejednakost:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

13. Dokaži za $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ realne brojeve:

$$\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + ... + (a_n + b_n)^2}.$$

14. Dokaži da ako je $a, b, c > 0$ onda je

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

15. Dva trokuta sa stranicama a, b, c i a_1, b_1, c_1 su slične ako i samo ako

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

16. Minimiziraj $x_1^2 + ...x_n^2$ za $0 \leq x_i \leq 1$ i $x_1 + ... + x_n = 1$.

17. Neka su a, b, c realni brojevi veći od $-\frac{1}{4}$ i neka je $a + b + c = 1$. Dokaži sljedeću nejednakost:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

18. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

19. Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^2+y^2+z^2+w^2+x+3y+5z+7w=4$$

odredi najveću moguću vrijednost izraza $x+y+z+w$.

20. Dokaži da za sve $x,y>0$ vrijedi nejednakost

$$x^4+y^3+x^2+y+1>\frac{9}{2}xy.$$

21. Trokutu ABC upisana je kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Pravac kroz točku S siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D i E. Dokažite da za površinu P trokuta CED vrijedi $P\geq 2r^2$. Kada vrijedi jednakost?

22. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1,$$

dokažite nejednakost

$$(a-1)(b-1)(c-1)\geq 8.$$

23. Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

$$O\geq\frac{24P}{O+P+1}.$$

24. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=abc$. Dokaži da vrijedi

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)\geq 54\sqrt{3}$$

25. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a+b\leq 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{2}{1+ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

26. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c\geq 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$$

27. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}\leq 4.$$

28. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

29. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}\geq\frac{3a+2b-c}{4}.$$

30. Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u,v,w za koje je $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geq 1$ vrijedi nejednakost $u+v+w\geq\lambda$.

31. Neka je n prirodni broj. Odredi sve pozitivne realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{2^2}{x+1}+\frac{3^2}{x+2}+\ldots+\frac{(n+1)^2}{x+n}+nx^2=nx+\frac{n(n+3)}{2}.$$

Za bilo kakva pitanja vezana za zadatke možete mi se javiti na mail utrobicicnika@gmail.com.

6.2. C4: Mislav Brnetić - Igre

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Pod pojmom matematičke igre promatrat ćemo situacije u kojima igrači (najčešće 2) igraju neku igru te je cilj odrediti koji igrač, ovisno o zadanim parametrima, ima pobjedničku strategiju.
Kažemo da igrač ima pobjedničku strategiju ako postoji niz poteza kojim može osigurati pobjedu, neovisno o tome kako drugi igrač igra (naravno, ti potezi mogu ovisiti o potezima drugog igrača).

Promotrimo jedan primjer igre.

Primjer 6.2.1. Na hrpi se nalazi n kamenčića. Igrači A i B igraju sljedeću igru: u svakom koraku igrač koji je na redu može s hrpe uzeti $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića. Prvo igra igrač A, a igraju naizmjenično. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.
U ovisnosti o n, odredite koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Načelno, ideja rješavanja ovakvih problema je podjela svih pozicija na disjunktne skupove pobjedničkih i gubitničkih pozicija. Pritom su pobjedničke pozicije one na kojima igrač koji je na redu ima pobjedničku strategiju, a gubitničke one na kojima drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

U gornjem primjeru lako možemo zaključiti kako su brojevi $1, 2, 3$ i 4 sigurno pobjedničke pozicije (s njih možemo uzeti sve kamenčiće u jednom potezu). Dakle, kada je $n = 1, 2, 3, 4$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.
Promotrimo situaciju kada imamo 5 kamenčića: sada, koji god broj kamenčića uzmemo, ostat će još $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića na hrpi. Kako smo ranije zaključili, drugi igrač sada može uzeti sve kamenčiće i pobijediti. Dakle, 5 je gubitnička pozicija, a u toj poziciji drugi igrač ima pojedničku strategiju.
Promotrimo sada situacije kada imamo $6, 7, 8$ ili 9 kamenčića: prvi igrač može uzeti toliko kamenčića da na hrpi ostane još 5 kamenčića, a tada drugi igrač sigurno gubi (s obzirom da je to gubitnička pozicija), odnosno prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Sada, generalizacijom i provedbom indukcije, lako vidimo da su (samo) pozicije $n = 5k, k \in \mathbb{N}$ gubitničke, a ostale pobjedničke. Odnosno, prvi igrač ima strategiju za $n \neq 5k$, inače strategiju ima drugi igrač.

Ta strategija je vrlo jednostavna: pobjednik u svakom koraku uzima odgovarajući broj kamenčića kako bi gubitniku ostavio $5k$ kamenčića, odnosno poslao ga u gubitničku poziciju (a ranije smo vidjeli zašto je takva strategija dobra).

Generalizacijom gornjeg dokaza možemo zaključiti i:

- pobjednička pozicija je svaka iz koje postoji potez koji vodi u gubitničku (tj. protivnik je u poziciji iz koje mora izgubiti)
- gubitnička pozicija je svaka iz koje se može doći samo u pobjedničku (tj. protivnik je u poziciji iz koje može pobijediti)

⚠ Oprez

Bitno je primijetiti kako pobjednička pozicija garantira pobjedu samo uz točno određeni niz poteza (bilo kakva pogreška igrača vodi u gubitničku poziciju), dok je gubitnička pozicija sigurno gubitnička (naravno, ako protivnik ne pogriješi).

Neki od principa korisnih kod rješavanja ovakvih problema:

- Indukcija - kao u ranijem primjeru
- Invarijante i monovarijante
- Simetrija - situacija u kojoj neki igrač može uvijek na određeni način "odgovoriti" na potez prethodnog

Lakši zadaci

1. Na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k. Dva igrača zatim igraju sljedeću igru: igrač koji je na redu može broju na ploči oduzeti jedan od brojeva $1, 2, ..., k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan), a igraju naizmenično. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

2. Kao u prvom zadatku, na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k, međutim dva igrača naizmenično broju s ploče oduzimaju jedan od brojeva $1, 2, 2^2, ..., 2^k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan). Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

Koji igrač sada ima pobjedničku strategiju?

3. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom i žetonima oblika kruga međusobno istog radijusa. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ostalima te da se nalazi u cijelosti unutar ploče. Igrač koji više ne može postaviti žeton na ploču gubi.

Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

4. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Dvojica igrača s hrpe naizmjence uzimaju m kamenčića ($m \geq 1$), a pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako m ne smije biti:

a) složen broj b) prost broj?

5. Na stolu su dvije neprazne hrpe kamenčića. Dva igrača naizmjence s jedne od hrpa uzimaju po volji mnogo kamenčića. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.

Za koje rasporede kamenčića na hrpama drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

6. Dva igrača igraju "šah s dva poteza" (tj. šah s normalnim pravilima, osim što svaki igrač igra dva umjesto jednog poteza). Može li neki igrač osigurati neriješen ishod ili pobjedu?

7. Igrači A i B igraju igru sa skakačem na šahovskoj ploči: prvo igrač A postavi skakača na bilo koje polje na ploči, a potom počevši od igrača B igrači naizmjence pomiču skakača na način na koji se skakač miče u šahu. Gubi onaj igrač koji ne može postaviti skakača na polje koje skakač još nije posjetio. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

8. Dva igrača igraju igru s čokoladom koja se sastoji od $m \times n$ kockica, te je broj kockica veći od 1. Igrači naizmjence biraju jednu od preostalih kockica te odlome (i pojedu) sve kockice koje se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu dolje u odnosu na odabranu, te i sve one koje su time ostale odvojene od ostatka čokolade (pri čemu gornja lijeva kockica čokolade ostaje nepojedena). Gubi onaj igrač koji pojede zadnju kockicu (tj. onu u gornjem lijevom kutu) jer je to nepristojno.

Za koje veličine čokolada drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

9. Dana je bijela kvadratna ploča sa 64 polja. Anica i Božica igraju sljedeću igru: prvo Anica oboji n polja u crvenu boju, a potom Božica odabire 4 retka i 4 stupca te sva polja u njima oboji crno. Božica pobjeđuje ako nije ostalo nijedno crveno polje na ploči; u suprotnom pobjeđuje Anica.

Odredite najmanji n takav da Anica može osigurati pobjedu bez obzira na potez Božice.

Teži zadaci

10. Goci i Lazo igraju igru. Zadan je bilo koji polinom $p(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima, stupnja većeg ili jednakog 1. Na ploči je napisan skup brojeva

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p-1, 2p\}$$

i suma S koja je na početku 0. Goci započinje igru. Svaki igrač u svakom potezu odavire jedan broj $n \in \mathcal{M}$, briše ga s ploče i umjesto sume S na ploču napiše $p(n) - S$. Igra je gotova kada se isprazni $\mathcal{M}$. U tom slučaju, ako je S djeljiv s p pobjeđuje Lazo, inače pobjeđuje Goci.

Tko ima pobjedničku strategiju?

11. Na ploči na početku piše n uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je n veći od 10. Anica i Božica naizmjence brišu po jedan broj s ploče, dok ne ostanu 2 broja na ploči. Anica pobjeđuje ako su ta 2 broja relativno prosta, a u suprotnom pobjeđuje Božica. Za koje n Anica ima pobjedničku strategiju?

12. Anica i Božica igraju igru. Prvo Božica napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku ona odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Božica odabrati brojeve tako da Anica ne može ostvariti svoj naum?

13. Anica i Božica igraju igru sa sljedećim pravilima. Na početku postoji hrpa s $n \geq 2$ kamenčića. Prvo Anica makne s hrpe bilo koji broj kamenčića tako da hrpa ne ostane prazna, a zatim njih dvije naizmjence miču kamenčiće s hrpe tako da ako je u prethodnom potezu maknuto k kamenčića, u sljedećem potezu ih smije biti maknuto najviše $2k - 1$. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju, ako pobjeđuje ona koja makne zadnji kamenčić?

14. Anica i Božica igraju sljedeću igru, uz dani prirodni broj n. Anica prvo napiše broj 1, a potom naizmjence svaka od njih zapiše broj za 1 veći ili duplo veći od prethodnog, pri čemu nijedan napisani broj ne smije biti veći od n. Pobjeđuje igrač koji napiše broj n. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju?

6.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Često za riješiti geometrijski zadatak potrebno je razmatrati skicu ovisno o nekoj točki koja se možda ni ne spominje u zadatku, koju nije lagano uopće nacrtati na skici. Ta točka treba biti takva da na jedinstven način upotpunjuje skicu i jedino je neku točku korisno uvesti ako upotpunjuje skicu na dva različita načina.
Najbolji način kako motivirati uvođenje neke točke u zadatak je primjećivanjem neke osnovnije konfiguracije koja se pojavljuje u vezi te točke, te dokazivanjem toga da da za tu točku vrijedi neki drugi uvjet koji nam je potreban da zadatak vrijedi. Zbog toga ćemo se fokusirati i na osnovnije zadatke koji se trebaju znati kako riješiti. Uvođenje točke je beskorisno ako za nju ne vrijedi barem dva uvjeta koji su povezani s ostatkom zadatka.
Uvođenje točaka je kao rješavanje šahovske zagonetke u smislu prepoznavanja uzoraka - jednostavnije lakše taktike u šahu je kao traženje dva manja geometrijskog uzorka koji se poklapaju u nekoj novoj točki, te što više geometrije rješavamo, to ćemo biti bolji u primjećivanju uzoraka.

Osnovne konfiguracije

1. (Ptolomejev teorem) Dokaži da je $ABCD$ tetivni četverokut ako i samo ako je

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

2. (Nadodavanje antipode) Dokaži da je $ABCD$ tetivan ako i samo ako su A, B, C i D točke takve da se okomice iz A, B, C na DA, DB i DC sijeku u jednoj točki.

3. Dvije se kružnice sijeku u točkama X i Y te ih njihova zajednička tangenta dira u A i B. Dokaži da XY raspolovljava dužinu AB.

4. (Simpsonov pravac) Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Dokaži da su nožišta visina s D na AB, AC i BC na istom pravcu.

5. Na kružnici izabrane su točke A, B, M, C tako da je M polovište luka BC. Nožište visine iz točke M na AB ili AC je D. Dokaži da je $AB + AC = 2AD$.

6. (Trozubac) Neka je M sjecište simetrale kuta BAC i simetrale stranice BC trokuta ABC, te neka je I središte upisane kružnice tog trokuta. Dokaži da je M središte kružnice BIC.

Zadaci s uvođenjem točaka

7. Unutar trokuta ABC izabrana je točka P takva da je $\angle ABP = \angle ACP$. Nožišta visina s P na AB i AC su točke D i E, a polovište stranice BC je M. Dokaži da je $DM = EM$.

8. (*Humptyjeva točka*, HJMO 2020) Neka je H ortocentar trokuta ABC i neka je X nožište visine s H na težišnicu trokuta ABC iz A. Dokažite da je $BCHX$ tetivan.

(Točka X jako je posebna točka za koju puno naizgled nepovezanih stvari vrijedi, samo o njoj bi se moglo predavanje napraviti, pa zato ima svoje ime.)

9. Simetrala kuta ABC jednakokračnog trokuta ABC (s $AB = AC$) siječe AC u D. Ako je $BC + CD = AB$, izračunaj kuteve trokuta ABC.

10. Neka je ABC trokut takav da je kut pri vrhu A dva puta veći od kuta pri vrhu B. Dokaži da je $b(c + b) = a^2$.

11. Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $AB = AC$. Neka je M polovište stranice BC te neka je AP paralelno s BC. Točke X i Y nalaze se redom na polupravcima PB i PC tako da je točka B između P i X, točka C između P i Y te vrijedi $\angle PXM = \angle PYM$. Dokaži da su točke X, Y, P i A koncikličke.

6.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 6.4.1

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a *kongruentan* broju b *modulo* n ako vrijedi $n \mid a - b$. Pišemo: $a \equiv b \pmod{n}$.

Neka su $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$. Vrijedi:

- $a \equiv a + kn \pmod{n}$
- $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies ac \equiv bd \pmod{n}$
- $a \equiv b \pmod{n} \implies a^k \equiv b^k \pmod{n}$

Promatramo li ostatke potencija nekog prirodnog broja a modulo m, možemo primjetiti da se periodično ponavljaju. Primjerice, za $a = 2$ i $m = 7$:

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \pmod{5} \\ 2^1 &\equiv 2 \pmod{5} \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 2^3 &\equiv 3 \pmod{5} \\ 2^4 &\equiv 1 \equiv 2^0 \pmod{5} \\ 2^5 &\equiv 2 \equiv 2^1 \pmod{5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teorem 6.4.2: Ostaci se periodično ponavljaju

Za svaki par prirodnih brojeva a i m, postoji period $p \in \mathbb{N}_0$ takav da

$$a^n \equiv a^{n+p} \pmod{m}$$

za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. S obzirom da postoji konačno mnogo mogućih ostataka modulo m $(0, 1, 2, \ldots, m-1)$, a beskonačno mnogo mogućih potencija broja a (svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$), prema Dirichletovom načelu slijedi da postoje dvije potencije s istim ostatkom. Zapišimo to kao $a^k \equiv a^l \pmod{m}$, gdje su k i l prirodni brojevi te $k > l$ (bez smanjenje općenitosti).
Tvrdimo da je $p = k - l$ period koji zadovoljava $a^n \equiv a^{n+p} \pmod{m}$ za svaki $n \geq l$. Zapišimo n kao $l + r$ gdje je $r \in \mathbb{N}_0$. Slijedi da je

$$a^{n+p} \equiv a^{l+r+k-l} \equiv a^{k+r} \equiv a^k \cdot a^r \equiv a^l \cdot a^r \equiv a^{l+r} \equiv a^n \pmod{m}$$

čime smo dokazali tvrdnju teorema. □
U slučaju da su a i m relativno prosti, izraz $a^n \equiv a^{n+p} \pmod{m}$ možemo s obe strane pomnožiti s multiplikativnim inverzom od $a^n \pmod{m}$ (koji postoji jer su a^n i m relativno prosti) kako bismo dobili da je $a^p \equiv 1 \pmod{m}$.

Definicija 6.4.3: Order

Za dane relativno proste a i m, *order* je najmanji prirodni broj p takav da $a^p \equiv 1 \pmod{m}$.

Order p možemo zapisati kao $p = \text{ord}_m(a)$.

Teorem 6.4.4

Za relativno proste prirodne brojeve a i m, $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ ako i samo ako

$$\text{ord}_m(a) \mid n.$$

Dokaz. Dokažimo dva smjera ekvivalencije odvojeno.
Prvo, ako $\text{ord}_m(a) \mid n$, n možemo zapisati kao $\text{ord}_m(a) \cdot k$. Slijedi da je

$$a^n \equiv a^{\text{ord}_m(a)\cdot k} \equiv (a^{\text{ord}_m(a)})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{m}$$

čime smo dokazali prvi smjer.
Za drugi smjer pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji prirodan n takav da je $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ i $\text{ord}_m(a) \nmid n$. Slijedi da n možemo zapisati kao $\text{ord}_m(a) \cdot k + r$ gdje je r prirodan broj takav da je $0 < r < \text{ord}_m(a)$. Dakle

$$a^n \equiv a^{\text{ord}_m(a)\cdot k + r} \equiv (a^{\text{ord}_m(a)})^k \cdot a^r \equiv 1 \cdot a^r \equiv a^r \pmod{m}.$$

Ali $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ iz čega slijedi da je $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, ali r je prirodan broj manji od $\text{ord}_m(a)$ pa je to u kontradikciji s definicijom ordera. Stoga zaključujemo da naša početna pretpostvka nije istinita, odnosno $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ samo ako $\text{ord}_m(a) \mid n$. □

Definicija 6.4.5: Eulerove funkcija

Eulerova funkcija φ broj je brojeva iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ koji su *relativno prosti* s n.

Svojstva Eulerove funkcije:

- Ako imamo rastav broja n na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_l^{\alpha_l}$, vrijedi:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

- φ je multiplikativna, tj. vrijedi $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ ako su n i m relativno prosti.
- Ako je p prost broj, onda je $\varphi(p) = p - 1$.

Teorem 6.4.6: Eulerov teorem

Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Direktna posljedica Eulerovog teorema je Mali Fermatov teorem.

Teorem 6.4.7: Mali Fermatov teorem

Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je p prost broj takav da a nije djeljiv s p. Tada vrijedi:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Primjer 6.4.1 (Primjena Eulerovog i malog Fermatovog teorem u zadacima)**.** Pronađi ostatak pri dijeljenju broja 13^{162} sa 17.

Rješenje 6.4.1. Kako nas zanima ostatak pri djeljenju sa 17, korisno je promotriti ostatak potencije (u ovom slučaju 161 s $\varphi(17) = 16$) budući da znamo da je

$$a^{\varphi(m)k+r} = a^{\varphi(m)k} \cdot a^r = (a^{\varphi(m)})^k \cdot a^r \equiv 1^k \cdot a^r \equiv a^r \pmod{m}$$

za prirodne brojeve a, m, k i r zahvaljujući Eulerovom i/ili malom Fermatovom teoremu. Uvrštavanjem $a = 13$ i $m = 17$ zaključujemo $k = 10$ i $r = 2$ (kako bi potencija bila jednaka 162) te konačno dobijamo da $13^{162} \equiv 13^2 \equiv 169 \equiv 16 \pmod{17}$.

□

Lakši zadaci

1. Odredi ostatak pri djeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ sa 7.
2. Odredi $2^{98} \pmod{33}$.
3. Odredi posljednju znamenku broja 7^{7^7}.
4. Neka je $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1$. Izračunaj $a_{100} \pmod 7$.
5. Izračunaj posljednje tri znamenke broja $2005^{11} + 2005^{12} + \ldots + 2005^{2006}$

Umjereni zadaci

6. Koliko postoji prostih brojeva p takvih da je $29^p + 1$ višekratnik od p?
7. Pokaži da $19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.
8. Koliko postoji prirodnih brojeva koji su višekratnici broja 1001 te se mogu izraziti kao $10^j - 10^i$ gdje su i i j cijeli brojevi takvi da $0 \leq i \leq j \leq 99$?
9. Ako je $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ gdje je p prost, dokaži da je tada $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.
10. Dokaži da, ako je p prost, da je svaki prosti faktor broja $2^p - 1$ veći od p.

Teži zadaci

11. Ako su a i b prirodni brojevi relativno prosti s m takvi da je $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ i $a^y \equiv b^y \pmod{m}$, dokaži da je
$$a^{\gcd(x,y)} \equiv b^{\gcd(x,y)} \pmod{m}.$$
12. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Dokaži da je $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ djeljiv s 1989.
13. Dokaži da $n \mid \varphi(a^n - 1)$ za sve prirodne brojeve $a > 1$ i n.
14. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n \mid 2^n + 1$ i pronađi sve takve proste n.
15. Neka je n prirodni broj takav da $n \geq 2$. Dokaži da $n \nmid 2^n - 1$.

16. Neka je a_n niz zadan sa

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom zadanog niza.

6.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe

Link na hintove. Link na rješenja.

Funkcije su jedan od najfundamentalnijih matematičkih pojmova. Zapis gotovo svih ozbiljnijih matematičkih izraza sadrži funkcije u sebi. Cilj ovog predavanja je da vam pruži uvod u to šta su funkcije, funkcijske jednadžbe i pokaže neke osnovne metode rješavanja funkcijskih jednadžbi kakve se pojavljuju na matematičkim olimpijadama.

Funkcija

Funkcija je pridruživanje elemenata skupa B elementima skupa A pri čemu je svakom elementu skupa A pridružen točno jedan element skupa B. Skup A naziva se domena, a skup B kodomena funkcije f. Postoje neke osobine funkcija koje nam mogu biti od posebnog značaja u njihovom proučavanju pa ćemo ih zato definirati.

Definicija 6.5.1: Svojstva funkcija

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je:

- *injekcija* ako $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$
- *surjekcija* ako za svaki element b skupa B postoji element a skupa A takav da je $f(a) = b$
- *bijekcija* ako je ujedno i injekcija, i surjekcija
- *involucija* ako vrijedi $f(f(a)) = a$, za svaki $a \in A$
- *parna* ako vrijedi $f(x) = f(-x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$
- *neparna* ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$
- *periodična* ako postoji $p \neq 0$ takvo da vrijedi $f(x+p) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$

Za bijekcije postoji njihova inverzna funkcija. Za funkciju $g\colon B \to A$ kažemo da je inverzna funkciji $f\colon A \to B$ ako vrijedi $f(g(x)) = x$ za svako x iz domene (ujedno i kodomene).

Funkcijske jednadžbe

Funkcijska jednadžba je problem u kojem treba pronaći sve funkcije koje zadovoljavaju zadani izraz(e). Klasična funkcijska jednadžba je najčešće oblika: „Pronađite sve funkcije $f\colon A \to B$ takve da vrijedi $P(x, y)$.", gdje su A, B obično neki od klasičnih skupova $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q})$, a uvjet je neka propozicija, najčešće u dvije varijable koja nam govori o nekim jednakostima.
U rješavanju funkcijske jednadžbe postoje 2 koraka. Prvo koristeći da uvjet vrijedi za sve elemente promatranog skupa dobijamo informacije o funkciji uvrštavajući pogodne vrijednosti iz tog skupa. Umijeće rješavanja funkcijskih je upravo umijeće pronalaženja pogodnih vrijednosti za uvrstiti. Cilj toga je pronaći skup funkcija koje zadovoljavaju zadani izraz. Nakon toga moramo zaista provjeriti da te funkcije zadovoljavaju uvjete zadatka za sve elemente zadanog skupa. Taj korak je najčešće fizička provjera koje od tih funkcija stvarno zadovoljavaju jednadžbu.

⚠ Oprez

Na kraju rješavanja zadatka iz funkcijskih morate provjeriti da li sva rješenja koja ste dobili uistinu zadovoljavaju početnu jednadžbu. Ukoliko to ne učinite zgriješili ste više nego Patricija kad bi dijelila s nulom.

Dvije vrlo lagane funkcijske jednadžbe bi izgledale ovako:

Primjer 6.5.1. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Primjer 6.5.2. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x+y)+f(x-y) = x^2+y^2$.

Kada rješavate funkcijske jednadžbe korisno je pokušati pogoditi rješenje jednadžbe. Najčešće je rješenje nešto jako fino poput $f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = -x$ ili relativno fino poput $f = const, f = x+1, f = \frac{1}{x}$... Rješenje vas može usmjeriti ka uvrštavanjima koje želite praviti da biste dokazali da je to jedino rješenje. Neke metode koje vam mogu pomoći u rješavanju funkcijskih su:

- Najčešći korak je početni korak je uvrštavanje vrijednosti s ciljem da se izvuku neke informacije koje se mogu lagano dobiti. U tu svrhu najčešće uvrštavamo 0 ako smijemo, zatim parove $(0, x), (x, 0)$ nešto poput $(x, x), (x, -x)$ kombinacije sa 1 i -1 itd...
- Ako možemo lako izračunati f u nekoj točki to vrijedi napraviti. Ako znamo koliko je f(nešto) vrijedi probati ubaciti to nešto umjesto x i y.
- <promatrati skup nultočaka funkcije. Ako znamo da postoji neko t takvo da je $f(t) = 0$ tada ima smisla ubaciti to t. Često proces rješavanja u zadacima u kojima su rješenja tipa $f(x) = 0$ za sve x i $f(x) = x$ za sve x je da dobijemo da se neki broj slika u 0. Zatim ako postoji neki broj $t \neq 0$ takav da je $f(t) = 0$ tada nije teško dobiti da se svi brojevi slikaju pomoću nečega poput $f(tx) = 0$ za sve x. U drugom slučaju onda znamo da je $f(0) = 0$.
- Dokazati neko od gore navedenih svojstava (prije svega injekciju ili surjekciju) i koristiti ga
- Dokazati injekciju ili surjekciju u nekoj točki, ako ne možemo generalno. Npr korisno je pokazati da se nešto slika u $0, 1$ ili da je funkcija injektivna u $0, 1, -1$.
- Indukcija na funkcijama čije su domene i kodomene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- Dokazati da postoji beskonačno mnogo brojeva koji se slikaju u ono što treba. Ova metoda pogotovo vrijedi za funkcijske u teoriji brojeva gdje je lakše dokazati nešto za neke specifične oblike, najčešće vezane za proste brojeve. Ako trebamo dokazati da je $f(n) = n$ za sve prirodne brojeve često prvo dokažemo $f(p) = p$ ili $f(p-1) = p-1$ za sve proste brojeve p i onda koristimo početni uvjet da dokažemo nešto poput $p + f(p) | f(n) - n$ odakle slijedi da $f(n) - n$ mora biti 0 jer ima beskonačno mnogo djelitelja.

Neki malo napredniji trikovi u rješavanju funkcijskih jednadžbi su:

- Korištenje (a)simetrije. Ako je jedna strana početnog uvjeta simetrična po x, y a druga nije vrijedi zamijeniti x, y i iskoristiti to.
- Forsiranje kraćenja. Praviti uvrštavanja tako da stvari na različitim stranama početne jednakosti postanu iste.
- Uvođenje pomoćne funkcije ako je potrebno, skaliranje ili pomakom u neku točku. Npr. $g(x) = f(x) - f(0)$
- Gledati skup brojeva za koje znamo da je f(taj broj) ono što naslućujemo da f treba ispasti.
- Promatranje veličine, pogotovo u funkcijama sa nejednakostima i $\mathbb{R}^+$ funkcijskim
- Iteracija

Navest ću i savjete Borne Šimića, osobe od koje sam ja učio rješavati funkcijske upravo na ljetnom kampu nakon JBMO što je situacija u kojoj se nalazite neki od vas. Savjete navodim u izvornom obliku bez izmjena iako imaju nekih presjeka s gore navedenim.

- Pri rješavanju jednadžbe u kojoj se pojavljuju samo $f(x), f(y), f(x+y)$ na jednostavne načine može biti korisno uvrstiti $(x, 1), (x+1, -1)$ te zatim riješiti sustav jednadžbi. Vrlo često, ovo će biti i jedini način za riješiti zadatak. Općenito, neke jednadžbe će se moći riješiti dobivanjem sustava jednadžbi na neki način.

- Ako se $f(x) = 0$ pojavljuje kao rješenje, zna biti korisno napisati da je to rješenje i nadalje pretpostaviti $\exists t, f(t) \neq 0$. Također ponekad korisno rastavljanje na slučajeve može biti da, recimo, pretpostavimo da $\exists t \neq 0, f(t) = 0$ u jednom slučaju a da u drugom $f(t) = 0 \implies t = 0$.

- "Žajina metoda" je uvrštavanje svih parova cijelih brojeva između -2 i 2 u jednadžbu u nadi da će se time dobiti nešto korisno.

- U funkcijskim jednadžbama sa djeljivostima se može pokazati korisnim koristiti da su djelitelji prirodnog broja njemu manji ili jednaki. Također, ako pokažeš da neki izraz ima beskonačno mnogo djelitelja, on je jednak nuli.

- Također, ako je jednadžba iz prirodnih u prirodne brojeve činjenice poput $f(n) \geqslant 1$ ili $a > b \implies a \geqslant b + 1$ su iznenađujuće korisne.

- Može biti lakše odrediti vrijednosti za proste brojeve ili neku drugu posebnu klasu brojeva te zatim proširiti na nešto općenito.

Lakši zadaci

1. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y.$$

2. Nađite sve injektivne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + f(x + y^2) + y) = f(2x - y) + 3y.$$

3. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $x + f(x) = f(f(x)) \forall x \in \mathbb{R}$. Nađite sve x takve da $f(f(x)) = 0$.

4. Odredi sve funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x + 3y) = 5f(x)f(y)$$

za sve realne brojeve x i y.

5. Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća surjekcija, dokažite da je $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

6. Odrediti sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve m, n vrijedi $f(m) + f(n) \mid m + n$.

7. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve različite prirodne brojeve m, n vrijedi $\gcd(m, n) = \gcd(f(m), f(n))$.

8. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve n vrijedi $f(n) + f(f(n)) = 2n$.

9. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

Dva zadatka vezana za razumijevanje funkcija

10. Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija koja se dobije uzastopnim zapisivanjem svih prirodnih brojeva od 1 do n jedan iza drugog (npr. $g(11) = 1234567891011$). Neka je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ definirana na sljedeći način: $f(n)$ je najmanji broj znamenaka koje treba izbaciti iz zapisa broja $g(n)$ tako da novodobiveni broj bude djeljiv sa 8.

Postoje li prirodni brojevi t i n_0 takvi da za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$, vrijedi $f(n+t) = f(n)$?

11. Zadane su funkcije f i g iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. f je bijekcija i za svaki realni x vrijedi:

$$f(x) + g(x) = 2.$$

Pokaži da postoji točno jedan x_0 takav da je:

$$f(f(x_0)) + g(g(x_0)) = 2.$$

Dvije čuvene funkcijske jednadžbe

12. Cauchyeva funkcijska jednadžba

Nađi sve funkcije koje zadovoljavaju $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Zadatak riješiti za $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

13. Jensenova funkcijske jednadžba

Nađite sve $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ takve da vrijedi $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})$.

Olimpijski zadaci iz funkcijskih jednadžbi

14. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

- $f(n)$ je potpun kvadrat za sve $n \in \mathbb{N}$;
- $f(m + n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

15. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

za sve realne brojeve x i y.

16. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x))$$

17. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a i b vrijedi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

18. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (a, b) vrijedi

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

19. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$$

za sve realne brojeve x i y.

20. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x)$$

za sve realne brojeve x i y.

21. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ multiplikativna funkcija takva da je $f(4) = 4$ i vrijedi

$$f(m^2 + n^2) = f(m^2) + f(n^2)$$

za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Dokaži da vrijedi $f(m^2) = m^2$ za svaki prirodan broj m.

22. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki prirodan broj n važi $f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$?

23. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$f(m^2 + mf(n)) = mf(m+n).$$

24. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

gdje je $\lfloor a \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od a.

25. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

za sve racionalne brojeve x i y.

Zadaci za samostalan rad

1. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

za sve prirodne brojeve m i n.

2. Nađi sve funkcije $f : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ takve da

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

za sve pozitivne realne brojeve w, x, y, z, za koje vrijedi $wx = yz$.

3. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve x, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

4. Neka je $\mathbb{N}_0$ skup svih nenegativnih cijelih brojeva. Nađi sve injektivne funkcije $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da

$$f(x) - f(y) \mid x^2 - yf(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}_0$ takve da je $x \neq y$.

5. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takve da

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

vrijedi za sve x, $y \in \mathbb{R}$.

6. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da nejednakost

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

7. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da vrijedi

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

8. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, takve da vrijedi $f(x+f(x)+f(y)) = 2f(x)+y$ za sve pozitivne realne brojeve x, y.

9. Nađite sve funkcije $f : Z_{>0} \to Z_{>0}$ takve da je broj $xf(x) + f^2(y) + 2xf(y)$ potpuni kvadrat za sve prirodne brojeve x i y. x, y.

10. Nađite sve funkcije $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve a i b, postoji nedegenerirani trokut sa stranicama duljine

$$a, f(b) \text{ and } f(b + f(a) - 1).$$

(Trokut je nedegeneriran ako mu vrhovi nisu kolinearni.)

7. Zadaci za petu grupu

7.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 7.1.1

Polinom n-tog stupnja je funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.
Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ je nul-polinom i nema stupanj.

Teorem 7.1.2: Teorem o nul-polinomu

Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, jednak je nul - polinomu ako i samo ako $a_i = 0, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 7.1.3: Teorem o jednakosti polinoma

Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^m + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako $m = n$ i $a_i = b_i, i = 0, 1, ..., n$.

Teorem 7.1.4

Svaki polinom stupnja n se može jednoznačno (do na permutaciju) zapisati kao
$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma, a $x_1, x_2, \ldots x_n$ ne nužno različite (kompleksne) nultočke polinoma.

Korolar 7.1.5

Ako polinom ima više različitih nultočaka od njegovog stupnja onda to mora biti nul-polinom.

U zadacima će se najćešće dokazati da polinom ima beskonačno nultočaka, pa i više od stupnja koji je konačan broj.

Korolar 7.1.6

Dva polinoma su jednaka ako i samo su im vodeći koeficijenti jednaki te imaju iste nultočke s istim kratnostima.

Teorem 7.1.7: Vietove formule

Neka je $P(x)$ polinom stupnja n: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ te neka je $P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ njegov zapis preko nultočaka. Definiramo $T = \{1, 2, \ldots, n\}$. Onda vrijedi $\sum_{S \subseteq T,\ |S|=n-k} \prod_{i \in S} x_i = (-1)^{n-k} \cdot \frac{a_k}{a_n}$ Za svaki $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.
Na primjer za $k = n-1,\ n-2$ i 0:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Lakši zadaci

1. Neka je $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$ polinoms realnim koeficijentima takav da vrijedi $a_{n-1} = 2n$ i $a_{n-2} = 2n^2$. Dokaži da nisu sve nultočke od $P(x)$ realne.

2. Neka je $P(x)$ polinom s realnim koeficijentima takav da vrijedi $P(x-1) + P(x+1) = 2P(x)$. Dokaži da je P najviše stupnja 1.

3. Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{C}$. Neka je $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_n$ polinom s kompleksnim koeficijentima kojem su sve nultočke $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Neka je $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n$ kojemu su sve nultočke $x_1^2, x_2^2 \ldots, x_n^2$. Dokaži da ako su $a_1 + a_3 + \ldots$ (svi neparni indeksi) i $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ (svi parni indeksi) realni brojevi tada je i $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ realan broj.

4. Neka je $p(x)$ polinom stupnja n i $p(k) = \frac{k}{k+1}$ za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Odredite $p(n+1)$.

Teži zadaci

5. Pronađi sve polinome $P(x)$, s realnim koeficijetima, takve da vrijedi

$$P(x) \cdot P(2x^2 - 1) = P(x^2) \cdot P(2x - 1)$$

za sve realne brojeve x.

6. Neka je $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz polinoma definiran s $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 + 1$ za svaki prirodan broj n. Dokaži da za polinom P s realnim koeficijentima vrijedi $P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1\, \forall x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako se P nalazi u nizu $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

7. Pronađi sve polinome P sa samo realnim nultočkama takve da je

$$P(x) \cdot P(-x) = P(x^2 - 1)$$

za sve realne brojeve x.

7.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Osnovna ideja dvostrukog prebrojavanja je prebrojati broj elemenata istog skupa na dva različita načina. S obzirom da se radi o istom skupu, dobiveni rezultat mora biti jednak neovisno o načinu brojanja, pod pretpostavkom da smo ispravno brojali.
Tako, primjerice, možemo dokazati jednakost neka dva izraza ili dokazati da neka konstrukcija nije moguća (u slučaju kada jednakost koju dobijemo prebrojavanjem na dva različita načina ne može vrijediti - riječ je zapravo o metodi dokazivanja kontradikcijom).

Primjer 7.2.1. Zbrajamo li brojeve u tablici, dobit ćemo isti rezultat zbrojimo li prvo brojeve po svim retcima te zatim zbrojimo dobivene sume, kao i ako prvo zbrojimo brojeve po stupcima.

Primjer 7.2.2. Na nekom natjecanju svaki učenik riješio je točno tri zadatka, a svaki zadatak riješilo je točno troje učenika. Dokaži da su broj učenika i broj zadataka jednaki.

Rješenje 7.2.2. Prebrojimo broj ukupnih točnih rješenja zadataka. Ta vrijednost jednaka je zbroju broja učenika koji su riješili neki zadatak (za svaki zadatak), kao i zbroju broja zadataka koji su riješili učenici (za svakog učenika).
Označimo broj učenika sa x, broj zadataka s y, a broj točnih rješenja sa S.
Tada imamo:

$$S = 3x \text{ svaki učenik je točno riješio po 3 zadatka}$$

$$S = 3y \text{ svaki zadatak je točno riješilo 3 učenika,}$$

iz čega slijedi:

$$3x = 3y \implies x = y$$

što je i trebalo dokazati.

□

Zadaci

1. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

2. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane).
   a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
   c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
   d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

3. 15 učenika sudjeluje na ljetnom kampu. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Kamp traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k.

4. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane).
   a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
   b) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

c) $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

d) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

5. Izračunajte sumu: $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}$

6. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

Malo teži zadaci

7. Na matematičkom natjecanju sudjeluje 200 učenika. Natjecanje se sastoji od 6 zadataka, i svaki zadatak riješilo je barem 120 učenika. Dokaži da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio barem jedan od njih.

8. Označimo s p_k broj permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ sa točno k fiksnih točaka (i je fiksna točka ako se broj i nalazi na i-tom mjestu u permutaciji). Dokaži da vrijedi $p_1 + 2p_2 + ... + np_n = n!$.

9. Dana je 3×7 ploča u kojoj je svako polje obojano plavo ili crveno. Dokaži da postoje 2 reda i 2 stupca (ne nužno za redom) čiji presjeci daju 4 polja iste boje.

Teški zadaci

10. Na natjecanju sudjeluje a natjecatelja i b sudaca, pri čemu je $b \geq 3$ neparan prirodan broj. Svaki sudac ocjenjuje svakog natjecatelja sa "prošao" ili "pao". Neka je k broj takav da se za svaku dvojicu sudaca njihove ocjene poklapaju kod najviše k natjecatelja. Dokažite da je $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

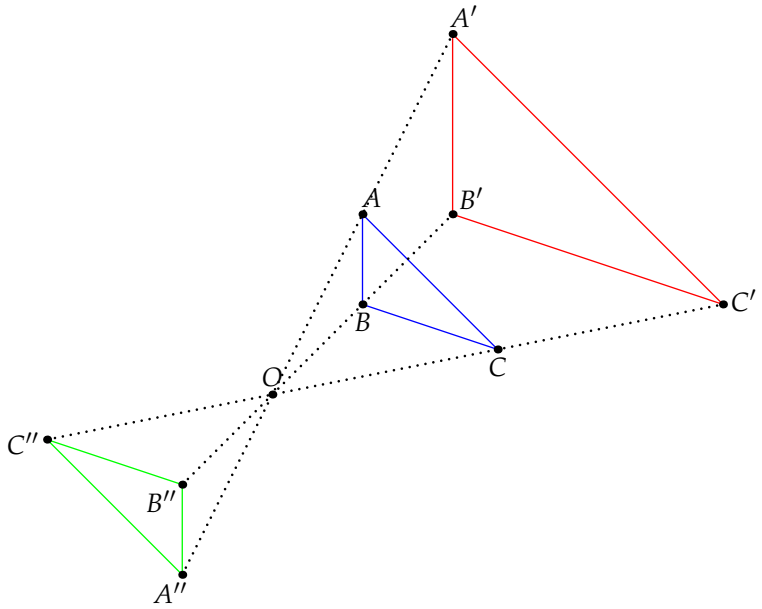
11. Interval $< 0, 20 >$ je pokriven s 13 otvorenih podintervala tako da nijedan nije podskup unije ostalih. Dokaži da bar jedan od ovih podintervala ima duljinu ne veću od 3.

7.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Formalno, homotetija s koeficijentom k, $k \in \mathbb{R}$ iz centra O je preslikavanje ravnine koje svaku točku T šalje u neku točku T^* tako da vrijedi $\overrightarrow{OT^*} = k \cdot \overrightarrow{OT}$ gdje su dužine usmjerene. Neformalno, o homotetiji možemo razmišljati kao transformaciji koja fiksira jednu točku, centar homotetije, te iz nje stežemo ili istežemo ravninu. Na slici je dan jednostavan primjer dvaju homotetija iz centra O koje trokut ABC transformiraju s koeficijentom 2 i -1.



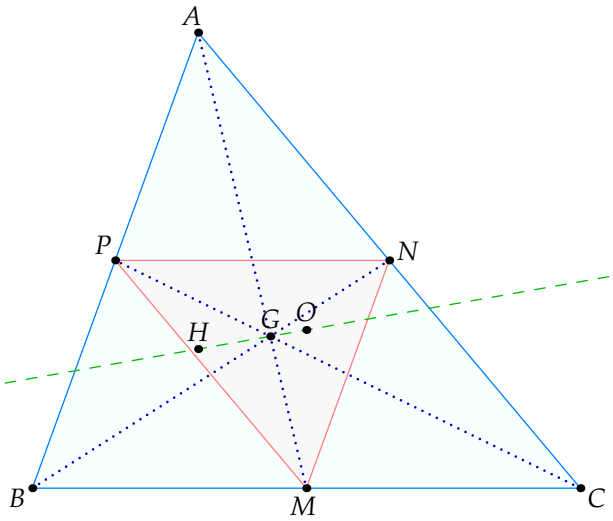
U svrhu jednostavnosti, sliku nekog objekta p pod nekom homotetijom $\mathcal{H}(O,k)$ ćemo označavati s $\mathcal{H}(p)$. Unatoč tome što je transformacija jednostavna, javlja se veliki skup jednostavno dokazivih posljedica:

- Točke O, T i T^* su kolinearne.
- Ako su pravci p i q paralelni, onda su i pravci $\mathcal{H}(p)$ i $\mathcal{H}(q)$.
- Ako su A, B i C neke točke u ravnini, onda $\angle(AB, BC) = \angle(\mathcal{H}(AB), \mathcal{H}(BC))$, odnosno, homotetija očuvavava kuteve.
- Homotetija očuvava tangentnost između pravaca i kružnica, odnosno, kružnica i kružnica.
- Svaka homotetija ima jedinstvenu inverznu homotetiju, odnosno $\mathcal{H}(O,k)^{-1} = \mathcal{H}(O, \frac{1}{k})$.
- Vrijedi $d(\mathcal{H}(\overline{AB})) = k \cdot d(\overline{AB})$.
- Kompozicija dvaju homotetija $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ je homotetija osim ako $k_1 \cdot k_2 = 1$.
- Ako imamo dva nesukladna trokuta ABC i $A'B'C'$ takve da je $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ i $CA \parallel C'A'$, postoji homotetija $\mathcal{H}()$ koja šalje trokut $ABC \mapsto A'B'C'$.

Sve prethodne činjenice su lako dokazive koristeći ili Kartezijev koordinatni sustav ili Gaussovu ravninu te ih zbog toga ovdje nećemo dokazivati.
Pogledajmo jedan primjer u kojem homotetija povezuje tri karakteristične točke trokuta, težište (G), ortocentar (H) i centar opisane (O).

Primjer 7.3.1. Neka su M, N, P redom polovišta stranica BC, CA, AB trokuta $\triangle ABC$. Dokažimo da su točke H , O i G kolinearne. Pravac na kojem leže ove točke naziva se Eulerov pravac.

Rješenje 7.3.1. Motivacija za ovu kolinearnost potječe iz činjenice da centar opisane O u kontekstu $\triangle ABC$ oponaša ortocentar u kontekstu $\triangle MNP$. Uistinu, O leži na simetrali stranice BC pa je $OM \perp BC$ a budući da je NP srednjica paralelna sa BC imamo $MO \perp NP$. Analogno dobivamo i $NO \perp PM$ i $PO \perp MN$.



Daljnja inspiracija nam dolazi iz činjenice da su $\triangle MNP$ i $\triangle ABC$ slični pa ukoliko pronađemo nekakvo preslikavanje koje šalje $\triangle MNP$ u $\triangle ABC$ zasigurno će slati ortocentar jednog trokuta u ortocentar drugog trokuta.
I tu u priču ulazi homotetija, naše željeno preslikavanje. Kako se težište nalazi na sjecištu svih težišnica i dijeli sve težišnice u omjeru $2:1$, jasno je da će nam težište poslužiti kao centar homotetije.

$$\mathcal{H} : \triangle MNP \to \triangle ABC$$

Gdje je $\mathcal{H}$ homotetija sa centrom u G i koeficijentom -2. Zbog prethodno navedene argumentacije imamo $\mathcal{H}(O) = H$ što znači da su O, H i centar homotetije G kolinearni. □

Korolar 7.3.1

Iz ove homotetije možemo doći i do sljedećih netrivijalnih omjera:

$$\frac{HG}{GO} = 2, \quad \frac{AH}{MO} = 2$$

i ciklične varijante potonjeg.

Zadaci

1. Dokažite da postoji homotetija koja šalje trokut $\triangle ABC$ u trokut $\triangle DEF$ za dva nesukladna trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ ako i samo ako vrijedi $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ i $CA \parallel FD$.

2. Dijagonale trapeza $ABCD$ sijeku se u točki O. Dokažite da se opisane kružnice trokuta $\triangle AOB$ i $\triangle COD$ dodiruju.

3. Pomoću homotetije dokažite postojanje kružnice devet točaka (polovišta stranica, nožišta visina i polovišta spojnica vrhova s ortocentrom leže na jednoj kružnici). Također, dokažite da centar te kružnice leži na Eulerovom pravcu (pravac $H - G - O$ iz prethodnog primjera).

4. (**7 jednakih kružnica**) Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i H_a H_b, H_c polovišta dužina AH, BH i CH redom dok su A',B',C' polovišta stranica AB, BC, CA redom. Dokaži da su kružnice opisane trokutima AH_aB', AH_aC', BH_bA', BH_bC', CH_cA', CH_cB' i $H_aH_bH_c$ jednake.

5. (**Ćevidova lema**) Neka su Γ i ω kružnice takve da ω dira Γ iznutra u točki T. Neka je AB tetiva kružnice Γ koja dira ω u točki P. Dokaži da pravac TP raspolavlja luk AB kružnice Γ.

Tri zadataka s tri Kružnice

6. Neka su ω_1 i ω_2 kružnice koje se nalaze unutar kružnice Ω te diraju ju u točkama A i B redom. Kružnice ω_1 i ω_2 se diraju u E, neka su X i Y sjecišta pravaca AE i BE sa Ω. Dokaži da je XY promjer Ω.

7. Neka su ω_1 i ω_2 kružnice sa središtima O_1 i O_2 koje se nalaze unutar kružnice Ω sa središtem u O te diraju ju u točkama A i B redom. Kružnice ω_1 i ω_2 se sjeku u E i F. AF siječe Ω u X a BF siječe Ω u Y. Dokaži da je $\angle XOY = \angle O_1EO_2$

8. Kružnica ω_1 sa središtem u O_1 dira kružnicu Ω iznutra u točki A dok ω_2 sa središtem u O_2 dira kružnicu Ω izvana u točki B. Neka je C proizvoljna točka na kružnici različita od A i B. CA siječe ω_1 u X a CB siječe ω_2 u Y. Dokaži da pravci XY, O_1O_2, i AB prolaze kroz istu točku.

7.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Neke od korisnih ideja kod rješavanja diofantskih jednadžbi su:

1. Promatranje ostataka pri dijeljenju s nekim brojem
2. Uvođenje najvećeg zajedničkog djelitelja (gcd) nekih dva broja
3. Pretpostavljanje uređaja brojeva kod simetričnih ili cikličnih jednadžbi (npr. jedan od danih brojeva je najveći pa pretpostavimo koji će to biti)
4. Beskonačni spust
5. Promatranje prostog djelitelja nekog broja
6. Pokazivanje da je u nekom slučaju jedna strana jednadžbe veća od druge

Zadaci

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi:

$$m^3 + n^3 = (m+n)^2$$

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

3. Odredi sve parove m, n prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$n! + 5 = m^3$$

4. Odredi sve prirodne n za koje postoji prost broj p takav da vrijedi:

$$n^4 + 4^n = p$$

5. Odredi sve cijele x, y koji zadovoljavaju:

$$15x^2 - 7y^2 = 9$$

6. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

7. Odredi sve parove x, y cijelih brojeva koji zadovoljavaju:

$$x^3 + 3 = 4y(y+1)$$

8. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$a(a+1) = b^c$$

9. Riješi u skupu prostih brojeva jednadžbu:

$$p^q + 1 = r$$

10. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

11. Odredi sve $a, b \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju:

$$(a^a)^5 = b^b$$

12. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$$

13. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + x^x = y^x$$

14. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu:

$$a^a + b^b + c^c = d^d$$

15. (Baltic Way 2011.) Odredi sve uređene parove (p, q) prostih brojeva za koje su $p^2 + q^3$ i $p^3 + q^2$ potpuni kvadrati.

16. (Vojtech izborno 2019.) Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\sigma$ svi djelitelji n. Odredite n ako znamo:

a) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$

b) $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

17. (Poljska 2005.) Odredi sve trojke (x, y, n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju $(x - y)^n = xy$.

7.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije

Link na hintove. Link na rješenja.

Funkcijske jednadžbe su tip zadataka koji često dolazi na domaćim (državno 4.r., HMO), ali i međunarodnim natjecanjima. Unatoč tome što dolaze na višim razinama natjecanja, zahtijevaju jako malo predznanja i velik broj njih se može riješiti bez prevelikog ulaženja u dubinu. Naravno, kao i sa svim drugim stvarima, ključno je provježbati hrpu zadataka.

Kratko o funkcijama

S obzirom da je pretpostavka predavanja da ste već upoznati s osnovama funkcijskih jednadžbi, ovdje samo ističem neka svojstva funkcija koja imaju naziv i često se javljaju kod rješavanja funkcijskih jednadžbi.

Definicija 7.5.1: Svojstva funkcija

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je:

- *injekcija* ako $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$.
- *surjekcija* ako za svaki element b skupa B postoji element a skupa A takav da je $f(a) = b$.
- *bijekcija* ako je ujedno i injekcija, i surjekcija.
- *involucija* ako vrijedi $f(f(a)) = a$, za svaki $a \in A$.
- *parna* ako vrijedi $f(x) = f(-x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.
- *neparna* ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

Funkcijske jednadžbe

Sada kada smo definirali osnovne pojmove i izraze koje ćemo koristiti, možemo se okrenuti na funkcijske jednadžbe. Klasična funkcijska jednadžba je oblika: „Pronađite sve funkcije $f\colon A \to A$ takve da vrijedi $P(x, y)$.", gdje je A jedan od naših klasičnih skupova, a uvjet je neka propozicija, najčešće u dvije varijable koja nam govori o nekim jednakostima. Naravno, sve je puno jasnije kroz primjere pa je vrijeme da prođemo kroz neke najstandardnije metode i ideje.

Cauchyjeva funkcijska jednadžba

Cauchyjeva funkcijska jednadžba je vjerojatno najpoznatija funkcijska. Najgeneralnije, pitanje je da pronađemo sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

za sve realne brojeve x i y. U tom generalnom formatu, rješenje je netrivijalno pa ćemo se ograničiti na slučaj $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
Od sada, pa nadalje, s $P(x, y)$ ćemo označavati uvrštavanje konkretnih vrijednosti x i y u dani uvjet. Uočimo

$$P(0, 0) \implies 2f(0) = f(0) \implies f(0) = 0.$$

Također,

$$P(x, 1) \implies f(x + 1) = f(x) + f(1)$$

odakle indukcijom lagano vidimo da je $f(n) = nf(1)$, za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Opet, imamo

$$P\left(\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right) \implies f\left(\frac{2}{q}\right)=2f\left(\frac{1}{q}\right)$$

odakle opet možemo induktivno proširiti sve do $f(q)=qf(1)$, za sve racionalne brojeve q. Lagano se provjeri da je to uistinu rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

> **⚠ Oprez**
>
> Užasno je važno da na kraju uistinu provjerite da su rješenja koja ste dobili ujedno i rješenja funkcijske jednadžbe. Ako to ne napravite, skoro pa sigurno gubite bodove.

Neke metode

Indukcija

Kao što smo u prethodnom poglavlju vidjeli, neke funkcijske jednadžbe se mogu riješiti indukcijom. Ono što je na prvu jasno je da funkcijske koje uključuju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u načelu neće padati na indukciju, no, svi ostali slučajevi trebaju biti hint da barem razmislimo o indukciji. Primjer funkcijske jednadžbe na kojoj prolazi indukcija smo vidjeli kod Caucyhjeve funkcijske.

(A)simetrija

Ponekad, zadaci znaju biti zadani tako da je samo jedna strana simetrična. Tada je pametno probati uvrstiti (y,x) i vidjeti što se dobije, kao što možemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 7.5.1. Nađite sve injektivne funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da je

$$f(x+f(y))+f(xy)=f(x+1)f(y+1)-1$$

za sve realne brojeve x i y.

Rješenje 7.5.1. Ako uvrstimo (y,x), vidimo da mora vrijediti

$$f(x+f(y))=f(y+f(x))$$

pa iz injektivnosti dobivamo da je

$$x+f(y)=y+f(x) \implies f(x)=x+c, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Sada uvrštavanjem u originalni uvjet odredimo postoji li kakvo ograničenje na c i provjerimo da je ta funkcija uistinu rješenje. □

Forsiranje skraćivanja

Ponekad su funkcijske takve da možete forsirati skraćivanje nekih članova s lijeve i desne strane tako što namjestite da izrazi koje uvrštavate u funkciju budu jednaki. To konkretno vidimo na sljedećem primjeru.

Primjer 7.5.2. Nađite sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da je

$$f(x^2+y)=f(x^{27}+2y)+f(x^4),$$

za sve realne brojeve x i y.

Rješenje 7.5.2. Ideja je da se prvi izraz na lijevoj strani pokrati s drugim izrazom na desnoj strani. U tu svrhu, gledamo što se događa kad uvrstimo (x,x^2-x^{27}). Dobivamo

$$f(2x^2-x^{27})=f(2x^2-x^{27})+f(x^4) \implies f(x^4)=0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Naravno, to znači da je $f(x)=0$ za sve realne brojeve x veće od nula. Naposljetku, lagano dovršimo uvrštavanjem $(x,0)$. □

Pointwise trap

„Pointwise trap" je česta greška u zaključivanju koja se javlja kod rješavanja funkcijskih. Recimo za primjer da u nekom trenutku dobijemo da vrijedi

$$f(x)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Netko bi mogao reći da onda iz ovoga slijedi

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ili} \quad f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R},$$

no, to nije točno. Jedino što možemo zaključiti je

$$f(x) \in \{x, -x\}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pointwise trap najčešće riješimo bez veće muke, naime, pretpostavimo da imamo neke a i b takve da je $f(a) = a$ i $f(b) = -b$ te onda uvrstimo, no, ponekad može biti i teže. U svakom slučaju, važno je paziti da je svaki zaključak koji radimo validan. Primjer u kojem je zaključivanje mrvicu kompliciranije slijedi.

Primjer 7.5.1. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y,$$

za sve realne brojeve x i y.

Rješenje 7.5.1. Prvo prepoznamo da opet možemo forsirati kraćenje, odnosno, namjestit y tako da se prvi izrazi na lijevoj i desnoj strani pokrate. U to ime, uvrstimo $\left(x, \frac{x^2 - f(x)}{2}\right)$ i dobivamo

$$f(x)(x^2 - f(x)) = 0 \implies f(x) \in \{0, x^2\}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sada moramo odrediti za koje sve t možemo imati $f(t) = 0$. Prvo, uočimo da je nužno $f(0) = 0$. Uvrštavanjem $(0, y)$ dobivamo da je funkcija parna.
Pretpostavimo sada da postoje $a, b \neq 0$ takvi da je $f(a) = a^2$, $f(b) = 0$. Tada zbog parnosti također $f(-a) = a^2, f(-b) = 0$.
Uvrstimo sada (b, a) i $(b, -a)$. Imamo

$$f(b^2 + a) = f(a) = f(b^2 - a),$$

odakle analiziranjem slučajeva dobivamo da je nužno $ab = 0$ što je kontradikcija. Dakle, ili je $f(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$, ili je $f(x) = x^2$, za sve $x \in \mathbb{R}$. □

Zadaci

Zadaci su otprilike poredani po težini, no, u načelu su svi slične težine.

1. Ako za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi $f(f(x)) = x$, dokažite da je bijekcija.

2. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

   $$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

   za sve realne brojeve x i y.

3. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

   $$f(x + 2y) = f(x)f(y)$$

   za sve realne brojeve x i y.

4. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$$

za sve prirodne brojeve m i n.

5. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da je

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

za sve cijele brojeve a i b.

6. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

7. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

8. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

9. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y,$$

za sve realne brojeve x i y.

10. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$$

za sve realne brojeve x i y.

11. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(xf(y)) + f((f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

za sve realne brojeve x i y.

Teži zadaci

12. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(a^2 + ab + f(b^2)) = af(b) + b^2 + f(a^2),$$

za sve realne brojeve a i b.

13. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy)$$

za sve realne brojeve x i y.

14. Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(xf(y)) + f(x^2) = f(x)(x + f(y))$$

za sve realne brojeve x i y. Odredi $f(2^{2016})$.

Ovo je u domeni „TB funkcijskih” i predviđeno je za one koji su sve riješili i užasno im je dosadno. U rješenjima se ne koristi ništa pretjerano komplicirano, no, metode nisu isključivo one o kojima smo pričali na predavanju i predviđene su samo za one kojima je jako jako dosadno i riješili su sve prethodne zadatke.

15. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća 2 uvjeta:

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$

- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv s prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

16. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da:

- za sve prirodne m i n, vrijedi $f(mn) = f(m)f(n)$;
- za sve prirodne brojeve m i n, vrijedi $m + n \mid f(m) + f(n)$.

8. Zadaci za šestu grupu

8.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste

Link na hintove. Link na rješenja.

Pada? Raste? Koliko brzo raste?

Definicija 8.1.1

Za niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ kažemo da je *rastući* ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Analogno definiramo padajući niz.

Definicija 8.1.2

Za niz realnih brojeva kažemo da je *ograničen* ako postoji realan broj M takav da je $|a_n| \leq M$ za svaki prirodan broj n.

Definicija 8.1.3

Za niz $a_1, a_2, \ldots$ kažemo da je *stacionaran* (eventually constant) ako postoji prirodan broj m takav da je $a_n = a_m$ za svaki $n \geq m$.

Lema 8.1.4

Pretpostavimo da je $a_1, a_2, \ldots$ ograničen rastući niz ili padajući niz čiji članovi su prirodni brojevi. Tada je taj niz stacionaran.

Dakle, ako nas zadatak pita da dokažemo da je niz stacionaran, dobra strategija je pokušati dokazati da je monoton.

Definicija 8.1.5

Za niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ kažemo da je *konveksan* ako je $a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n$ za svaki prirodan broj n. Kažemo da je *konkavan* ako vrijedi suprotna nejednakost.

Lema 8.1.6

Ako je niz $a_1, a_2, \ldots$ konveksan i ograničen odozgo, onda je padajući. Analogno, ako je niz konkavan i ograničen odozdo, onda je rastući.

Nizovi kojima znamo formule

Primjer 8.1.1. Geometrijski niz je niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ takav da je $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$ za svaki prirodan broj n. Takav niz možemo opisati formulom $a_n = q^n a_0$ za neke realne konstante q i a_0.

Primjer 8.1.2. Aritmetički niz je niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ takav da je $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ za svaki prirodan broj n. Takav niz možemo opisati formulom $a_n = dn + a_0$ za neke realne konstante d i a_0.

Zadatak 8.1.3. Odredi sve nizove realnih brojeva koji su i aritmetički i geometrijski.

Sada ćemo opisati postupak za određivanje opće formule jedne važne klase nizova.

Definicija 8.1.7

Za niz $a_1, a_2, \ldots$ kažemo da je linearno rekurzivan ako postoje prirodan broj d i realni brojevi $c_1, \ldots, c_d$ takvi da je $c_1 \neq 0$ i za svaki prirodan broj $n > d$ vrijedi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d}.$$

Ovu jednakost zovemo linearna rekurzija.

Primjer 8.1.4. Fibonaccijevi brojevi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Fibonaccijev niz smo zadali rekurzivnom relacijom i s prva dva člana. Tako bismo generalno linearno rekurzivne nizove zadali rekurzivnom relacijom i s prvih d članova, gdje je d kao u gornjoj definiciji. Dakle, imamo d stupnjeva slobode.

Bavimo se prvo pitanjem određivanja svih nizova koji zadovoljavaju linearnu rekurziju

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_d a_{n-d}.$$

Glavna opservacija je sljedeća. Ako je u (ne nužno realna) nultočka polinoma $u^d - c_1 u^{d-1} - c - 2u^{d-2} - \ldots - c_d$, onda niz $a_n = u^n$ zadovoljava gornju rekurziju. Taj polinom zovemo karakteristični polinom linearne rekurzije.

Nadalje, ako nizovi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ zadovoljavaju rekurziju, zadovoljava ju i njihova linearna kombinacija, tj. niz oblika $(\alpha a_n + \beta b_n)_n$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

S te dvije opservacije smo gotovi ako karakteristični polinom ima d različitih nultočaka $u_1, \ldots, u_d$. Tada je svaki niz koji zadovoljava našu rekurziju oblika

$$a_n = \alpha_1 u_1^n + \ldots + \alpha_d u_d^n,$$

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ neki realni brojevi, koje možemo jedinstveno odrediti iz početnih članova $a_1, \ldots, a_d$ tako da riješimo sustav d jednadžbi s d nepoznanica:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 u_1^1 + \ldots + \alpha_d u_d^1 \\ a_2 &= \alpha_1 u_1^2 + \ldots + \alpha_d u_d^2 \\ &\vdots \\ a_d &= \alpha_1 u_1^d + \ldots + \alpha_d u_d^d. \end{aligned}$$

Primjer 8.1.5. Odredimo opću formulu Fibonaccijevog niza. Pripadni karakteristični polinom je $x^2 - x - 1$, koji ima nultočke $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $1/\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Onda znamo da je $F_n = A\phi^n + B(1/\phi)^n$ za neke konstante A i B. Kako je $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, imamo sustav

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A\phi + B/\phi &= 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Još treba riješiti situaciju kad karakteristični polinom ima višestruku nultočku. Neka je u nultočka kratnosti k. Tada je ključna opservacija, koju ovdje nećemo pojašnjavati, da svaki niz $a_n = u^n n^j$ za $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ zadovoljava rekurziju. (Skica dokaza za znatiželjne: dvostruka nultočka polinoma je nultočka derivacije polinoma, iz čega se dobiva dodatna relacija koju u zadovoljava).

Iz toga i iz činjenice da je linearna kombinacija rješenja također rješenje dobivamo opći oblik niza koji zadovoljava rekurziju: ako su $u_1, \ldots, u_j$ nultočke karakterističnog polinoma s kratnostima $k_1, \ldots, k_j$, onda je

$$a_n = p_1(n)u_1^n + \ldots + p_j(n)u_j^n,$$

gdje je svaki p_i polinom stupnja manjeg ili jednakog $i-1$, čije koeficijente određujemo iz početnih d uvjeta.

Primjer 8.1.6. Svaki aritmetički niz zadovoljava rekurziju $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Pripadni karakteristični polinom je $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Jedina nultočka je 1 i kratnosti je 2, pa je (očekivano) opći oblik niza $a_n = p(n) \cdot 1^n$, gdje je $p(n)$ polinom stupnja manjeg ili jednakog 1.

⚠ Oprez

Slobodno pogodite opći član niza i dokažite indukcijom da je to oblik rješenja. Jako često je to dovoljno za nizove koji se pojave na natjecanjima.

⚠ Oprez

Nemojte loviti geparde harpunom. To što znate formulu ne znači da se svaki zadatak s rekurzivnim nizovima može riješiti tako da se izračuna opća formula. Štoviše, pomalo ironično, ponekad je opća formula niza beskorisna za zadatak.

Još jedna super stvar kod linearno rekurzivnih nizova je da ih možemo gledati modulo neki prirodan broj N, i da tamo imaju jedno jako lijepo svojstvo.

Teorem 8.1.8: Teorem o periodičnosti

Neka je $(a_n)_n$ linearno rekurzivan niz koji zadovoljava rekurziju s cjelobrojnim koeficijentima, tj.

$$a_n = c_d a_{n-d} + \ldots + c_1 a_{n-1}.$$

. Tada postoje M i T takvi da je

$$a_n \equiv a_{n+T} \pmod{N}$$

za svaki $n \geq M$. Drugim riječima, niz je eventually periodičan. Ako je još c_d relativno prost sa N, onda je niz potpuno periodičan, tj $a_n = a_{n+T}$ za sve $n \geq 1$.

Dokaz. Ne koristimo formulu za opći oblik. Koristimo samo Dirichletov princip. Recimo da je d dubina rekurzije. Onda postoje indeksi $i < j$ takvi da je $x_i \equiv x_j$, $x_{i+1} \equiv x_{j+1}, \ldots, x_{i+d-1} \equiv x_{j+d-1}$, gdje su kongruencije modulo N. Međutim, primijetimo da je ostatak od x_{i+d} pri dijeljenju s N jedinstveno određen ostacima prijašnjih članova, te analogno za x_{j+d}. Induktivno nastavljamo, i dobijemo $x_n = x_{n+j-i}$ za sve $n \geq i$.
Ako je još c_d relativno prost sa N, onda je i x_{i-1} određen s d članova nakon njega, pa primijenimo isti argument unazad. □

Primijetimo da je dokaz funkcionirao za sve nizove sa svojstvom da im ostatak mod N ovisi samo o prethodnih fiksno mnogo članova (u dokazu je to d članova). Onda tako i za neke druge nizove možemo zaključivati periodičnost modulo N. Imajte to na umu.

Zadaci

1. Odredite brojeve $a_1, a_2, \ldots$ ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i

$$a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2}, \quad (n \geq 3).$$

2. Postoji li niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\geq 1}$ takav da za svaki $n \geq 1$ vrijedi $a_{a_n} = a_{n+1} - a_n$?

3. Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ zadan je rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2\,(n + a_{n-1})$ za $n \geq 2$.
Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

4. Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ je takav da za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3a_{n-1}}{2}.$$

Pretpostavimo da su mu svi članovi cijeli brojevi. Dokaži da je $a_n a_{n+1} \leq 0$ za svaki $n \geq 0$. Daj primjer niza koji zadovoljava rekurziju, a kojem su prvih 2000 članova prirodni brojevi, od kojih nijedan nije djeljiv s 3.

5. Neka je $(a_n)_{n\geq 1}$ niz takav da je $a_1 = 11$ i za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$a_{n+1} = a_n^{17} + a_n.$$

Odredi ostatak koji a_{70} daje pri dijeljenju sa 17.

6. Neka je $N \geq 2$ prirodan broj, i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_N$ realni brojevi takvi da je $a_0 = a_N = 0$ i

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$

za $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Dokaži da vrijedi $a_i \leq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

7. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

8. Dokaži da postoji element Fibonaccijevog niza koji završava sa 100 nula.

9. Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ je zadan na ovaj način:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 1.$$

Dokažite da 2^k dijeli a_n ako i samo ako 2^k dijeli n.

10. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz realnih brojeva koji zadovoljava $\frac{a_n + a_{n+2}}{2} \geq a_{n+1}$ za svaki prirodan broj n. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

11. Odredi sve nizove $(a_1, a_2, \ldots)$ prirodnih brojeva takve da vrijedi

$$a_{n+1}^2 = 1 + (n + 2021)a_n$$

za svaki $n \geq 1$.

12. Neka su u i v pozitivni racionalni brojevi. Definiramo niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekurzivno tako da vrijedi $a_1 = u$, $a_2 = v$, te za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2 + 2 + a_n + a_{n-1}}.$$

Odredi sve parove (u, v) za koje je a_n racionalan za svaki prirodan broj n.

13. Dokaži da je $r = 2$ najveći realan broj r koji zadovoljava sljedeći uvjet:
Ako za niz prirodnih brojeva a_1, a_2, … vrijede nejednakosti

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

za svaki prirodan broj n, onda postoji prirodan broj M takav da je $a_{n+2} = a_n$ za svaki $n \geq M$.

14. Neka je $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ niz prirodnih brojeva. Dokaži da postoji jedinstven prirodan broj $n \geq 1$ takav da je

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

8.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu

Link na hintove. Link na rješenja.

Lakši zadaci

1. Sinčić i Lucija igraju igru u kojoj se na početku na hrpi nalazi n kamenčića. U jednom potezu dozvoljeno je uzeti s hrpe bilo koji broj kamenčića koji je potpun kvadrat. Igrač koji uzme zadnji kamenčić pobjeđuje. Lucija igra prva. Dokaži da Sinčić ima pobjedničku strategiju za beskonačno mnogo n.

2. (Dvostruki šah) Sva pravila su ista, osim što kad je igrač na redu smije napravit dva poteza. Dokažite da bijeli ima negubitničku strategiju.

3. Na kružnici je dato n točaka i pored svake od njih upisan je jedan od brojeva $1, 2, ..., n$ (svaki broj upisan je tačno jednom). Zatim su formirane razlike svaka dva susjedna broja. Dokazati da zbir apsolutnih vrijednosti tih razlika nije manji od $2n - 2$.

4. U klubu se nalazi 49 učenika. Ako za neka 3 učenika se nikoja 2 od njih međusobno ne poznaju tada postoje dvojica među njima koji imaju zajedničkog poznanika unutar kluba. Dokazati da postoji učenik koji ima najmanje 6 poznanika unutar kluba.

5. Neka je k prirodan broj i neka je F familija skupova od kojih svaki ima kardinalnost k. Ako svakih $k + 1$ skupova iz familije F ima neprazan presjek, dokazati da svi skupovi iz familije F imaju neprazan presjek.

6. Na ispitu je učestvovalo 25 studenata. Ispit se sastoji od nekoliko pitanja i za svako pitanje je ponuđeno pet odgovora. Ispostavilo se da su se odgovori svaka dva studenta poklapali na najviše jednom pitanju. Dokazati da na ispitu nije bilo više od 6 pitanja.

7. Za prirodan broj n sa T_n označimo broj načina da popločamo pravougaonik $2 \cdot 2n$ tetrominama. Npr $T_2 = 4$ jer 2×4 ploču možemo popločati na 4 načina. Dokaži da su svi brojevi $T_1, T_2, T_3, ...$ potpuni kvadrati.

Umjereni zadaci

8. Svaki od n učenika ima neki prirodan broj klikera, a svi učenici zajedno imaju ukupno $2n - 2$ klikera. Dokazati da za svaki prirodan broj $l \leq 2n-2$ postoji podskup skupa učenika koji ukupno ima tačno l klikera.

9. Dano je 1990 kutija, u $i - toj$ je i kuglica. Dozvoljen potez je odabrati skup kutija i maknuti jednak broj kuglica iz svake. Koliki je minimalan broj poteza potreban da se sve kutije isprazne?

10. Grupa pirata je imala svađu i sada svaki od njih drži dvojicu drugih pirata na nišanu. Kapetan proziva pirate jednog po jednog. Ako je prozvani pirati još uvijek živ, on upuca obojicu pirata koje drži na nišanu (od kojih su neki već potencijalno mrtvi). Svi pucnji su momentalno smrtonosni. Nakon što su svi prozvani ispostavilo da je točno 28 pirata ubijeno. Dokaži da bi, neovisno od reda kojim su pirati prozivani bi uvijek poginulo barem 10 pirata.

11. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Imamo n^2 klikera, svaki je u nekoj od n datih boja. Ne znamo koliko ima klikera koje boje. Dokaži da ih možemo rasporediti u n kutija tako da se u svakoj kutiji nalazi n klikera, tako da svaka kutija sadrži klikere u najviše dvije različite boje.

12. Neka je Q_n skup svih n-torki $x = (x_1, \ldots, x_n)$ za koje je $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Trojka (x, y, z) (gdje je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$) različitih elemenata Q_n naziva se dobrom ako postoji barem jedan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, za koji vrijedi $\{x_i, y_i, z_i\} =$

$\{0,1,2\}$. Podskup A skupa Q_n zovemo dobrim podskupom ako svaka 3 elementa A čine dobru trojku. Dokaži da svaki dobar podskup Q_n sadrži najviše $2 \cdot (\frac{3}{2})^n$ elemenata.

13. U svakom polju kvadratne table $2n \times 2n$ nalazi se po jedna sijalica koja može biti upaljena ili ugašena. U jednom koraku možemo da odaberemo red u kome je bar n sijalica upaljeno (pod "redom" podrazumijevamo bilo koji redak ili stupac), i da svim sijalicama u tom redu promjenimo stanje (upaljene ugasimo, a ugašene upalimo).

a) Dokazati da postoji početni raspored sijalica takav da, ma kako vršili korake, uvijek ostaje bar $2n(n-1)$ upaljenih sijalica.

b) Dokazati da se uvijek može u konačnom broju koraka postići da najviše $2n(n-1)$ sijalica bude upaljeno.

14. Na ploči je u napisano $n \geq 3$ prirodnih brojeva. Dozvoljena operacija je odabrati bilo koja 3 broja a, b, c na ploči koji su stranice nedegenerisanog nejednakostraničnog trougla i zamijeniti ih sa $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Dokaži da možemo napraviti samo konačno mnogo ovakvih poteza.

15. Za prirodan broj n, dva igrača Lana i Barbara igraju sljedeću igru: Data nam je hrpa sa s kamenčića pri čemu A igra prvi. U jednom potezu igrač smije s hrpe skloniti jedan kamenčić, prost broj kamenčića ili broj kamenčića djeljiv s n. Pobjeđuje ona koja uzme posljednji kamenčić. Pretpostavljajući da obje igraju savršeno za koliko vrijednosti s Lana ne može pobjediti?

16. Učenici nekog srednjoškolskog razreda pisali su ispit. Na svakom pitanju mogao se dobiti ili 1 bod za točan odgovor, ili 0 bodova za netočan odgovor. Poznato je da je na svako pitanje točno odgovorio barem jedan učenik te da nisu svi učenici ostvarili jednak ukupni rezultat na ispitu.

Dokažite da na testu postoji pitanje sa sljedećim svojstvom: Prosjek ukupnih rezultata učenika koji su na to pitanje odgovorili točno je veći od prosjeka ukupnih rezultata onih učenika koji su na njega odgovorili netočno.

17. Neka je n dani prirodan broj. Rastko vrši niz operacija na ploči koja se sastoji od $n+1$ polja u redu, označenih sa 0 do n s lijeva na desno. Na početku n kamenčića se nalaze na polju 0, a ostala polja su prazna. U svakom potezu Rastko bira neprazno polje. Ako to polje ima k kamnečića, on uzima jedan od ovih kamenčića i pomjera ga desno za najviše k polja (kamenčić mora ostati unutar ploče). Rastkov cilj je pomjeriti svih n kamenčića u polje n.

Dokaži da Rastko ne može ostvariti svoj cilj u manje od

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

poteza.

18. Na tabli je napisano n cijelih brojeva, $n \in \mathbb{N}$. U jednom potezu moguće je izabrati dva jednaka napisana broja i jedan od njih povećati za 1, a drugi smanjiti za 1. Dokaži da u ovoj igri nije moguće odigrati više od $\frac{n^3}{6}$ poteza.

Teži zadaci

19. Usmjereni graf G je turnir s n vrhova (između svaka dva grada A, B postoji jedna od grana AB, BA). Kolekcija puteva se naziva raznolika ako nikoja dva puta nemaju zajedničku granu. Neka su X, Y dva proizvoljna čvora grafa G. Sa N_{XY} označimo najveći mogući broj puteva u raznolikoj kolekciji puteva od X do Y. Dokaži da je $N_{XY} = N_{YX}$ ako i samo ako je broj grana koje izlaze iz X jednak broju grana koje izlaze iz Y.

20. Vjeverice Grmko i Skočko su skupile 2021 orah tijekom zime. Skočko je označio orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 malu rupu ukrug u tlu oko najdražeg stabla. Idućeg jutra Skočko

je primijetio da je Grmko stavio po jedan orah u svaku rupu, ali nije obraćao pažnju na brojeve. Skočko je zato odlučio promijeniti raspored oraha nizom od 2021 poteza. U k-tom potezu, Skočko mijenja pozicije dvama orasima susjednima orahu označenom brojem k. Dokaži da postoji broj k takav da u k-tom potezu Skočko mijenja pozicije nekim orasima označenima brojevima a, b takvima da vrijedi $a < k < b$.

21. U liniji je poređano n žetona, svaki sa jednom crnom i jednom bijelom stranom. U početku je svima bijela strana gore. U svakom koraku, ako je moguće, uklanjamo po jedan žeton sa bijelom stranom gore, ali ne jedan od krajnjih; pri tom dva žetona koji su mu najbliži na obje strane (lijevo i desno) okrećemo. Dokazati da možemo da postignemo da nam ostanu samo dva žetona ako i samo ako $n - 1$ nije deljivo sa 3.

22. Dan je prirodni broj $N > 2$. U skupini od $N(N + 1)$ nogometaša nikoja dva nisu iste visine. Ti su nogometaši poredani u red. Trener želi iz reda izbaciti $N(N - 1)$ igrača tako da preostalih $2N$ igrača tvori red za koji vrijedi sljedećih N uvjeta:

(1). između dva najviša igrača nema nikoga,

(2). između trećeg i četvrtog igrača po visini nema nikoga,

$\vdots$

(N) između dva najniža igrača nema nikoga.

Dokaži da je to uvijek moguće napraviti.

23. Na matematičkom natjecanju natjecatelji su imali da riješe 6 zadataka. Poznato je da za svaka dva od ovih zadataka vrijedi da ih je rješilo više od $\frac{2}{5}$ natjecatelja. Također, nijedan učenik nije riješio svih 6 zadatala. Dokaži da postoje 2 učenika koji su obojica riješili po 5 zadataka.

24. Na matematičkom natjecanju neki natjecatelji su prijatelji. Prijateljstvo je uzajamno obostrano. Grupu natjecatelja zvat ćemo družina ako su svaka dva među njima prijatelji. (Specijalno, grupa s manje od dva natjecatelja je družina.) Broj članova družine zvat ćemo njezinom veličinom. Ako je na tom natjecanju najveža veličina družine paran broj, dokaži da se natjecatelji mogu smjestiti u dvije prostorije tako da najveća veličina družine u jednoj prostoriji bude jednaka najvećoj veličini družine u drugoj.

8.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija

Link na hintove. Link na rješenja.

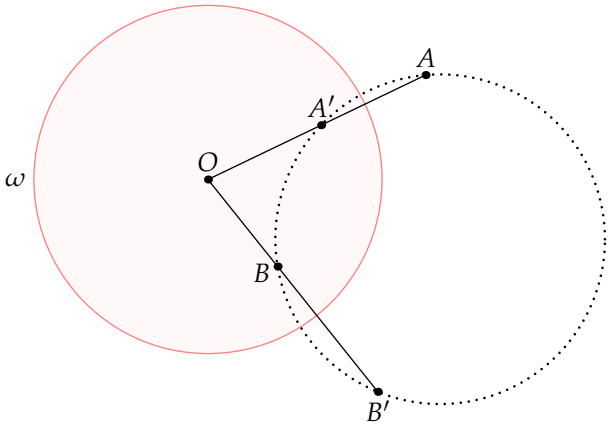
Inverzija je transformacija ravnine koja često olakšava razne zadatke. Danas ćemo vidjeti što inverzija zapravo jest i proći kroz neke najstandardnije primjene na zadacima. Iako je korisna, inverzija nije magična metoda koja će riješiti svaki zadatak pa je ne trebate kao takvu shvaćati.

Definicija

Naravno, prije svega, trebamo definirati što inverzija jest.

Definicija 8.3.1: Inverzija

Neka je ω kružnica sa središtem u O i polumjerom r. Inverzija s obzirom na kružnicu ω je transformacija ravnine koja svaku točku ravnine A šalje u točku A' na polupravcu OA takvu da vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$. Posebno, točku O šalje u točku u beskonačnosti[a], a točku u beskonačnosti u točku O.



[a] ne morate se previše s ovim zamarat na ovoj razini, najčešće vas ni ne brine gdje ide točka O

Ono što se odmah da uočiti jest da vrijedi

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB',$$

odnosno, zbog obrata potencije točke, imamo da su točke A, A', B i B' na istoj kružnici. Upravo iz toga slijedi većina svojstava koje ćemo kasnije dokazivati.
Naravno, nas neće zanimati samo gdje se šalje neka određena točka, nego ćemo gledati malo šire, odnosno, gdje se šalju različiti objekti pod inverzijom.

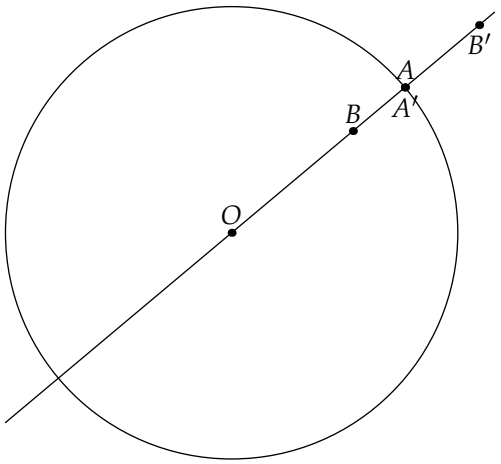
Osnovna svojstva

Prva stvar koju je bitno uočiti je da je inverzija involucija, odnosno, inverz inverza je originalna točka, ili, ako želimo to „matematički" zapisati, $(A')' = A$. Ova činjenica nam omogućuje da skratimo posao, jer ako se objekt klase p invertira u objekt klase q, tada vrijedi i obratno. Sada slijedi nekoliko dosadnih i neispirativnih dokaza koje navodim u svrhu potpunosti, no, prava intuicija slijedi na kraju poglavlja.
Također, drugo osnovno svojstvo slijedi iz tetivnosti koju smo uočili u uvodu, odnosno, imamo da je

$$\angle OAB = \angle OB'A'.$$

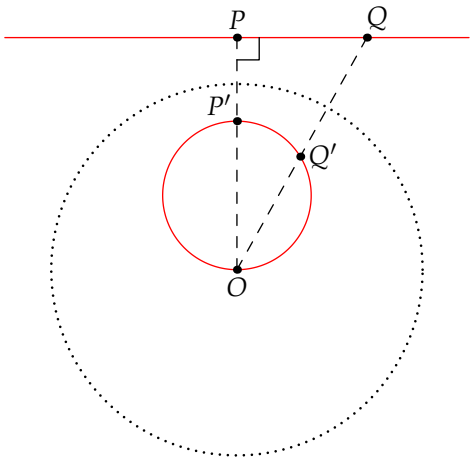
Pravac kroz središte inverzije

Neka je p bilo koji pravac koji sadrži točku O, i neka je A bilo koja točka na tom pravcu. Iz same definicije vidimo da je točka A' na polupravcu OA takva da je $OA \cdot OA' = r^2$. Kako je polupravac OA zapravo dio pravca p, a točka A' je iz definicije na polupravcu OA, imamo da je točka A' također na p, odnosno, pravac p se slika u samog sebe.



Pravac koji ne prolazi kroz središte inverzije

Ako imamo pravac koji ne prolazi kroz O, ipak moramo razmisliti da bi zaključili što se događa.

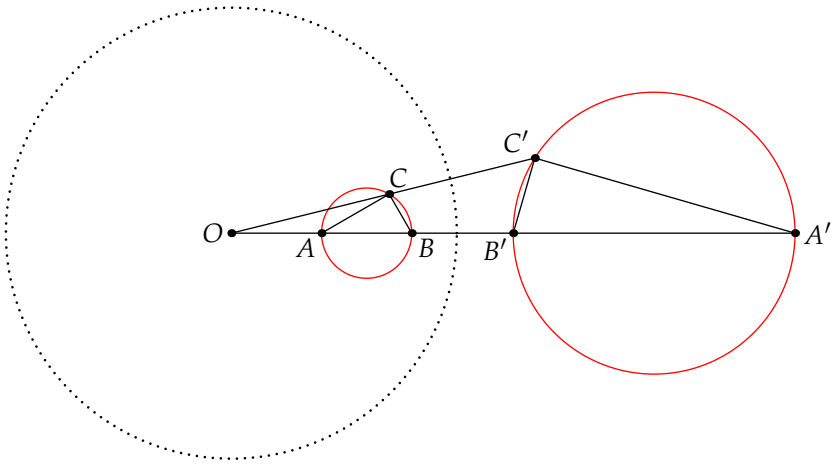


Ako je P nožište visine iz O na naš pravac ℓ, za bilo koju točku Q na pravcu ℓ vrijedi $\angle OPQ = 90°$. No, zbog gore opisane tetivnosti, imamo da je onda i $\angle OQ'P' = 90°$, dakle, točka Q' se nalazi na kružnici promjera OP'. Dakle, slika pravca ℓ koji ne prolazi kroz središte inverzije je kružnica koja prolazi kroz središte inverzije.

Naravno, zbog involutivnosti, vidimo da je slika kružnice koja prolazi kroz središte inverzije pravac koji ne prolazi kroz središte inverzije.

Kružnica koja ne prolazi kroz središte inverzije

Ostaje još slučaj kružnice koja ne prolazi kroz središte inverzije i riješili smo cijelu priču o pravcima i kružnicama.



Neka je Γ kružnica koja ne prolazi kroz O, središte inverzije. Neka su A i B na Γ takve da su O,A i B kolinearne te je AB promjer kružnice Γ. Uočimo da iz svojstava inverzije za proizvoljnu točku $C \in \Gamma$ imamo

$$\angle B'C'A' = \angle OC'A' - \angle OC'B' = \angle OAC - \angle OBC = \angle ACB = 90°,$$

dakle, C' je na kružnici s promjerom $A'B'$.

Oprez

Iako se na prvu može tako učiniti, središte kružnice se **ne slika (!!!)** u središte kružnice, no, središta se nalaze na istome pravcu kao i središte inverzije.

Dakle, kružnica koja ne prolazi kroz središte inverzije O se slika u kružnicu koja ne prolazi kroz središte inverzije O.

Rezime

Upravo smo dokazali sljedeće:

Oprez

Da rezimiramo, pod inverzijom sa središtem O imamo:

- pravac koji prolazi kroz O ostaje fiksan;
- kružnica oko koje invertiramo ostaje fiksna;
- pravac koji ne prolazi kroz O prelazi u kružnicu koja prolazi kroz O;
- kružnica koja prolazi kroz O prelazi u pravac koji ne prolazi kroz O;
- kružnica koja ne prolazi kroz O prelazi u kružnicu koja ne prolazi kroz O.

Šira slika

Iako ne pretjerano kompliciranu, pamtiti sve gornje relacije može biti dosta nezgrapno, a i zapravo dosta nemotivirano. U tu svrhu, pokazat ću interpretaciju koja se može jako lagano zapamtiti, no nju ne možemo direktno koristiti za dokaze.
Ono što smo dokazali jest da se kružnice i pravci slikaju u druge kružnice i pravce. Također, pokazali smo da ako je točka A na nekom objektu (kružnici ili pravcu) p, tada je A' na objektu p'. Prisjetimo se da smo rekli da se točka O slika u točku u beskonačnosti[1] P_∞ te obrnuto. Također, uočimo da pravce

[1] točku u beskonačnosti shvaćamo kao točku beskonačno udaljenu od ishodišta, koja se nalazi na svakome pravcu (jako teško za vizualizirati!)

možemo interpretirati kao beskonačno velike kružnice, odnosno, pravac OA shavaćamo kao kružnicu kroz O, A i P_∞.
Sada, uz ovu interpretaciju, direktno imamo sve gore dokazane tvrdnje. Neka je ℓ pravac koji prolazi kroz O i neka je A bilo koja točka na njemu. Tada znamo da je ℓ jedinstveno određen s točkama O, A i P_∞ pa je ℓ' jedinstveno određen točkama O', A' i P'_∞. Kako je A' na OA i $O' \equiv P_\infty$, $P'_\infty \equiv O$, imamo da je $\ell' \equiv \ell$.
Neka je ℓ pravac koji ne prolazi kroz točku O i neka su A i B bilo koje dvije točke na njemu. Tada je ℓ jedinstveno određen s A, B i P_∞, odnosno, ℓ' je jedinstveno određen s A', B' i $P'_\infty \equiv O$, odnosno, ℓ' je cline koji prolazi kroz A', B' i O, odnosno, kružnica kroz te tri točke.
Naposljetku, interpretacija za kružnicu koja ne prolazi kroz središte ostaje ista.
Iako je dosta teško konceptualizirati i zamisliti tu točku u beskonačnosti, vidimo da kroz tu malo težu interpretaciju zapravo dobijemo širu i kompletniju sliku. Dapače, vidimo da za određivanje slike pravca ili kružnice samo trebamo naći tri[2] točke na tom objektu i pogledati gdje se slikaju. Naposljetku, to je pristup koji koristimo u zadacima.

Duljine

Ponekad će nas zanimati duljine između invertiranih točaka. Na prvu vidimo da taj izraz neće biti pretjerano elegantan kao što je na primjer pri homotetiji, no nije ni toliko odvratan da ne znamo rukovati s njime. Naime, ako se vratimo na početnu skicu, lagano vidimo da su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$ slični, to jest, imamo

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} \implies A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

Naravno, kako je $(A')' \equiv A$, direktno dobivamo

$$AB = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'} \cdot A'B'.$$

Iako ih nećemo morati uvijek koristiti, ovi identiti su često korisni kada trebamo raditi s nekim duljinama. Naravno, iza ovog ne stoji neka preduboka teorija nego jednostavna potencija točke i sličnost.

Generalna strategija

Naravno, sada smo dokazali dosta stvari i vidjeli šta inverzija generalno jest, no još uvijek ostaje otvoreno pitanje što se tu zapravo događa, odnosno, kako će nam sve ovo pomoći da riješimo neki zadatak. Najgeneralnije, „algoritam za invertiranje” je sljedeći:

1. Odaberemo središte i radijus.
2. Idemo redom po točkama i gledamo možemo li direktno odrediti njihovu sliku (iz potencije točke, nekih udaljenosti, ...).
3. Idemo redom po pravcima i kružnicama i gledamo možemo li odrediti njihove slike (iz onih svojstava transformacije koje smo dokazali).
4. Opet prolazimo kroz točke na skici i gledamo možemo li identificirati inverze sada kada znamo inverze objekata na kojima se te točke potencijalno nalaze.
5. Gledamo dodatna svojstva inverzije (ona tetivnost, kutevi, duljine, ...) i gledamo možemo li tako nekako jedinstveno odrediti točku.
6. Pokušamo interpretirat tvrdnju originalnog zadatka na novoj skici i pratimo je li nam nešto potencijalno nedostaje, odnsono, jesmo li iskoristili sva svojstva originalnog zadatka i jesmo li pronašli sve inverze koji nas zanimaju.

[2] za pravce, dvije točke i P_∞

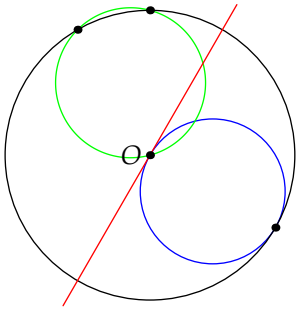
7. Za one točke/objekte u kojima gornji algoritam ne prolazi, pratimo koja parcijalna svojstva imamo iz gore navedenih koraka.

8. Rješavamo invertirani zadatak.

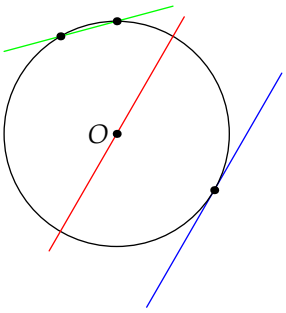
Naravno, gornji algoritam samo treba shvatiti kao neku širu sliku procesa kroz koji ćemo prolaziti u primjerima, a ne kao neki rigorozni skup pravila koji će prolazit u svakom zadatku.

Primjeri

Primjer 8.3.1. Odredite što se događa pri inverziji oko kružnice sa središtem u O na sljedećoj skici.



Rješenje 8.3.1. Situacija je sljedeća:



Plava kružnica prolazi kroz središte pa znamo da se slika u neki pravac. Također, istaknuta točka na plavoj kružnici se nalazi i na kružnici oko koje invertiramo pa će pravac prolaziti kroz tu točku. Naposljetku, kako je plava kružnica tangencijalna na kružnicu oko koje invertiramo, znamo da će nakon inverzije, ta objekta i dalje imati samo jedno sjecište, dakle, taj pravac mora biti tangentan na našu kružnicu.

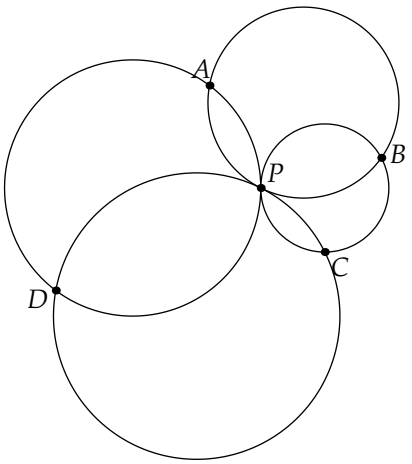
Crveni pravac prolazi kroz ishodište pa on ostaje fiksiran.

Zelena kružnica prolazi kroz dvije istaknute točke na kružnici oko koje invertiramo. Kako prolazi kroz središte inverzije, slika se u pravac, a kako su te dvije točke fiksne, to je upravo pravac kroz te dvije točke. □

Primjer 8.3.2 (IMO shortlist 2003./G4)**.** Neka su Γ_1, Γ_2, Γ_3 i Γ_4 disjunktne kružnice takve da se Γ_1 i Γ_3 te Γ_2 i Γ_4 diraju izvana u istoj točki P. Pretpostavimo da se Γ_1 i Γ_2, Γ_2 i Γ_3, Γ_3 i Γ_4 te Γ_4 i Γ_1 sijeku u točkama A, B, C i D, tim redom, te su sve te točke različite od P. Dokažite da vrijedi

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Rješenje 8.3.2. Za početak, nacrtajmo skicu.



Kao što na prvu vidimo, skica je dosta nezgrapna. Naime, imamo četiri kružnice, povezane u parovima vanjskom tangentnosti u točki P. Da bi tu tangentnost uspješno iskoristili, morali bi dodati još dosta točaka što bi još dodatno zakompliciralo skicu i zadatak. Umjesto toga, prepoznamo da kroz točku prolaze čak četiri kružnice, odnosno, sve kružnice zadatka. Invertirajmo oko kružnice radijusa 1, sa središtem u P.
Idemo redom:

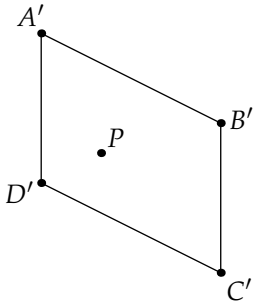
1. kružnice Γ_1 i Γ_3 diraju se izvana u točki P koja je središte inverzije, dakle, šalju se u paralelne pravce;

2. kružnice Γ_2 i Γ_4 se istom argumentacijom također šalju u paralelne pravce;

3. točka A je definirana kao presjek Γ_1 i Γ_2, dakle, točka A' je presjek pravaca koje dobijemo nakon inverzije kružnica Γ_1 i Γ_2;

4. analogne identifikacije vrijede i za ostale točke.

Naravno, iz prva dva uvjeta je jasno da pravci koje su inverzne slike kružnica čine paralelogram, odnosno, točke A', B', C' i D' su vrhovi paralelograma.



Ako iskoristimo formulu za duljine, znamo da je

$$A'B' = \frac{r^2}{PA \cdot PB} \cdot AB \overset{r=1}{\Longrightarrow} AB = A'B' \cdot PA \cdot PB.$$

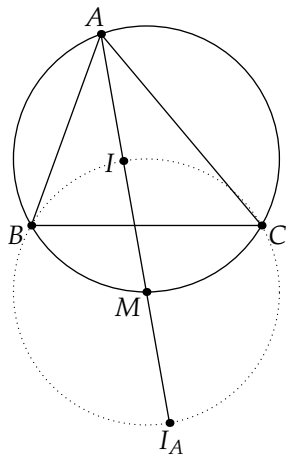
Kombinirajući sva četiri identiteta, dobivamo

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{A'B' \cdot PA \cdot PB \cdot B'C' \cdot PB \cdot PC}{A'D' \cdot PA \cdot PD \cdot D'C' \cdot PD \cdot PC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

jer je riječ o paralelogramu. □

„Trozubac" inverzija

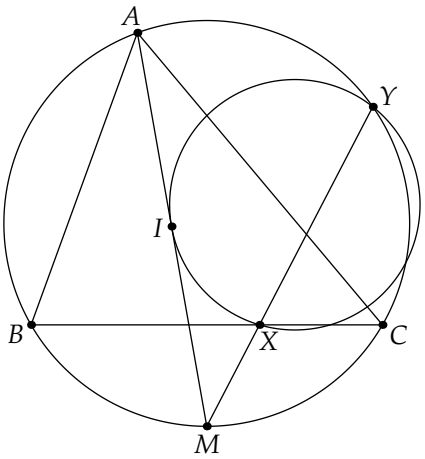
Druga poznata i jako česta inverzija je u biti varijanta $\sqrt{bc}$ inverzije, samo bez preslikavanja. Prvo pogledajmo sljedeću skicu.



Poznata „lema o trozubcu" govori da su točke B, I, C i I_A koncikличne, pri čemu je središte kružnice na kojoj se te točke nalaze upravo polovište luka. Sada vidimo da inverzija sa središtem u M, radijusa MB fiksira točke B, I, C i I_A, te kružnicu (ABC) šalje u pravac BC i obrnuto. Dakle, u konfiguracijama koje se vrte oko točke M, isplati se probati invertirati oko nje.

Primjer 8.3.3. Dan je trokut $\triangle ABC$, I centar upisane kružnice, a M polovište luka BC koji ne sadrži A. Neka je X bilo koja točka na $\overline{BC}$ i Y drugi presjek pravca MX s kružnicom (ABC). Dokažite da je MI tangenta na kružnicu (IXY).

Rješenje 8.3.3. Opet, nacrtajmo skicu.



Promotrimo što se događa prilikom inverzije sa središtem u M, radijusa MB. Vrijedi sljedeće:

1. točke B, I i C ostanu fiksne;
2. kružnica (ABC) slika se u pravac BC i obrnuto;
3. točka X slika se u presjek pravca MX i kružnice (ABC), što je točka Y, i obrnuto.

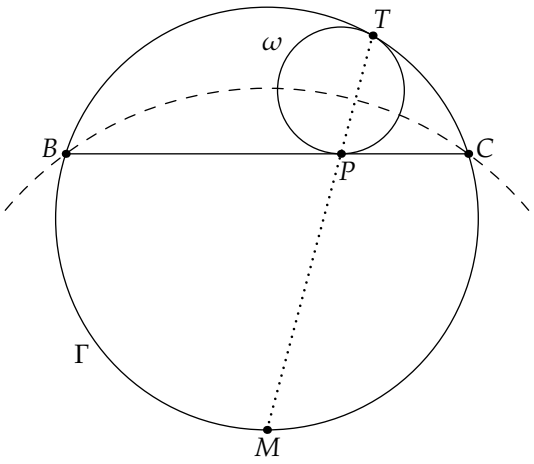
S obzirom da su X i Y inverzi s obzirom na opisanu inverziju, imamo da je

$$MX \cdot MY = MB^2 = MI^2$$

što uz obrat potencije točke direktno daje da je MI tangenta na danu kružnicu. □

Primjer 8.3.4 (Ćevidova lemma). Neka su Γ i ω kružnice takve da ω dira Γ iznutra u točki T. Neka je P točka na ω različita od T i neka tangenta u P na kružnicu ω siječe kružnicu Γ u točkama B i C. Ako je M polovište luka BC kružnice Γ koji ne sadržu točku T, pokaži da su M, P i T kolinearne.

Rješenje 8.3.4. Krećemo od skice.



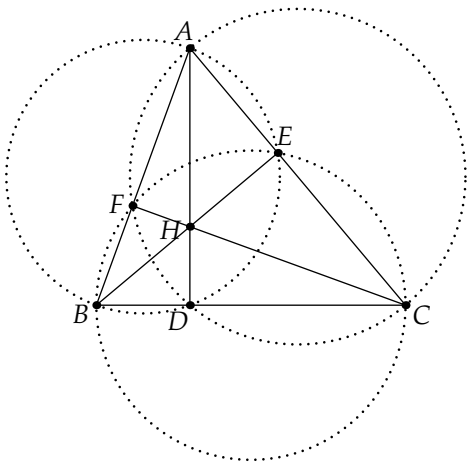
Opet, primjenjujemo inverziju sa središtem u M i radijusom MB. Vrijedi sljedeće:

1. točke B i C ostaju fiksne;
2. kružnica (MBC) šalje se u pravac BC i obrnuto;
3. kružnica ω je tangentna na pravac BC i (MBC) pa će slika kružnice ω biti tangentna na (MBC) i BC, odnosno, ω ostaje fiksirana;
4. kako ω ostaje fiksirana, točka P je diralište ω i BC pa je P' diralište ω i (MBC), odnosno, $P' \equiv T$.

Kako su P i T međusobni inverzi pri inverziji sa središtem u M, te tri točke su kolinearne. □

Inverzije s ortocentrom

Promatramo sljedeću konfiguraciju.



Uočavamo dvije ključne jednakosti, prva je da je

$$AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC,$$

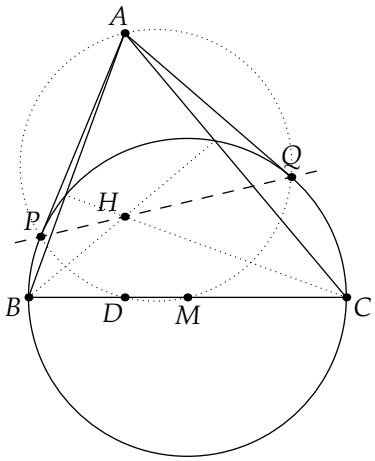
odnosno, čini nam se da bi inverzija sa središtem u A i radijusom $\sqrt{AB \cdot AF}$ mogla imati potencijala (s i bez preslikavanja preko simetrale kuta). Druga jednakost koja je korisna jest

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF,$$

što daje inspiraciju za inverziju sa središtem u H, radijusa $\sqrt{HA \cdot HD}$, pri čemu ćemo to komponirati sa preslikavanjem preko točke H (kako bi mijenjali točke A i D i ostale parove). Prelazimo na primjere.

Primjer 8.3.5. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i P i Q na kružnici s promjerom $\overline{BC}$ takve da su AP i AQ tangente na tu kružnicu. Dokaži da su H, P i Q kolinearne.

Rješenje 8.3.5. Prvo nacrtamo skicu.



Promatramo inverziju sa središtem u A, radijusa $\sqrt{AH \cdot AD}$. Ta inverzija fiksira točke P i Q te točku H šalje u točku D. Dakle, želeli bi da je četverokut $APDQ$ tetivan. No, kako je M središte kružnice s promjerom $\overline{BC}$ i $\angle MDA = 90°$, imamo da sve te točke leže na kružnici s promjerom $\overline{AM}$. □

$\sqrt{bc}$ inverzija

U prethodnom primjeru, vidjeli smo inverziju pri kojoj smo „fiksirali" trokut $\triangle ABC$. Iako smo tu imali jednakokračan trokut, skoro pa istu stvar možemo napraviti i u generalnom slučaju. Naime, promotrimo inverziju sa središtem u A, radijusa $\sqrt{AB \cdot AC}$ komponiranu zajedno s preslikavanjem preko simetrale kuta.
S takvom transformacijom, točke B i C se mijenjaju, odnosno, kružnica (ABC) prelazi u pravac BC i obrnuto. Ova inverzija se u načelu koristi u naprednijim zadacima, no kao što vidite, konceptualno nije ništa kompliciranо.

Primjer 8.3.6 (Simedijana). Dan je trokut $\triangle ABC$. Tangente na opisanu kružnicu u točkama B i C sijeku se u točki T. Dokažite da je pravac AT preslika težišnice iz vrha A preko simetrale kuta pri vrhu A.

Rješenje 8.3.6. Naravno, napravit ćemo $\sqrt{bc}$ inverziju. Vrijedi sljedeće:

1. točka B i točka C se slikaju jedna u drugu;
2. pravac TB slika se u kružnicu $AT'C$ koja je tangentna na pravac BC u točki C;
3. pravac TC slika se u kružnicu $AT'B$ koja je tangentna na pravac BC u točki B.

Dakle, točka T' je presjek dvaju kružnica koje su tangentne na pravac BC u točkama B i C te prolaze kroz A. Naravno, sada vidimo da je AT' radikalna os tih dvaju kružnica pa ona raspolavlja zajedničku tangentu, odnosno, pravac AT' prolazi kroz polovište dužine $\overline{BC}$. No to upravo znači da je AT' težišnica iz vrha A u trokutu $\triangle ABC$ pa iz definicije $\sqrt{bc}$ inverzije dobivamo tvrdnju zadatka. □

Primjer 8.3.7. Neka kružnica ω dira stranice AB i AC te opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u R. Neka pripisana kružnica nasuprot A dira stranicu BC u D. Dokaži da je AR refleksija AD preko simetrale kuta.

Rješenje 8.3.7. Opet, koristimo $\sqrt{bc}$ inverziju iz vrha A. Znamo da je slika kružnice ω neka kružnica koja dira pravce AB, AC i BC. Naravno, postoje četiri takve kružnice, upisana i tri pripisane, no, zbog definicija unutar zadatka (ω je unutar opisane kružnice, dira iznutra), jedini kandidat je pripisana kružnica nasuprot vrha A. Znamo da se diralište šalje u diralište, pa se točka R šalje u točku D što nam direktno daje tvrdnju. □

Kružnica ω iz prethodnog zadatka zove se *A-mixtillinearna* kružnica i za nju vrijede razna svojstva, od kojih se neka dokazuju inverzijom.

Lakši zadaci

1. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ sa središtem opisane kružnice O. Invertirajmo oko A, s radijusom 1. U kakvom su odnosu točke O', A, B' i C'?

2. Dan je pravokutan trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C i točke X i Y na unutrašnjosti stranica $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$, redom. Konstruiramo četiri kružnice koje prolaze kroz C, sa središtima u A, B, X i Y. Dokažite da su četiri točke sjecišta tih kružnica (osim C) koncikličke.

3. Dane su kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 koje se međusobno diraju[3] u točkama A, B, C i D. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

4. Za dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima u O_1 i O_2 koje se sijeku u X i Y kažemo da su ortogonalne ako je $\angle O_1XO_2 = 90°$. Dokažite da k_2 ostaje fiksna pri inverziji oko k_1.

5. Neka su A, B i C tri kolinearne točke i neka je P bilo koja točka u ravnini koja nije na tome istome pravcu. Dokažite da su središta opisanih kružnica trokutima $\triangle PAB$, $\triangle PBC$ i $\triangle PCA$ te točka P na istoj kružnici.

6. Dan je četverokut $ABCD$ čije su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ okomite te se sijeku u E. Dokažite da preslike točke E preko stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ leže na jednoj kružnici.

7. U trokutu $\triangle ABC$ s opisanom kružnicom Ω, simetrala kuta pri vrhu A siječe $\overline{BC}$ u D i Ω u točkama A i E. Kružnica s promjerom $\overline{DE}$ siječe Ω u točkama E i F. Dokažite da je $\overline{AF}$ simedijana trokuta $\triangle ABC$.

8. Dan je trokut $\triangle ABC$ takav da je $AB = AC$. Neka su D i E točke na kraćim lukovima AB i AC, redom. Pravci AD i BC se sijeku u F, a pravac AE siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle FDE$ u točkama E i G. Dokažite da je pravac AC tangentan na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ECG$.

Teži zadaci

Ako je netko već upoznat s inverzijom i vjeruje da su prethodni zadaci prelagani, može rješavati ove. Naravno, ovi zadaci se neće nužno raspasti ako uočite inverziju, nego je inverzija samo jedan od koraka u rješenju.

9. Neka je Ω kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$. Kružnica ω dira stranice AC i BC te dira kružnicu Ω iznutra u točki P. Pravac paralelan s AB koji siječe unutrašnjost trokutta $\triangle ABC$ tangentan je na ω u točki Q. Dokažite da je $\angle ACP = \angle QCB$.

10. Neka su ω_1 i ω_2 dvije kružnice sa središtima u O i P i neka se sijeku u točkama X i Y tako da je $\angle OXP = \angle OYP = 90°$. Promjer $\overline{AB}$ kružnice ω_1 je odabran tako da B leži unutar ω_2. Dvije kružnice tangentne na ω_2, koje prolaze kroz O i A diraju ω_2 u točkama F i G. Dokažite da je četverokut $FGOB$ tetivan.

[3] k_i dira k_{i-1} i k_{i+1}, gdje indekse gledamo mod 4

11. Dane su dvije kružnice ω_1 i ω_2. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih trokuta $\triangle ABC$ takvih da je ω_1 opisana kružnica $\triangle ABC$, a ω_2 A-pripisana kružnica trokuta $\triangle ABC$. Neka ω_2 dira BC, CA i AB u točkama D, E i F, redom. Ako je $\mathcal{S}$ neprazan, dokažite da je težište trokuta $\triangle DEF$ fiksna točka.

12. Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$, pri čemu je $AB \neq AC$. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. Dane su točke D i E na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da je $AE = AD$ i točke D, H i E su kolinearne. Dokažite da je pravac HM okomit na zajedničku tetivu kružnica opisanih trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $AB > AC$. Neka je Γ opisana kružnica tog trokuta, H njegov ortocentar, a F nožište visine iz A na BC. Neka je M polovište od $\overline{BC}$. Neka je Q točka na Γ takva da je $\angle HQA = 90^\circ$ i neka je K točka na Γ tako da je $\angle HKQ = 90^\circ$. Pretpostavimo da su točke A, B, C, K i Q sve različite i leže na Γ ovim redom. Dokažite da su opisane kružnice trokuta $\triangle KQH$ i $\triangle FKM$ tangencijalne.

8.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Funkcija v_p

$v_p : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ gdje je p fiksni prost broj definirana je:

$$v_p(n) = k \iff p^k | n, p^{k+1} \nmid n$$

tj $v_p(n)$ je eksponent najveće potencije prostog broja p koja dijeli n.
Svojstva:

- $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
- $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$
- $v_p(a) \neq v_p(b) \implies v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$
- za $v_p(a) = v_p(b)$ vrijedi $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ te se može postići bilo koja vrijednost ako ne znamo ništa drugo o brojevima a i b.
- $a \mid b$ ako i samo ako vrijedi $v_p(a) \leq v_p(b)$ za sve proste brojeve p;
- Specijalno $a = b$ ako i samo ako je $v_p(a) = v_p(b)$ za sve proste brojeve p.
- $v_p(\gcd(a,b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ (gcd je najveći zajednički djelitelj)
- $v_p(\text{lcm}(a,b) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$ (lcm je najmanji zajednički višekratnik)

v_p se može proširiti na funkciju $v_p : \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_0$ po formuli $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$ te će ostati vrijediti sva svojstva koja imaju smisla za racionalne brojeve.

LTE(Lifting the exponent lemma)

Ako za cijele brojeve x i y, prirodan broj n i prost broj p vrijede sljedeća svojstva:

- $p \mid x - y$
- $p \nmid a$, $p \nmid b$

Tada:

- Ako je $p > 2$ vrijedi $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$.
- Ako je $p = 2$ i n paran vrijedi $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1$
- Ako je $p = 2$ i n neparan vrijedi $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y)$

Također za neparan n i $p > 2$ možemo u prvu tvrdnju uvrstiti $y = -y$ pa dobijemo
$v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n)$.

Order

Neka su a i n relativno prosti prirodni brojevi. Order od a modulo n je najmanji prirodni broj d za koji vrijedi $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.
Iz Eulerovog teorema znamo da uvijek postoji neki takav d ($\varphi(n)$), pa postoji i najmanji tj. uvijek postoji order.
Najbitnija tvrdnja za order: Neka je d order od a modulo n tada vrijedi

$$a^k \equiv 1 \pmod{n} \iff d \mid k$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Zadaci

Uvodni zadaci

1. Neka su a, b i c prirodni brojevi. Dokaži da vrijedi:

$$\gcd(a,b,c) = \frac{abc \cdot \operatorname{lcm}(a,b,c)}{\operatorname{lcm}(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(b,c) \cdot \operatorname{lcm}(c,a)}$$

2. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a \mid b^2 \mid a^3 \mid b^4 \mid a^5 \mid \ldots$
Dokaži da je $a = b$.

3. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k$ prirodni brojevi takvi da vrijedi $\gcd(a_i, b_i) = 1$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ te $m = \operatorname{lcm}(b_1, b_2, \ldots b_k)$. Dokažite da vrijedi:

$$\gcd(\frac{a_1 \cdot m}{b_1}, \frac{a_2 \cdot m}{b_2}, \ldots \frac{a_k \cdot m}{b_k}) = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Zadaci

4. Neka je $k \in \mathbb{N}$ Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi $3^k \mid 2^n - 1$

5. Neka su a i n prirodni brojevi, a p prost broj takav da je $2^p + 3^p = a^n$. Dokažite da je $n = 1$.

6. Neka su $b > 1, n > 1$ prirodni brojevi takvi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $a_k \in \mathbb{N}$ takav da $k \mid b - a_k^n$.
Dokaži da postoji $A \in \mathbb{N}$ takav da je $b = A^n$.

7. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da $c \mid a^c - b^c$. Dokaži $c \mid \dfrac{a^c - b^c}{a - b}$.

8. Neka je $n \in \mathbb{N}$ kvadratno slobodan (ne postoji prosti broj p za koji vrijedi $p^2 \mid n$). Dokažite da ne postoje relativno prosti prirodni brojevi x i y takvi da

$$(x + y)^3 \mid (x^n + y^n)$$

9. Neka su a i b pozitivni(> 0) realni brojevi takvi da je $a^n - b^n \in \mathbb{N}$ za svaki prirodan broj n.
Dokaži da su a i b prirodni brojevi.

10. Nađi sve prirodne brojeve k za koje postoje $a, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $n >= 2$ i

$$p_1 \cdot p_2 \ldots p_k - 1 = a^n$$

gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ redom prvih k prostih brojeva (2, 3, 5, ...).

Teži zadaci

11. Dokaži da jednadžba $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

12. Neka su $c, d \geq 2$ prirodni brojevi. Neka je $\{a_n\}$ niz definiran s $a_1 = c, a_{n+1} = a_n^d + c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da za svaki $n \geq 2$, postoji prost broj p takav da $p | a_n$ i $p \not| a_i$ za $i = 1, 2, \cdots n - 1$.

8.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Dokaži da za sve nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 4(a-b)(b-c)(c-a).$$

2. Dokažite da za sve nenegativne realne brojeve a, b, c, d vrijedi

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 2(a-b)(b-c)(c-d)(d-a).$$

Dodatno, ako je $(a-b)(c-d) \leq 0$, koeficijent 2 na desnoj strani se može zamijeniti s 17.

3. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj i neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ strogo rastući niz n pozitivnih realnih brojeva čija je suma jednaka 2. Neka je X podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je vrijednost

$$\left|1 - \sum_{i \in X} a_i\right|$$

minimizirana. Dokažite da postoji strogo rastući niz n pozitivnih realnih brojeva $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ čija je suma jednaka 2 takav da je.

$$\sum_{i \in X} b_i = 1.$$

4. Neka je n fiksan prirodan broj. Nađite najveću moguću vrijednost izraza

$$\sum_{1 \leq r < s \leq 2n} (s - r - n) x_r x_s,$$

gdje $-1 \leq x_i \leq 1$ za sve $i = 1, \cdots, 2n$.

5. Neka su x, y, z i t pozitivni brojevi za koje vrijedi $x + y + z + t = 4$. Dokažite:

$$(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) \leq 125 + 131xyzt.$$

6. Neka su a, b, c i d nenegativni realni brojevi čija je suma 1. Dokažite

$$abc + bcd + cda + dab \leq 127 + \frac{176}{27} abcd.$$

7. Dokažite da z sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži:

$$2\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} + 3\sqrt[3]{xyz} \leq 5\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

9. Dokaži da za sve realne brojeve $x_1, x_2, x_3 ... X_n$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

9. Zadaci za sedmu grupu

9.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe

Link na hintove. Link na rješenja.

1. **(HMO 2017.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy).$$
2. **(2. ELMO)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(x + f(y) + f(xy)) = f(x) + yf(x + 1).$$
3. **(MEMO 2012.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi
$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$
4. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(x + f(y)) - f(x) = (x + f(y))^4 - x^4.$$
5. **(MEMO 2017.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y).$$
6. **(Županijsko 2002.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ koje za sve $x, y > 0$ zadovoljavaju
$$f(x)^{f(y)} = f(x^y).$$
7. **(APMO 2016.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ koje za sve $x, y, z > 0$ zadovoljavaju
$$(z + 1)f(x + y) = f(xf(z) + y) + f(yf(z) + x).$$

9.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix

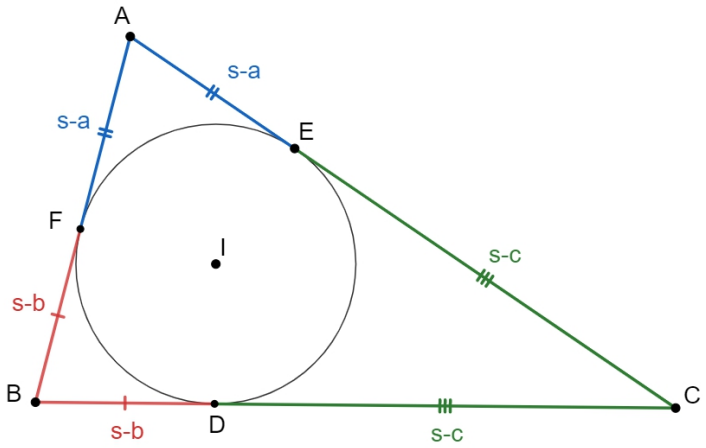
Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

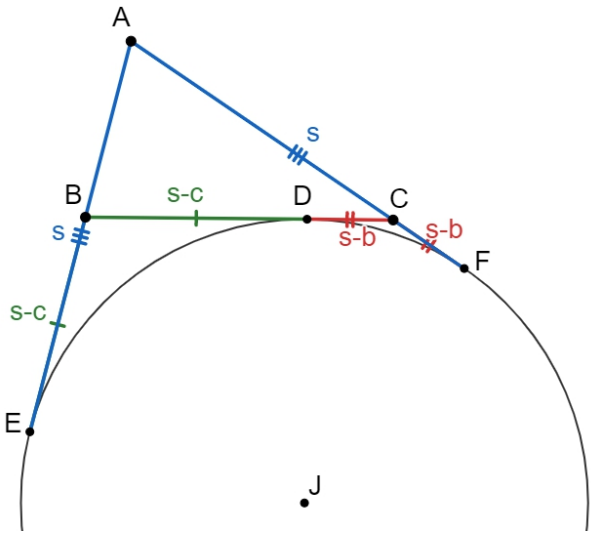
Neki alati koje je korisno imati na umu pri rješavanju zadataka su:

- **Sličnost trokuta**
- **Dužine odsječaka kod upisane i pripisane kružnice**

  Neka upisana kružnica trokuta ABC, čije su stranice a, b, c i poluopseg s, dodiruje BC, CA, AB u D, E, F redom. Tada je $AE = AF = s - a, BD = BF = s - b, CD = CE = s - c$.



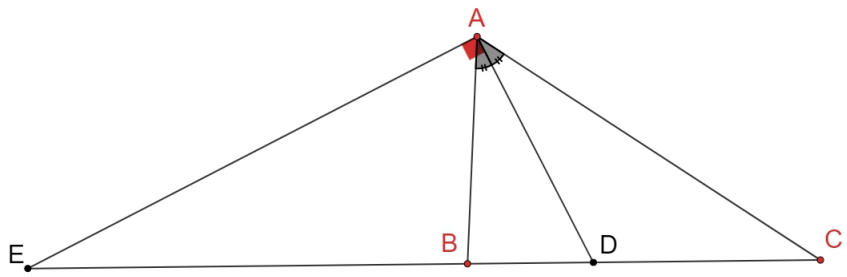
  Neka pripisana kružnica nasuprot vrha A u trokutu ABC, čije su stranice a, b, c i poluopseg s, dodiruje stranicu BC u D, te pravce AB, AC u E, F redom. Tada je $AE = AF = s$, $BD = BE = s - c, CD = CF = s - b$.



- **Teorema o simetrali ugla**

  Neka je $AD (D \in BC)$ simetrala unutrašnjeg $\angle BAC$, a $AE (E \in BC)$ simetrala vanjskog $\angle BAC$ u trokutu ABC. Tada je:

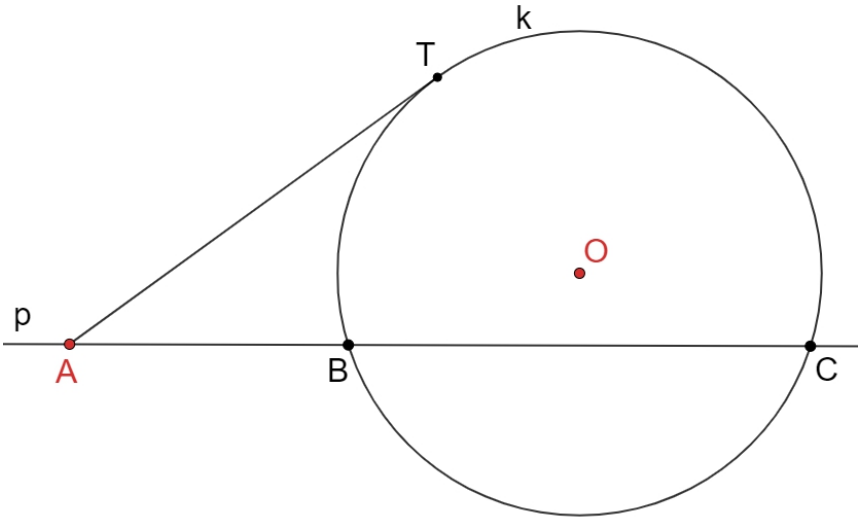
$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$



- **Potencija točke**

  Neka je dan krug $k(O,r)$ i točka A koja nije na kružnici. Ako proizvoljan pravac p kroz A siječe k u točkama B, C tada je $AB \cdot AC$ konstantno i taj proizvod nazivamo potencijom točke u odnosu na krug k. Vrijedi $P(A,k) = |AO^2 - r^2|$.

  Specijalno, ako je AT tangenta onda je $AT^2 = AB \cdot AC$.

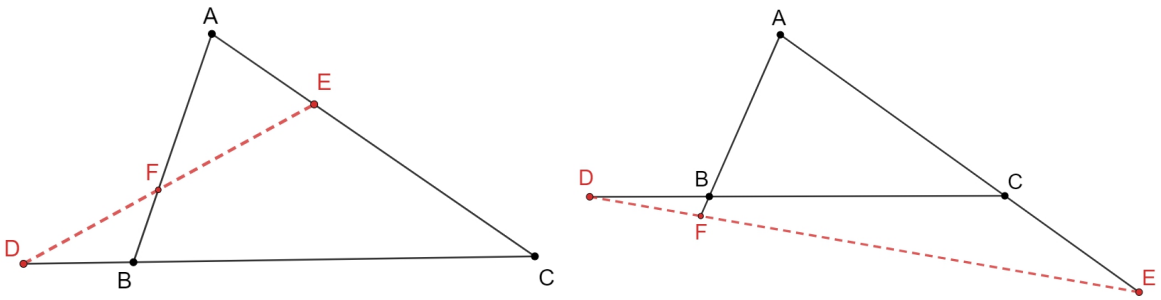


- **Menelajev teorem**

  Neka su dane točke D, E, F redom na stranicama BC, CA, AB pri čemu je paran broj njih u unutrašnjosti trokuta. Tada su D, E, F kolinearne ako i samo ako je

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

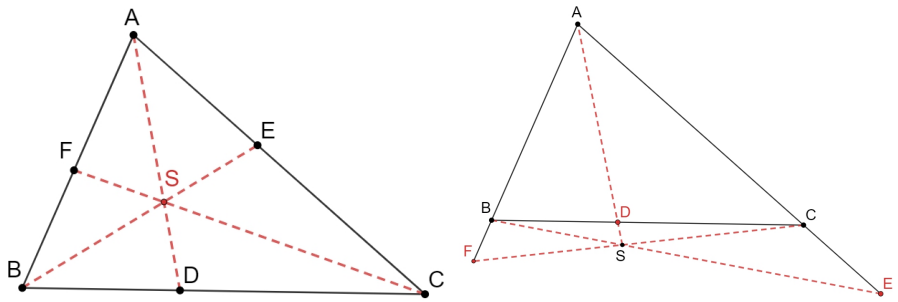
  .



- **Cevin teorem**

  Neka su dane točke D, E, F redom na stranicama BC, CA, AB pri čemu je neparan broj njih u unutrašnjosti trokuta. Tada se AD, BE, CF sijeku u jednoj točki ako i samo ako je

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$



Neki malo opskurniji računski izrazi koje ima smisla zapamtiti jer nam mogu biti od pomoći u nekim zadacima su:

- **Ptolomejev teorem**

  Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi:

  $$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

- **Površina preko radijusa upisane**

  Neka je ABC trokut sa stranicama a, b, c, poluopsegom s te radijusom upisane kružnice r. Tada je njegova površina jednaka:

  $$r \cdot s$$

- **Heronova formula**

  Neka je ABC trokut sa stranicama a, b, c i poluopsegom s. Tada je njegova površina jednaka:

  $$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- **Formula za težišnicu**

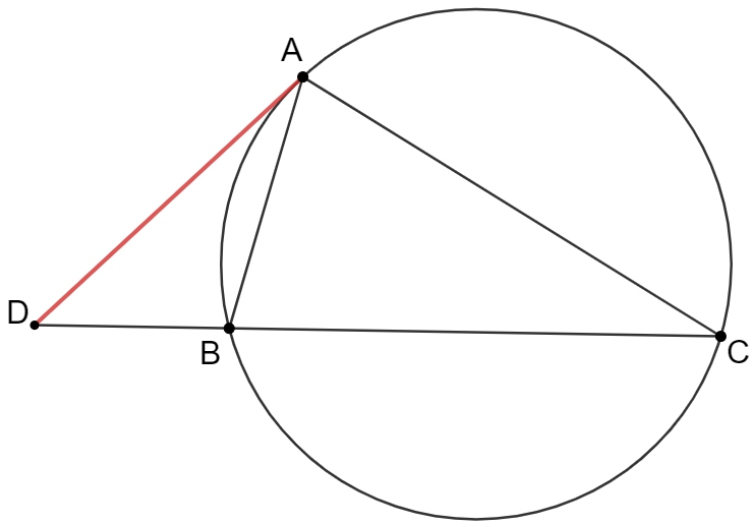
  Neka je ABC trokut sa stranicama a, b, c i $CM (M \in AB)$ njegova težišnica. Tada je:

  $$CM^2 = \frac{2BC^2 + 2CA^2 - AB^2}{4}.$$

- **Omjer u kojem tangenta dijeli stranicu**

  Neka je ABC trokut i neka tangenta u A na opisanu kružnicu siječe BC u D. Tada je:

  $$\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



- **Kriterij za simetralu kuta**

  Neka su X, A, Y, B točke na nekom pravcu u tom redoslijedu. Točka C se nalazi van tog pravca. Tada ako vrijede bilo koje dvije od sljedeće tri tvrdnje onda vrijedi i treća:

  - $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{BY}$;
  - $\angle XCY = 90°$;
  - CY je simetrala unutrašnjeg kuta $\angle ACB$, CX simetrala vanjskog kuta $\angle ACB$.

- **Lema: potencija vezana za sredinu stranice**

  Neka su A, B, C, D četiri kolinearne točke u tom redosljedu i neka je M točka na tom pravcu. Tada ako vrijede bilo koje dvije od sljedeće tri tvrdnje, onda vrijedi i treća:

  - $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}$;
  - M je polovište dužine BD;
  - Vrijedi $AB \cdot AC = AC \cdot AM$ ili $AM \cdot CM = BM^2$ ili $AM \cdot CM = DM^2$.

Lakši zadaci

1. Dan je trokut $\triangle ABC$ i njegovo središte upisane kružnice I tako da vrijedi $AC + AI = BC$. Dokažite da je $\angle BAC = 2\angle ABC$.

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice BC, CA, AB u D, E, F,redom. Točke P, Q nalaze se unutar kuta BAC tako da vrijedi $FP = FB, FP \parallel AC$ i $EQ = EC, EQ \parallel AB$. Dokaži da su P, Q, D kolinearne.

3. Neka je ABC šiljastokutni trokut sa opisanom kružnicom ω. Neka je ℓ pravac tangentan na ω koji prolazi kroz A. Neka su X i Y projekcije točke B na pravce ℓ i AC, respektivno. Neka je H ortocentar trokuta BXY. Neka CH siječe ℓ u D. Dokaži da BA raspolavlja kut CBD.

4. U trapezu $ABCD (AB \parallel CD)$ dijagonale AC i BD sijeku se u točki E, a pravci AD i BC u točki F. Točka $G \neq E$ odabrana je na kružnici opisanoj trokutu $\triangle BCE$ tako da je $EG \parallel AD$. Dokažite da vrijedi $\angle AFG = \angle BFE$.

5. Neka je ABC raznostraničan šiljastokutni trokut u kojem je $\angle BAC = 60°$. Točka O je središte opisane kružnice trokutu BAC. Simetrala $\angle BAC$ siječe stranicu BC u D, a pravac AO siječe stranicu BC u E. Dokaži da je:

$$\angle AED + \angle ADO = 90°.$$

6. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je $BC = DE$. Pretpostavimo da postoji točka T unutar $ABCDE$ za koju je $TB = TD, TC = TE$ i $\angle ABT = \angle TEA$. Neka pravac AB siječe pravce CD i CT u točkama P i Q, redom. Pretpostavimo da točke P, B, A, Q leže na pravcu u tom poretku. Neka pravac AE siječe CD i DT u točkama R i S, redom. Pretpostavimo da točke R, E, A, S leže na pravcu u tom poretku. Dokažite da su P, S, Q, R koncikličke.

7. Neka je $ABCD$ četverokut upisan u kružnicu k. Pravci AB i CD sijeku se u točki E tako da vrijedi $AB = BE$. Neka je F točka presjeka tangenti na kružnicu k u točkama B i D. Ako su pravci AB i DF paralelni, dokaži da su A, C i F kolinearne.

8. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $AB = AC$, neka je D polovište stranice AC te neka je γ opisana kružnica trokutu ABD. Tangenta na γ u A siječe BC u E. Neka je O centar kružnice opisane trokutu ABE. Dokaži da polovište duži AO leži na γ.

Umjereni zadaci

9. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut koji nije trapez i čije se dijagonale sijeku u E. Polovišta dužina AB i CD su F i G redom, a ℓ je pravac kroz G paralelan sa AB. Nožišta okomica iz E na pravce ℓ i CD su H i K, redom. Dokaži da su pravci EF i HK okomiti.

10. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $\angle B > \angle C$. Neka su P i Q dvije različite točke na pravcu AC takve da vrijedi $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ i A se nalazi između P i C. Pretpostavimo da postoji točka D na dužini BQ za koju je $PD = PB$. Neka polupravac AD siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u $R \neq A$. Dokaži da je $QB = QR$.

11. Neka je dan trokut ABC s centrom upisane kružnice I i neka je D proizvoljna točka na stranici BC. Neka pravac kroz D okomit na BI siječe CI u E. Neka pravac kroz D okomit na CI siječe BI u F. Dokaži da preslika točke A u odnosu na pravac EF leži na BC.

12. Neka je AD promjer opisane kružnice pravokutnog trokuta ABC. Pravci kroz D paralelni sa AB i AC sijeku pravce AC i AB u točkama E i F, respektivno. Pravci EF i BC sijeku se u G. Dokaži $AD \perp DG$.

13. U trokutu ABC sa najkraćom stranicom BC, točke P i Q na stranicama AB i AC redom su takve da je $\angle PCB = \angle QBC = \angle BAC$. Dokažite da središte O opisane kružnice trokuta APQ leži na simetrali stranice BC.

14. Zadan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$. Neka je L presjek simetrale $\angle ABC$ i stranice $\overline{AC}$. Točke D i E su polovišta lukova AB i BC redom opisane kružnice $\triangle ABC$. Neka su točke P i Q izabrane s produžetaka BD i BE preko D i E redom, tako da vrijedi $|\angle APB| = |\angle CQB| = 90°$. Pokaži da polovište $\overline{BL}$ leži na pravcu PQ.

15. U trokutu ABC upisana kružnica s centrom I dodiruje stranicu BC u točki D. Simetrala $\angle BAC$ siječe dužinu BC u točki E. Točka N je središte luka BAC opisane kružnice $\triangle BAC$, a F točka presjeka DI i AN. Dokaži da pravac NI raspolavlja dužinu EF.

16. Dan je konveksan peterokut $ABCDE$ takav da su mu kutevi kod vrhova C i E pravi i vrijedi $\angle EDA = \angle CDB$. Neka je N nožište visine iz vrha D u šiljastokutnom trokutu ABD i neka je M polovište dužine AB. Dokaži da su točke C, M, N, E konciklične.

17. Na stranicama BC i AC trokuta ABC dane su točke D i E, redom. Neka je $F(F \neq C)$ točka presjeka opisane kružnice trokuta CED i pravac kroz C paralelne sa AB. Neka je G točka presjeka pravca FD i stranice AB. a H točka na pravcu AB takva da je $\angle HDA = \angle GEB$ i vrijedi poredak točaka $H - A - B$. Ako je $DG = EH$, dokaži da presjek dužina AD i BE pripada simetrali kuta $\angle ACB$.

18. Upisana kružnica ω trokuta ABC dodiruje BC, CA, AB u D, E, F redom. Okomica u C na pravac BC siječe EF u M, a okomica u B na pravac BC siječe EF u N. Pravac DM siječe ω ponovo P, a pravac DN siječe ω ponovo Q. Dokaži da je $DP = DQ$.

Teži zadaci

19. U $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ točke D, E, F su nožišta visina iz vrhova A, B, C redom. Točke P, Q su na pravcu EF takve da vrijedi $DP \perp EF$, $BQ = CQ$. Dokaži $\angle ADP = \angle PBQ$.

20. Točke M, N su dirališta upisane kružnice raznostraničnog trokuta ABC sa stranicama AB, AC redom, a točke P, Q su redom dirališta pripisanih kružnica nasuprot vrhova B, C sa stranicom BC. Dokaži da je četverokut $MNPQ$ tetivan ako i samo ako je $\angle BAC = 90°$.

21. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje AB, AC u P, Q redom. Pravci BI, CI sijeku PQ u K, L redom. Dokaži da opisana kružnica $\triangle IKL$ dodiruje upisanu kružnicu trokuta ABC ako i samo ako je $AB + AC = 3BC$.

22. Neka je ABC šiljastokutni raznostranični trokut. Neka su X i Y dvije različite točke na duži BC takve da je $\angle CAX = \angle YAB$. Pretpostavimo da:

1) K i S su nožišta okomica iz B na pravce AX i AY redom.

2) T i L su nožišta okomica iz C na pravce AX i AY redom.

Dokaži da se pravci KL i ST sijeku na pravcu BC.

23. U trokutu ABC, točka A_1 leži na stranici BC i točka B_1 leži na stranici AC. Neka su P i Q točke na dužinama AA_1 i BB_1, redom, takve da je PQ paralelno AB. Neka je P_1 točka na pravcu PB_1, takva da B_1 leži između P i P_1, te $\angle PP_1C = \angle BAC$. Slično, neka je Q_1 točka na pravcu QA_1, takva da A_1 leži striktno između Q i Q_1, te $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Dokaži da su P, Q, P_1, Q_1 koncikličke.

9.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Nastavljamo s najboljim predavanjima ovog kampa, sada u malo opuštenijem tonu. Otkada je Ivan Novak završio natjecateljsku karijeru, funkcijske jednadžbe u teoriji brojeva su tema koja se nerijetko pojavljuje na shortlistu, a zna tu i tamo doći na MEMO.

Tips and tricks

Prvo i najvažnije kao i kod svih funkcijskih jednadžbi je pogoditi koja bi bila očita rješenja (najčešće su to i jedina), dakle konstante, $f(x) = x$, $f(x) = cx$ za neki c i slično.

> ⚠ **Oprez: Obligatorna napomena u svakom mogućem predavanju iz funkcijskih**
>
> Za svako rješenje funkcijske jednadžbe se mora **PROVJERITI** da li zadovoljava jednadžbu jer ćete inače izgubiti najdebilniji bod na svijetu.

Glavna taktika specifična za funkcijske u teoriji brojeva je naći nekakve djeljivosti (najčešće su i zadane u obliku nešto dijeli nešto) i pokušati uvrštavanjima namjestiti da djeljenik ima što manje prostih faktora (najbolje je da sam bude prost) jer onda znamo da djelitelj ima jako malo opcija. Osim toga, najčešća taktika dovršavanja zadatka je da uspijemo fiksirati djeljenik i "pustiti" djeljitelj da bude proizvoljno velik, jer onda znamo da djeljenik mora biti 0 (i npr ako je djeljenik $f(n) - n$, već smo gotovi) Ovo možda zvuči apstraktno onima koji se prvi put susreću s ovom temom, stoga ćemo proći kroz primjer na kojem vidimo o čemu se radi.

Primjer 9.3.1 (APMO 2019/1). Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (a, b) vrijedi

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$$

Rješenje 9.3.1. je na ploči □

Lakši zadaci

1. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

2. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (a, b) vrijedi

$$f(a) + f(b) \mid 2(a + b - 1)$$

3. Neka je $\mathbb{P}$ skup svih prostih brojeva. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takve da za svaki par prostih brojeva (p, q) vrijedi

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

4. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća 2 uvjeta:

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$

- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv s prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

5. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da $f(n!) = f(n)!$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te $m - n \mid f(m) - f(n)$ za sve različite $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi

$$f(mn) = \operatorname{lcm}(m,n) \cdot \gcd(f(m), f(n))$$

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ koje zadovoljavaju sljedeća 3 uvjeta:

- postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $f(n) \neq 0$
- $f(xy) = f(x) + f(y)$ za svaki $x, y \in \mathbb{N}$
- Postoji beskonačno $n \in \mathbb{N}$ takvih da za svaki $k < n$ vrijedi $f(k) = f(n-k)$

9.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Danas se učimo nešto o kvadratnim ostacima i kvadratnom reciprocitetu. Osim toga ćemo još ponoviti neke stvari da ne zaboravite da postoje.
Neka je p prost broj. Za prirodan broj n koji nije djeljiv s p kažemo da je kvadratni ostatak modulo p ako postoji prirodan broj a takav da $p \mid a^2 - n$. U suprotnom, kažemo da je neostatak.
Za cijeli broj a i neparan prost broj p, Legendreov simbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ definiramo na sljedeći način:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ako p dijeli a} \\ 1, & \text{ako je a kvadratni ostatak modulo p} \\ -1, & \text{ako je a kvadratni neostatak modulo p.} \end{cases}$$

Svojstva Legendreovog simbola

(a, b su proizvoljni cijeli brojevi, a p proizvoljan neparan prost broj):

- $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$
- $\left(\frac{a+bp}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$
- $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$
- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Treće od ovih svojstava zovemo Eulerov kriterij.

Gaussov zakon reciprociteta

Neka su p i q različiti neparni prosti brojevi. Tada vrijedi Gaussov zakon reciprociteta:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

I njegov suplement

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p \text{ oblika } 8k \pm 1 \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Jacobijev simbol

Jacobijev simbol je generalizacija Legendreovog simbola.
Jacobijev simbol dopušta da drugi argument nije samo prosti broj, nego može biti i neparan složeni broj. Za prirodan broj a i neparan prirodan broj $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, definiramo Jacobijev simbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ preko Legendreovog na sljedeći način:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{a_k}.$$

Važno je primijetiti da ako je Jacobijev simbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ jednak -1, tada je a sigurno kvadratni neostatak modulo n, ali ako je Jacobijev simbol jednak 1, tada a nije nužno kvadratni ostatak.

Svojstva Jacobijevog simbola

Navedena svojstva relativno jednostavno slijede iz svojstava Legendreovog simbola. (m i n su neparni prirodni brojevi, a i b su cijeli)

- $\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{ab}{n}\right)$
- $\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{mn}\right)$
- $\left(\frac{a+bn}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$
- $\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} 0 \text{ ako je } \gcd(a,n) > 1 \\ \pm 1, \text{ inače} \end{cases}$
- $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$
- $\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } n \text{ oblika } 8k \pm 1 \\ -1, \text{ inače.} \end{cases}$
- Za relativno proste m i n, vrijedi

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

Zadaci

Nisu svi zadaci o kvadratnim ostacima.

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x^2y + y^2 = 2x^3$.

2. Dokaži da za svaki prost broj p vrijedi da postoji $x \in \mathbb{Z}$ takav da $p \mid x^2 - x + 3$ ako i samo ako postoji $y \in \mathbb{Z}$ takav da $p \mid y^2 - y + 25$.

3. Za prirodan broj $k \geqslant 3$ kažemo da je *fin* ako postoje prirodan broj n i prirodni brojevi $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ sa sljedećim svojstvima:

- $d_{j+2} = d_{j+1} + d_j$ za sve j za koje vrijedi $1 \leqslant j \leqslant k-2$,
- $d_1, d_2, \ldots, d_k$ su djelitelji od n,
- bilo koji drugi djelitelj od n je ili manji od d_1 ili veći od d_k.

Odredi sve fine brojeve.

4. Odredi sve prirodne brojeve k sa sljedećim svojstvom: Postoji prirodan broj a takav da je

$$(a+k)^3 - a^3$$

djeljivo s 2007.

5. Neka je S skup svih prirodnih brojeva x za koje postoje prirodan broj n i prirodni brojevi $a_1, \ldots, a_n$ te $b_1, \ldots, b_n$ takvi da je

$$x = \frac{(a_1^2 + a_1 - 1)\ldots(a_n^2 + a_n - 1)}{(b_1^2 + b_1 - 1)\ldots(b_n^2 + b_n - 1)}.$$

Sadrži li S beskonačno prostih brojeva?

6. Za prirodan broj n, definiramo njegov stupanj kao zbroj svih eksponenata u njegovoj faktorizaciji na proste brojeve. Dokaži da postoji skup od 2022 uzastopna prirodna broja takav da točno 1000 od njih ima stupanj manji od 10.

7. Neka je p prost broj. Troy i Abed igraju igru. Troy prvo napiše prirodan broj X na ploču, te Abedu pokaže niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nakon toga Abed čini niz poteza, gdje je n-ti potez sljedeći:

$$\text{Zamijeni } Y \text{ koji trenutno piše na ploči ili sa } Y + a_n \text{ ili sa } Y \cdot a_n.$$

Abed pobjeđuje ako u nekom trenutku na ploči piše broj djeljiv s p. Odredi može li Abed pobijediti bez obzira na to što Troy izabere, ako je

a) $p = 10^9 + 7$,

b) $p = 10^9 + 9$.

Napomena: Brojevi $10^9 + 7$ i $10^9 + 9$ su prosti.

8. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$3^x - 8^y = 2xy + 1.$$

9. Neka su m i n prirodni brojevi. Za prirodan broj k kažemo da je (m, n)-*ogo dobar* ako ne postoji prirodan broj $j > k$ takav da

$$n^k + m \mid n^j + m.$$

(a) Dokaži da ne postoji beskonačno (m, n)-ogo dobrih prirodnih brojeva.

(b) Dokaži da za svaki prirodan broj N postoje m i n takvi da postoji barem N (m, n)-ogo dobrih prirodnih brojeva.

10. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da je

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3(ab + bc + ca)}$$

prirodan broj.

11. Dokaži da $4xyz - x - y$ nije potpun kvadrat ni za koja tri prirodna broja x, y, z.

9.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Poznato je da se na prvi dan kampa stavljaju sva najkvalitetnija predavanja, stoga ste danas zapeli sa mnom na 8 sati. Izogonale i izogonalne konjugate u trokutu i četverokutu su relativno opskurna geometrijska tema, ali upravo zato ako ih iskusan geometar pronađe, može zgaziti razne teške zadatke. Danas ćemo definirati sve potrebne pojmove i naučiti baratati s njima.

Definicija 9.5.1: Izogonala

Neka je dan kut $\angle AOB$ u ravnini i pravci p i q koji prolaze kroz O. Kažemo da su p i q međusobno *izogonalni* s obzirom na kut $\angle AOB$ ako su simetrični s obzirom na simetralu kuta $\angle AOB$. Također kažemo i da je q *izogonala* od p (i obratno) s obzirom na $\angle AOB$.

Iz defincije je jasno da je p izogonala od q akko je q izogonala od p. Također se može reći (i ja ću najčešće govoriti) i da je par pravaca (p, q) izogonalan u paru pravaca (OA, OB) i na razne druge ekvivalentne načine koji su uvijek očiti iz konteksta. Već ovo nam je dovoljno i za prvi teorem, koji je jednostavno poznat kao lema o izogonalama i koristan je za znati u svako doba dana i noći.

Teorem 9.5.2: Lema o izogonalama

Neka su O, A, B, C, D točke u ravnini, te neka je $E = AB \cap CD$ i $F = AC \cap BD$. Ako je par pravaca (OB, OC) izogonalan u paru pravaca (OA, OD), tada je i par (OE, OF) izogonalan u (OA, OD).

Sad definiramo i direktno povezan pojam, izogonalnu konjugatu.

Definicija 9.5.3: Izogonalna konjugata

Neka je dan n-terokut $A_1A_2 \dots A_n$ i neka je P točka u ravnini različita od vrhova n-terokuta. Neka je q_i pravac izogonalan pravcu A_iP s obzirom na kut $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, za svaki $i \in \{1, 2, ..., n\}$, gdje smo indekse vrhova uzeli ciklički. Ako se svi pravci q_i sijeku u jednoj točki (nazovimo ju Q), tada kažemo da je ta točka *izogonalna konjugata* točki P s obzirom na n-terokut $A_1A_2 \dots A_n$

I ovdje je iz definicije jasno da je Q izogonalna konjugata od P akko je P izogonalna konjugata od Q (zato se i zovu izogonalne *konjugate*). Iako smo dali ovu definiciju za proizvoljni mnogokut, u zadacima su isključivo bitni slučajevi u trokutu i četverokutu, pa ćemo se na njih i fokusirati u ovom predavanju.

Trokut

Lako se uoči da u definiciji izogonalne konjugate nije nimalo jasno mora li ona postojati za svaku točku ravnine, pa je to prvo pitanje koje si postavljamo. Srećom, za trokute se ne moramo brinuti, jer imamo sljedeći teorem, koji nam ne samo dokazuje da izogonalna konjugata uvijek postoji, nego i daje način na koji ju možemo konstruirati.

Teorem 9.5.1: Konstrukcija izogonalne konjugate u trokutu

Neka je dan trokut ABC i točka P koja nije nijedan od vrhova trokuta. Neka su P_A, P_B, P_C preslike P preko BC, CA, AB redom. Tada je centar opisane kružnice trokuta $P_AP_BP_C$ izogonalna konjugata točke P s obzirom na trokut ABC.

Sada će oštrooki promatrač uočiti da nije uopće garantirano da preslike točke P preko stranica trokuta ABC moraju činiti trokut, a oštroumni promatrač će se čak sjetiti Simsonovog (ili Steinerovog, ista stvar) teorema koji nam točno karakterizira sve točke za koje to neće biti istina. U zadacima generalno ova opaska nije previše bitna, ali radi potpunosti ju navodimo u sljedećem atraktivnom prozorčiću.

⚠ Oprez: Ako je P na opisanoj

Ako se P nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC, tada su preslike kolinearne, pa je izogonalna konjugata točke P na pravcu u beskonačnosti. To možemo i uočiti tako da preslikamo AP, BP, CP preko odgovarajućih simetrala kuta i dokažemo da su sva tri pravca paralelna (tj njihovo sjecište je u beskonačnosti)

Prethodni teorem kao direktnu posljedicu ima sljedeći korolar.

Korolar 9.5.2: Konciklična nožišta

Neka su P i Q izogonalne konjugate u trokutu ABC. Tada svih 6 nožišta okomica iz P i Q na stranice trokuta leže na istoj kružnici. Nadalje, centar te kružnice je polovište dužine $\overline{PQ}$.

Još navodimo dvije leme koje nam omogućavaju tu i tamo pronaći izogonalne konjugate u trokutu.

Lema 9.5.3: $OP \cdot OQ = R^2 \implies AP, AQ$ izogonalne

Neka je ABC trokut i neka su P i Q dvije točke na simetrali dužine $\overline{BC}$, takve da je $OP \cdot OQ = R^2$, gdje je R radijus (ABC), te leže u rasporedu $O - P - Q$. Tada su pravci AP i AQ izogonalni s obzirom na $\angle BAC$.

Dokaz. Angle chase. □

Lema 9.5.4: $PBQC$ paralelogram $\implies AP, AQ$ izogonalne

Neka je ABC trokut i neka je P točka takva da je $\angle PBA = \angle ACP$. Neka je Q točka takva da je $PBQC$ paralelogram. Tada su AP i AQ izogonalni s obzirom na $\angle BAC$.

Dokaz. Neka je R točka takva da je $APBR$ paralelogram. Angle chase daje da je $ARBQ$ tetivan i na kraju da su AP i AQ izogonalne. □

Da ne bi netko slučajno rekao da je sve ovo beskorisno, imamo jedan primjer zadatka koji se lijepo raspadne na ove leme.

Primjer 9.5.1. Neka su B_1 i C_1 redom polovišta stranica AC, AB u trokutu ABC. Neka tangenta u C na (ABC) siječe BB_1 u L, a tangenta u B na (ABC) siječe CC_1 u K. Dokaži da je $\angle BAK = \angle CAL$.

Rješenje 9.5.1. Lema 2.3 i teorem 1.2. □

Četverokut

Sada se prebacujemo na proučavanje četverokuta. Kao i prije, zanima nas kada će izogonalna konjugata uopće postojati. Ovog puta nismo takve sreće kao u trokutu jer izogonalna konjugata neće uvijek postojati, ali ne očajavajte se jer ipak znamo točno za koje točke će postojati, a konstrukcija je jako slična konstrukciji u trokutu.

Teorem 9.5.1: Postojanje i konstrukcija izogonalne konjugate u četverokutu

Neka je $ABCD$ četverokut i P točka u ravnini. Neka su P_A, P_B, P_C, P_D preslike P preko AB,BC,CD i DA redom. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- Postoji izogonalna konjugata točki P s obzirom na $ABCD$
- par pravaca (PA, PC) je izogonalan u paru pravaca (PB, PD)
- četverokut $P_AP_BP_CP_D$ je tetivan

U tom slučaju je izogonalna konjugata upravo centar kružnice $(P_AP_BP_CP_D)$.

Ovo možda izgleda nezgrapno za pamtiti i provjeravati, pa zato kao korolar imamo poseban slučaj kada je P unutar $ABCD$ (koji je u praksi gotovo uvijek jedini potreban).

Korolar 9.5.2: Kad je P unutar četverokuta

Neka je $ABCD$ četverokut i P točka **unutar** $ABCD$. Tada postoji izogonalna konjugata točki P s obzirom na $ABCD$ akko vrijedi

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$$

Također za četverokut imamo još jedan teorem koji za trokut iz očitih razloga nije potreban, ali nam olakšava posao u dokazivanju postojanja izogonalne konjugate.

Teorem 9.5.3: 3 izogonale konkurentne $\implies$ sve 4 izogonale konkurentne

Neka je $ABCD$ četeverokut i P točka u ravnini. neka je l_a izogonala od AP u kutu $\angle DAB$, analogno definiramo l_b, l_c i l_d. Tada vrijedi: ako se bilokoja tri pravca iz skupa $\{l_a, l_b, l_c, l_d\}$ sijeku u jednoj točki, tada i četvrti prolazi kroz tu točku i ta točka je izogonalna konjugata točke P u četverokutu $ABCD$.

Da ne bi joše jednom netko rekao da je sve ovo beskorisno, dajem izvrstan primjer zadatka koji ima rješenje u 3 potencije točke, ali ću ga ja lijepo zgaziti ovom artiljerijom.

Primjer 9.5.1. Neka je ABC raznostraničan šiljastokutan trokut. Točka N je polovište duljeg luka BC kružnice (ABC). Neka je k kružnica promjera $\overline{BC}$. Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe kružnicu k u točkama D i E, a D_1 i E_1 su točke takve da su $\overline{DD_1}$ i $\overline{EE_1}$ promjeri kružnice k. Dokaži da polovište dužine $\overline{BC}$ pripada kružnici (NE_1D_1).

Rješenje 9.5.1. je na ploči. □

Lakši zadaci

1. Neka je $ABCDEF$ tetivni šesterokut u kojem vrijedi $AB = BC = CD = DE$. Neka je K točka na dužini $\overline{AE}$ koja zadovoljava $\angle BKC = \angle KFE$ i $\angle CKD = \angle KFA$. Dokaži da je $KC = KF$.

2. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut. Dokaži da postoji točka P unutar četverokuta za koju vrijedi

   $$\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90^\circ$$

   ako i samo ako su dijagonale AC i BD okomite.

3. U konveksnom peterokutu $ABCDE$ točke A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 su presjeci parova dijagonala (BD, CE), (CE, DA), (DA, EB), (EB, AC) i (AC, BD) redom. Dokažite da ako su četiri četverokuta AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E i EA_1E_1A tetivni, onda je i peti tetivan.

4. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut i neka je $P = CE \cap BD$. Pretpostavimo da vrijedi $\angle PAD = \angle ACB$ i $\angle CAP = \angle EDA$. Dokaži da se P nalazi na pravcu koji spaja centre kružnica (ABC) i (ADE).

5. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da AD nije paralelno s BC. Neka je E presjek njegovih dijagonala, a F presjek pravaca AD i BC. Neka je P točka unutar četverokuta $ABCD$ i neka su X, Y, Z, W projekcije P na AB, BC, CD, DA redom. Pretpostavimo da je $XYZW$ pravokutnik. Neka je opisana kružnica tog pravokutnika k. $M \neq W$ i $N \neq Y$ su sjecišta k s AD i BC, redom. G je presjek tangenti na k u M i N. Dokaži da G leži na pravcu EF.

6. Dijagonale trapeza $ABCD$ sijeku se u P. Q je točka između osnovica BC i AD za koju vrijedi $\angle AQD = \angle CQB$ te se P i Q nalaze sa suprotnih strana pravca CD. Dokaži da je $\angle BQP = \angle DAQ$.

7. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut čije se dijagonale AC i BD sijeku u E. Produljenja stranica AD i BC preko A i B redom se sijeku u F. Neka je G točka takva da je $ECGD$ paralelogram i neka je H preslika E preko AD. Dokaži da je $DHFG$ tetivan.

9.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Polinom s cjelobrojnim koeficijentima postiže ± 1 u 3 različite cjelobrojne točke. Dokažite da taj polinom nema cjelobrojnih nultočaka.

2. Nađi sve polinome $P(x)$ sa samo realnim nultočkama koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: postoji polinom $Q(x)$ s realnim koeficijentima

$$P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(n) = P(n)Q(n)$$

   za sve prirodne brojeve n.

3. Neka je a realni broj. Odredi sve polinome P takve da $P(2x + a) \leq (x^{20} + x^{19})P(x)$ vrijedi za sve realne brojeve x.

4. Dokaži da za svaki realni broj $r > 2$, postoji točno dva ili tri realna broja x koji zadovoljava $x^2 = r\lfloor x \rfloor$.

5. Odredi najveću moguću vrijednost r koja zadovoljava sljedeće svojstvo: Ako niz $a_1, a_2, a_3 ...$ prirodnih brojeva zadovoljava

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{{a_n}^2 + ra_{n+1}}$$

   za svaki prirodni broj n, onda postoji prirodni broj M takav da za svaki $n \geq M$ vrijedi $a_n = a_{n+2}$.

9.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Dano nam je 6 kružnica radijusa barem 1 od kojih nikoje dvije nemaju zajedničkih točaka. Neka je ω kružnica s radijusom r koja siječe svih 6 danih kružnica. Dokaži da je $r \geq 1$.

2. Neka je n prirodan broj. Lara treba da zapiše brojeve od 1 do $2n-1$ na ploču i ona bira za svaki broj hoće li će ga zapisati u plavoj ili u crvenoj boji. Kažemo da je par brojeva $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$, gdje je $i \leqslant j$ *dobar* ako i samo ako je broj plavih brojeva među brojevima $i, i+1, \ldots, j$ neparan. Nađite, u ovisnosti o n, najveći mogući broj dobrih parova.

3. Promotrimo 2019×2019 tablicu sastavljenu od 2019^2 jediničnih kvadratića. Neka od njenih polja su označena, i vrijedi da za svako označeno polje postoji točno jedno označeno polje različito od njega koje je u istom retku ili stupcu. Koji je najveći mogući broj označenih polja u tablici?

4. Neka je n prirodan broj i neka je $t \neq 0$ realan broj. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ realni brojevi (ne nužno različiti). Dokaži da postoje indeksi $i_1, i_2, \ldots, i_n$ takvi da za sve $1 \leq k, l \leq n$, vrijedi $a_{i_k} - a_{i_l} \neq t$.

5. U sobi je $2n$ osoba pri čemu svaka ima $n-1$ neprijatelja unutar sobe. Dokaži da tih $2n$ osoba mogu sjesti za okrugli stol tako da nitko ne sjedi pored svojih neprijatelja.

6. Kažemo da je skup S cijelih brojeva korjenast, ako za svaki prirodan broj n i sve $a_0, a_1, \cdots, a_n \in S$, sve cjelobrojne nultočke polinoma $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ također pripadaju S. Nađi sve korjenaste skupove koji sadrže sve brojeve oblika $2^a - 2^b$ gdje su a i b prirodni brojevi.

7. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $f(1) > 1$ i takva da je $f \neq g \circ g$ za svaku funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nadalje, neka S označava skup svih prirodnih brojeva koji nisu u slici od f.

a) Može li S biti beskonačan?

b) Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće da vrijedi $|S| = n$.

8. Nađi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: za sve prirodne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čija suma nije djeljiva s n, postoji indeks $1 \leq i \leq n$ takav da niti jedan od brojeva

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \ldots, a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$$

nije djeljiv s n. Smatramo da je $a_i = a_{i-n}$ za $i > n$.

9. Neka je n prirodan broj. Svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ može biti obojen u crnu ili bijelu boju. U jednom potezu dozvoljeno je odabrati broj i promijeniti boju njemu i svim brojevima koji nisu relativno prosti s njim. Na početku su svi brojevi obojeni u bijelo. Za koje prirodne brojeve n je moguće dobiti da su svi brojevi crni nakon konačno mnogo poteza?

10. Neka je n prirodan broj i h pozitivan realan broj. Neka su $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ realni brojevi takvi da je $x_{i+1} - x_i \leq h$ za svaki $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

11. Konveksan četverokut $ABCD$ nazivamo bahatim ukoliko postoji konveksan četverokut $PQRS$ čiji su svi vrhovi u unutrašnjosti ili na stranicama četverokuta $ABCD$, a čiji je zbroj dijagonala veći od zbroja dijagonala četverokuta $ABCD$.

Neka je $r > 0$. Pretpostavimo da četverokut $ABCD$ nije bahat, ali za svaku točku $A' \neq A$ takvu da je $AA' \leq r$ četverokut $A'BCD$ jest bahat. Nađi sve moguće vrijednosti najvećeg kuta četverokuta $ABCD$.

12. Neka je m prirodan broj. Promatrajmo ploču $4m \times 4m$. Kažemo da su dva polja ploče povezana ako se nalaze u istom redu ili istom stupcu. Nijedno polje nije povezano sa samim sobom. Neka polja su obojana tako da je svako polje povezano s barem 2 obojena polja. Koliko najmanje polja moramo obojati da bi ovo bilo ispunjeno?

13. Neka je n prirodan broj. Tango je ples na brojevnom pravcu. Svaka plesačica pravi korake koji dodaju ili oduzimaju 1 od njene trenutne pozicije. Dvije plesačice su u nuli na početku. Svaka od njih će napraviti n koraka. Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ one naprave i-ti korak u isto vrijeme. Također, one se moraju pridržavati sljedećih pravila:

- Svaka plesačica mora završiti u nuli;
- Ako su tokom plesa u istom položaju, onda se poljube (ovo ne uključuje početak i kraj plesa);
- Koraci svake plesačice se boduju na sljedeći način. Svaki desni korak se boduje onoliko lijevih koraka koliko je plesačica do tada napravila, a svaki lijevi korak se boduje onoliko desnih koraka koliko je plesačica do tada napravila. Svaka plesačica mora plesati tako da je zbir bodova njenih desnih koraka jednak zbiru bodova njenih lijevih koraka.

(a) Za koje n postoji tango?
(b) Dokažite da se u svakom tangu mora dogoditi poljubac.

14. Fibonaccijevi brojevi $F_0, F_1, F_2, \ldots$ definirani su induktivno s $F_0 = 0, F_1 = 1$, te $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ za $n \geq 1$. Za dani prirodan broj $n \geq 2$, odredi najmanju moguću kardinalnost skupa S cijelih brojeva takvog da za svaki $k = 2, 3, \ldots, n$ postoje $x, y \in S$ takvi da je $x - y = F_k$.

15. Dano nam je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Svaki kamenčić je obojen u jednu od n boja i imamo točno 4 kamenčića svake boje. Dokažite da kamenčiće možemo podijeliti na 2 hrpe tako da budu istovremeno zadovoljena oba sljedeća uvjeta:

- Ukupna težina obje hrpe je jednaka.
- Svaka hrpa sadrži po 2 kamenčića svake boje.

Zadaci za samostalan rad

16. Na šahovskoj ploči 8×8 postavljeno je nekoliko žetona tako da se u svakom redu i svakom stupcu nalazi neparan broj žetona. Dokažite da je na crnim poljima postavljen paran broj žetona.

17. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Jedinični kvadrat je pomoću $2(n-1)$ pravaca, od kojih je $n-1$ paralelno jednom paru stranica, a $n-1$ drugom paru, podijeljen na n^2 pravokutnika. Dokažite da je moguće odabrati $2n$ od ovih pravokutnika tako da, za svaka dva među njima, jedan se može postaviti u dugi operacijama translacije i rotacije. Pri tome kažemo da je pravokutnik R_1 unutar pravokutnika R_2 ako svaka tačka pravokutnika R_1 leži u unutrašnjosti ili na stranicama pravokutnika R_2.

18. Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ niz cijelih brojeva, koliko najviše podnizova oblika $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j (1 \leq i \leq j \leq 2020)$ može biti sa zbrojem članova 2021?

19. Neka je n nenegativan cijeli broj. Na koliko načina možemo izabrati $(n+1)^2$ skupova $S_{i,j} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$, gdje su i, j cijeli brojevi takvi da je $0 \leq i, j \leq n$ i vrijedi: za sve $0 \leq i, j \leq n$, skup $S_{i,j}$ ima $i+j$ elemenata; i $S_{i,j} \subseteq S_{k,l}$ kad god $0 \leq i \leq k \leq n$ i $0 \leq j \leq l \leq n$.

20. Na početku igre mađioničar drži oči zatvorene dok osoba iz publike bira prirodan broj n i postavlja na sto $4n$ identičnih novčića u red, tako da 3n pokazuje glavu i n pokazuju pismo. Zatim asistent ulazi u sobu i okreće m koji pokazuju glavu (tako da sada pokazuju pismo). Tada asistent odlazi i mađioničar koji nije vidio ništa do tada ulazi u prostoriju. Mađioničarev cilj je pogoditi koje novčiće je pomjerio asistent. Nađi najveći mogući m (u odnosu na n) za koji mađioničar i asistent mogu smisliti eksplicitnu strategiju tako da mađioničar pogodi šta želi neovisno o rasporedu novćića.

21. Dano je $3n$ različitih točaka na jediničnoj kružnici. Dokažite da među dužinama čiji su krajevi u ovim točkama postoji barem $3\binom{n}{2}$ duljine manje jednake $\sqrt{2}$.

22. Nađite sve prirodne brojeve n za koje postoji particija skupa $\{1, 2, ..., 3n\}$ u n po parovima disjunktnih podskupova oblika $\{a, b, c\}$, takvih da su brojevi $b-a$ i $c-b$ različiti brojevi iz skupa $\{n-1, n, n+1\}$.

23. a.) Imamo $2n+1$ $(n > 2)$ baterija. Ne znamo koje od baterija rade, a koje ne, no znamo da je broj baterija koje rade za 1 veći od broja baterija koje ne rade. Lampa koristi dvije baterije i radi samo ako su obje baterije ispravne. Koji je najmanji broj pokušaja potreban da nađemo par baterija takvih da lampa radi?

b.) Isti zadatak, samo što sada imamo $2n$ $(n > 2)$ baterija i imamo jednak broj baterija koje rade i koje ne rade.

24. Neka su n i k cijeli brojevi takvi da je $n > k \geqslant 1$. Imamo $2n+1$ učenika koji stoje u krugu. Svaki učenik S ima $2k$ susjeda - specifično, k učenika najbližih njemu slijeva i k učenika najbližih njemu zdesna.

Pretpostavimo da su $n+1$ učenika djevojčice, a ostalih n su dječaci. Dokažite da postoji djevojčica koja ima barem k drugih djevojčica među svojim susjedima.

25. Neka je n prirodan broj. Nordijski kvadrat je tablica $n \times n$ u čija polja su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2 tako da svako polje sadrži točno jedan broj. Dva polja smatramo susjednima ako imaju zajedničku stranicu. Svako polje susjedno samo poljima koja sadrže veće brojeve nazivamo dol. Uspon je niz od jednog ili više polja takav da vrijedi:

(i) prvo polje u nizu je dol,

(ii) svaka dva uzastopna polja u nizu su susjedna, i

(iii) brojevi upisani u polja u nizu su u rastućem poretku.

Odredi, u ovisnosti o n, najmanju moguću vrijednost ukupnog broja uspona u nordijskom kvadratu.

Dio II.

Hintovi s predavanja

10. Hintovi za prvu grupu

10.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Koristite razliku kvadrata.
2. Koristite identitete iz uvoda.
3. Zapišite brojeve kao n-1, n, n+1 i koristite identitete iz uvoda.
4. Postavite sustav jednadžbi.
5. Postavite sustav jednadžbi.
6. Izračunajte $xy + yz + xz$ i iskoristite identitet iz uvoda.
7. Uvrstite vrijednost c u prvu jednadžbu i odredite moguće vrijednosti a.
8. Faktorizirajte izraz i izjednačite s 0.
9. Zbrojite jednadžbe.
10. Koristite identitete iz uvoda.
11. Zapišite u obliku bez razlomaka.
12. Dokažite da je jedino rješenje $x_1 = x_2 = ... = x_{1994}$.
13. Koristite identitete iz uvoda.
14. Pomnožite jednadžbe, dokažite da je x=y=z=1.

10.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. Ljudi su kuglice, a datumi u godini su kutije.
2. Čarape su kuglice, a parovi su kutije.
3. Pikule su kuglice, a boje su kutije.
4. Ljudi su kuglice, a horoskopski znakovi su kutije.
5. Ljudi su kuglice, a mjeseci su kutije.

Umjereni zadaci

6. Retci, stupci i dijagonale su kuglice, a moguće sume su kutije.
7. Postoji 8 načina za obojati jedan stupac, a stupaca ima 9.
8. Pazite na to da osoba koja se rukovala s 0 ljudi i osoba koja se rukovala s 499 ljudi ne mogu postojati u isto vrijeme.
9. Slično kao prethodni zadatak.
10. Oduzmemo li dva broja s istim ostatkom pri dijeljenju s 19 dobijemo broj djeljiv s 19. Iskoristite to da biste odredili što bi bile kutije.
11. Koliko ima parova prirodnih brojeva koji u sumi daju 100?
12. Koliko ima različitih mogućih zbrojeva prirodnih brojeva od 1 do 100, a koliko ima mogućih parova među brojevima na ploči?
13. Što bi se dogodilo u "najgorem slučaju"?
14. Kada sve polovište dužine može imati cjelobrojne koordinate u odnosu na parnosti koordinata rubnih točaka dužine?

Teži zadaci

15. Podijelite kvadrat na manje kvadratiće duljine stranice $\frac{1}{6}$.
16. Podijelite šesterokut na 6 trokuta koje čine njegove dijagonale.
17. Kojim znamenkama mogu završavati potpuni kvadrati?
18. Na koliko načina (različitih od početnog) možemo okrenuti stol?
19. Faktorizirajte izraz!
20. Vizualizirajte dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut.

21. Promatrajte niz 1, 11, 111, 1111, ...

22. Promatrajte brojeve a_1, a_2, ..., a_{365} koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_3 + 29$ (razmislite zašto).

23. Uočite da ako dozvolimo samo kretanje za jedno polje gore, dolje, lijevo ili desno, da su svaka dva polja udaljena za maksimalno 11 koraka. Također, svakim korakom prelazimo u polje sa susjednom stranicom, pa su razlike između dva susjedna koraka maksimalno 4. Pokušajte iz toga izvući zaključak za koliko se maksimalno mogu razlikovati dva broja na ploči. (To možete i formalno objasniti tako da uvedete koordinatni sustav numeriranjem redaka i stupaca ploče P brojevima 1, 2, ... , 7, te definirate udaljenost polja s koordinatama (i, j) i (k, l) kao vrijednost $|k - i| + |l - j|$.)

10.3. G1: Leon Križanić - Angle chase

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Ako je tetiva $\overline{AB}$, a obodni kut u vrhu C, pogledajte što se događa ako je $\overline{BC}$ promjer, središte kružnice unutar kuta $\angle ACB$ te središte kružnice izvan kuta $\angle ACB$.
2. Tetivni: Iskoristi činjenicu teorema 1.3 Tangencijalni- upisi kružnicu u četverokut te označi dirališta kružnica sa stranicama četverokuta
3. Koliki je zbroj kuteva u trokutu?
4. Iskoristi Talesov teorem o obodnom kutu.
5. Koristite činjenicu da je tangenta okomita na polumjer kružnice.
6. Povuci okomicu jedne točke simetrale kuta na krakove kuta te uočite postoji li sukladni trokuti.
7. samo raspisati kuteve
8. Koristite Talesov teorem
9. Visina na stranicu $\overline{BC}$ je $\overline{AP}$. Uočiti sukladnost trokuta ABP i MBN.
10. |AP|=|BP|=1. Sličnost trokuta PAT i ABT, iz omjera stranica dobiva se tražena duljina.
11. Iskoristi KSK poucak o sukladnosti
12. Promotrite trokut AOC.
13. Neka je E sjecište AC i BD. Promatrajte trokut AED.
14. uvesti okomicu iz A na BC,XAY kolin, traži tetivne četverokute ($AHCY$, $AXBH$, $XMHY$, $XMYZ$)
15. uvesti polovište AC, $APDE$ bi trebao biti tetivan, srednjica je paralelna stranici
16. uvesti okomicu iz A na BC,XAY kolin, traži tetivne četverokute ($AHCY$, $AXBH$, $XMHY$, $XMYZ$)
17. uvesti polovište AC, $APDE$ bi trebao biti tetivan, srednjica je paralelna stranici
18. centar upisane je sjecište simetrala kuteva, puno tetivnih četverokuta ($BDMIF$, $CEIDN$ pa $ABKM$, $ACNK$), $\sphericalangle DMN$ i $\sphericalangle MND$ su $\frac{\beta}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$

10.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Primjer 1.2
2. Probaj preurediti brojnik tako da dio s n bude djeljiv s nazivnikom.
3. Koji je najmanji, a koji najveći djelitelj broja?
4. Zapiši broj pomoću potencija broja 10 i $9 \mid 10^k - 1$.
5. Kada je broj djeljiv sa $72(8\dot{9})$?
6. Raspiši pomoću potencija broja 10, može se rješiti bez pravila djeljivosti za 16.
7. Koje mogućnosti za mjeru možeš eliminirati zbog $3n + 2$?
8. Gaussova dosjetka za zbroj znamenaka.
9. $\mathrm{M}(n, n+1) = 1$
10. Kakva može biti $\mathrm{M}(n-1, n+1)$? Prisjeti se Euklidove leme.
11. Neki brojevi moraju davati ili iste ostatke pri dijeljenju ili takve da neke razlike budu parne.
12. Osnovna ideja: $(k-1) \mid k^n - 1$.
13. Koristi prvo svojstvo djeljiivosti.
14. Pretpostavi BSO da je $m \leq n$.
15. Promatraj a i b po parnosti.
16. Iskoristi osnovni teorem aritmetike za M i V.

10.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz?

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Zapišite tvrdnje u jednostavnijim oblicima: "Ne pijem i ne pušim i ne psujem", "Preumoran sam ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije prost i broj jedan nije složen".
2. Pronađite konkretne brojeve za koje ne vrijedi zadani izraz.
3. Pronađite konkretan broj za koji tvrdnja ne vrijedi.
4. Pronađite konkretan trokut koji nije jednakokračan.
5. Dokažite direktno koristeći poznate činjenice iz geometrije.
6. Dokažite direktno kao sličan primjer iz uvoda.
7. Zapišite broj u obliku $\overline{abcde}$ i raspišite po znamenkama.
8. Podijelite zadatak na slučajeve u ovisnosti o ostatku dijeljenja zadanog prirodnog broja s 3.
9. Za svaku od izjava posebno pretpostavite da je baš ona ta koja je istinita. Ako dobijete nešto što nema smisla, onda je ta tvrdnja sigurno lažna. Ponovite za sve tvrdnje i ona koja ne daje kontradikciju je točan odgovor.
10. Slično kao u prethodnom zadatku.
11. Slično kao u prethodnom zadatku.
12. Zapišite te brojeve po znamenkama (kao u 6. zadatku) i ponovo pomoću znamenaka zapišite kako izgleda taj zbroj. Pretpostavite da je taj zbroj kvadrat nekog prirodnog broja i pokušajte dobiti kontradikciju.
13. Pretpostavite da ih ima konačno mnogo, tj. da postoji najveći prosti broj, i pokušajte dobiti kontradikciju.
14. Pretpostavite da postoje prirodni brojevi m i n za koje je neskrativ (bitno!) razlomak $\frac{m}{n}$ jednak $\sqrt{2}$ i pokušajte dobiti kontradikciju.
15. Implikacija se negira tako da uzrok ostane nepromijenjen, posljedicu negiramo, a zatim te dvije tvrdnje povežemo veznikom "i", "a" ili "ali". Obrat znači da samo zamijenimo uzrok i posljedicu, bez ikakvih negacija, i ne mora imati istu istinitosnu vrijednost kao početna implikacija.
16. Možda ćete morati uvesti još neke pojmove koji su se u polaznoj implikaciji podrazumijevali.
17. Tvrdnju zapišite jednostavnije: "Ako je barem jedan od brojeva a i b djeljiv s c, onda je i njihov umnožak ab djeljiv s c." Pazite da ste dobro napisali obrat! Obrat ne vrijedi, a to možete dokazati tako da nađete kontraprimjer.
18. Dokazati možete direktno, a obrat ne vrijedi (dokažite!).
19. Obrat vrijedi, samo razmislite kako biste to dokazali.
20. Nismo dokazali tvrdnju ekvivalentnu polaznoj.
21. Pazite na dijeljenje s nulom te da je npr. $(-2)^2 = 2^2 = 4$.
22. Treba rastaviti ekvivalenciju na dvije implikacije te dokazati svaku za sebe.

23. Jedan smjer vrijedi - dokažite ga, a drugi ne - nađite kontraprimjer.

24. a) Pazite na dijeljenje s nulom.
b) Uvrstite rješenja u početnu jednadžbu i provjerite jesu li zaista rješenje.

25. Može li drugi korijen biti negativan broj?

26. Pazite da u obratu po kontrapoziciji ne zaboravite zamijeniti uzrok i posljedicu i oboje negirati.

27. Prisjetite se značenja svih navedenih pojmova!

28. Zapišite obrat po kontrapoziciji te ga dokažite direktno. Odatle slijedi istinitost polazne tvrdnje.

29. Slično kao prethodni zadatak.

30. Imajte na umu činjenicu da je $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ za realne brojeve x i y.

11. Hintovi za drugu grupu

11.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Pomnožite zadanu nejednakost s 2 te dokažite novodobivenu nejednakost pomoću tvrdnje da je kvadrat nenegativan ili koristite AG nejednakost.
2. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
3. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane i iskoristite uvjet iz zadatka.
4. Pomnožite nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ i zatim iskoristite AG nejednakost.
5. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
6. Ponovno primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.

Umjereni zadaci

7. *KA nejednakost*

   Primijenite činjenicu da je kvadrat broja nenegativan.

   GH nejednakost

   Primijenite AG nejednakost.
8. Koristite AG nejednakost na lijevoj strani kako biste dokazali da je zadani izraz veći ili jednak od nekog fiksnog broja.
9. Supstituirajte izraze $(a+b),(b+c),(c+a)$, primijenite zadatak 8..
10. *1. hint*

    Primijetite da je zadana nejednakost ekvivalentna sa sljedećom:

    $$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

    2. hint

    Primijenite KA nejednakost.
11. Primijenite AG nejednakost na svaki par brojeva s lijeve strane i zbrojite te nejednakosti.
12. Primijenite AG nejednakost na $(n+1)$ brojeva.
13. Dodajte i oduzmite a s lijeve strane nejednakosti.
14. Primijetite da iz uvjeta zadatka vrijedi $a^2 < a, b^2 < b, c^2 < c$.

Teži zadaci

15. *1. hint*

Dokažite da je svaki od pribrojnika manji ili jednak 1.

2. hint

Primijenite AG nejednakost na dio nazivnika svakog pribrojnika.

16. *1. hint*

Raspišite $x_0 - x_n$ kao $x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_n$.

2. hint

Primijenite zadatak 8.

17. *1. hint*

Primijenite AG nejednakost na nazivnike razlomaka s lijeve strane.

2. hint

Primijenite KA nejednakost na tako dobivenu nejednakost.

18. *1. hint*

Koristite uvjet $a+b+c=1$ u svakom nazivniku i primijenite AG nejednakost na cijeli nazivnik.

2. hint

Primijenite AH nejednakost na tako dobiveni rezultat.

19. Odredite formulu za volumen, primijenite sličnu ideju kao u 13. zadatku i primijenite AG nejednakost.

11.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Ovo ćemo zajedničkim snagama...

1. Promatraj broj čaša koje su napunjene. Kako se mijenja parnost tog broja?
2. Promatrajte svaku kutiju: koliko se kutija u njoj nalazi? Primijetite da se u kutiji koja ima dvije kutije unutar sebe nalazi 2 + broj kutija unutar prve kutije + broj kutija unutar druge kutije.
3. Pokušajte šahovski obojati ploču. :)
4. Među prvih 1000 prirodnih brojeva postoji nešto više od 180 prostih brojeva.

   Postoji li niz od 1000 složenih brojeva? Što ako pokušate forsirati takav niz tako da je prvi broj djeljiv s 2, drugi broj sa 3, treći broj s 4...

Što je uopće *optimalna* strategija?

5. Koliko komada čokolade ima nakon svakog poteza? Koliko ih ima na početku, a koliko na kraju?
6. Koliko hrpa žetona ima? Koliko ih ima na početku, a koliko na kraju?
7. Probajte igrati nekoliko igri. Tko je pobjednik?

   Kako se rezultat mijenja ako se promijeni neki znak?
8. Kako se mijenja broj jedinica/dvojka nakon svakog poteza?
9. Kako parnost razlike ovisi o parnosti brojeva koje oduzimamo?
10. Promatrajte parnost broja brojeva nakon poteza.
11. Što ako pozicije obojimo u tri boje? Onda ćemo svaki potez promjeniti točno jednu životinju svake boje.
12. Probajte uzeti neki skup karata od kojih se samo jedna sigurno mijenja svaki potez.

Invarijante na pločama

13. Pokušajte obojati ploču tako da svaka pločica prekrije točno jedno obojano polje.
14. Pokušajte preko šahovskog bojanja nešto zaključiti o broju pločica koje trebate.
15. Kada bi pronašli neko bojanje koje razlikuje pločice, bilo bi lagano pokazati da nije moguće.
16. Kada god koristimo domine, isplati se promatrati šahovsko bojanje.
17. I kojeg reda skakač sigurno ne može skočiti u koji red? Što bi onda mogli zaključiti potezima s kojima ulazimo u te redove?

Neke *trivijalne* transformacije

18. Opisani proces relativno je sličan kao da gledamo zbroj znamenaka. Kada još gledamo zbroj znamenaka?

19. Odgovori su: a) NE, b) DA, c) NE. Trebat ćete koristiti različite invarijante za primjere pod a) i c). Za primjer pod b) postoji način da se do petorke dođe u točno dva poteza.

20. Promatrajte radije brojeve $y_i := x_i + 1$

21. Kako se odnose koordinate točaka A i A'?

22. Želimo na neki način očuvati skup boja, tj. što god da je invarijanta mora jednako mijenjati svaku boju.

23. Jeste li razmišljali o tome da je $0.6 = \frac{3}{5}$, a $0.8 = \frac{4}{5}$. Gdje još često susrećemo brojeve 3,4,5?

24. Što se događa s opsegom dijela zaraslog korovom nakon svake noći?

25. Znate li neki algoritam u kojem se brojevi (x, y) zamjenjuju s $(x - y, y)$? Za što se koristi taj algoritam?

11.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Prisjetite se teorema o obodnom i središnjem kutu. Kakav je trokut CSB?
2. Promotrite trokut AOC.
3. Promotrite unutarnje kuteve tog četverokuta.
4. Prisjetite se Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom. Također, pronađite dva tetivna četverokuta i iskoristite što vrijedi za njihove kuteve.
5. Za koji četverokut znamo da je tetivan? Iskoristite da su obodni kutevi nad istim lukom jednaki.
6. Koji kutevi moraju biti jednaki da bismo dokazali tvrdnju zadatka? Pronađite ih promatrajući unutarnje i vanjske kutove dvaju tetivnih četverokuta.

Teži zadaci

7. Neka je H sjecište pravaca AD i FG. Koja dva četverokuta su tetivna? Promotrite trokut HDG.
8. Zapravo treba dokazati $\angle EAD = \angle EBD$. Kakav je trokut AOB? Uočite da na gotovo jednak način možemo riješiti zadatak ako dokažemo jednakost nekih drugih dvaju kuteva. Kojih?
9. Promotrimo trokut CHB. Središte njemu opisane kružnice upravo je polovište stranice $\overline{BC}$ (zašto?), označimo ga s P. Dakle, ekvivalentno je dokazati $|PC| = |PH| = |PB|$.
10. Opišite kružnicu trokutu ABC. Gdje se nalazi njezino središte?
11. Ekvivalentno je dokazati $\angle RSP = \angle MSP$.
12. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.
13. Promotrite kružnicu opisanu trokutu BMC. Gdje se nalazi njezino središte? Pomoći će vam slično razmišljanje kao u zadatku 10. Označimo li s E sjecište pravaca KM i AD, ekvivalentno je dokazati da je $\angle DEM = 90°$ promatrajući trokut DEM.
14. Iskoristite da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta. Zapravo vam tetivni četverokuti neće pomoći u ovom zadatku, ali odlučila sam ga zadati kao poticaj da riješite zadaću, jer je službeno rješenje dugačko i puno ružne trigonometrije, a koristeći jednu od tvrdnji koju smo naveli na početku predavanja zadatak se može riješiti vrlo jednostavno u par redaka.

11.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Primjer.
2. Promotri prvih nekoliko potencija te uoči uzorak.
3. Promotri posebno parne, a posebno neparne brojeve.
4. Uoči da se ostatak pri djeljenju 7^n ponavlja s periodom 4 pa poveži to s eksponentom.
5. $1 \equiv -6 \pmod 7$.
6. Promatraj djeljivosti s 2 i 3.
7. $2^3 \equiv 8 \equiv -5 \pmod{13}$
8. Primjer.
9. Za sve proste brojeve $p > 3$ vrijedi $p \equiv 1 \pmod 6$ ili $p \equiv -1 \pmod 6$. Prouči ta dva slučaja.
10. Za bilo koji takav raspored možemo pronaći nenegativne cijele brojeve $x_1, x_2, ..., x_{2008}$ takve da je dobiveni broj jednak $1^1 \cdot 10^{x_1} + 2^2 \cdot 10^{x_2} + \ldots + 2008^{2008} \cdot 10^{x_{2008}}$. Na primjer, za raspored $\overline{3^3 1^1 2^2} = 2714$, vrijedi $2714 = 3^3 \cdot 10^2 + 1^1 \cdot 10^1 + 2^2 \cdot 10^0$.
11. Pokaži da suma znamenki broja n daje isti ostatak pri djeljenju s 3 kao i broj n. To iskoristi u zadatku.
12. Promatrajte n modulo 10. Očito mora biti $n^n \equiv 3 \pmod 3$. Provjerite slučajeve.
13. Modulo 8.
14. Ako nađemo neki k tako da bude $8^n + 47 \equiv 0 \pmod k$ pa bi onda imali da k dijeli p, što je jedino moguće ako je $k = p$ (odnosno, dobijemo samo jedan slučaj za provjerit!). Dakle, ideja je da nađemo više različitih modula k za koje će (pod određenim uvjetima) vrijediti prethodna relacija, i ako nađemo dovoljno takvih modula, gotovi smo. Idite redom po modulima koje smo prolazili (npr. $3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$) i vidite što možete zaključiti o n u tim slučajevima.
15. Uočimo da je $73 = 72 + 1$, $9 = 8 + 1$ te $17 = 16 + 1$ pa gledamo modulo 8.

11.5. X2: Lucija Relić - Indukcija

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. klasična indukcija, u koraku krenuti od pretpostavke i graditi dalje
2. klasična indukcija, u koraku krenuti od onoga o čemu želimo znati nešto više
3. klasična indukcija
4. klasična indukcija
5. Rješenje koje se može naslutiti na malim primjerima ($\frac{n}{n+1}$) može se pokazati indukcijom.
6. S koliko dijagonala doprinosi vrh koji je u odnosu na pretpostavku dodan u koraku?
7. U koraku (za $n+1$) promatrajte n pravaca i s koliko sjecišta doprinese taj zadnji dodani pravac.
8. U koraku (za $n+1$) promatrajte n kružnica i što se desi kad dodamo tu zadnju kružnicu.
9. Koliko ima traženih podskupova koji ne sadrže element $n+1$? Kako možemo dodati taj zadnji element?
10. Izbor markica može sadržavati barem jednu vrijednosti 5 kn ili mogu sve biti vrijednosti 3 kn.
11. Ploča $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sastoji se od 4 ploče $2^n \times 2^n$. Kako možete popločati sredinu velike ploče?
12. Proučite zadatak 8.
13. indukcija s korakom 3
14. klasična indukcija
15. Provjerite što se događa na malim primjerima.
16. Provedite indukciju po broju automobila. Mora li postojati automobil koji može doći do prvog sljedećeg?
17. Promotrimo igrača s najviše pobjeda. Njega želimo staviti na čelo kolone.
18. Napravite korake iz n u $2n$ pa iz n u $n-1$.

12. Hintovi za treću grupu

12.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. Izvuci jedinicu iz svakog razlomka i napiši ostatak kao razliku dva razlomka.
2. Racionaliziraj sve razlomke.
3. Preoblikuj svaki član u umnošku tako da koristiš formulu za razliku kvadrata.
4. Zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.

Umjereni zadaci

5. Iskoristi formulu za razliku kvadrata i zapiši svaki razlomak kao razliku dva razlomka.
6. Rastavite izraz $x_0 - x_n$ te primijenite AG nejednakost.
7. Pomnoži i podijeli izraz s $1 - x$.
8. Pomnoži i podijeli izraz s $1 - x$.
9. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.
10. Zapiši opći član sume kao razliku dva slična izraza.
11. Zapiši svaki razlomak kao zbroj (ili razliku) tri jednostavnija razlomka.
12. Izrazi a_n samo preko a_{n-1}, ispiši par članova niza i uoči pravilnost te ju dokaži matematičkom indukcijom. (ovaj zadatak nema puno veze s teleskopiranjem)
13. Faktoriziraj nazivnik i prikaži razlomak kao razliku dva razlomka.

Teži zadaci

14. Ogradi svaki razlomak odozgo s izrazom koji će se moći teleskopirati.
15. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.
16. Izrazi svaki razlomak kao razliku dva slična razlomka.
17. Faktoriziraj svaki član što je više moguće.

12.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Uoči da 4 polja sudjeluju u potezu, kao i u uvodnim zadacima, pokušaj iskoristiti da . Može se riješiti i s dvije boje
2. Šahovsko bojanje; što se događa s brojem žetona na poljima.
3. Slično prvom zadatku, oboji tako da sva polja koja sudjeluju u potezu budu različite boje. Koliko boja? Što se događe s brojem žetona na poljima određenih boja?
4. Za konstrukciju će poslužiti indukcija. Za $N = 3$ promatraj koja polja ti ostanu nepokrivena (i zašto)?
5. Bojanje u dvije boje i invarijanta
6. Uoči da ima paran broj polja pa je drugom igraču dovoljno "preživjeti" svih 32 poteza. Obojimo ploču u 32 boje, tj. povežimo polja u parove.

Teži zadaci

7. Koji brojevi će se najviše pojavljivati? 2×2 opločavanje.
8. Princip ekstrema i šahovsko bojanje. (Općenito, ako se spominje parnost/neparnost, dobro je pokušati šahovskim bojanjem. Čak i ako ne prolazi, ne će se puno vremena potrošiti na to)
9. Šahovsko bojanje će biti nužno, ali ne dovoljno. Postoji li još neko (pola-pola) bojanje tako da će skakač trebati uvijek skakati iz jedne boje u drugu?
10. Bojanje s dvije boje olakšava, ali može se i bez toga. Pokušaj garantirati izlazke što većeg broja automobila odjednom.
11. invarijante i šahovsko bojanje
12. Intuitivno je bojati s 1, 2, 3, 4, 5... Ne ću otkriti previše, ali bojanje nije isto kao u 1. zadatku jer se to ne slaže dobro s uvjetom uklanjanja bilo kojih polja u zadnjem stupcu, niti je zaključak u vezi broja pokrivenih polja svake boje (to se ne slaže dobro s plusevima). Kako zaobići te probleme?
13. Slično kao u prošlom zadatku, uvjet dva nestala polja u istom stupcu/retku daje ideju za način bojanja. Ima i sličnosti s 2. uvodnim zadatkom...

12.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Uvedite točku S, presjek simetrale kuta sa opisanom kružnicom te dokažite da ona leži na simetrali odgovarajuće stranice.

2. Nađite površine trokuta $\triangle AIC$, $\triangle BIA$ i $\triangle CIB$.

3. Spojite središte kružnice sa diralištem tangente. Kakav je odnos tog polumjera i tangente?

4. Prisjetite se da je središte upisane, odnosno, pripisane kružnice sjecište simetrale unutarnjih, odnosno, vanjskih kuteva. Činjenicu da je $DA = DC$ imate iz prvog zadatka. Angle chase!

5. Neka je H' preslika točke H preko stranice $\overline{BC}$. Dovoljno je dokazati da je četverokut $BACH'$ tetivan.

   Neka je H'' preslika točke H preko polovišta stranice $\overline{BC}$. Opet, dovoljno je dokazati da je četverokut $BACH''$ tetivan.

6. Neka simetrala kuta pri vrhu A siječe dužinu $\overline{BC}$ u točki D. Odredite površine trokuta $\triangle BAD$ i $\triangle DAC$ na dva različita načina!

7. Iskoristimo teorem 1.3. Neka je P' preslika točke H preko polovišta dužine $\overline{BC}$ i želimo pokazati da je točka O na pravcu AP' (uočimo da to onda povlači da je točka P' jednaka presjeku pravaca AO i HM, odnosno, $P' \equiv P$). Točka O je na pravcu AP' ako i samo ako je AP' promjer. Iskoristite Talesov teorem!

8. U prethodnom zadatku, možemo vidjeti da je MO srednjica u trokutu $\triangle AHP$, odnosno, $AH = 2 \cdot OM$. Također, poznato je da je $AT = 2 \cdot TM$. Zašto to povlači da je $HT = 2 \cdot TO$ i da su H, T i O kolinearne?

9. Zadatak se može riješiti na više načina. Prvo, neka su D, E i F nožišta visina iz A, B i C, neka su M, N i P polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, redom te neka su A', B' i C' polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$.

   Prvi način je da uočimo razne tetivne četverokute koje imamo i radimo angle chasing, npr. četverokuti $BFEC$ i $AFHE$ su tetivni. Razmislite gdje su središta kružnica opisanih tim četverokutima i provedite angle chasing.

   Alternativni način je preko potencije točke, odnosno, koristimo obrat potencije točke. Razmislite odakle sve možete gledati potenciju točke. Najteže je dokazati da su točke A', B' i C' na toj kružnici, no, za te točke, uvedite preslike ortocentra preko stranica!

10. Zadatak ima četiri dijela pa slijede četiri hinta:
    - Iskoristite činjenicu da je udaljenost između točke i dirališta tangenti jednaka za obje tangente.
    - Promotrite homotetiju koja šalje upisanu u pripisanu kružnicu.
    - Promotrite homotetiju koja šalje upisanu u pripisanu kružnicu.
    - Što je KI u trokutu $\triangle DD'K$? Što je KP u trokutu $\triangle NAK$, gdje je N nožište visine iz A? Analogno i za drugu kolinearnost.

11. Obodni i središnji kut!

12. Iskoristite Talesov teorem i tetivne četverokute!

13. Označimo s M polovište stranice $\overline{AB}$. Ako ste upoznati sa Simpsonovim pravcem, pokušajte prepoznati tu konfiguraciju, gdje će S, R i M biti ta nožišta visina i onda će kolinearnost slijediti iz postojanja Simpsonovog pravca.

Ako niste upoznati sa Simpsonovim pravcem, pokušajte naći što više tetivnih četverokuta, pri čemu ih možete dobivati iz okomitosti danih u zadatku.

14. Uvedimo točke F i G kao nožišta visina iz I_1 i I_2 na $\overline{BC}$. Dokažite da je $DF = GE$. Možete li naći neke slične trokute?

15. Recimo da je $AB + AC = 2BC$, odnosno, da je stranica nasuprot BC srednja po duljini. Dakle, trebamo dokazati da je $GI \parallel BC$. Uočimo da to vrijedi ako i samo ako su točke G i I jednako udaljene od $\overline{BC}$.

16. Dodajmo točku D koja je polovište luka BC koji ne sadrži vrh A. Uočimo da je $OD = OA$. Što nam uvjeti $\angle BAC = 60^\circ$ ili $AH = AO$ govore o točki D?

17. Pronađite tetivni četverokut.

18. Pronađite tetivni četverokut.

19. Prvo, uočimo da je kružnica k pripisana kružnica nasuprot vrha A trokuta $\triangle ABC$. Umjesto da dokazujemo da se BP i CQ sijeku u središtu kružnice, uvedimo točke P' i Q' definirane kao presjek simetrale vanjskih kuteva pri vrhovima B i C s pravcem LM. Onda nam je dovoljno dokazati da P' i Q' leže na kružnici s promjerom $\overline{BC}$. Pronađite tetivne četverokute!

20. Prvo, dokažite da je četverokut $(CHBG)$ tetivan. Uvedimo $X = HI \cap AC$ i $Y = (CHBG) \cap AC$. Čemu je jednako HY?

12.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Zadaci za MFT

1. Klasični MFT.
2. Gledaj ostatke pri dijeljenju s 3 i 11.
3. Ostatak pri dijeljenju sa 7. Ostatak pri dijeljenju eksponenta sa 6 (MFT).
4. Kombiniraj MFT i uvjete zadatka.
5. Primijeni binomni poučak i promatraj koeficijente.
6. Za $p > 3$ $n = p - 2$. Provjeri množenjem izraza sa 6.
7. Promatraj ostatke koje potencije broja 2 daju pri dijeljenju sa 17. Primijeti periodičnost.
8. Gledaj sustav $\pmod{19}$ kako bi ograničio mogućnosti za z^9. Zbroji jednadžbe, napiši u obliku potpunog kvadrata u varijablama x i y.

Zadaci za kvadratne ostatke

9. Kvadratni ostatci pri dijeljenju sa 7.
10. Kvadratni ostatci pri dijeljenju s 3.
11. Kvadratni ostatci pri dijeljenju s 11.
12. Kvadratni ostatci pri dijeljenju s $3, 4, 5$. Pitagorin poučak.
13. Kvadratni ostatci pri dijeljenju s 3 i 4.
14. Ograniči mogućnosti za y. Kvadratni ostatci pri dijeljenju s 9.
15. Kvadratni ostatci pri dijeljenju sa 4 i s 3 ovisno o vrijednostima prostih brojeva.
16. Zbroji jednadžbe. Kvadratni ostatci pri dijeljenju sa 7.
17. $N = x^2 = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 301\overline{cd} + 100 \equiv 10^2 \pmod{7 \cdot 43}$.

12.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. Promatrajte najmanji broj napisan na pravcu.
2. Imamo više dijelova:
   (a) Promatrajte najkraću udaljenost između neke dvije osobe.
   (b) Promatrajte najdulju stranicu u poligonu.
   (c) Radite indukciju, uočite da je baza dana u (a) dijelu.
   (d) Pretpostavite da je u osobu A pucalo barem šest osoba, $A_1, \ldots, A_6$. Koliko iznosi najmanji kut među kutevima $\angle A_i A A_{i+1}$ za $i = 1, 2, \ldots, 6$? Što to znači za udaljenosti?
3. Ako je točaka konačno mnogo, postoji par točaka takva da je udaljenost među njima najveća među svim parovima.

Umjereni zadaci

4. Promatrajte put od 1 do n^2.
5. Među svim rasporedima parova (bunar, farma), promatrajte onaj koji ima najmanju ukupnu udaljenost cesta.
6. Promatrajte trokut maksimalne površine.
7. Među svim rasporedima u dva doma, promatrajte onaj u kojem je broj ukupnih neprijateljstava unutar domova najmanji.
8. Ako je skup
$$S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{N}^4 \colon x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)\}$$
neprazan, postoji rješenje za koje je $x^2 + y^2$ minimalno.

Teži zadaci

9. Što se dogodi ako izbacite najveći broj?
10. Ako sve točke nisu na jednome pravcu, među svim parovima (p, L) gdje je p točka, a L pravac koji ne sadrži p, postoji par za koji je udaljenost između točke i pravca najmanja. Razmotrite taj par.
11. Promotrite najveću dijagonalu.

13. Hintovi za četvrtu grupu

13.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. AG na x i $\frac{1}{x}$
2. Prebacite $-4a^4$ na desnu stranu nejednakosti pa AG.
3. Pomnožite sve sa $2 \to 3$ puta primijenite AG i zbrojite dobivene nejednakosti.
4. AG na x^2 i y^2.
5. Pomnožite sve sa 2 i više puta primijenite AG.
6. AG na svaki od faktora s lijeve strane
7. AG na lijevu stranu pa ponovno na $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$.
8. Možete li dokazati $p^2+p+1 \geq 3p$ i $q^2+q+1 \geq 3q$?
9. $ab^3+a^3b = ab(a^2+b^2)$, uočite da je ab geometrijska sredina brojeva a^2 i b^2, primijenite AG dva puta.
10. Primijenite prethodni zadatak.
11. Dodajte $2(a+b+c)$ na obje strane i više puta primijenite AG.
12. AG na $\left\{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}\right\}$ (sve skupa $n+1$ varijabli)
13. Kvadrirati i raspisati.
14. Podijeli s abc i Engel forma.
15. Uvjet jednakosti CSB - a.
16. Trik s jedinicom.
17. Trik s jedinicom da svedemo na oblik s $a+b+c$.
18. Lijeva strana je zapravo
$$x^3+y^3+z^3+2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right).$$
Također, očito je
$$x^3+\frac{1}{y^3}+1 \geq 3\frac{x}{y}.$$
Možemo li nekako namjestiti ovo?
19. Napišite lijevu stranu izraza kao sumu kvadrata i onda primijenite KA nejednakost.

20. Iskoristite $x^4 + 1 \geq 2x^2$ i $y^3 + y \geq 2y^2$.

21. Dokažite da je

$$P \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|}r.$$

Što još treba vrijediti da bi riješili zadatak? Zašto to vrijedi?

22. Uvjet je ekvivalentan s $ab + bc + ca = abc$. Čemu je onda jednako $(a-1)(b-1)(c-1)$? Koja je to sredina, a koja sredina je uvjet?

23. Označite stranice sa a i b. Čemu je ekvivalentna nejednakost? Možete li namjestiti na AG?

24. Grupirajte izraz malo drugačije i iskoristite uvjet. Također, iz uvjeta možete dobiti ogradu oblika $abc \geq c$, gdje je c neka konstanta!

25. Razmnožite sve i drugačije grupirajte.

26. Raspišite sumande s lijeve strane malo drugačije i onda iskoristite uvjet i $A - G$ u nazivniku $(a + bc \leq a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c))$.

27. Sumandi na lijevoj strani se mogu srediti u

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} = a + \frac{ab^3}{a^3 + 2b^3}.$$

S obzirom da trebamo dobiti $\leq$ u nejednakosti, možemo dokazati da je nazivnik $\geq$ nešto. Nađite to nešto!

28. Opet, činjenica da dokazujemo $\leq$ govori da trebamo raditi nešto s nazivnikom. Iskoristite uvjet, slično kao u 26. zadatku.

29. Dodajte neke izraze na obje strane nejednakosti da je učinite "simetričnijom", ali i da dobijete neke izrazre na koje možete lagano primijeniti AG.

30. Izlučite $\sqrt{uvw}$, primijenite CSB na $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$, a AG na $\sqrt{uvw}$ (želite dobiti

$$\text{izraz1} \geq \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}, \quad \text{izraz2} \geq \sqrt{uvw},$$

gdje su izraz1 i izraz2 nekako povezani s $u + v + w$.

31. Ako dokažete da je $LHS \geq RHS$ ili $RHS \geq LHS$, jedino moguće rješenje sustava je ono koje zadovoljava uvjet jednakosti nejednakosti koju ste iskoristili.

13.2. C4: Mislav Brnetić - Igre

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Prisjetite se *primjera 1.*
2. Pokušajte igrati igru s manjim primjerima.
3. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača (*simetrija*)?
4. Pokušajte igrati igru s malim primjerima te tako naslutite rješenje i dokažite ga indukcijom.
5. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača?
6. Pretpostavite da drugi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu pa dokažite suprotno.
7. Tko od igrača i na koji način može osigurati da postoji dostupno neposjećeno polje nakon svakog poteza? Smislite strategiju kojom biste to osigurali.
8. Slično kao u 6. zadatku, pretpostavite da prvi igrač uvijek gubi te dokažite suprotno.
9. Obojajte crvenom bojom polja na dijagonali. Zašto nije moguće obojati manje polja crvenom bojom?

Teži zadaci

10. Dokažite da Lazo ima pobjedničku strategiju te odredite tu strategiju. Primijenite ideju kao u 7. zadatku.
11. Primijetite da su dva uzastopna broja sigurno relativno prosta, kao i da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta te iskoristite tu ideju (rješenje će se razlikovati za paran i neparan n).
12. Dokažite da, ako se na početku najveći broj ponavlja paran broj puta, tada će se i nakon svakog poteza također ponavljati paran broj puta (*Zašto je to dovoljno?*).
13. Pokušajte naslutiti rješenje na malim primjerima te zatim pronađite što jednostavnije strategije koje funkcioniraju općenito.
14. Na malim primjerima naslutite koji n su rješenje te induktivnim zaključcima to i dokažite (ti induktivni zaključci neće biti baš standardni).

13.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Osnovne konfiguracije

1. Uvedite točku K na AC takvu da je $\angle CBK = \angle ABD$.
2. Ako je četverokut tetivan, u kojoj točki se sijeku te okomice? Ako se okomice sijeku u jednoj točki, nađite obodne kuteve.
3. Neka je M sjecište pravaca XY i AB. Potencija točke!
4. Nađite tetivne četverokute. Angle chasing!
5. Prvo, zašto je svejedno spustimo li okomicu na AB ili AC? Ako je D nožište visine iz M na AC, uvedite točku A' na produžetku pravca AC preko vrha C takvu da je $AA' = 2AD$. Što trebamo dokazati?
6. Dokažite da točka M leži na opisanoj kružnici trokuta $\triangle ABC$. Angle chasing!

Zadaci s uvođenjem točaka

7. Uvedite točku F, nožište visine iz P na $\overline{BC}$. Možete li naći neke tetivne četverokute?
8. Uvedite točku Q, presjek pravca AM s opisanom kružnicom trokuta $\triangle ABC$.
9. Uvedite točku D' na produžetku pravca BC preko vrha C takvu da je $CD' = CD$.
10. Uvedite točku D na produžetku pravca AB preko vrha A takvu da je $AD = AC$.
11. Uvedite točku N, drugo sjecište kružnica opisanih trokutima $\triangle BMX$ i $\triangle CMY$.

13.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. $3^{100} + 5^{100} = 3^{6 \cdot 16} \cdot 3^4 + 5^{6 \cdot 16} \cdot 5^4$

Koristeći mali Fermatov teorem možemo odrediti $3^{6 \cdot 16}$ i $5^{6 \cdot 16} \pmod 7$

2. 33 nije prost broj, tako da za njega ne vrijedi mali Fermatov teorem. Možemo ili odvojeno promatrati mod 3 i mod 11 ili izračunati $\varphi(33)$ te iskoristiti Eulerov teorem.

3. Određivanje posljednje znamenke ekvivalento je pronalasku ostatka modulo 10. Budući da je $\varphi(10) = 4$, trebamo odrediti $7^7 \pmod 4$.

4. Kako bismo upotrijebili mali Fermatov teorem, trebamo odrediti $a_{n-1} \pmod{\varphi}(7)$, a znamo da je $\varphi(7) = 6$. Za početak nam moze pomoći promotriti ostatak modulo 6 prvih nekoliko članova niza.

5. Određivanje posljednje tri znamenke ekvivalentno je pronalasku ostatka modulo 1000, a u tom slučaju 2005 postaje ekvivalentan 5.

6. Možemo iskoristiti mali Fermatov teorem kako bismo pronašli ostatak od 29^p modulo p.

7. Zanima nas ostatak od $2^{2^{6k+2}}$ modulo 19 za što nam je korisno promotriti ostatak od 2^{6k+2} modulo $\varphi(19) = 18$. (Ako nije jasno zašto, promotrite Primjer 1.1).

Sad nas zanima ostatak od 2^{6k+2} modulo 18 za što nam je korisno promotriti ostatak od $6k+2$ modulo $\varphi(18)$.

8. Kako je $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, ako 1001 dijeli $10^j - 10^i$, onda dijeli i $10^(j-i) - 1$, iz čega slijedi da $\mathrm{ord}_{1001}(10)$ dijeli $j - i$.

9. Ako je p prost, možemo se poslužiti malim Fermatovim teoremom.

10. Za neki prosti q koji dijeli $2^p - 1$, promotrimo $\mathrm{ord}_q(2)$.

11. Pokušajmo namjestiti neke izraze koji su kongruentni $1 \pmod m$ te onda iskoristiti da orderi dijele te izraze (Teorem 1.4).

12. Budući da je $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$, dovoljno je dokazati da je $n^{n^{n^n}} \equiv n^{n^n} \pmod m$ za $m = 9, 13, 17$.

13. Pokušajmo naći izraze za koje Teorem 1.4 postane traženi izraz.

14. Za proste, primijenimo mali Fermatov teorem. Primijetimo da 3 i 9 funkcioniraju.

15. Pretpostavimo da postoji n koji dijeli $2^n - 1$ te promotrimo najmanji prosti faktor od n.

16. Dovoljno je provjeriti koji prosti brojevi ne dijele niti jedan član niza.

13.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. Stavimo li $y = 0$ vidimo da je potrebno naći vrijednosrt $f(0)$ da bismo završili zadatak.
2. $y = 0$
3. Funkcija je injekcija. Promotri skup nultočaka funkcije.
4. Desna strana jednakosti je simetrična po x, y.
5. Neki broj se mora slikati u 1. Može li to biti neki broj veći od 1?
6. $f(1) = 1$. Kako osigurati da $m + n$ ima jako malo faktora?
7. Namjestiti da je $\gcd(m, n) = n$.
8. Funkcija je injekcija. Dokazati $f(1) = 1$. Nastaviti nešto slično kao u 5. zadatku.
9. Rješenja su sve funkcije oblika $f(x) = x^2 + c$ pa nemojte probavati naći tačnu vrijednost $f(0)$ ili tako nečeg. Iskoristi da lako možemo dobiti da postoji t takvo da je $f(t) = t^2 + f(0)$.

Dva zadatka vezana za razumijevanje funkcija

10. Eventualno periodična funkcija je ograničena.
11. Za dokaz egzistencije u takvo da je $f(u) = 1$. Za dokaz jedinstvenosti uporedi početni uvjet s ovim drugim.

Dvije čuvene funkcijske jednadžbe

12. **Cauchyeva funkcijska jednadžba**

    Za prva dva slučaja indukcija. Koristi da ako je $a = \frac{p}{q}$ racionalan tada je $q \cdot a$ cijeli broj. Za treći slučaj primjeti da je f rastuća, koristi da znamo koliko je f u racionalnim točkama i da između svaka dva realna broja postoji racionalan broj.

13. **Jensenova funkcijske jednadžba**

    Rješenje su svi polinomi prvog stupnja. Odgovarajućom supstitucijom svedi ovu jednadžbu na Cauchyevu.

Olimpijski zadaci

14. Ovaj zadatak se može uraditi na 4 različita načina. Dajem hintove za sva 4 rješenja:
    - ako pronađemo $f(1)$ gotovi smo indukcijom
    - promatraj funkciju $g(n)$ takvu da je $f(n) = g(n)^2$
    - nađi "formulu" za $f(n)$, izvuci informaciju iz toga što je taj neki izraz kvadrat za sve n
    - nakon što nađeš "formulu" za $f(n)$ promotri $f(p)$ gdje je p prost broj
15. Uvrsti y tako da izjednačiš argumente pod f-om na lijevoj i desnoj strani jednadžbe.

16. Nađi $f(1), f(0)$. Dobij da je funkcija involucija.

17. Desna strana je simetrična po a i b. Pokaži da je $f(x+1) - f(x)$ konstantno.

18. Zadatak se može riješiti na dva načina. Jedan je da nađemo $f(p)$ gdje je p prost broj, a drugi je indukcija.

19. Iskoristi da postoji t takvo da $f(t) = 0$. Dokaži da ako postoji $u \neq 0$ takvo da $f(u) = 0$ onda je $f(x) = 0$ za sve x. Pripazi na pointwise trap.

20. Lako se dobije $f(0) = 0$. Promotri $P(1, y)$. Šta možemo reći o funkciji f ako je $f(1) = 0$, a šta ako je $f(1) \neq 0$?

21. Lako je dokazati $f(2^{2k}) = 2^{2k}$. Iz multiplikativnosti je onda dovoljno naći $f((2k+1)^2)$. Kako zapisati $(2k+1)^2$ u pogodnom obliku?

22. I rješenje: Iz uvjeta dobijamo da je f strogo rastuća, pa je $f(n) \geq n$ za svaki prirodan broj. Nastaviti razmišljati u pravcu nalaženja ograda za f.

II rješenje: Dokaži $f(1) = 1, f(2) = 2$. Promotri $f(3), f(4)$.

23. Lako je napraviti uvrštavanja iz kojih će nam slijediti da je dovoljno da pokažemo da je f injekcija da bismo imali $f(n) = n$. Ako f nije injektivna pokaži da je periodična. Kada je jedino moguće da f bude periodična?

24. Ako je $f(0) \neq 0$ lako je dokazati da je funkcija konstantna. Šta ako je $f(0) = 0$?

25. $f(1) + 1$ je fiksna tačka funkcije, tj. za $t = f(1) + 1$ je $f(t) = t$. Šta ako je $t \neq 0$, a šta ako $t = 0$? Ne zaboravi da se svaki racionalan broj može napisati u obliku $\frac{p}{q}$ gdje su $p, q \in \mathbb{Z}$.

14. Hintovi za petu grupu

14.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. koristimo vietove formule za a_{n-1} i a_{n-2}
2. zapišemo $P(x)$ preko definicije i pogledamo koefijente uz najveće potencije
3. promotrimo kako $P(1)$ izgleda preko nultočaka i preko koeficijenata
4. promotrimo novi polinom $Q(x)$ definiran s $Q(x) = (x+1)P(x) - x \, \forall x \in \mathbb{R}$

Teži zadaci

5. Teorem o jednakosti polinoma kaže da obje strane imaju iste koeficijente pa su obje strane jednake za sve kompleksne brojeve.

   Dokaži: ako $P(x)$ ima kompleksnu nultočku apsolutne vrijednosti veće od 1, onda je nul-polinom.

6. za smjer kada se P nalazi u nizu: indukcija

   drugi smjer: želimo dobiti polinom $Q(x)$ manjeg stupnja od $P(x)$ za koji vrijedi ista tvrdnja $(Q(x^2+1) = (Q(x))^2 + 1)$ te koji bi zadovoljavao tvrdnju da je $P(x)$ sljedeći član niza nakon Q.

   Ako je $P(x)$ paran polinom $(P(x) = P(-x) \ \forall x \in \mathbb{R})$ tada postoji polinom $R(x)$ takav da je $P(x) = R(x^2) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Analizom nultočaka obje strane dobivamo da zapravo trebamo pronaći sve moguće konačne nizove brojeva oblika $k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_k$ takve da vrijedi $a_{n+1} = 1 - {a_n}^2 \ \forall \ n \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ i $a_k = a_1$.

   dalje trebamo promatrati za koje članove niza a_t je sljedeći član strogo veći/strogo manji

14.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Označite broj šahista s x, a broj penzionera s y i zapišite uvjet zadatka u jednadžbu.

2. a) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih n. Kako možemo interpretirati desnu stranu?

b) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih $n+1$, a na desnoj strani želimo isto brojanje nekako podijeliti na 2 slučaja.

c) Prebrojavanja na obe strane koriste sličnu ideju "izolacije pojedinca" kao i prebrojavanje na desnoj strani u (b) dijelu.

d) Razmislite koje sve izbore momčadi među n učenika prebrojavamo na lijevoj strani.

3. Prebrojite ukupan broj parova učenika koji čiste učionicu zajedno.

4. a) Iskoristite tvrdnu u zadatku $2.a)$.

b) Lijevu stranu možemo interpretirati kao da među n učenika biramo m-članu momčad, a zatim r članova momčadi koji započinju utakmicu. Što brojimo na desnoj strani?

c) Na desnoj strani brojimo odabire r-čanog podskupa skupa od $m+n$ elemenata. Na lijevoj strani podijelimo prvo skup na dva dijela m-člani i n-člani podskup.

d) Pogledaj $2.c)$ zadatak.

5. Pogledaj ideju u $5.b)$ zadatku.

6. Prebrojimo ukupan broj parova kušača koji su kušali neko vino. Ne zaboravite konstrukciju za n koji mislite da je rješenje!

Malo teži zadaci

7. Pretpostavi suprotno i napravi incidencijsku matricu s 6 redaka, svaki predstavlja zadatak, i s 200 stupaca, svaki predstavlja učenika. Upišimo u matricu 1 ako učenik u tom stupcu **nije** riješio zadatak u tom retku. Sada brojimo na dva načina skup parova jedinica koje se nalaze u istom retku.

8. Razmislite zašto se p_k množi baš s k. Slična je ideja kao u $2.c)$ zadatku.

9. Prebrojite ukupan broj parova polja iste boje koji dijele redak/stupac.

Teški zadaci

10. Napravi incidencijsku matricu s b redaka, svaki predstavlja jednog sudca i a stupaca, svaki je jedan natjecatelj. Upisujemo 1 u na mjesto (i,j) ako je i-ti sudac ocijenio j-tog natjecatelja s prošao, a u suprotnom upisujemo 0. Sada brojimo na dva načina skup parova unosa u istom stupcu koji su oba ili 1 ili 0.

11. Napravi tablicu 19×13 u kojoj redovi označavaju cjelobrojne točke $1, ..., 19$, a stupci tih 13 intervala, pri čemu na presjeku i-tog retka i j-tog stupca u tablicu upisujemo 1 ako je $i \in I_j$, u suprotnom upisujemo 0.

14.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Ako postoji homotetija, direktno iz svojstava homotetije dobivate paralelnosti. Ako vrijede ove paralelnosti, promotrite homotetiju koja šalje AB u DE i razmislite gdje se slika točka C. Razmislite zašto ta homotetija postoji.

2. Promotrite homotetiju iz O.

3. Iskoristite lemmu da preslike ortocentra preko polovišta stranice i nožišta visine leže na kružnici ABC. Pokušajte naći neku homotetiju iz H.

4. S obzirom na simetriju zadatka, dovoljno je dokazat da je bilo koja od ovih 6 kružnica jednaka kružnici $H_aH_bH_c$. Znamo da je $H_aH_bH_c$ kružnica devet točaka iz prošlog primjera i da je ona "polovica" opisane kružnice. Pokušajte naći neku homotetiju koja će vam dokazati da je npr. AH_aB' polovica neke kružnice koja je jednaka opisanoj.

5. Promotrite homotetiju iz T koja šalje ω u Γ.

Tri zadataka s tri Kružnice

6. Pokušajte primijeniti peti zadatak.

7. Očito ne možemo direktno dokazati, nego moramo koristiti neke paralelnosti. Pronađite homotetije koje će vam dati neke paralelnosti pa iskoristite te paralelnosti da dobijete jednakosti nekih kuteva.

8. Uvedite točke $F = AB \cap (O_1)$ i $G = AB \cap (O_2)$ gdje (O_1) i (O_2) predstavljaju kružnice iz zadatka sa središtima u O_1 i O_2. Sada pokušajte naći neku homotetiju koja će vam dati rješenje!

14.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Faktorizacija, ako je suma nekih kvadrata mali broj, ti kvadrati se lako odrede
2. Pretpostavi uređaj (jedan broj mora biti najmanji)
3. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
4. Faktorizacija
5. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
6. Kakvi su brojevi po parnosti?
7. Faktoriziraj tako da na jednoj strani dobiješ umnožak dva relativno prosta broja
8. Ako je umnožak dva relativno prosta broja potencija nekog broja, kakvi moraju biti ti brojevi?
9. Promatraj ostatake pri dijeljenju s nekim brojevima
10. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem i usporedi novodobivenu jednadžbu s početnom
11. Promatraj najveći zajednički djelitelj danih brojeva
12. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
13. Kakve su lijeva i desna strana s obzirom na veličinu?
14. Kakve su lijeva i desna strana s obzirom na veličinu?
15. Ako se jednadžbi od tri člana može primijeniti formula za razliku kvadrata, to obično nije loša ideja
16. Pokušaj izračunati d_5
17. Promatraj najveći zajednički djelitelj danih brojeva

14.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Očito je da je injekcija. Za surjekciju, trebamo pokazati da za svaki realan broj a postoji realan broj b takav da je $f(b) = a$. Koji b možemo odabrat?
2. Uvedite substituciju $a = x + y$, $b = x - y$. Što onda možete zaključiti?
3. Iskoristite asimetriju.
4. Pokušajte indukciju.
5. Asimetrija.
6. Funkcija mora biti oblika $f(x) = x^2 + ax + b$, za neke konstante a i b. Zašto?
7. Asimetrija
8. Asimetrija
9. Dokažite da je funkcija bijekcija. Nađite $f(0)$. Napravite pametna uvrštavanja, pazeći da je f bijekcija!
10. Dokažite da je funkcija bijekcija. Nakon tog, radite pametna uvrštavanja.
11. Dokažite da je funkcija injekcija. Nakon tog, pametna uvrštavanja.

Teži zadaci

12. Pokušajte namjestiti da se nešto pokrati!
13. Probajte uvrštavati stvari poput $x, x + 1, 1, -1, x - 1$ i slično.
14. Zbog načina postavke zadatka, imamo razloga summnjati da je rješenje jedinstveno, odnosno, pointwise trap se neće jednostavno razriješiti. Unatoč tome, ne treba nam vrijednost u svakom x nego samo u 2^{2016}. Samo trebate raditi pametna uvrštavanja.
15. Koja funkcija je rješenje? Ima li više takvih funkcija ili samo jedna?
16. Klasično, pokušajte naći $f(p)$ za sve proste brojeve? Klasične metode prolaze.

15. Hintovi za šestu grupu

15.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Pogodi formulu.
2. Niz strogo raste.
3. Probaj odrediti opću formulu niza (ili ju pogodi, ili svedi na linearnu rekurziju i izračunaj opću formulu).
4. Izračunaj opću formulu.
5. Mali Fermatov teorem.
6. Uvjet zapravo kaže da je niz konveksan.
7. Iterirajmo uvjet, prirodno se javlja linearno rekurzivan niz.
8. Nemoj računati opću formulu. Primijeni teorem o periodičnosti.
9. Izračunaj opću formulu, iz nje će se relativno lako sve vidjeti.
10. Uvjet zapravo kaže da je niz konveksan, probaj to iskoristiti. Nacrtaj skicu.
11. Kako se niz ponaša? Možemo li dokazati da je neograničen? Ili da raste?
12. Prvo dokaži da su svi članovi niza prirodni brojevi.
13. Promatraj rast i pad niza.
14. Definiraj skupove A i B kao skupove brojeva za koje je zadovoljena lijeva, odnosno desna nejednakost. Ti skupovi su jednostavnog oblika.
15. Samo raspiši što je to.

15.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu

Link na zadatke. Link na rješenja.

15.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Lakši zadaci

1. Iskoristite uvjet koji govori o kutevima.
2. Inverzija oko C.
3. Inverzija oko A.
4. Iskoristite potenciju točke.
5. Iskoristite neki od prethodnih zadataka.
6. Nađite kružnice! Invertirajte!
7. Koju inverziju smo spominjali zajedno sa simedijanama?
8. Inverzija oko A, s kojim radijusom?

Teži zadaci

9. Koju inverziju smo imali u sličnom kontekstu?
10. Kružnice su ortogonalne, očito je oko čega invertiramo. Dalje je jednostavno.
11. Što se dogodi pri inverziji oko ω_2?
12. Invertiramo oko H, radijus $\sqrt{-HD \cdot HA}$ (inverzija + preslikavanje preko H). Što onda?
13. Promatrajte inverziju u H koja šalje kružnicu 9 točaka u opisanu.

15.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

Uvodni zadaci

1. v_p na jednakost
2. promatraj proste faktore od a i b
3. v_p na jednakost, podijeli na dva slučaja koji ovise o tome kako izgledaju članovi s lijeve strane jednakosti

Zadaci

4. za korištenje LTE nam treba $3 \mid x - y$.
5. lijeva strana je skoro uvijek djeljiva s 5
6. dokaži da su sve potencija prostih faktora u kanonskom zapisu od b djeljive s n.
7. LTE vrijedi za proste brojeve, pa posebno gledaj potencije prostih koje dijele c.
8. promatraj posebno parne i neparne n, i promatraj proste faktore od $x + y$
9. prvo dokaži da su a i b pozitivni racionalni i primijeni LTE na dobivene tvrdnje
10. dokaži da $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ne dijele n.

Teži zadaci

11. zaključi nešto o prostim brojevima koji dijele $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$.
12. promatraj a_n modulo a_k za $k < n$ da dobiješ koliko je $\gcd(a_n, a_k)$

15.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

16. Hintovi za sedmu grupu

16.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe

Link na zadatke. Link na rješenja.

16.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix

Link na zadatke. Link na rješenja.

16.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Nađi oba rješenja, onda pretpostavi da postoji neki x takav da $f(x)$ nije x^2, dobij da je f ograničena i iz toga drugo rješenje.
2. dobij što može biti $f(2)$, u jednom slučaju je lagano gotov, u drugom dobij injektivnost i gornju ogradu na $f(a)$ koji zajedno dovršavaju.
3. Traži $f(2)$ i onda uvrsti $(p, 2)$ te promotri funkciju $2^p - p^2$
4. hint za odrediti koje je rješenje: Kako je najlakše osigurati da je drugi uvjet zadovoljen (zadovoljiti i nešto jače od njega)? Na što to podsjeća? hint za dokaz: fiksiraj p i b i pusti a da divlja; tako odredi $f(1, b)$ za svaki b i iz toga dobij $f(a, b)$.
5. Koliko je $(p-2)!\mod p$ (teorem)? Nađi $f(p-2)$ i pomoću toga standardno $f(n)$.
6. $f(1) = a$, dobij $n \mid f(n)$ te $a \mid f(n)$, dovrši.
7. nađi rješenja, uzmi najmanji p takav da $f(p) \neq 0$ i pomoću toga p konstruiraj beskonačno "dobrih" n (oni koji zadovoljavaju treći uvjet). Dovrši uz MFT.

16.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Probaj odrediti opću formulu niza (ili ju pogodi, ili svedi na linearnu rekurziju i izračunaj opću formulu).
2. Uvjet zapravo kaže da je niz konveksan.
3. Iterirajmo uvjet, prirodno se javlja linearno rekurzivan niz.
4. Izračunaj opću formulu, iz nje će se relativno lako sve vidjeti.
5. Uvjet zapravo kaže da je niz konveksan, probaj to iskoristiti. Nacrtaj skicu.
6. Kako se niz ponaša? Možemo li dokazati da je neograničen? Ili da raste?
7. Prvo dokaži da su svi članovi niza prirodni brojevi.
8. Promatraj rast i pad niza.
9. Definiraj skupove A i B kao skupove brojeva za koje je zadovoljena lijeva, odnosno desna nejednakost. Ti skupovi su jednostavnog oblika.

16.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. $T = AB \cap DE$, dokaži da su T, K, F kolinearne pomoću para izogonalnih konjugata. Dovrši uvođenjem centra $(ABCDEF)$
2. jedini teorem koji spominje točku *unutar* četverokuta; rješenje je iznimno kratko.
3. Nađi 3 para izogonala u kutevima, zatim lema o izogonalama, teorem 3.3 i angle chase
4. uvedi izogonalu AP u kutu $\angle CAD$, chaseaj i koristi lemu o izogonalama.
5. P je opet *unutar* četverokuta, što bi joj mogla biti izogonalna konjugata? Odredi što su M i N iz konteksta E te dovrši Pascalom ili angle chaseom.
6. Lema o izogonalama
7. Lema 2.4

16.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

16.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive

Link na zadatke. Link na rješenja.

Dio III.

Rješenja s predavanja

17. Rješenja za prvu grupu

17.1. A1: Lucija Relić - Jednadžbe

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. 14 i 22, Školsko 8. razred, 2013.
2. $$(2x+1)^2-(2y+1)^2=(2x+1-2y-1)(2x+1+2y+1)=2(x-y)2(x+y+1)$$
   Ako su x i y iste parnosti, x-y je parno, a ako su različite, x+y+1 je parno, dakle $(x-y)(x+y+1)$ je djeljivo sa 2 pa je i cijeli izraz djeljiv sa 8.
3. MNM online predavanja - Algebarski izrazi
4. Državno natjecanje 2015., SŠ A, 1. razred, 1. zadatak
5. (2, 8) i $(\frac{-10}{3}, \frac{40}{3})$, Županijsko 8. razred, 2016.
6. Rješenje pod #2
7. Državno natjecanje 2018., 8. razred, 1. zadatak
8. $$x^3+3x^2-5x=15$$
   $$x^2(x+3)-5(x+3)=0$$
   $$(x^2-5)(x+3)=0$$
   $$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x+3)=0$$
   $$x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}, x_3=-3$$
9. Državno natjecanje 2017., 8. razred, 2. zadatak
10. MNM online predavanja - Algebarski izrazi
11. Državno natjecanje 2016., SŠ A, 1. razred, 3. zadatak
12. Državno natjecanje 1994., SŠ, 1. razred, 3. zadatak
13. Uočimo da vrijedi
    $$x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^2+y^2)(x^4+y^4), \quad (1)$$
    pri čemu smo dvaput iskoristili formulu za razliku kvadrata i činjenicu da je $x^2-y^2=1$. Kvadriranjem potonjeg dobivamo
    $$1=(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4. \quad (2)$$

Uvedimo radi preglednosti oznaku $a = x^2 + y^2$. Kvadriranjem toga dobivamo

$$a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4. \quad (3)$$

Zbrojimo (2) i (3) te dobivenu jednakost podijelimo s 2; dobivamo $x^4+y^4 = \frac{1}{2}(a^2+1)$. Uvrstimo li to u (1), dobije se

$$1 = x^8 - y^8 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = a \cdot \frac{1}{2}(a^2 + 1),$$

iz čega slijedi $a^3 + a - 2 = 0$. Lako se utvrdi da je $a = 1$ jedno rješenje ove jednadžbe, pa to znači da na lijevoj strani možemo izlučiti faktor $a - 1$. Stoga se lijeva strana faktorizira kao $a^3 + a - 2 = (a - 1)(a^2 + a + 2) = (a - 1)((a + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4})$.Kako taj izraz mora biti jednak 0, a druga zagrada je uvijek pozitivna, slijedi da je $a = 1$, tj. $x^2+y^2 = 1$. Zbrojimo li to s $x^2-y^2 = 1$ dobivamo da je $x^2 = 1$, pa je $x = 1$ ili $x = -1$. U oba ta slučaja je $y = 0$, pa sustav ima 2 rješenja: $(x, y) = (1, 0), (-1, 0)$.

14. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 4. razred, 4. zadatak

17.2. C1: Patricija Dovijanić - Dirichletov princip

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. Za prijestupnu godinu imamo $n = 366$, $k = 1$, $366 \cdot 1 + 1 = 367$, a za godine koje nisu prijestupne imamo $n = 365$, $k = 1$, $365 \cdot 1 + 2 = 367$. U oba slučaja po Dirichletovom principu slijedi da dvoje ljudi dijeli rođendan. Kraće: datuma ima 365 (ili 366), a ljudi ima više od toga pa netko sigurno dijeli rođendan.

2. 16. Kad izvuče manje ili jednako 15 čarapa, moguće je da su sve različite. Ali, jednom kad izvuče šesnaestu, po Dirichletovom principu sigurno će bar dvije od tih 16 čarapa biti iste. Da bi imala dvije različite, slično zaključujemo da ih treba izvući barem 3.

3. 7. Kad izvuče 6 ili manje pikula, moguće je da nijedne tri nisu iste boje. Jednom kad izvuče sedmu, po Dirichletovom principu bar jednu boju (kutija) imat će bar tri pikule (kuglice).

4. $n = 12$, $k + 1 = 4$ pa je $k = 3$, i zbog $12 \cdot 3 + 1 = 37$ po Dirichletovom principu tvrdnja vrijedi.

5. 77 kuglica, 12 kutija, $n = 12$, $k = 6$, $12 \cdot 6 + 5 = 72 + 5 = 77$. $6 + 1 = 7$, pa ih je bar 7 rođeno u istom mjesecu.

Umjereni zadaci

6. Mogućih suma je 11 (-5, -4, ..., 4, 5), a stupaca, redaka i dijagonala je ukupno 12, pa će po Dirichletovom principu dvije sume biti jednake.

7. 2013. općinsko, 3A.5
Postoji 8 načina za obojati jedan stupac: CCC, CCP, CPC, PCC, PPC, PCP, CPP, PPP. Kako je stupaca 9, po Dirichletovom principu sigurno postoje dva jednaka. Promatrajmo samo ta dva stupca. Ako su jednobojni, tvrdnja je dokazana. Ako nisu, po Dirichletovom principu dva retka su sigurno iste boje. Te 4 točke su vrhovi tog pravokutnika i tvrdnja je dokazana.

8. Za svaku osobu postoji 500 mogućnosti (0, 1, 2, ..., 499). Osoba koja se rukovala s 0 ljudi i osoba koja se rukovala s 499 ljudi ne mogu postojati u isto vrijeme, pa ima 499 mogućnosti i 500 ljudi.

9. Za svaku osobu ima n mogućnosti (0, 1, ..., n), ali kako osobe koje imaju 0 poznanika i n poznanika ne mogu postojati istovremeno, zapravo ima $n - 1$ mogućnosti i n ljudi.

10. Pri dijeljenju nekog prirodnog broja s 19 dobiva se jedan od ostataka 0, 1, 2, ..., 18. Imamo 20 odabranih prirodnih brojeva i 19 ostataka. Prema tome, među odabranima postoje 2 prirodna broja koja pri dijeljenju s 19 daju isti ostatak. Njihova razlika djeljiva je s 19.

11. 50 je parova koji u sumi daju 100 (1 i 99, 2 i 98, ... 49 i 51, 50 i 50), a 51 broj, pa dva moraju biti iz istog para.

12. Najveći i najmanji mogući zbrojevi dvaju različitih prirodnih brojeva od 1 do 100 su 199 i 3 pa stoga postoji 197 različitih zbrojeva tj. parova. Među 21 odabranim brojem postoji $\frac{1}{2}(21 \cdot 20) = 210$ parova različitih brojeva. $n = 197$, $197 \cdot 1 + 13 = 210$, $k = 1$, $1 + 1 = 2$, pa postoje dva različita para čiji je zbroj isti.

13. 415. Izvuče li 414 karata može se dogoditi da nema 10 istih karata (45 karata s brojevima od 1 do 9 i po 9 karata od svih ostalih brojeva). Jednom kad izvučemo 415. kartu, po Dirichletovom principu Yusuf će sigurno imati bar jedan isti broj na bar 10 izvučenih karata.

14. Ako dvije točke imaju koordinate (a, b) i (c, d), onda polovište dužine koja ih spaja ima koordinate $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Stoga zaključujemo da polovište dužine koja spaja dvije točke cjelobrojnih koordinata ima cjelobrojne koordinate ako i samo ako su odgovarajuće koordinate tih dviju točaka jednake parnosti. Budući da različitih kombinacija parnosti koordinata točaka ima 4, među ovih 5 točaka postoje dvije jednakih kombinacija parnosti pa je i polovište dužine koja ih spaja točka cjelobrojnih koordinata.

Teži zadaci

15. 2013. državno, 8.3
$m = 110$, $k + 1 = 4$, $k = 3$, $n \cdot 3 + l = 110$, $36 \cdot 3 + 2 = 110$, $l = 2$, $n = 36$. Podijelimo kvadrat na 36 kvadratića stranice $\frac{1}{6}$ i promatrajmo onaj u kojem se nalaze 4 točke. Njemu opisana kružnica ima radijus manji od $\frac{1}{8}$.

16. $m = 7$, $k + 1 = 2$, $k = 1$, $n \cdot 1 + 1 = 7$, $n = 6$. Spojimo dijagonale šesterokuta i podijelimo ga na 6 jednakostraničnih trokuta stranice 1. S obzirom da imamo 7 točaka, postoji trokut u kojem se nalaze bar dvije točke. Kako je stranica tog trokuta 1, udaljenost tih dviju točaka nije veća od 1.

17. 2014. općinsko, 3A.7
Potpuni kvadrati završavaju jednom od 6 različitih znamenaka (0, 1, 4, 5, 6, 9), pa dva sigurno imaju jednaku znamenku jedinica i njihova razlika je djeljiva s 10.

18. Stol se uvijek može okrenuti za kut $\frac{360k}{16}$, gdje je k prirodan broj od 1 do 15 uključivo, tako da ispred bilo kojeg mentora dođe kartica s njegovim imenom. Kako je broj mentora 16, a broj položaja stola različitih od početnog 15, to znači da postoji takav položaj stola kod kojeg ispred bar dva mentora dolaze kartice s njihovim imenima.

19. $D = a^3b - ab^3 = ab(a - b)(a + b)$. D je paran za bilo koje a i b (objasnite zašto!) pa još moramo dokazati djeljivost s 5. Ako je ili a ili b djeljiv s 5, tvrdnja je dokazana. Ako bilo koja dva od tri početna broja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 5, tvrdnja je dokazana. Ako sva tri imaju različite ostatke pri dijeljenju s 5, tj. 123, 234, 341 ili 412, uvijek možemo odabrati dva čiji je zbroj djeljiv s 5, tj. zbroj 2 i 3 ili 1 i 4, pa je tvrdnja dokazana.

20. Online predavanje
Prvo ćemo pretpostaviti da ne postoje takve tri osobe. Vizualizirajmo dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut. Fiksirajmo jednu točku (osobu) i promatrajmo dužine koje izlaze iz nje. Tih dužina ima 5 pa su barem 3 iste boje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je ta boja crvena. Sada gledamo te tri točke na drugim krajevima tih dužina. One međusobno ne smiju biti povezane crvenim dužinama jer smo onda odmah dobili crveni trokut što je suprotno našoj pretpostavci, pa su stoga sve međusobno povezane plavim dužinama, što čini plavi trokut. Zato postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne) poznaju. Ova tvrdnja je u suprotnosti s našom pretpostavkom pa to znači da nam je pretpostavka bila kriva, tj. da postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne) poznaju.

21. Promatrajmo prvih $n + 1$ članova niza 1, 11, 111, 1111, ... Slično kao u 10. zadatku, po Dirichletovom principu među njima postoje dva broja s istim ostatkom pri dijeljenju s n, a njihova razlika oblika $111\ldots000$ djeljiva je s n.

22. Promatrajmo brojeve a_1, a_2, …, a_{365} koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_3 + 29$, jer ako je to slučaj, tj. ako za neke i i j vrijedi $a_i + 29 = a_j$, onda vrijedi $j < i$ te da je u danima između Tuljko pojeo točno 29 kilograma ribe. Brojevi $a_1, a_1 + 29, a_2, a_2 + 29, \ldots, a_{365}, a_{365} + 29$ nalaze se između 1 i 729 uključivo. Kako tih brojeva ima 730 i $730 = 729 \cdot 1 + 1$, dva broja moraju biti jednaka. Kako su svi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ međusobno različiti jer je Tuljko svaki dan pojeo bar 1 kilogram ribe, različiti su i svi brojevi $a_1 + 29, \ldots, a_{365} + 29$. To znači da je neki broj a_i jednak nekom broju $a_j + 29$ i tvrdnja je dokazana.

23. 2018. županijsko, 4A.4

Numerirajmo retke i stupce ploče P brojevima 1, 2, … , 7. Na taj način uveli smo koordinatni sustav (svako polje predstavlja uređeni par koordinata (i, j)). Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da su uklonjena sva polja u kutovima osim donjeg lijevog. Definirajmo udaljenost polja (i, j) i (k, l) vrijednost $|k - i| + |l - j|$. Intuitivno, zamislimo li da se po ploči krećemo usporedno s njenim rubovima, udaljenost je najmanji broj polja koje moramo posjetiti da bismo došli od jednog polja do drugog. Najveća moguća udaljenost između dva polja će biti kada su brojevi $|k - i|$ i $|l - j|$ najveći mogući. Koordinate su brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, 7\}$ pa je svaki od tih brojeva jednak najviše 6. No, ne mogu istovremeno oba biti jednaki 6 jer su tri polja u kutovima uklonjena. Dakle, najveća moguća udaljenost između dva polja je 11. Budući da je razlika brojeva upisanih na susjednim poljima najviše 4, slijedi da je razlika brojeva upisanih na poljima (i, j) i (k, l) najviše $4 \cdot (|k - i| + |l - j|) \leq 4 \cdot 11 = 44$. Na ploči je 46 prirodnih brojeva, a razlika bilo koja dva je najviše 44, pa prema Dirichletovom principu neka dva broja moraju biti jednaka.

17.3. G1: Leon Križanić - Angle chase

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Link
2. Link
3. Ako su α, β, γ veličine kuteva u trokutu, onda je vanjski kut kod vrha A jednak $180° - \alpha$,što je jednako $\beta + \gamma$.
4. Kako je ΔABC pravokutni trokut s pravim kutem u vrhu C, koristimo teorem o obodnom i središnjem kutu. Uočimo da je $\sphericalangle BAC$ kut nad lukom AB kružnice opisane trokutu sa središtem u točki O. Iz teorema slijedi da je $\sphericalangle BOA = 180°$.
5. Označimo sa α traženi kut između tangente i tetive $\overline{BC}$. Neka je S središte trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice. Tada je $\angle CBS = 90° - \alpha = \angle BCS$.

   Zato je $\angle BSC = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$ pa po teoremu o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo dokazati.
6. Pretpostavimo da se T nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle aOb$ te neka su N_1 i N_2 nožišta na redom krakove a i b. Uočimo da trokuti ΔOTN_1 i ΔOTN_2 imaju zajedničku stranicu, imaju jedan pravi kut i $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$. Po KSK poučku vrijedi da su ta dva trokuta sukladna i i vrijedi $|TN_1| = |TN_2|$.

   Pretpostavimo sada da je $|TN_1| = |TN_2|$ te promatrajmo trokute ΔTON_1 i ΔTON_2. Kako imaju pravi kut i dvije stranice jednake duljine, koristimo poučak SSK o sukladnosti trokuta i po tome je $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$.
7. 2016. županijsko Hrvatska 4. A 3. zadatak
8. BSO (bez smanjenja općenitosti), pravci AQ i BP sijeku se unutar kružnice, a AP i BQ izvan.

   Po Talesovom teoremu $\angle APB = \angle AQB = 90°$.

   Ako promotrimo $\triangle AMB$, $\overline{BP}$ i $\overline{AQ}$ su visine tog trokuta.

   Tada je N ortocentar (sjecište visina) u $\triangle AMB$.

   Zato treća visina leži na pravcu MN iz čega slijedi da je $MN \perp AB$.
9. Županijsko natjecanje 2019., prvi razred SŠ, A razina, 4. zadatak
10. Županijsko natjecanje 2019., drugi razred SŠ, A razina, 4. zadatak
11. Županijsko natjecanje 2018., četvrti razred SŠ, A razina, 3. zadatak
12. Neka je D nožište visine iz A,M polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz M na $\overline{AC}$. Iz uvjeta zadatka znamo da su kutevi $\sphericalangle BAD$,$\sphericalangle DAM$ i $\sphericalangle MAE$ jednaki što nam daje

$$\Delta ABD \cong \Delta ADM \cong \Delta MAE$$

   . Sada znamo da je $|MC| = |BM| = 2|ME|$ iz čega promatranjem trokuta ΔMEC jednostavno slijedi da su kutevi trokuta $30°, 60°, 90°$.
13. 2015. O2A.2
14. 2017. D7.5

15. 2016. D7.5

16. IGO 2015,3. zadatak, Medium

17. 2016. državno Srbija 1. A 2. zadatak

18. 2016 Općinsko Srbija 2. A 5. zadatak

17.4. N1: Ivan Premuš - Djeljivosti

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Adaptacija P1 IMO 1959. Problem 2.
2. žup 2006. SŠ1A 1. zadatak
3. školsko SŠ1A 1. zadatak
4. Broj $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ zapišimo kao $a_1\cdot 10^n + a_2\cdot 10^{n-1}\dots a_{n-1}\cdot 10 + a_n\cdot 1$. Primjetimo da 10^k-1 ima k znamenki koje su sve 9 pa $a_1\cdot 10^n+\dots+a_n\cdot 1 = a_1\cdot\underbrace{9\dots9}_{n}+a_2\cdot\underbrace{9\dots9}_{n-1}+\dots+a_{n-1}\cdot 9+a_n+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$. Očito je su pribrojnici od $a_1\cdot\underbrace{9\dots9}_{n}$ do $a_{n-1}\cdot 9$ djeljivi s 3 i 9 pa je $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ djeljiv s 3 ili s 9 ako je zbroj znamenki $(a_1+a_2+\dots+a_n)$ djeljiv s 3 odnosno s 9.
5. školsko 2017. SŠ1A 3. zadatak
6. Primjer 3.
7. Mjera mora dijeliti 12 pa su mogućnosti $1,2,3,4,6,12$. Odmah je jasno da $3,6$ i 12 otpadaju jer ne dijele $3n+2$. $1,2,4$ su točna rješenja, dovoljno je provjeriti $n=1,2,3$.
8. školsko 2018. SŠ1A 3. zadatak
9. školsko2017. SŠ3A 4. zadatak
10. link
11. županijsko 2007. SŠ2A 5. zadatak
12. 2020 Mock USAJMO Problem 1.
13. županijsko 2014. SŠ3A 4. zadatak
14. link
15. HJMO 2017. 1. zadatak
16. Pogledajmo rastav ova dva broja na proste faktore. Neka je $a=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}$ i $b=p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_n^{f_n}$, gdje su eksponenti nenegativni cijeli brojevi, a p_i-jevi međusobno različiti. S ovim zapisom imamo da je
$$\mathrm{M}(a,b)=p_1^{\min(e_1,f_1)}p_2^{\min(e_2,f_2)}\cdots p_n^{\min(e_n,f_n)}$$
$$\mathrm{V}(a,b)=p_1^{\max(e_1,f_1)}p_2^{\max(e_2,f_2)}\cdots p_n^{\max(e_n,f_n)}$$
odakle direktno množenjem slijedi tvrdnja zadatka jer je $\min(x,y)+\max(x,y)=x+y$.

17.5. X1: Patricija Dovijanić - Logika, što je dokaz?

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. "Pravokutni trokuti nisu jednakostranični ili dva nije prost broj", "Ili pijem, ili pušim, ili psujem", "Nisam preumoran i predavanje nije preteško", "Broj jedan je ili prost ili složen."

2. Npr. $x = 2$ i $y = 3$.

3. Npr. 12 nije djeljiv s 5, a to je prost broj manji od 12.

4. Primjerice, trokut s duljinama stranica 3,4, 5 nije jednakokračan.

5. U trokutu ABC povucite pravac p kroz vrh C koji je paralelan s pravcem AB. Kut koji stranica $\overline{AC}$ zatvara s pravcem p označimo s α, a kut koji stranica $\overline{BC}$ zatvara s pravcem p označimo s β. Znamo $\alpha+\beta+\angle ACB = 180\circ$ (ispruženi kut). Kako se radi o kutevima uz presječnicu, vrijedi $\angle CAB = \alpha$ i $\angle CBA = \beta$. Iz ove dvije tvrdnje slijedi zaključak da je i $\angle CAB+\angle CBA+\angle ACB = 180\circ$, što je i trebalo dokazati.

6. Parni broj zapišimo u obliku $2k$, a neparni u obliku $2l+1$, za neke cijele brojeve k i l. $2k(2l+1) = 4kl + 2k = 2(2kl + k)$, što je paran broj jer je djeljiv s 2.

7. $\overline{abcde} = 10000a+1000b+100c+10d+e = 4(2500a+250b+25c)+10d+e$. Ako je dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4 tj. ako je $10d + e$ djeljiv sa 4, tada je i taj peteroznamenkasti broj djeljiv sa 4 jer se može napisati kao zbroj dva broja djeljiva sa 4.

8. Prvi slučaj: prirodan broj n djeljiv je s 3, tj. $n = 3k$, za neki cijeli k. Tada je $n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3)$, što je djeljivo s 9 (ostatak je 0). Drugi slučaj: n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k+1$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3+27k^2+9k+1 = 9(3k^3+3k^2+k)+1$, što daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9. Treći slučaj: n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k + 2$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$, što daje ostatak 8 pri dijeljenju s 9. Budući da svi prirodni brojevi daju ostatak 0,1 ili 2 pri dijeljenju s 3, pokrili smo sve slučajeve i tvrdnja zadatka je dokazana.

9. Istinita je 3. izjava, dakle, A je siva, B je plava i C je bijela.

10. B.

11. Pretpostavimo li da nije, dobijamo kontradikciju, dakle D je Istinić.

12. Najprije izračunajmo $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba} = a(100+100+10+1+10+1)+b(10+1+100+100+1+10)+c(1+10+1+10+100+100) = 222(a+b+c) = 2\cdot 3\cdot 37\cdot(a+b+c)$. Pretpostavimo da je to kvadrat prirodnog broja. Tada bi $a+b+c$ trebao biti djeljiv i s 2 i s 3 i s 37, što nije moguće jer taj zbroj može biti najviše 27, što je strogo manje od 37. Kontradikcija.

13. Pretpostavimo suprotno, tj. da ih ima konačno mnogo, i označimo ih s $p_1, p_2, ..., p_n$ (to su svi prosti brojevi koji postoje). Neka je $p = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Znamo da p nije prost broj jer nije jednak nijednom od $p_1, ...p_n$, ali također nije djeljiv niti s jednim prostim projem (pri dijeljenju s bilo kojim prostim brojem daje ostatak 1). Dakle, svaki prosti faktor od p je različit od $p_1, ..., p_n$. Budući da je svaki prirodan broj veći od 1 ili prost ili ima prosti faktor, dobili smo prost broj različit od $p_1, ..., p_k$, što je kontradikcija.

14. Pretpostavimo suprotno: neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku neskrativog razlomka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, što znači da su m i n relativno prosti prirodni brojevi (nemaju zajedničnkih djelitelja). Sada tu jednakosti možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2, odakle je $2n^2 =$

m^2. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 2, onda je i taj broj djeljiv s 2, pa znamo da je m djeljiv s 2. Dakle m možemo napisati $m = 2k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo $n^2 = 2k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 2. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s 2, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

15. Npr. negacija tvrdnje "Ako je trokut jednakostraničan, onda je i jednakokračan" je tvrdnja "Trokut je jednakostraničan i nije jednakokračan." Obrat je "Ako je trokut jednakokračan, onda je jednakostraničan", koji očito nije istinit, a kontraprimjer je npr. trokut s duljinama stranica 5, 5, 6.

16. Ako je u trokutu ABT kut $\angle ATB$ pravi, onda točka T leži na kružnici s promjerom $\overline{AB}$.

17. Npr. $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.

18. $2k(2k + 2) = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, što je djeljivo s 8 jer je jedan od brojeva k i $k + 1$ paran. Obrat ne vrijedi jer npr. $8 = 1 \cdot 8$, što nisu uzastopni parni brojevi.

19. Obrat glasi: "Ako je prirodan broj djeljiv s 3 i 4, onda je djeljiv s 12", što vrijedi jer ako je broj djeljiv s 3, onda u svom rastavu na proste faktore ima faktor 3, a ako je djeljiv s 4, onda u svom rastavu na proste faktore ima dvije dvojke. Dakle, broj istovremeno djeljiv s 3 i 4 u svom rastavu na proste faktore sigurno ima jednu trojku i dvije dvojke, što je u umnošku 12, pa je polazni broj djeljiv s 12. Bilo je bitno da 3 i 4 nemaju zajedničke djelitelje (razmislite zašto).

20. Greška je u tome što tvrdnja i njen obrat nemaju istu istinitosnu vrijednost: polazna tvrdnja je neistinita, dok je njen obrat istinit.

21. U prvoj implikaciji izostavljeno je rješenje $x = 0$, tj. dijelili smo s x, a pritom nismo isključili mogućnost da dijelimo s nulom. U drugoj implikaciji izostavljeno je rješenje $x = -2$. U trećoj implikaciji izostavljeno je rješenje $x = 3$. Posljednja implikacija ne vrijedi zbog kontraprimjera $(-2)^2 = 2^2$, ali $2 \neq -2$. Svi obrati vrijede.

22. Jedan smjer glasi: "Ako je prirodan broj paran, onda mu je posljednja znamenka parna." To vrijedi jer ako je prirodan broj n paran, to znači da je djeljiv s 2, pa postoji prirodan broj k takav da $2k = n$. Svakako k ima posljednju znamenku 0,1,...8 ili 9, pa provjerom po slučajevima vidimo da množenjem k s 2 posljednja znamenka od n mora biti parna. Drugi smjer glasi: "Ako je posljednja znamenka prirodnog broja parna, tada je on djeljiv s dva." To vrijedi jer svaki prirodan broj n možemo zapisati u obliku $10k + l$, za cijele brojeve k i l, gdje je k najveći mogući. Znamo da je $10k$ parno jer je 10 paran, te da je l posljednja znamenka od n. Zbroj parnog broja $10k$ i nepoznatog broja l je paran ako i samo ako je l paran, tj. ako n ima parnu posljednju znamenku. Dokazali smo oba smjera, pa je time dokazana ekvivalencija i gotovi smo.

23. Smjer "Ako trokut ima dvije stranice duljine 5 centimetara, onda je jednakokračan" vrijedi jer je takav trokut zaista jednakokračan, dok smjer "Ako je trokut jednakokračan, onda ima dvije stranice duljine 5 centimetara" ne vrijedi jer nisu svi jednakokračni trokuti takvi (jedan kontraprimjer je trokut s duljinama stranica 3, 3 i 2). Dakle, ne vrijedi ekvivalencija.

24. a) Pri dijeljenju s $(a - b)$ smo zapravo dijelili s nulom, jer znamo s početka da je $a = b$, pa ostatak računa nema smisla. **Ne dijelite nulom!**
b) Uvrštavanjem vidimo da $x = -2$ ipak nije rješenje. To je zbog toga što kvadriranjem nemamo ekvivalenciju, već samo smjer da ako $a = b$, tada $a^2 = b^2$. Dakle, dokazali smo da ako je x rješenje polazne jednadžbe, tada je on iz skupa $\frac{2}{3}, -2$, ali još treba dokazati da ako je x iz tog skupa, da je tada rješenje jednadžbe. Zbog toga kad kvadriramo jednadžbu moramo uvijek uvrstiti dobivena rješenja u polaznu jednadžbu i provjeriti jesu li uistinu rješenja.

25. Lijeva strana jednakosti je pozitivna, a druga negativna. Vrijedi $\sqrt{a^2} = |a|$, pa je rješenje zapravo $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$, što je pozitivno, i time smo popravili grešku.

26. Npr. "Ako su pravci okomiti, onda se sijeku" je istinita tvrdnja, kao i njen obrat po kontrapoziciji "Ako se pravci ne sijeku, onda nisu okomiti."

27. Negacija je "n je prirodan i nije cijeli" što ne vrijedi jer su prirodni brojevi podskup cijelih. Obrat je "Ako je n cijeli, onda je i prirodan" što ne vrijedi zbog kontraprimjera npr. $n = -2$. Obrat po kontrapoziciji je "Ako n nije cijeli, nije prirodan" što vrijedi jer i polazna tvrdnja vrijedi, a znamo da polazna tvrdnja i njen obrat po kontrapoziciji imaju istu istinitosnu vrijednost.

28. Obrat po kontrapoziciji glasi: "Ako broj nije višekratnik od 5, onda ni njegov kvadrat nije višekratnik od 5", što koristeći činjenicu da je 5 prost broj možemo lako direktno dokazati. Razmislite zašto slična tvrdnja ne vrijedi npr. za broj 4.

29. Dokazujemo "Ako je x paran, onda je $x^2 - 6x + 5$ neparan", što vrijedi jer ako je x paran, tada je $x^2 - 6x + 5$ neparan, jer su x^2 i $6x$ parni, a 5 nije.

30. Ovo ostavljam za vježbu, možete vi to! :)

18. Rješenja za drugu grupu

18.1. A2: Mislav Brnetić - Uvod u nejednakosti

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. *1. način*

Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

Oduzimanjem $2ab+2bc+2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

2. način - prikazan je dokaz za pozitivne realne brojeve, razmislite kako biste ga prilagodili da vrijedi za sve realne brojeve

Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

Analogno dobivamo i

$$b^2+c^2 \geq 2bc$$

$$c^2+a^2 \geq 2ca$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

Napomena.

Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

2. Primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$$

što je i trebalo dokazati.

3. Kao i u prethodnom zadatku, primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

$$(1+a^x)(1+a^y)(1+a^z) \geq 2\sqrt{1\cdot a^x}\cdot 2\sqrt{1\cdot a^y}\cdot 2\sqrt{1\cdot a^z} = 8\sqrt{a^x a^y a^z} = 8\sqrt{a^{x+y+z}} = 8\sqrt{a^0} = 8$$

AG nejednakost smijemo primijeniti s obzirom da su članovi na koje primijenjujemo pozitivni brojevi.

Preostaje odrediti kada vrijedi jednakost.

Dokazali smo da jednakost vrijedi (samo) kada su svi članovi na koje primijenjujemo KAGH nejednakosti jednaki. Dakle u ovom slučaju jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$1+a^x = 1+a^y = 1+a^z$$

Odnosno

$$a^x = a^y = a^z$$

$$x = y = z$$

4. Pomnožimo nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ (kako je taj broj pozitivan, nejednakost i dalje vrijedi i ekvivalentna je prethodnoj). Dobivamo

$$x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff (x^2+1)+1 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

Primjenom AG nejednakosti na $(x^2+1)+1$ dobivamo traženu nejednakost.

Analogno, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x^2+1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

5. Primjenom AG nejednakosti na a_k+1 dobivamo:

$$a_k+1 \geq 2\sqrt{a_k}$$

Dobivamo:

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) \geq 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}$$

Korištenjem uvjeta zadatka vrijedi

$$2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = 2^n$$

iz čega slijedi i tražena nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1=1, a_2=1, ..., a_n=1$.

6. Primjenom AG nejednakosti na x^2+x+1 dobivamo:

$$x^2+x+1 \geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot x\cdot 1} = 3x$$

Analogno dobivamo;

$$y^2+y+1 \geq 3y$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost

$$(x^2+x+1)(y^2+y+1) \geq 9xy$$

7. *KA nejednakost*

Želimo dokazati:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Prvo dokažimo nejednakost za sve nenegativne realne brojeve.

Lako se dokaže da je nejednakost ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{n^2}$$

$$\iff n \cdot (x_1^2 + ... + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

Sada raspisivanjem izraza s desne strane, prebacivanjem na lijevu stranu nejednakosti i zapisivanjem izraza u obliku sume kvadrata binoma dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\sum_{i,j:i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0$$

Ta nejednakost vrijedi s obzirom na činjenicu da je svaki kvadrat nenegativan.

Sada dokažimo da KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Po prethodnom dokazu imamo

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

za nenegativne realne brojeve.

Uzmimo $x_i' = |x_i|$, dakle vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n}$$

No, također imamo:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

čime je dokaz završen.

GH nejednakost

Želimo dokazati

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

Po AG nejednakosti imamo:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

■

8. Za minimalnu vrijednost izraza (označimo ju sa t) mora vrijediti sljedeće:

- izraz je uvijek veći ili jedak od te vrijednosti ($x + \frac{1}{x} \geq t$)
- moguće je postići tu vrijednost

Ako primijenimo AG nejednakost na zadani izraz, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

Sada dokažimo da je moguće postići da izraz poprima vrijednost 2.

Jednakost se poprima ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & x = \frac{1}{x} \\ \iff & x^2 = 1 \\ \iff & x = 1 \end{aligned}$$

(s obzirom da je zadano da je x pozitivan). Kako zadana jednadžba ima rješenja (ima jedinstveno rješenje), vrijednost 2 se postiže, a lako je i uvrstiti $x = 1$ te se vidi da se vrijednost 2 stvarno postiže.

9. *Za Nesbittovu nejednakost postoji više dokaza, ovdje ću prikazati jedan od njih.*

Krenimo od lijeve strane nejednakosti;

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}-3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

Uvedimo nove oznake:

$$\begin{aligned} x &:= a+b \\ y &:= b+c \\ z &:= c+a \end{aligned}$$

Vrijedi $(a+b+c) = \frac{x+y+z}{2}$

Sada imamo:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$$

i trebamo dokazati;

$$\begin{aligned} & \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3 \geq \frac{3}{2} \\ \iff & (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6 \geq 3 \end{aligned}$$

Množenjem izraza na lijevoj strani dobivamo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-6=3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6$$

Po zadatku 8. vrijedi da je

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$
$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$$
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$$

Pa je

$$3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6\geq 3+2+2+2-6=3$$

što je i trebalo dokazati.

10. Zadana nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$$

pri čemu ova zadnja nejednakost vrijedi po KA nejednakosti.

11. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a$$
$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq\frac{1}{2}(2a+2b+2c)=a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

12. Vrijedi:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{abb\cdots b}\leq\frac{a+b+b+..+b}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}$$

pri čemu srednja nejednakost vrijedi po AG nejednakosti na brojevima $a,b,...,b$ (b se ponavlja n puta), a iz ovoga slijedi tvrdnja zadatka.

13. Vrijedi:

$$b+\frac{1}{a(b-a)}=(b-a)+a+\frac{1}{a(b-a)}\geq 3\sqrt[3]{a\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{a(b-a)}}=3$$

Dakle, izraz je veći ili jednak 3, a za $a=1,b=2$ se postiže vrijednost 3, dakle to je i minimum izraza.

14. Državno natjecanje 2019., SŠ A-1.3.

15. Državno natjecanje 2019., SŠ A-3.4.

16. Državno natjecanje 2009., SŠ A-4.2.

17. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.3.

18. Državno natjecanje 2015. SŠ A-2.4.

19. Volumen kutije je $(a-2x)^2x$, vrijedi $a, x \in \mathbb{R}, 2x < a$ i $x, a > 0$.

Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost tog izraza.

$$(a-2x)^2x = (a-2x)(a-2x)x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(a-2x)(a-2x)\cdot 4x}$$

$$\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 \geq (a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

$$(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3$$

Uvrštavanjem ove nejednakosti u gornju nejednakost dobivamo:

$$\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$$

Cilj je dokazati da je to maksimum i odrediti za koji x se postiže.

Jednakost u ovoj AG nejednakosti vrijedi ako i samo ako je

$$a-2x = a-2x = 4x$$

$$6x = a$$

$$x = \frac{a}{6}$$

Dakle, postoji rješenje ove jednadžbe za svaki a pa se postiže jednakost, odnosno dobivena vrijednost je maksimum. Tada vrijedi $x = \frac{a}{6}$ pa je to rješenje.

18.2. C2: Matej Vojvodić - Invarijante

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Ovo ćemo zajedničkim snagama...

1. Svaki potez mijenja broj čaša popunjenih sa sokom za +2, 0 ili -2. Dakle, kako smo krenuli s jednom punom čašom, ne možemo doći do situacije kada imamo nula punih čaša jer je parnost očuvana. Znači, koliko god Marko popio soka, nikada neće moći popiti sve.

2. Zamislimo opisani zapis kao binarno stablo u čijem je svakom čvoru napisano koliko djece ima. Vrijedi da sve prazne kutije imaju 0 djece. Za sve ostale kutije vrijedi da imaju 2 + broj kutija u prvoj kutiji + broj kutija u drugoj kutiji. Dakle, svaka kutija u sebi imaju parno mnogo kutija. Kako je Matej Ivi poklonio vanjsku kutiju koja u sebi ima parno mnogo kutija, onda nije moguće da joj je poklonio točno 1000 kutija.

3. Obojimo šahovski ploču. Svaka domino pločica pokrit će točno jedno bijelo i jedno crno polje, a kako polja jedne boje ima 30, a druge 32, onda nikako neću moći postaviti zadnju domino pločicu jer bi ona trebala prekrivati dva polja iste boje.

4. Primijetimo da u nizu od prvih 1000 prirodnih brojeva ima puno prostih brojeva (otprilike 180). Promatrajmo sada niz brojeva od 2 do 1001. Broj prostih brojeva se promijenio ili za 1, 0 ili -1. To će vrijediti i za sljedeći niz brojeva od 3 do 1002, i niz od 4 do 1003... Dakle, ako smo krenuli s 180 brojeva, i uspijemo pokazati da možemo postići da broj prostih brojeva bude manji od 37, onda smo po putu sigurno morali pogoditi točno 37 prostih brojeva.

Koristimo standardni trik kada želimo niz od uzastopnih n složenih brojeva - biramo brojeve $(n+1)!+2, (n+1)!+3, (n+1)!+4, \ldots, (n+1)!+n, (n+1)!+(n+1)$ - svi moraju biti složeni jer će prvi broj biti dijeljiv s 2, drugi s 3, treći s 4... i posljednji s $n+1$. Dakle, za dovoljno veliki broj, sigurno će niz od tih 1000 brojeva imati nula prostih brojeva. Dakle, gotovi smo jer smo pokazali da možemo doći od 180 do 0, mjenjajući broj za najviše jedan po apsolutnoj vrijednosti, pa smo po putu sigurno morali pogoditi točno 37 prostih brojeva.

Što je uopće *optimalna* strategija?

5. Primijetimo da krećemo iz jednog dijela veličine $n \times m$, a igra završava kada ostane nm dijelova veličine 1×1. Kako svaki potez stvara točno još jedan dio, to znači da bez obzira na poteze igračica, igra traje točno $nm-1$ potez. Dakle, ako su i n i m neparni, onda je Anja pobjednica, a ako je barem jedan od brojeva paran, onda je Lucija pobjednica.

6. Slično kao u prethodnom zadatku, igra traje fiksan broj poteza. Po Gaussu slijedi da će na kraju igre biti $\frac{n(n+1)}{2}$ hrpa od po jednog žetona, a krećemo s n hrpa. Kako svaki potez stvara još jednu novu hrpu, igra traje $\frac{n(n-1)}{2}$, pa pobjednik ovisi o parnosti tog broja - Lana pobjeđuje ukoliko n daje ostatak 2 ili 3 pri dijeljenju s 4, a inače pobjeđuje Mare.

7. Pretpostavimo da je igra završila tako da su oba igrača stavili sve znakove plus. Znači, rezultat bi bio 21 i pobijedio bi Martin. No, ako ispred bilo kojeg broja x stavimo znak minus umjesto plus, konačni rezultat će se promijeniti za $2x$ (jer nećemo dodati x, i još ćemo ga i oduzeti). Dakle, bez obzira gdje stavimo i minuse, rezultat će i dalje ostati neparan - optimalna strategija ne postoji jer bez obzira na poteze će konačni rezultat biti neparan.

8. Ako je neka od igračica izabrala dvije jedinice, onda je na ploču dodala dvojku, pa se broj jedinica i dvojka promijenio za (-2, 1). Ako je pak izabrala dvije dvojke, onda bi jednu ponovo napisala pa bi promjena bila (0, -1). Konačno, ako je izabrala različite brojeve, zapisat će 1, pa je promjena bila (0, -1). Dakle, broj jedinica možemo ili ne promijeniti ili smanjiti za točno 2. Kako smo krenuli sa 100 (parno mnogo) jedinica, nikada na ploči ne može ostati točno jedna jedinica. Dakle, bez obzira na poteze, Maja pobjeđuje.

9. Kada Mihael izabere dva parna ili dva neparna broja, na ploču će zapisati paran broj, a ako izabere jedan paran i jedan neparan broj, na ploču će zapisati neparan broj. Zadatak dovršavamo slično kao i 5. zadatak: pošto je parnost broja neparnih brojeva invarijanta, onda će na ploči ostati paran broj ako smo krenuli s parno mnogo neparnih brojeva (kad je n pri dijeljenju s 4 daje ostatke 3 i 0), a ostat će neparan broj ako smo krenuli neparno mnogo neparnih brojeva (kad je n pri dijeljenju s 4 daje ostatke 1 i 2).

10. Bez obzira koji par brojeva izaberemo, parnost broja brojeva svake vrste se mijenja svakim potezom jer smo dva broja smanjili za 1, a treći povećali za 1. Dakle, parnost broja nula i dvojki je ista, a broja jedinica suprotna.

a) Ako je ostao samo jedan broj, morala je ostati jedinica, jer da je ostala nula ili dvojka, morala bi ostati i dvojka ili nula (jer ako je broj nula neparan, onda je i broj dvojki neparan i obratno).

b) Ako su ostale samo nule, gledajmo parnost broja tih nula. Ako je parno mnogo nula, tada mora biti neparno mnogo jedinica, pa se među nulama nalazi i barem jedna jedinica. A ako je neparno mnogo nula, tada mora biti i neparno mnogo dvojki, pa se među nulama nalazi i barem jedna dvojka. Dakle, nemoguće je da su ostale samo nule na ploči.

11. Obojimo mjesta ciklično u tri boje: recimo crvena, bijela i plava. Jedan potez mijenja broj mačaka u svakoj bojama za 1 ili -1. BSOMP da je početni par bio na bijeloj boji, pa smo krenuli iz trojke (4, 3, 4). Zato parnost mačaka na plavoj i crvenoj boji moraju biti iste, pa nije moguće da bude na jednoj boji budu 3 mačke, a na drugoj 4 mačke (što bi zahtijevala konačna konfiguraciju koju želimo postići). Dakle, nije moguće da se jedini pas pomakne na mjesto pored početnog.

12. Izvor ideje: IMO Shortlist 2009. C1 (str. 28)
Zadatak rješavamo koristeći istu ideju kao i u službenom rješenju: promatrajmo samo karte koje imaju oznake djeljive s 50, jer svaki potez zapravo možemo svesti okretanje neke od tih karata. U trenutku kada će igra završiti, sigurno vrijedi da će sve karte biti okrenute na plavu stranu. Primijetite da potez prvog igrača uvijek ostavlja neparan broj tih karata (kojih ima 40) okrenut na plavu stranu, a potez drugog igrača uvijek ostavlja paran broj tih karata okrenut na plavu stranu. Zato, bez obzira na igru, drugi igrač uvijek pobjeđuje - strategija zapravo samo određuje duljinu igre: najbrža igra traje 40 poteza, a najsporija otprilike 2^{2000} poteza.

Invarijante na pločama

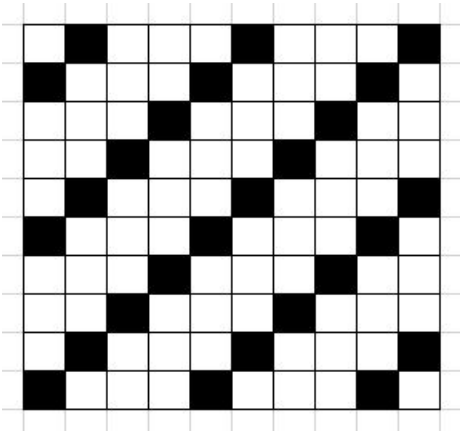
13. Označimo s $C_{(i,j)}$ polje ploče koje se nalazi u i-tom redu i j-tom stupcu. Obojat ćemo polje $C_{(i,j)}$ ako i samo ako vrijedi $i + j \equiv 3 \pmod 4$ (pogledaj skicu za pojašnjenje).

Kako takvih polja ima 26, a kako svaka pločica može pokriti najviše jedno polje, onda nije moguće pokriti cijelu ploču navedenim pločicama.

14. Primijetimo najprije da kako ploča ima 100 polja, a svaka tetranomina 4, moramo ih koristiti 25 da bi ju popločali.

Primijenimo šahovsko bojanje: tada tetranomina može prekriti ili 3 ili 1 crno polje. Kako ima neparno mnogo pločica, i svaka prekriva neparno mnogo crnih polja, ukupan broj prekrivenih polja biti će neparan. No, na ploči je 50 crnih polja pa zato nije moguće popločati ploču.

15. Koristimo bojanje koje polja u presjeku parnih redova i parnih stupaca boja u crno, a inače u bijelo. Takvo bojanje će imati nm crnih polja i $3nm$ bijelih polja. Motivacija za ovo bojanje je



Slika 18.1.: Skica zadatak 13.

kako bi svaka pločica dimenzija 2×2 prekrila točno jedno crno polje, no bitno je i da pločice dimenzija 1×4 pokriva ili 2 crna ili nijedno crno polje. Dakle, sigurno neće biti moguće popločati pod kada neku pločicu zamijenimo onom druge vrste.

16. Uzmimo šahovsko bojanje, tako da su kutna polja crna. Da nema "maknutih" polja (tj. onih koja ne treba popločati), crnih polja bilo bi $\frac{(2n+1)\times(2n+1)+1}{2} = 2n^2+2n+1$, no metodom je maknuto točno n^2 crnih polja. Bijelih polja pak ima $\frac{(2n+1)\times(2n+1)-1}{2} = 2n^2+2n$, i nije maknuto ni jedno bijelo polje. Dakle, da bi ploča bila popločiva dominama, broj crnih i bijelih polja mora biti jednak: $n^2+2n+1 = 2n^2+2n \Rightarrow n^2 = 1$, pa je moguće ploču popločati samo za $n = 1$. Primjerom zaista i pokažemo da je $n = 1$ rješenje, a za sve ostale n zbog invarijante sigurno neće postojati rješenje.

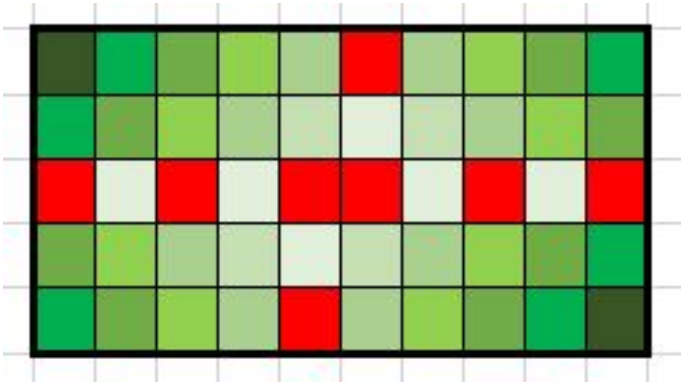
17. Ne može. Obojimo prvi i četvrti red u jednu boju, a drugi i treći u drugu boju. Primijetimo da sigurno skakač ne može skočiti iz prve boje u sljedećem potezu ponovo na polje prve boje - dakle mora nužno u polje druge boje. Kako ima jednaki broj polja obje boje, onda slijedi da svaki potez mora mijenjati boju.

No, to nije moguće jer ako uvijek skačemo iz druge boje u prvu, da nikad neće moći promijeniti boju u šahovskom bojanju. Dakle, nije na taj način moguće posjetiti ni sva polja druge boje, pa sigurno neće moći posjetiti ni sva polja. Općenito, u dokazu nigdje nismo koristili da je druga dimenzija 8: ni jedna ploča veličine $4 \times n$ nije moguće obići skakačem.

Neke *trivijalne* transformacije

18. Primijetimo da početni broj 2021^{2022} nije djeljiv s 9 jer je umnožak brojeva koji nisu djeljivi s 9. Primijetimo da je potez invarijantan na ostatak pri dijeljenju s 9. Dakle, kada ostane samo 10 znamenaka, ni taj broj i dalje ne može biti djeljiv s 9. Dakle, nemoguće je da je ostalo 10 različitih znamenaka jer bi tada $0+1+2+\cdots+9 = 45$ preostali broj bio djeljiv s 9.

19. a) Primijetimo da svaki potez čuva zbroj brojeva (jer je $a+b+c = (2a-b)+(2b-c)+(2c-a)$, a druga dva broja ne mijenjamo). Kako je zbroj petorki različit ($61 \neq 63$), onda sigurno nije moguće postići petorku iz početne.
b) Da, petorku je moguće postići: u prvom potezu odaberemo trojku $(10, 12, 15)$ pa ćemo dobiti brojeve $(8, 9, 20)$ (tj. petorka je 7, 8, 9, 17, 20). Sada biramo trojku $(7, 8, 9)$ i dobit ćemo trojku $(6, 7, 11)$ - i dobivamo traženu petorku 6, 7, 11, 17, 20.
c) Primijetimo da potez čuva broj parnih brojeva - jer je $2a$ sigurno parno, a $-b$ iste parnosti kao i b (analogno slijedi i za druga dva broja). Dakle, kako početna petorka ima samo dva parna broja, a konačna četiri, nije moguće doći do te petorke.



Slika 18.2.: Skica zadatak 24.

20. Promatrajmo brojeve $y_i = x_i + 1$. Dakle, kada promatramo potez dobit ćemo novi broj $(y_i - 1)(y_j - 1) + (y_i - 1) + (y_j - 1) = y_i y_j - 1$. Ponovo smo dobili broj sličnog oblika. Lako se može pokazati da kada spajamo brojeve oblika $a - 1$ i $b - 1$ da ćemo dobiti broj oblika $ab - 1$. Kako je množenje komunikativno, nije bitno kojim redom biramo brojeve. Konkretno, invarijanta u ovom zadatku je da koji god brojevi $a_1 \dots a_k$ pišu u nekom trenutku na ploči, vrijedit će $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)$. Dakle, konačni rezultat će biti $y_1 y_2 \dots y_n - 1$, odnosno $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1$.

21. Promatrajmo što se događa s koordinatama točke A' pri potezu. Vrijedi $x_{A'} = x_A + 2 \times (x_B - x_A)$ i $y_{A'} = y_A + 2 \times (y_B - y_A)$. Kako drugi pribrojnik množimo s 2, on je uvijek paran, pa otkrivamo da parnost koordinata točke A' ovisi isključivo o parnosti koordinata točke A. Kako među početnim točkama nemamo točku s obje neparne koordinate, onda nije moguće ni sa jednom točkom doći u točku s obje neparne koordinate.

22. Primijetimo da potez mijenja boje kameleona za $(-1, -1, 2)$, pa zato ima smisla promatrati invarijantu modulo 3 (jer je $-1 \equiv 2 \pmod 3$). Kako brojevi (100, 200, 300) čine potpuni sustav ostataka modulo 3: (1, 2, 0), a svakim potezom se svaki broj smanji za 1, pa ćemo opet dobiti potpuni sustav ostataka modulo 3. Dakle, postoje barem dvije vrste koje imaju barem 2, odnosno barem jednog pripadnika. Stoga trenutno nije moguće postići da su svi kameleoni jednake boje.

Zanimljivo je primijetiti da bez obzira koje boje dodamo kameleona, moći ćemo postići da svi budu na kraju iste boje. Ako dodamo zelenog kameleona, onda možemo postići da svi kameleoni budu plavi - možemo iz (101, 200, 300) doći do (167, 167, 277) (tako da spojimo 33 parova crvenih i plavih kameleona), pa u (0, 0, 601) (da samo spajamo crvene i zelene kameleone).

Slične algoritme možemo pronaći da ako dodamo crvenog kameleona će svi mogu postati zeleni, odnosno ako dodamo plavog da svi mogu postati crveni.

23. Primijetimo da je zbroj $x^2 + y^2$ invarijantan jer je $(0.6x + 0.8y)^2 + (0.8x - 0.6y)^2 = 0.36x^2 + 0.96xy + 0.64y^2 + 0.64x^2 - 0.96xy + 0.36y^2 = x^2 + y^2$. Dakle, iz $(3, 7)$ $(3^2 + 7^2 = 58)$ nije moguće doći u točku $(4, 5)$ $(4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41)$.

24. U ovom zadatku koristit ćemo monovarijantu koja opisuje opseg polja obraslih korovom. Primijetimo da ako su točno dva susjeda nekog polja obrasla korovom, tada se opseg neće promijeniti, a ako ih je više obraslo, onda će se nužno smanjiti.

Dakle za vrt dimenzija 10×10, konačni opseg će biti 40, pa sigurno trebamo barem 10 polja. Tih 10 polja možemo trivijalno rasporediti po glavnoj dijagonali što je dobro rješenje.

Za vrt oblika 5×10, opseg je 30, pa trebamo barem 8 polja za početak. Skica prikazuje jedan mogući primjer (crvena polja označavaju polja koja su na početku bila obrasla korovom).

25. Primijetimo da je invarijanta na potez da je očuvan $\gcd(x, y)$ jer je potez zapravo jako sličan Euklidovom algoritmu. Dakle, nije moguće iz $(19, 94)$ doći do $(19, 95)$ jer je $\gcd(19, 94) = 1$, a $\gcd(19, 95) = 19$.

S druge strane, moguće je doći do $(19, 96)$. Općenito, moguće je iz bilo kojeg para (a, b) doći do para (c, d) ako i samo ako $\gcd(a, b) = \gcd(c, d)$. Neka je $D = \gcd(a, b)$. Tada je iz (a, b) doći do (D, D) koristeći Euklidov algoritam, a zatim iz (D, D) moguće doći do (c, d) koristeći "inverzni" Euklidov algoritam.

18.3. G2: Patricija Dovijanić - Tetivni četverokuti

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 3.
2. 2015.O2A.2
3. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 8.
4. 2016.O2A.4
5. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 11.
6. 2016.3A.3

Teži zadaci

7. 2011.D1A.4
8. 2017.Ž2A.4
9. 2009.D4A.1
10. 2018.D4B.5
11. 2018.Ž4A.3
12. Izvor: staro predavanje.

    Skica rješenja. Neka je E nožište visine iz vrha C, i G sjecište CE i FH. Četverokut $EMGH$ je tetivan (razmislite zašto), i G je težište trokuta ABC, pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = \frac{1}{3}|BE|$. Po poučku SKS, trokuti BHF i EBC su slični, pa je $\angle EMG = \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta ABC, pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EMF = 180° - \angle EMG = 180° - \alpha$, pa je $EBHF$ tetivan, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

13. Izvor: staro predavanje.

    Skica rješenja. Uvedimo oznaku $\alpha = \angle AMB$. Slijedi $\angle KBC = \angle BCK = 90° - \alpha$ i $\angle BKC = 2\alpha$. Promotrimo kružnicu BCM. Kako je $\angle CMB = 180° - \alpha$, drugi obodni kut nad $\overline{BC}$ jednak je α. Budući da je $\angle BKC = 2\alpha$ i $|BK| = |CK|$, K je središte kružnice BCM i vrijedi $|BK| = |CK| = |MK|$.

    Označimo s E sjecište pravaca KM i AD. Dokazujemo da je $\angle DEM = 90°$.

    Vrijedi $\angle ACB = \angle ADB = \angle EDM = \frac{\alpha}{2}$, jer se radi o obodnim kutevima nad lukom AB. Kako je trokut CMK jednakokračan, $\angle CMK = \angle MCK = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Također, $\angle DMC = \alpha$.

    Budući da su točke E, M i K kolinearne (leže na istom pravcu), vrijedi $\angle DME + \angle DMC + \angle CMK = 180°$, odakle je $\angle DME = 90° - \frac{\alpha}{2}$, i konačno, promatrajući unutarnje kutove trokuta DEM, dobijemo $\angle DEM = 90°$, što je i trebalo dokazati.

14. Izvor: državno 2007. 3A.3

    Skica rješenja. Neka je H' osnosimetrična slika ortocentra preko $\overline{AB}$ i D nožište visine na stranicu AB, tj. presjek pravaca HH' i AB. Kako je trokut AOH jednakostraničan (razmislite zašto), vrijedi $\angle AOH' = 60°$, pa je njegov obodni kut $\angle ACH' = \angle ACD$ jednak $30°$. Budući da je trokut ACD pravokutan, slijedi $\angle CAD = \angle CAB = 60°$.

18.4. N2: Paula Horvat - Kongruencije

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Svaki prirodan broj n može davati ostatak $0, 1, 2$ ili 3 pri dijeljenju s 4, odnosno zapisano pomoću kongruencija: $n \equiv 0, 1, 2$ ili $3 \pmod 4$. Znamo da $a \equiv b \pmod c \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod c$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ pa je $n^2 \equiv 0^2, 1^2, 2^2$ ili $3^2 \pmod 3$, odnosno $n^2 \equiv 0, 1, 4$ ili $9 \pmod 4$. Međutim, kako je $4 \equiv 0 \pmod 4$ i $9 \equiv 1 \pmod 4$, onda je $n^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 4$.

2. Primijetimo kako vrijedi:

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$$
$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$
$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$
$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$3^5 \equiv 3 \pmod{10}$$
$$\dots$$

Zato zaključujemo da je $3^{33} \equiv 3 \cdot (3^4)^8 \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod{10}$ pa je zadnja znamenka danog broja 3.

3. a) Ako je n paran $n^2 + 2n - 1$ je neparan pa nije djeljiv s 4.
Ako je n neparan, tada je $n \equiv -1, 1 \pmod 4$, pa je $n^2 + 2n - 1 \equiv (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 \equiv -2 \pmod 4$ ili $n^2 + 2n - 1 \equiv 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 \equiv 2 \pmod 4$, u oba slučaja opet nije djeljivo s 4.

b) $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv (-3) \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 0 \pmod 7$, pa je izraz djeljiv sa 7.

4. Zadatak 3.

5. $2x + 3 \equiv 4 \pmod 7$. Nakon što od obje strane kongruencije oduzmemo 3 dobivamo $2x \equiv 1 \pmod 7$. Budući da taj izraz želimo podijeliti s 2, zapisat ćemo ga tako da se na desnoj strani nalazi paran broj, odnosno $2x \equiv 1 \equiv 8 \pmod 7$. S obzirom na to da su 2 i 7 relativno prosti kongruenciju smijemo podijeliti sa 2 iz čega slijedi $x \equiv 4 \pmod 7$.

6. Uočavanje $x^3 \equiv x \pmod 2$ i $x^3 \equiv x \pmod 3 \implies x^3 \equiv x \pmod 6$, $\forall x \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

7.
$$2^{12n+9} = 2^{3(4n+3)} = 8^{4n+3} \equiv (-5)^{4n+3} \equiv -5^{4n+3} \pmod{13}.$$
$$2^{12n+9} - 5^{4n+1} \equiv -5^{4n+3} - 5^{4n+1} \equiv -5^{4n+1}(25 + 1) \equiv 0 \pmod{13}.$$

8. Županijsko natjecanje 2009., SŠ A-2.4.

9. Prvo moramo uočiti da za sve proste $p, q > 3$, $p \equiv 1$ ili $-1 \pmod 6$. Razlikujemo sada dva slučaja:

a) Za $p > 3$ i $q > 3$ slijedi da je $p^2 \equiv 1 \pmod 6$, isto tako je $q^2 \equiv 1 \pmod 6$ pa je $p^2 - 2q^2 \equiv 1 - 2 \equiv -1 \equiv 5 \pmod 6$. Desna strana jednadžbe je kongruentna $1 \pmod 6$ stoga jednadžba nema rješenja za $p, q > 3$.

b) Jedan od brojeva p, q je 2 ili 3. Ako je $p = 2$, dobivamo da je $2q^2 = 4 - 1 = 3$ što nema rješenja u cijelim brojevima. Slično za $q = 3$ dobivamo da je $p^2 = 1 + 18 = 19$, što isto nema rješenja u cijelim brojevima. U preostala dva slučaja rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo isto rješenje $(p, q) = (3, 2)$.

Dakle, jedino rješenje je $(p, q) = (3, 2)$.

10. Za bilo koji takav raspored možemo pronaći nenegativne cijele brojeve $x_1, x_2, ..., x_{2008}$ takve da je dobiveni broj jednak $1^1 \cdot 10^{x_1} + 2^2 \cdot 10^{x_2} + ... + 2008^{2008} \cdot 10^{x_{2008}}$. Na primjer, za raspored $\overline{3^3 1^1 2^2} = 2714$, vrijedi $2714 = 3^3 \cdot 10^2 + 1^1 \cdot 10^1 + 2^2 \cdot 10^0$.

Kako je $10 \equiv 1 \pmod 3$ vrijedi $1^1 \cdot 10^{x_1} + 2^2 \cdot 10^{x_2} + ... + 2008^{2008} \cdot 10^{x_{2008}} \equiv 1^1 + 2^2 + ... + 2008^{2008} \pmod 3$.

Lako se provjeri da vrijede sljedeće tvrdnje

Ako je $a \equiv 0 \pmod 3$ onda $a^a \equiv 0 \pmod 3$.

Ako je $a \equiv 1 \pmod 3$ onda $a^a \equiv 1 \pmod 3$.

Ako je $a \equiv 2 \pmod 3$ i a paran onda $a^a \equiv 1 \pmod 3$.

Ako je $a \equiv 2 \pmod 3$ i a neparan onda $a^a \equiv 2 \pmod 3$.

Koristeći gore navedene tvrdnje vidimo da izraz $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 \equiv 0 \pmod 3$. Analogno $8^8 + ... + 14^{14} \equiv 0 \pmod 3$ pa vrijedi i $1^1 + 2^2 + ... + 2002^{2002} \equiv 0 \pmod 3$. Sada vidimo da je izraz $1^1 + 2^2 + ... + 2008^{2008} \equiv 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2007^{2007} \equiv 2 \pmod 3$. Međutim, po primjeru 1.2., kvadrat cijelog broja ne može dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Stoga zaključujemo da nije moguće posložiti brojeve $1^1, 2^2, ..., 2008^{2008}$ jedan za drugim tako da dobiveni broj bude kvadrat nekog prirodnog broja.

11. Iz dokazane tvrdnje 2. zadatka, znamo da vrijedi $S(2^n) \equiv 2^n \pmod 3$. Neka je a zadnja znamenka broja 2^n. Imamo:

$$a(S(2^n) - a) \equiv a(2^n - a) \pmod 3.$$

Sada uočimo da, za parni n, $2^n \equiv 1 \pmod 3$, dok za neparni n $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Gledamo slučajeve ovisno o kongruenciji od $n \pmod 4$:

1) $n \equiv 0 \pmod 4 \implies a = 6$ ili $2^n = 1$. U oba slučaja dobivamo $a(2^n - a) \equiv 0 \pmod 3$.
2) $n \equiv 1 \pmod 4 \implies a = 2$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 2(2 - 2) \equiv 0 \pmod 3$.
3) $n \equiv 2 \pmod 4 \implies a = 4$ i $2^n \equiv 1 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 4(1 - 4) \equiv 0 \pmod 3$.
4) $n \equiv 3 \pmod 4 \implies a = 8$ i $2^n \equiv 2 \pmod 3$, pa $a(2^n - a) \equiv 8(2 - 8) \equiv 0 \pmod 3$.

12. Školsko natjecanje 2016., SŠ A-3.7

13. Državno natjecanje 2014., SŠ A-2.3

14. JBMO shortlist 2020.

15. JBMO shortlist 2020.

18.5. X2: Lucija Relić - Indukcija

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 1

2. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 3a

3. Problem 2.a)

4. Problem 5.

5. Ako raspišemo traženi zbroj $S(n)$ za prvih nekoliko $n \in \mathbb{N}$ vidimo da bi trebalo vrijediti $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Bazu smo već provjerili raspisujući male primjere. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= S(n)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

   pa smo pokazali korak indukcije, tj. indukcijom smo pokazali da je traženi zbroj jednak $\frac{n}{n+1}$ za svaki prirodni broj n.

6. MNM online predavanje, zadatak 6

7. Za bazu uzmimo $n = 1$, jedan pravac sam sa sobom siječe se u 0 točaka pa smo provjerili bazu. Pretpostavimo da za neki proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da se n pravaca u općem položaju sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
   Sada promatramo broj sjecišta $(n+1)$ pravaca u općem položaju. Izdvojimo jedan od njih; preostalih n po pretpostavci indukcije ima $\frac{n(n-1)}{2}$ sjecišta. Izdvojeni pravac siječe svaki od preostalih n točno jednom (ne postoje 2 paralelna pravca niti 3 koja se sijeku u istoj točki), čime doprinosi broju sjecišta sa n. Zato je ukupan broj sjecišta $(n+1)$ pravaca jednak

$$\frac{n(n-1)}{2}+n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

   čime smo pokazali i korak indukcije pa tvrdnja zadatka vrijedi po principu matematičke indukcije.

8. Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7

9. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 10

10. MNM online predavanje, zadatak 9.

11. Lako vidimo da ploču 2×2 možemo popločati jednom pločicom koje god polje bilo uklonjeno. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ možemo šahovsku ploču $2^n \times 2^n$ s uklonjenim bilo kojim poljem popločati trominama. Promatramo ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ s uklonjenim nekim poljem. Ona je sastavljena od 4 ploče veličine $2^n \times 2^n$, a uklonjeno polje nalazi se u nekoj od tih četvrtina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se uklonjeno polje nalazi u gornjoj lijevoj četvrtini, pa tada tu četvrtinu po pretpostavci indukcije možemo popločati trominama. Promotrimo sada 4 polja koja se nalaze točno u sredini velike ploče. Jedno od njih (gornje lijevo) već

smo popločali, pa na preostala 3 možemo pravilno postaviti jednu trominu. Međutim, ta tromina nalazi se u svakoj od preostalih četvrtina ploče (točno s jednim poljem), pa i te četvrtine sada možemo promatrati kao ploče $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim poljem, a to po pretpostavci znamo popločati trominama. Tako smo popločali cijelu veliku ploču (osim naravno onog jednom uklonjenog polja) pa smo pokazali i korak indukcije.

12. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.5, Exercise

13. Članak iz Poučka, zadatak 10.

14. Problem 35.

15. The Counterfeit Coin Problem, slajd 121

16. Dokazujemo tvrnju indukcijom.

Neka je T_n tvrdnja zadatka za n automobila. Baza $n = 1$ vrijedi trivijalno.

Sada pretpostavimo da vrijedi T_n za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka imamo $n+1$ automobila na cesti. Dokažimo da postoji automobil koji sa svojim gorivom može stići do prvog sljedećeg.

Pretpostavimo suprotno, niti jedan automobil ne može stići do prvog sljedećeg. No tada je zbroj količine goriva manji od goriva potrebnog za cijeli krug, iz čega slijedi kontradikcija. Dakle, postoji automobil koji može stići do sljedećeg. No, ta situacija je ekvivalentna situaciji da taj automobil već na početku ima svoje gorivo i gorivo sljedećeg automobila, a da sljedećeg automobila uopće nema, a to je upravo tvrdnja T_n koja vrijedi.

Dakle, dokazali smo $T_n \implies T_{n+1}$ pa po principu matematičke indukcije sada vrijedi $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$ čime je dokaz završen.

17. Županijsko 2012. 4A, 5.

18. Moguće je! Lako provjerimo da je za 4 to moguće, pa indukcijom pokažemo da možemo prijeći iz n u $2n$ i to tako da prvih n brojeva budu neparni, a zadnjih n parni i posloženi analogno rješenju za n. Tada te polovice nemaju konflikte (transformacijama $k \mapsto 2k$ i $k \mapsto 2k+1$ ne kvarimo uvjet prosjeka), a zbroj dva broja iz različitih polovica je neparan pa se njihov prosjek ne nalazi u nizu. Sada možemo napraviti konstrukciju za sve 2^n, a čim to preraste 2020^{2020} posložimo te brojeve (za 2^n, gdje je n dovoljno velik) te izbacimo one veće od 2020^{2020} i tako dobivamo dobar raspored.

19. Rješenja za treću grupu

19.1. A3: Mateo Dujić - Teleskopiranje

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{k^2+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{(k-1)(k+1)} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n+1} = \boxed{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.}$$

2. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \boxed{\sqrt{n+1} - 1.}$$

3. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

što znači da dani umnožak možemo zapisati kao

$$\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2} =$$

$$\boxed{\frac{n+1}{2n}.}$$

4. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6}{k(k+3)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+3},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{n+3} = 2 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} =$$

$$\boxed{\frac{11}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}.}$$

Umjereni zadaci

5. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{2}{4k^2-1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \boxed{1 - \frac{1}{2n+1}.}$$

6. Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \ldots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant 2n.$$

Neka je $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ... $a_n = a_{n-1} - a_n$. Tada je lijeva strana nejednakosti jednaka

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{a_i}).$$

Zbog uređenosti $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ je svaki $a_i > 0$ pa je $a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2$, odnosno $\sum_{i=1}^{n}(a_i + \frac{1}{a_i}) \geq 2n$, što je i trebalo pokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = 1$ za svaki $i = 1, 2, \ldots n$, odnosno $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{n-1} - x_n = 1$.

7. Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + 1 + \ldots + 1 = \boxed{n+1.}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)}{1-x} = \frac{1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.}$$

8. Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + 1 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}.}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{(1-x)(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n)}{1-x} = \\ &= \frac{1 - x + 2x - 2x^2 + 3x^2 - 3x^3 + \ldots + (n+1)x^n - (n+1)x^{n+1}}{1-x} = \\ &= \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

Sada možemo iskoristiti rezultat iz prethodnog zadatka, pa je dana suma jednaka

$$\boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.}$$

9. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2! - 1! + 3! - 2! + \ldots + (n+1)! - n! = \boxed{(n+1)! - 1.}$$

10. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(k^2+k+1) \cdot k! = ((k+1)^2 - k) \cdot k! = (k+1)^2 \cdot k! - k \cdot k! = (k+1) \cdot (k+1)! - k \cdot k!,$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$2 \cdot 2! - 1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! - 2 \cdot 2! + \ldots + (n+1) \cdot (n+1)! - n \cdot n! = \boxed{(n+1) \cdot (n+1)! - 1.}$$

11. Rastavimo izraz $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

Odredimo koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$. Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$\frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}.$$

Usporedimo li dobiveni brojnik s brojnikom izraza $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ i izjednačimo li koeficijente uz k^2, k te slobodne koeficijente, dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 2a=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-1, \\ c=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle vrijedi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right).$$

Danu sumu sada možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \ldots - \frac{2}{n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2}.}$$

12. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ vrijedi

$$a_{k-1} = 2 + a_0 a_1 \ldots a_{k-2} \implies a_0 a_1 \ldots a_{k-2} = a_{k-1} - 2,$$

što znači da za svaki $k \geq 2$ vrijedi

$$a_k = 2 + a_0 a_1 \ldots a_{k-2} \cdot a_{k-1} = 2 + (a_{k-1} - 2)a_{k-1} = a_{k-1}^2 - 2a_{k-1} + 2.$$

Dokažimo sada principom matematičke indukcije da vrijedi za svaki $n \geq 1$ $a_n = 2^{2^n} + 1$.
Baza. $n = 1,\ a_1 = 2 + 3 = 2^{2^1} + 1.$

Pretpostavka. Za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 2^{2^n} + 1$.
Korak. Dokažimo da vrijedi $a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$. Korištenjem formule koju smo gore dokazali, imamo da vrijedi

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 = (2^{2^n} + 1)^2 - 2(2^{2^n} + 1) + 2 = 2^{2^{n+1}} + 1,$$

čime je završen korak indukcije. Iz ovoga slijedi $\boxed{a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1.}$

13. Primijetimo da se nazivnici mogu faktorizirati na sljedeći način:

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^2 + 1)^2 - k^2 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1).$$

Ono što je zanimljivo kod ove faktorizacije jest da je jedna zagrada zapravo jednaka drugoj zagradi uz translaciju varijable za jedan, odnosno vrijedi

$$k^2 - k + 1 = (k - 1)^2 + (k - 1) + 1.$$

Tu činjenicu ćemo iskoristiti da bi izveli teleskopiranje. Rastavljajući izraz

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{k}{(k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1)}$$

na parcijalne razlomke, dobivamo da vrijedi

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2(k^2 - k + 1)} - \frac{1}{2(k^2 + k + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{((k+1) - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right),$$

pa je dana suma jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{(n + 1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2 + 2n + 2}.}$$

Teži zadaci

14. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

pa je dana suma manja od

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

15. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} = \frac{1}{F_{k-1}(F_{k-1} + F_k)} = \frac{1}{F_k}\left(\frac{1}{F_{k-1}} - \frac{1}{F_{k-1} + F_k}\right) = \frac{1}{F_{k-1}F_k} - \frac{1}{F_kF_{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \ldots + \frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}} = \boxed{1 - \frac{1}{F_nF_{n+1}}.}$$

16. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{6^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})} = \frac{2^k}{3^k - 2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} - 2^{k+1}},$$

što znači da danu sumu možemo zapisati kao

$$\frac{2}{3-2} - \frac{2^2}{3^2 - 2^2} + \frac{2^2}{3^2 - 2^2} - \frac{2^3}{3^3 - 2^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n - 2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \boxed{2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}.}$$

17. Rješenje

19.2. C3: Andrija Tomorad - Bojanja i popločavanja

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Prvo rješenje: obojimo ploču u 4 boje tako d je boja 1 u gornjem lijevom kutu, te nastavljamo niz (ciklus) 1,2,3,4 nadolje i nadesno. Svaka pločica pokriva jedno polje svake boje, ali brojevi polja nisu jednaki.

   Drugo rješenje: dekomponiramo ploču na 2×2 kvadrate te novodobivenu ploču obojimo šahovski, svaka pločica pokriva dva crna i dva bijela polja, a brojevi polja su nejednaki.

2. Obojimo ploču šahovski, neka su crna polja u kutovima. U potezu promjene broja žetona na crnim i bijelim polja mogu biti $(2,-2),(0,0),(-2,2)$, zato je parnost tih brojeva invarijanta. Svi žetoni ne mogu biti na bijelim poljima, jer je na početku taj broj 12, (parnost se ne mijenja) pa ne može biti 25. Što se crnih polja tiče, na crnim poljima mogu biti svi žetoni. Odaberimo proizvoljno crno polje i opločimo ploču bez tog polja dominima (to možemo, lako za provjeriti). U prvih svakom od prvih 6 poteza odaberimo dva domina i postignemo da se žetoni u njima nalaze na istom polju. Nakon toga pomičemo parove žetona s istog polja zajedno.

3. Obojimo ploču u tri boje, slično kao u prvom zadatku. Promatramo brojeve vNakon svakog poteza, na početku je (3,3,3) a nakon svakog poteza, jedan od njih se poveća za 1, a ostali se smanje za 1. To znači da su nakon svakog poteza ili su svi parni ili su svi neparni; ne možemo postići (1,0,0).

4. Za 2 i 5 možemo (konstrukcija). Za sve parne brojeve možemo kao spajanje opločenih 2×9 ploča, a za neparne kao spajanje jedne 5×9 i nekoliko 2×9 ploča. Za 3 ne možemo. Obojimo ploču šahovski tako da su crna polja u kutu, ali onda crna polja u drugom redu obojimo natrag u bijelo. Tako dobijemo bojanje s 10 crnih polja smještenih na način da jednim trominom možemo pokriti najviše jedno. Tromina ima 9, a crnih polja ima 10, pa je opločavanje nemoguće.

5. Obojimo sva rubna polja koja nisu u kutu. Svi mogući potezi okreću paran broj (2 ili 0) žetona na obojanim poljima. Na početku je neparan broj pisama, a na kraju treba biti paran.

6. Za kraljeve, dame i topove opločitimo ploču dominima. Strategija igrača B je u svakom potezu pomaknuti figuru u drugo polje istog domina. Na taj način nikad neće ostati bez poteza. Za lovce i skakače ista ideja uparivanja polja prolazi. Za lovce uzimamo 2×2 kvadrate (u svakomu su dva polja na kojima se lovac uopće može zaustaviti). Za skakače podijelimo ploču na 2×4 pravokutnike, u svakomu su četiri para polja koji odgovaraju dominima u slučaju s kraljevima, topovima ili damama.

7. Podijelimo ploču na 2×2 kvadrate. U svakomu imamo 4 polja, sva međusobno prijateljska. Na njima su onda četiri broja među kojima najviše jedan može biti djeljiv s 2 i najviše jedan može biti djeljiv s 3. Na preostala dva polja mogu biti samo brojevi 1, 5, ili 7. To je ukupno 50 polja na kojima je broj 1, 5, ili 7. Po Dirichletovom principu postoji broj koji se pojavljuje barem 17 puta.

8. DRŽAVNO 2018., 2. RAZRED

9. DRŽAVNO 2012., 2. RAZRED

10. Podijelimo ploču na stupce i obojimo svakog drugog. Na početku sve automobile usmjerene lijevo ili desno koje se nalaze u neobojanom stupcu pomaknimo za jedno polje u obojani stupac. Nakon toga svi automobili na neobojanim poljima okrenuti prema gore ili mogu izaći. Nakon što oni izađu, pomaknimo sve automobile (tada na obojenim poljima) za jedno polje, te izađimo i s automobilima okrenutim gore ili dolje na obojanim poljima. Nakon toga izađimo i s automobilima okrenutim lijevo ili desno.

11. DRŽAVNO 2019., 2. RAZRED U rješenju se spominje alternirajuća suma. Moja (ekvivalentna) ideja bila je obojati brojeve šahovski te promatrati razliku suma crnih i bijelih brojeva.

12. DRŽAVNO 2016. 2. i 3. RAZRED

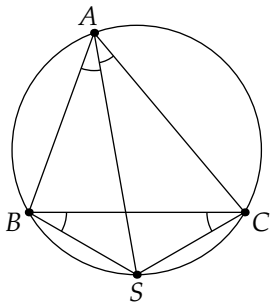
13. MEMO 2018.

19.3. G3: Nika Utrobičić - Klasične konfiguracije

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Neka je točka S presjek opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ sa simetralom kuta pri vrhu A.



Uočimo da je

$$\angle SBC = \angle SAC = \angle SAB = \angle SCB$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog tetivnosti, druga zbog činjenice da je AS simetrala kuta, a treća opet zbog tetivnosti. Dakle, trokut $\triangle SBC$ je jednakokračan, odnosno, $|SB| = |SC|$. Dakle, točka S je na simetrali dužine $\overline{BC}$, no, iz definicije je ujedno i na simetrali kuta, a kako je presjek dva pravca jedinstven, slijedi da je presjek simetrale stranice i simetrale kuta točka S koja leži na opisanoj kružnici.

2. Uočimo da je površina trokuta $\triangle BIC$ jednaka

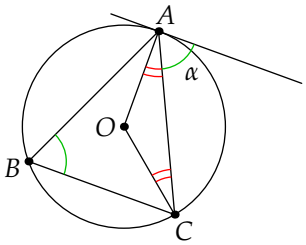
$$P_{\triangle BIC} = \frac{r \cdot BC}{2} = \frac{ra}{2},$$

pri čemu koristimo da je radijus upisane kružnice ujedno i visina u tom trokutu. Koristeći analogne tvrdnje za ostale trokute i koristeći očitu činjenicu da je trokut $\triangle ABC$ rastavljen na trokute $\triangle AIB$, $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, vrijedi

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AIB} + P_{\triangle BIC} + P_{\triangle CIA} = \frac{rc + ra + rb}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = rs,$$

gdje je s standardna oznaka za poluopseg.

3. Slijedimo skicu.



Označimo s α kut između tetive i tangente (zeleni na skici). Onda je iz definicije tangente i uz činjenicu da je O centar kružnice

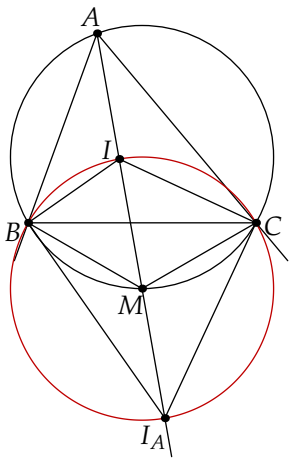
$$\angle OCA = \angle OAC = 90° - \alpha,$$

a iz sume kuteva u trokutu $\triangle OCA$ dobivamo

$$\angle AOC = 180° - 2\angle OAC = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha.$$

Naposljetku, uočimo da su kutevi $\angle AOC$ i $\angle ABC$ središnji i obodni pa prema već poznatom teoremu vrijedi $\angle ABC = \alpha$ što smo željeli i pokazati.

4. Slijedimo skicu.



Znamo da su središta upisane i pripisane kružnice zapravo sjecišta simetrala unutrašnjih, odnosno, vanjskih kuteva pa je zbog toga

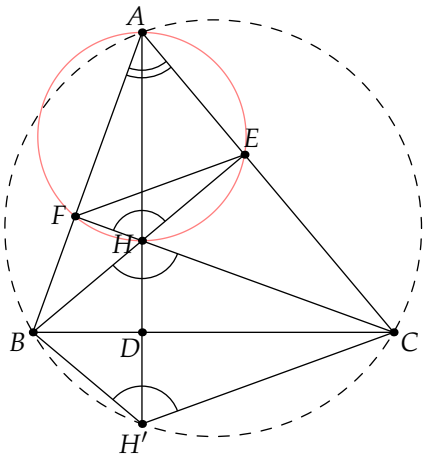
$$\angle BIC = 90^\circ = \angle BI_AC.$$

Iz toga direktno slijedi da je četverokut $BICI_A$ tetivan (suma nasuprotnih kuteva je 180°) pa samo još treba dokazati da je M središte te kružnice.

No, zbog činjenice da su kutevi $\angle BIC$ i $\angle BI_AC$ pravi, zbog Talesovog teorema znamo da je središte opisane kružnice tog četverokuta upravo polovište dužine $\overline{II_A}$. Ujedno, središte te kružnice se nalazi na simetrali dužine $\overline{BC}$. Dakle, središte opisane kružnice tom četverokutu možemo dobiti kao sjecište simetrale dužine $\overline{BC}$ i pravca II_A. Iz prvog zadatka vidimo da je taj presjek upravo točka M.

5. Imamo dva dijela.

a) U prvom dijelu, imamo sljedeću situaciju.



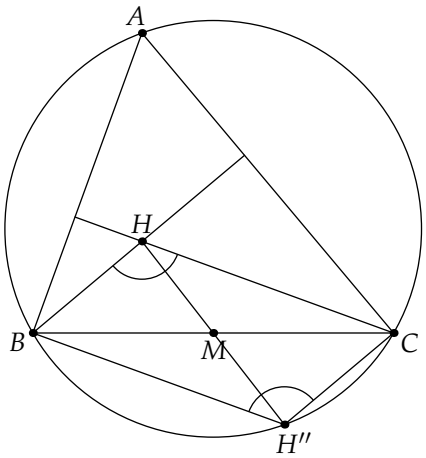
Neka je H' preslika točke H preko $\overline{BC}$. Tvrdimo da je četverokut $ABH'C$ tetivan. Dokazati ćemo da je $\angle BH'C + \angle BAC = 180^\circ$.

Naime, vrijedi

$$\angle BH'C = \angle BHC = \angle EHF = 180 - \angle FAE \implies \angle BH'C + \angle BAC = 180^\circ$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog toga što je H' preslika od H, a druga jer je četverokut $(AFHE)$ tetivan. Kako je suma nasuprotnih kuteva u četverokutu $ABH'C$ jednaka 180°, znamo da je taj četverokut tetivan.

b) U drugom dijelu, radimo sličan postupak.



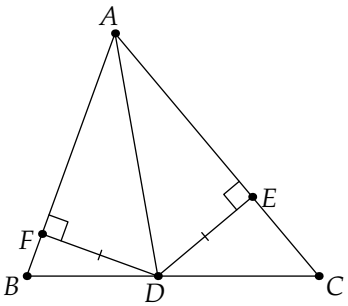
Neka je H'' preslika točke H preko točke M. Jasno, želimo pokazati da je četverokut $ABH''C$ tetivan.

Uočimo da je $BHCH''$ paralelogram zbog toga što se dijagonale raspolavljaju pa je

$$\angle BH''C = \angle BHC.$$

Koristeći iste argumente kao i u prethodnom dokazu, imamo da je traženi četverokut tetivan.

6. Neka je D sjecište simetrale kuta pri vrhu A sa stranicom $\overline{BC}$. Želimo dokazati $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.



Neka su E i F nožišta visina iz D na $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Znamo da je onda $|DE| = |DF|$. Uočimo da trokuti $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ dijele visinu iz A. Označimo duljinu te visine s h. Vrijedi

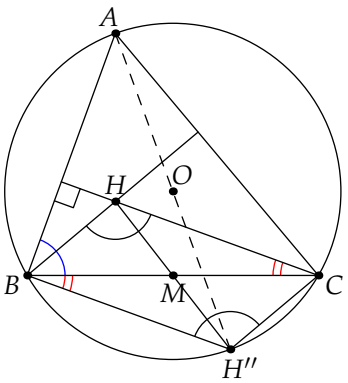
$$P_{\triangle ABD} = \frac{h \cdot |BD|}{2}, \quad P_{\triangle ADC} = \frac{h \cdot |CD|}{2} \implies \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{DC}.$$

U drugu ruku, imamo i da je

$$P_{\triangle ABD} = \frac{DF \cdot AB}{2}, \quad P_{\triangle ADC} = \frac{DE \cdot AC}{2} \implies \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{AB}{AC}$$

odakle tvrdnja zadatka lagano slijedi.

7. Imamo sličnu konfiguraciju kao u zadatku 5. b).



Kako je $BHCH''$ paralelogram, imamo

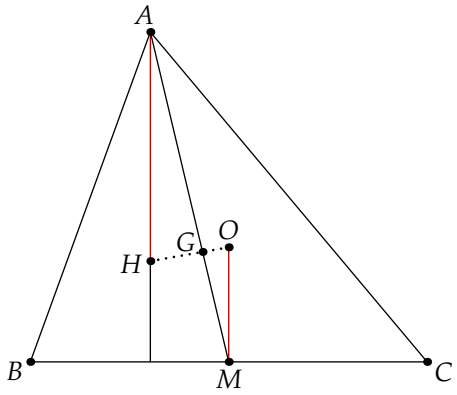
$$\angle H''BC = \angle BCH$$

pa je

$$\angle H''BA = \angle H''BC + \angle CBA = \angle BCH + \angle CBA = 90^\circ$$

odakle direktno slijedi da je AH'' promjer.

8. Situacija je sljedeća.



Iz prošlog zadatka lagano vidimo da je $AH = 2OM$ te je poznato da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, odnosno, $AG = 2GM$. Također, zbog paralelnosti, imamo da $\angle GAH = \angle GMO$ pa su trokuti $\triangle AHG$ i $\triangle MGO$ slični prema $S-K-S$ poučku. Posebno, to znači $\angle HGA = \angle MGO$ što uz činjenicu da su A, G i M kolinearne te konfiguraciju daje da su H, G i O kolinearne te vrijedi $HG = 2GO$.

Za alternativni dokaz, pogledajte predavanje iz homotetije za 5. grupu.

9. Prvo ćemo dokazati da su točke D, E, F i M na jednoj kružnici što se analogno proširi i na ostala polovišta, odnosno, dokazati ćemo da nožišta visina i polovišta stranica leže na jednoj kružnici.

Uočimo da je četverokut $BFEC$ tetivan zbog Talesovog teorema te zbog istog vrijedi da je M središte kružnice opisane tom četverokutu. Iz teorema o obodnom i središnjem kutu, imamo da je

$$\angle EMF = 2\angle ECF = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$$

U drugu ruku, zbog tetivnosti četverokuta $(DFAC)$ i $(BDEA)$, vrijedi

$$\angle DBF = \angle FAC = \alpha = \angle BAE = \angle CDE.$$

Dakle, imamo

$$\angle FDE = 180^\circ - \angle BDF - \angle CDE = 180^\circ - 2\alpha = \angle EMF$$

što daje traženu tetivnost.

Naposljetku, uočimo da je četverokut $(HFAE)$ tetivan te zbog pravih kuteva vrijedi da je A' središte kružnice opisane tom četverokutu. Zbog obodnih i središnjih kuteva vrijedi

$$\angle FA'E = 2\angle FAE = 2\alpha = 180^\circ - \angle FDE$$

što daje da je četverokut $FA'ED$ tetivan. Naravno, potpuno analogno dokažemo i za B' i za C' što daje svih 9 točaka.

Za alternativni dokaz, pogledajte predavanje iz homotetije za 5. grupu.

10. Imamo četiri dijela:

- Koristimo oznake sa skice. Generalno je poznato da je $|BD| = s - b$ (označimo duljine odsječaka s x, y i z i direktno vidimo). Označimo $|CE| = u$. Koristimo standardne oznake za stranice i poluopseg. Vrijedi

$$CL = CE = u, \quad BM = BE = BC - CE = a - u.$$

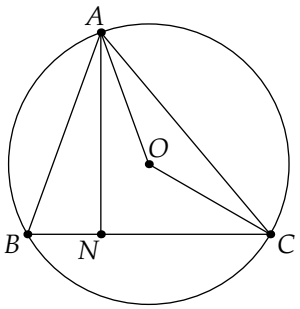
Sada iz činjenice da je $AM = AL$ dobivamo

$$b + u = c + (a - u) \implies u = s - b = BD$$

što smo htjeli i dokazati.

- Homotetija koja šalje upisanu u pripisanu kružnicu šalje "najvišu točku" upisane kružnice u "najvišu točku" pripisane kružnice, no to su upravo točke D' i K.
- Homotetija koja šalje upisanu u pripisanu kružnicu šalje "najnižu točku" upisane kružnice u "najnižu točku" pripisane kružnice, no to su upravo točke D i K'.
- Promotrimo homotetiju iz K koja šalje trokut $\triangle KD'D$ u trokut $\triangle KAN$. Polovište se šalje u polovište pa se I šalje u P, odnosno, K, I i P su kolinearne. Za drugu kolinearnost, radimo istu stvar, samo za trokute $\triangle AND$ i $\triangle DKK'$.

11. Slijedimo skicu.



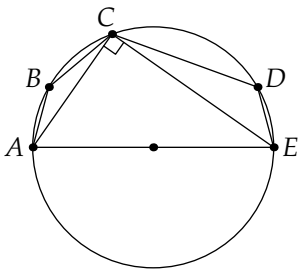
Zbog teorema o obodnom i središnjem kutu, vrijedi

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle ABN.$$

Sada imamo

$$\angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABN = \angle BAN.$$

12. Kako je $\overline{AE}$ promjer, imamo $\angle ACE = 90^\circ$.



Uočimo da zbog tetivnosti vrijedi

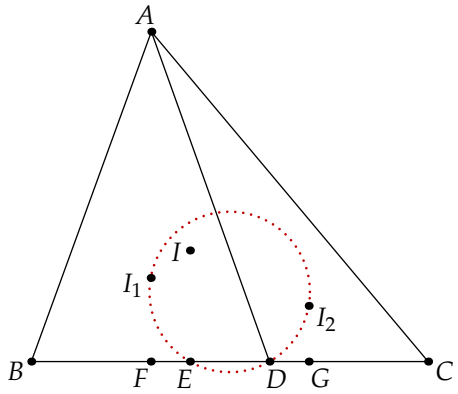
$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CEA, \quad \angle CDE = 180^\circ - \angle CAE.$$

Zbog toga, i činjenice da je trokut $\triangle ACE$ pravokutan,

$$\angle ABC + \angle CDE = 360^\circ - \angle CAE - \angle CEA = 270^\circ.$$

13. Županijsko 2018. 4.r.

14. Slijedimo skicu.



Kako su DI_1 i DI_2 simetrale kuta, imamo da je $\angle I_1DI_2 = 90°$ pa je dovoljno isto dokazati i za kut $\angle I_1EI_2$.

Označimo radijuse upisanih kružnica trokutima $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ s r_1 i r_2. Zbog činjenice da su trokuti $\triangle FI_1D$, $\triangle I_1DI_2$ te $\triangle I_2DG$ pravokutni, imamo da su trokuti $\triangle FI_1D$ i $\triangle I_2DG$ slični, odnosno,

$$\frac{r_1}{DG} = \frac{DF}{r_2} \implies r_1r_2 = DG \cdot DF.$$

Koristeći poznati identitet o duljini odsječka tangente za upisanu kružnicu (onaj $|BD| = s - a$ iz desetog zadatka), imamo da je

$$FE = BE - BF = \frac{AB + BC - AC}{2} - \frac{AB + BD - AD}{2} = \frac{CD + AD - AC}{2} = DG.$$

Sada iz ovog direktno slijedi

$$r_1r_2 = FE \cdot EG \implies \frac{r_1}{EF} = \frac{EG}{r_2}.$$

Kako su trokuti $\triangle I_1FE$ i $\triangle EI_2G$ pravokutni i vrijedi prethodni omjer, iz $S - K - S$ poučka o sličnosti dobivamo da su ti trokuti slični, a zbog toga je onda $\angle I_1EI_2$ pravi (lagani angle chasing).

Uočite, nigdje u zadatku nismo morali koristiti da je točka D zadana kako je u zadatku, odnosno, tvrdnja vrijedi za proizvoljnu točku unutar dužine $\overline{BC}$!

15. Županijsko 2009. 2.r.

16. Državno 2012. 4.r.

17. Županijsko 2017. 4.r.

18. Državno 2010. 2.r.

19. Državno 2017. 2.r.

20. IMO SL 2015. G1

19.4. N3: Laura Horvat - Mali Fermatov teorem i kvadratni ostatci za male brojeve

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Zadaci za MFT

1. Fermat's Little Theorem Solutions, 5.
2. Olympiad Number Theory Through Challenging Problems, str.45. Example
3. prema: Fermat's Little Theorem Solutions, 11.
4. Fermat's Little Theorem Solutions, 12.
5. $(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k$.

   Za $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ vrijedi $\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \cdots \cdot (p-k+1)}{k!}$. To je cijeli broj takav da p dijeli brojnik, ali ne i nazivnik (jer je $k < p$), iz čega slijedi da $p \mid \binom{p}{k}$.

   Dakle, $(a+1)^p = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \equiv a^p + 1 \pmod{p}$.
6. Evaluation Test 2, 4.
7. Fermat's Little Theorem Solutions, 13.
8. Olympiad Number Theory Through Challenging Problems, Example 4.2.8.

Zadaci za kvadratne ostatke

9. Quadratic residues, 8.1.1. b)
10. Quadratic residues, 8.1.1. c)
11. An Introduction to Diophantine Equations, str.30., Example 3.
12. Pretpostavimo da je c hipotenuza, odnosno $a \leq b < c$.
    $60 \mid abc \iff 3 \mid abc$, $4 \mid abc$ i $5 \mid abc$.
    Pokažimo najprije da $3 \mid abc$. Pretpostavimo suprotno, nijedna od duljina stranica nije djeljiva brojem 3. Tada vrijedi: $a, b, c \equiv 1, 2 \pmod 3$, odnosno $a^2, b^2, c^2 \equiv 1 \pmod 3$. S druge strane, $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$, što je kontradikcija. Dakle, 3 dijeli barem jednu od duljina stranica, iz čega slijedi $3 \mid abc$.
    Nadalje, pretpostavimo da duljina nijedne stranice nije djeljiva brojem 5. Mogućnosti su sljedeće: $a, b, c \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$, odnosno $a^2, b^2, c^2 \equiv 1, 4 \pmod 5$. S druge strane, $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$, što je ponovno kontradikcija. Dakle, 5 dijeli barem jednu od duljina stranica, što znači da dijeli i njihov umnožak.
    Konačno, pokažimo da $4 \mid abc$. Iz Pitagorinog poučka slijedi $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$, ili $\frac{a}{c-b} = \frac{c+b}{a} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti.
    Dobivamo sustav:

    $$\frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{m}{n}$$
    $$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{n}{m}$$

    Rješavanjem proizlazi $\frac{c}{a} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ i $\frac{b}{a} = \frac{m^2-n^2}{2mn}$, odnosno $c = k(m^2+n^2)$, $b = k(m^2-n^2)$ i $a = 2kmn$.

Ako je barem jedan od m i n paran, tada $4 \mid a$ pa tvrdnja vrijedi.
Ako su oba neparni, tada je primjerice $m^2 + n^2$ paran pa $2 \mid c$ i $2 \mid a$, stoga $4 \mid abc$.

13. An Introduction to Diophantine Equations, str.181., Example 3.

14. An Introduction to Diophantine Equations, str.219., 2.

15. Art of Problem Solving

16. An Introduction to Diophantine Equations, str.224., 9.

17. Stack Exchange

19.5. X3: Luka Bulić Bračulj - Princip ekstrema

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Zadaci su iz sljedećih materijala pa tamo možete pronaći rješenja:

1. Arthur Engel: Problem solving strategies
2. MNM online predavanje - Princip ekstrema

Tamo također možete pronaći i rješenja primjera.

Lakši zadaci

1. Online predavanje, zadatak 5.

2. Online predavanje, zadatak 7.

3. Online predavanje, zadatak 10.

Umjereni zadaci

4. Online predavanje, zadatak 15.

5. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, E4 (example 4.).

6. Online predavanje, zadatak 11.

7. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, E14 (example 14.).

8. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, E9 (example 9.).

Teži zadaci

9. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, 40. zadatak.

10. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, E10 (example 10.).

11. A. Engel - PSS, 3. poglavlje, 21. zadatak.

20. Rješenja za četvrtu grupu

20.1. A4: Nika Utrobičić - KAGH+CSB

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Primijenimo li AG nejednakost na $a_1 = x > 0$ i $a_2 = \frac{1}{x} > 0$ dobivamo

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

odnosno

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

što je trebalo i pokazati.

2. Pokazujemo

$$a^8 + a^6 + a^2 + 1 \geq 4a^4.$$

Označimo $a_1 = a^8 > 0$, $a_2 = a^6 > 0$, $a_3 = a^2 > 0$ i $a_4 = 1 > 0$ i primijenimo AG nejednakost na sredine brojeva a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$
$$\frac{a^8 + a^6 + a^2 + 1}{4} \geq \sqrt[4]{a^8 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot 1} = \sqrt[4]{a^{8+6+2}}$$
$$a^8 + a^6 + a^2 + 1 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a^{16}} = 4 \cdot a^4$$

Napomena: Za realan broj $x \geq 0$ i $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

3. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq 2a$$
$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geq \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c) = a + b + c$$

što je i trebalo dokazati.

4. Iz AG nejednakosti imamo da je

$$x^2+y^2 \geq 2xy \implies 2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2.$$

Kako je $x^2+y^2=1$, vrijedi

$$(x+y)^2 \leq 2 \implies -\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}.$$

5. *1. način*

Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

Oduzimanjem $2ab+2bc+2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

Analogno dobivamo i

$$b^2+c^2 \geq 2bc$$
$$c^2+a^2 \geq 2ca$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

Napomena.

Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

6. Example 1.1.3

7. Riješeni primjeri, zadatak 1.

8. Iz AG nejednakosti imamo

$$p^2+1 \geq 2p \implies p^2+p+1 \geq 3p$$

te potpuno analogno,

$$q^2+q+1 \geq 3q.$$

Kako su obje strane nejednakosti u oba slučaja pozitivne, možemo pomnožiti te dvije nejednakosti pa dobijemo

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq (3p)(3q) = 9pq$$

što smo trebali i dokazati.

9. Riješeni primjeri, zadatak 3.

10. Riješeni primjeri, zadatak 4.
11. Example 1.1.4.
12. Zadatak 3.
13. Inequalities - Problem 10.
14. Inequalities - Problem 17.
15. Inequalities - Problem 57.
16. Inequalities - Problem 59.
17. Inequalities - Problem 80.
18. DRZ 2016 3A
19. DRZ 2017 2A
20. ZUP 2009 1A
21. ZUP 2005 2
22. ZUP 2005 1
23. ZUP 2010 2A
24. ZUP 2011 3A
25. ZUP 2019 2A
26. DRZ 2015 3A
27. DRZ 2015 1A
28. DRZ 2015 2A
29. DRZ 2014 3A
30. DRZ 2009 2
31. DRZ 2015 4A

20.2. C4: Mislav Brnetić - Igre

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Ovaj zadatak je zapravo generalizacija uvodnog primjera.

Kao i u primjeru, ovdje vidimo da su sve pozicije $1, 2, ..., k$ pobjedničke (u jednom potezu moguće je doći do broja 0).

Međutim, tada vidimo kako je broj $k+1$ gubitnička pozicija, s obzirom da s nje možemo doći samo na brojeve $1, 2, ..., k$ koji su pobjedničke pozicije.

Sada, potpuno analogno, induktivno možemo zaključiti da su (samo) pozicije oblika $l \cdot (k+1)$, $l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su sve ostale pobjedničke.

Dakle, prvi igrač ima pobjedničku strategiju ako n nije oblika $l \cdot (k+1)$, inače drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Sama strategija je prilično jednostavna, igrač koji pobjeđuje mora oduzeti takav broj da nakon oduzimanja na ploči ostane broj oblika $l \cdot (k+1)$ (što sa svake pobjedničke pozicije sigurno može), a to je i korak indukcije u gornjem dokazu.

2. Želimo dokazati da su sve pozicije oblika $3l, l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su ostale pobjedničke.

Naime, niti jedan od brojeva $1, 2, ..., 2^k$ nije oblika $3l$.

Tada zaključujemo da sa svake pozicije oblika $3l$ nužno dolazimo na poziciju koja nije oblika $3l$ (tj. poziciju oblika $3l+1$ ili $3l+2$). S tih pozicija uvijek možemo doći na neku drugu poziciju oblika $3l$, oduzimanjem brojeva 1 ili 2.

Sada, analogno kao u 1. zadatku, induktivno dokazujemo da su pozicije oblika $3l$ gubitničke, a ostale pobjedničke (baza indukcije $n = 1, 2, 3$).

3. Želimo dokazati da Vlatka ima strategiju. Ovo je primjer strategije u kojoj jedan igrač samo oponaša strategiju drugoga (*simetrija*).

Vlatka pritom prvi žeton postavi na sredinu ploče.

Nakon svakog poteza drugog igrača, svoj žeton postavlja na centralnosimetrično polje u odnosu na sredinu ploče (takvim postavljanjem je i cijela ploća centralnosimetrična pa je to uvijek moguće učiniti).

Dakle, drugi igrač će u nekom trenutku ostati bez poteza pa pobjeđuje prvi igrač.

4. a) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, a inače prvi.

Pokažimo to indukcijom s korakom 4. Baza uključuje provjeru za $n = 1, 2, 3, 4$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

Tada ako je broj kamenčića na hrpi na početku $4k+1, 4k+2$ ili $4k+3$, prvi igrač uzme redom 1, 2 ili 3 kamenčića, čime na hrpi ostane $4k$ kamenčića, a po pretpostavci ta pozicija je pobjednička za igrača koji tad nije na redu, dakle za onog koji je prvi uzeo kamenčiće s hrpe.

Za $n = 4k+4$ prvi igrač ne može uzeti broj kamenčića djeljiv s 4 (jer je to sigurno složen broj), pa će se, štogod odigra, naći u za njega gubitničkoj poziciji.

b) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n \in \{2, 5, 7\}$, a inače prvi.

Za $n \leq 8$ direktno provjerimo koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Pretpostavimo da za neki $k \geq 8$ vrijedi da jedino za $n \in \{2, 5, 7\}$ drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Dokažimo da za $n = k + 1$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Ako je $k + 1$ paran broj, prvi igrač uzme $k - 1$ kamenčić čime ostanu samo 2, pa je to pobjednička pozicija za prvog igrača po pretpostavci indukcije. Inače prvi igrač uzme $k - 4$ ili $k - 6$ kamenčića, ovisno o tome koji od tih brojeva je djeljiv s 4 (čime znamo da je složen), te ostaje 5 ili 7 kamenčića, zbog čega znamo da prvi igrač pobjeđuje.

5. Možemo naslutiti da prvi igrač ima pobjedničku strategiju onda kada je na početku na hrpama različit broj kamenčića, a inače drugi.

Ako je na početku različit broj kamenčića na hrpama, prvi igrač može uzeti kamenčiće s hrpe na kojoj ih se nalazi više, i to tako da izjednači broj kamenčića na obje hrpe.

Igrač koji igra drugi tada mora uzeti kamenčiće s neke od hrpa te će tada broj kamenćića na hrpama ponovno biti različit.

Prvi igrač zatim ponavlja svoju strategiju sve dok na taj način ne uzme i posljednji kamenčić (nakon što je drugi igrač ispraznio jednu od hrpa). Ovo je sigurno moguće s obzirom da se na hrpama nalazi konačan broj kamenčića te se u svakom potezu uzima barem jedan kamenčić.

Ako se pak na početku na hrpama nalazi jednak broj kamenčića, nakon poteza prvog igrača broj kamenčića će sigurno biti različit. Tada se drugi igrač nalazi u poziciji prvog igrača iz prethodnog slučaja te ima već opisanu pobjedničku strategiju.

6. U ovom rješenju nećemo određivati strategiju, već samo dokazati njeno postojanje.

Pretpostavimo da drugi igrač ima strategiju kojom osigurava neriješen ishod ili pobjedu. To znači da, neovisno o potezima prvog igrača, može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

Neka prvi igrač odigra svoja dva poteza nekim skakačem, tako da ga drugim potezom vrati na početnu poziciju. Stanje na ploči je tada isto kao i na početku.

No, drugi igrač je tada u poziciji prvog igrača, a ta pozicija je po pretpostavci gubitnička (odnosno igrač koji tada nije na redu ima pobjedničku strategiju).

Dakle, dobili smo kontradikciju te drugi igrač nema pobjedničku strategiju, odnosno prvi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

7. Dokažimo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Podijelimo ploču u 4 kvadrata dimenzija 4×4, te svaki obojimo u 8 boja (ukupno 32 boje): ako boje označimo brojevima od 1 do 8, retke obojimo redom s (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (2, 1, 4, 3), te (6, 5, 8, 7) (bit je da su 2 po 2 polja obojena istom bojom i da skakač može skočiti u jednom skoku između 2 polja iste boje).

Sada kada prvi igrač stavi skakača na proizvoljno polje, drugi igrač pomakne skakača na preostalo drugo polje te boje u istom kvadratu. Zatim prvi igrač sigurno mora pomaknuti skakača na polje dosad neposjećene boje (ili na polje u drugom kvadratu). Međutim, onda drugi igrač sigurno može pomaknuti skakača na drugo polje te boje, budući da je tek u prethodnom skoku skakač po prvi puta posjetio polje te boje.

Dakle, nakon što prvi igrač odigra potez, drugi igrač će također moći odigrati potez. Stoga će prvi igrač biti prvi koji neće moći napraviti potez.

8. Pretpostavimo da prvi igrač uvijek gubi.

Tada on gubi i ako odlomi samo kockicu u desnom donjem kutu. No, nakon što drugi igrač odigra svoj potez, komad čokolade koji je ostao mogao je ostati i odmah nakon prvog igrača.

Stoga je drugi igrač u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće. Dakle, prvi igrač uvijek ima pobjedničku strategiju.

9. Želimo dokazati da je najmanji takav n jednak 13.

Ako poljima pridružimo oznake (i, j), gdje i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi polje, te Anica u crveno oboji polja $(1,1),(2,2),...,(8,8),(1,8),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)$, Božica ne može nikako prebojati sva crvena polja u crno na dopušteni način. Ostaje pokazati da kako god Anica rasporedi 12 crvenih polja, Božica ih može sve prebojati u crno.

U tu svrhu, uočimo da 4 retka koja imaju najviše crvenih polja moraju sadržavati barem njih 8. Naime, u suprotnom bi jedan od tih redaka imao najviše jedno crveno polje. S druge strane, preostala 4 retka imala bi barem 5 crvenih polja, dakle jedan redak bi imao barem 2 polja. No, tada nismo odabrali 4 retka s najviše crvenih polja, čime dolazimo do kontradikcije.

Sada ta 4 retka Božica preboji u crno, a preostala do 4 crvena polja se očito mogu prebojati odabirom 4 stupca.

10. Pokazat ćemo da Lazo uvijek može namjestiti da nakon njegovog poteza suma ostane djeljiva s p. Naime, podijelimo skup $\mathcal{M}$ u parove oblika $(i, i+p) : i \in \{1,2,3,...,p\}$. Lazo će u svakom svom potezu odabrati drugi broj iz tog para. Ideja je da nakon svaka dva poteza eliminiramo jedan uređeni par, te Lazo na taj način uvijek može odigrati takav potez.

Sada preostaje dokazati da je nakon svaka dva poteza S djeljiv s p. To dokazujemo indukcijom.

Baza indukcije je $S = 0$, što je očito djeljivo s p.

Sada pretpostavimo da je suma nakon k-tog poteza S_k djeljiva s p. Sada je Goci na potezu.

Goci odabire a i sada imamo

$$S_{k+1} = p(a) - S_k.$$

Nakon toga Lazo odabire b takav da su a i b upareni. Tada imamo

$$S_{k+2} = p(b) - S_{k+1} = p(b) - p(a) + S_k.$$

Po pretpostavci indukcije $p \mid S_k$. Preostaje dokazati $p \mid p(b) - p(a)$. Vrijedi $a - b \mid p(a) - p(b)$ (*razmislite zašto*), a po načinu biranja parava imamo da je $a - b = \pm p$ pa je tvrdnja dokazana.

11. *1. slučaj*

n je neparan.

Dokažimo da tada Anica ima pobjedničku strategiju.

Anica u prvom potezu briše prvi broj s lijeve strane, a ostale brojeve dijeli u parove uzastopnih brojeva.

Primijetimo da su dva uzastopna prirodna broja sigurno relativno prosta.

Dakle, Anica ima cilj da nakon njenog zadnjeg poteza ostane točno jedan od ovih parova brojeva.

To i može lako učiniti tako da nakon svakog Božičinog poteza obriše drugi broj iz istog para u kojem se nalazio taj broj.

2. slučaj

n je paran.

Dokažimo da tada Božica ima strategiju.

Primijetimo da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta, a Božica će igrati zadnji potez.

Na ploči se nalazi jednako parnih i neparnih brojeva.

Dakle, ako Anica u nekom trenutku obriše neparan broj, Božica pobjeđuje (jer može lako ostvariti da su svi neparni brojevi obrisani, odnosno na ploči ostaju dva parna broja).

Sada, ako Anica briše samo parne brojeve, Božica treba brisati samo neparne brojeve, sve do zadnjeg poteza, kada će na ploči ostati još 3 broja.

Kako je na ploči barem 12 brojeva, među njima su barem 2 neparna koja su djeljiva sa 3, pa Božica, dok briše neparne brojeve, treba za kraj "ostaviti" dva koja su djeljiva sa 3.

Tada u zadnjem koraku briše preostali parni broj, a na ploči su ostala dva neparna broja, oba djeljiva sa 3, čime Božica pobjeđuje.

12. Dokažimo da Božica može ostvariti svoj naum.

Neka Božica napiše brojeve $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2$ (bitno je da se parno mnogo puta ponavlja najveći broj).

Sada lako dokažemo da će se, bez obzira na Aničine poteze, najveći broj uvijek ponavljati parno mnogo puta (promotrite sve slučajeve izbora brojeva).

No, tada je nemoguće postići da su svi brojevi jednaki (naime, tada bi bilo nužno da se najveći ponavlja neparno mnogo puta), pa je dokaz završen.

13. Provjerom malih primjera naslućujemo da Božica pobjeđuje ako je n potencija broja 2.

Ukoliko n nije potencija broja 2, n možemo zapisati u obliku $n = 2^k \cdot m$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, a m neparan prirodni broj veći od 1.

Anica slijedi ovaj algoritam: prvo Anica makne 2^k novčića, a zatim kad Božica makne $2^{k'} \cdot m'$ kamenčića, Anica makne $2^{k'}$ kamenčića (koliko ih zaista smije uzeti). Uočimo da je $k' \leq k$ (jer Božica može uzeti najviše $2^{k+1} - 1$ kamenčića, te se analogno ovome k' iz poteza u potez neće povećati. Stoga će nakon Aničinog poteza broj kamenčića biti djeljiv s $2^{k'+1}$, a u sljedećem potezu Božica može uzeti najviše $2^{k'+1} - 1$ kamenčića, pa ne može uzeti zadnji. Dakle, Anica će uzeti zadnji kamenčić u ovome slučaju.

Ukoliko je n potencija broja 2, Božica će igrati na isti način kao Anica u gornjem slučaju. Stoga u ovom slučaju Božica ima pobjedničku strategiju.

14. Pokazat ćemo da su traženi n oni koji se mogu prikazati kao zbroj različitih potencija broja 2 s neparnim eksponentima. Na početku uočimo da za neparne n Anica ima pobjedničku strategiju. Naime, prvi broj koji će Božica napisati bit će broj 2 (dakle paran), pa zatim ako Anica stalno dodaje broj 1 prethodnom, Božica će stalno pisati parne, a Anica neparne, pa će Anica biti ta koja će napisati broj n.

Nadalje, dokazujemo sljedeću tvrdnju: Božica ima pobjedničku strategiju za broj n ako i samo ako ima pobjedničku strategiju za $4n$ i $4n+2$. Neka Božica ima pobjedničku strategiju za n. Ona stoga može igrati kao da se igra do broja n, čime će natjerati Anicu da prva napiše broj j koji je veći od n (a on će biti i manji ili jednak od $2n$). Tada Božica napiše $2j$, te je $2n + 2 \leq 2j \leq 4n$. Sada je jedini dopušteni potez povećanje broja za 1, a kako su $2j, 4n$ i $4n + 2$ parni, jasno je da će Božica pobijediti.

Analogno zaključimo da ako Anica ima pobjedničku strategiju za neki n, onda ju ima i za $4n$ i $4n + 2$. Ovi zaključci su dosta da na osnovi ručne provjere za $n = 1, 2, 3, 4$ dokažemo početnu tvrdnju.

20.3. G4: Bernard Inkret - Nadodavanje i uvođenje točaka

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Osnovne konfiguracije

1. Pogledajte "Proof by similarity of triangles", no možete i ostale dokaze

2. Ako je $ABCD$ tetivan, neka je E preslika točke D preko središta kružnice. Iz Talesovog teorema, imamo da je

$$\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE = 90°,$$

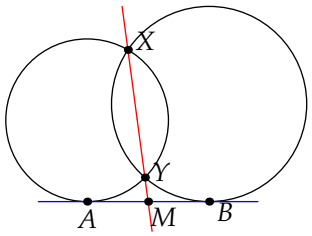
odnosno, pravci AE, BE i CE su okomice iz A, B i C na DA, DB i DC. Te okomice se očito sijeku u točki E.

U drugu ruku, ako se te tri okomice sijeku u jednoj točki koju označimo sa E, iz činjenice da je riječ o okomicama imamo

$$\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE = 90°$$

pa iz obrata Talesovog teorema dobijemo da točke A, B, C, D i E leže na kružnici s promjerom DE.

3. Neka je M presjek pravca XY s AB.

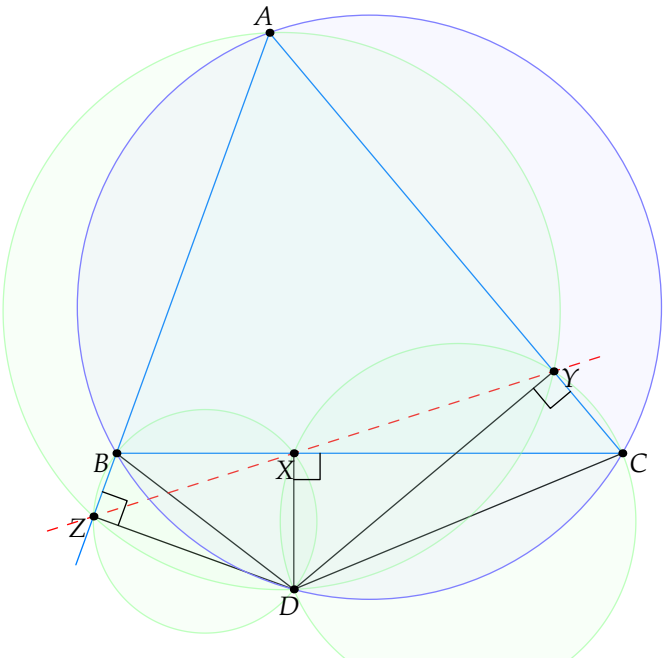


Promatrajući potenciju točke M na kružnice imamo

$$MA^2 = MX \cdot MY = MB^2 \implies MA = MB$$

što znači da je M polovište dužine $\overline{AB}$.

4. Neka su X, Y i Z nožišta visina iz D kao na slici.



Uočimo da zbog pravih kuteva odmah imamo da su četverokuti $XBZD$, $XYCD$ i $AYDZ$ tetivni. Htjeli bi pokazati da je $\angle BXZ = \angle YXC$ jer bi onda to bili vršni kutevi pa bi i točke X, Y, Z bile na istom pravcu.

Vrijedi

$$\angle ZDY = \angle BDC \implies \angle ZDB = \angle CDY$$

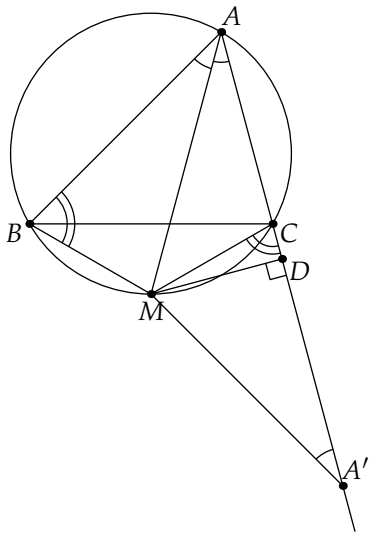
gdje lijeva jednakost vrijedi zbog tetivnosti četverokuta $ABDC$ i $AZDY$. Nadalje, iz tetivnosti četverokuta $BZDX$ i $XDCY$ uz prethodno dokazanu činjenicu imamo

$$\angle BXZ = \angle BDZ = \angle CDY = \angle YXC$$

što smo trebali i pokazati.

5. Prvo, poznato je da se simetrala stranice $\overline{BC}$ i simetrala kuta pri vrhu A sijeku na opisanoj kružnici (pogledajte predavanje za 3. grupu) pa je M na simetrali kuta iz vrha A pa neovisno o tome na koju stranicu spustimo okomicu, duljina te okomice je ista.

Dakle, možemo uzeti da je D nožište okomice iz M na pravac AC. Uvedimo točku D' takvu da je $AA' = 2 \cdot AD$.



U trokutu $\triangle AMA'$, visina MD raspolavlja stranicu $\overline{AA'}$ pa je očito riječ o jednakokračnom trokutu. Zbog toga,

$$\angle MAA' = \angle MA'A.$$

Iz činjenice da je MA simetrala kuta vrijedi

$$\angle MAB = \angle MAC = \angle MA'C.$$

Naposljetku, s obzirom da je četverokut $ABMC$ tetivan, vrijedi

$$\angle MCA' = \angle ABM.$$

Kako je $MB = MC$ i zbog dokazanih jednakosti kuteva, trokuti $\triangle ABM$ i $\triangle MCA'$ su sukladni, dakle, $CA' = AB$, odnosno,

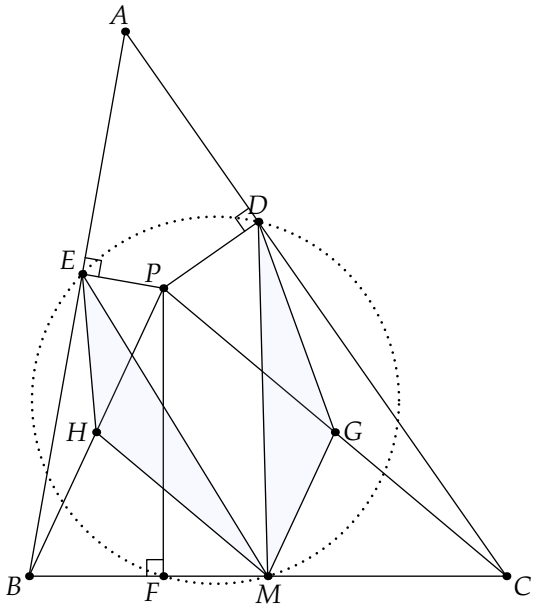
$$AC + AB = AC + CA' = AA' = 2AD$$

što smo trebali dokazati.

6. Pogledajte rješenja za 3. grupu.

Zadaci s uvođenjem točaka

7. Uvedimo F kao nožište visine iz P na $\overline{BC}$.



Ideja je dokazati da je četverokut $DEFM$ tetivan. Naime, zbog činjenice da su D, E i F nožišta visina iz P na stranice trokuta, dobivamo da su četverokuti $PEBF$ i $PDCF$ tetivni. Koristeći obodne kuteve i uvjet dan u zadatku, dobivamo

$$\angle PFE = \angle PBE = \angle PCD = \angle PFD$$

odnosno, PF je simetrala kuta $\angle DFE$. Kako je $MF \perp PF$, MF je vanjska simetrala tog kuta i analogno kao što dokažemo u lemmi o trozubcu, direktno slijedi $ME = MD$.

Dakle, jedino preostaje dokazati da je četverokut $DEFM$ tetivan. Uvedimo točke G i H kao polovišta dužina $\overline{PC}$ i $\overline{PB}$. Kako je i M polovište stranice, imamo da su MG i MH srednjice u trokutu $\triangle PBC$. Uočimo da vrijedi

$$\angle EHP = 2\angle EBP = 2\angle DCP = \angle DGP$$

zbog teorema o obodnom i središnjem kutu i uvjeta zadatka te također vrijedi

$$\angle PHM = \angle PGM$$

zbog paralelnosti koje dobivamo iz srednjica. Kombinirajući ove dvije tvrdnje, direktno dobivamo

$$\angle EHM = \angle EHP + \angle PHM = \angle DGP + \angle PGM = \angle DGM.$$

Također, uočimo da je

$$HM = PG = DG, \quad EH = PH = GM$$

što direktno slijedi iz svojstava srednjica i pravokutnih trokuta pa zajedno s jednakosti kuteva koju smo upravo dokazali, dobili smo da su trokuti $\triangle EHM$ i $\triangle MGD$ sukladni. Sada imamo

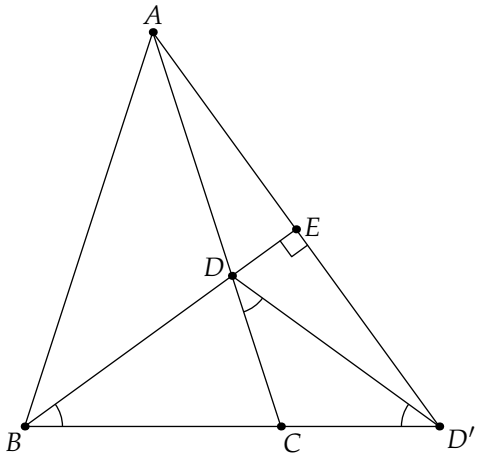
$$\begin{aligned}
\angle DME &= \angle GMH - \angle GMD - \angle EMH \\
&= \angle BPC - \angle MEH - \angle EMH \\
&= \angle BHM - \angle MEH - \angle EMH \\
&= 180^\circ - \angle PHM - \angle MEH - \angle EMH \\
&= \angle PHE \\
&= \angle DFE,
\end{aligned}$$

gdje prva jednakost vrijedi direktno iz definicije, druga iz paralelnosti i sukladnosti, treća iz paralelnosti, četvrta iz vanjskog kuta, peta iz kuteva u trokutu $\triangle MHE$, a zadnja je već dokazana u prvom dijelu dokaza.

Iz jednakosti kuteva $\angle DME$ i $\angle DFE$ dobivamo da je četverokut $DEFM$ tetivan što smo htjeli dokazati.

8. HMOD 2020.

9. Uvedimo točku D' kao točku na produžetku dužine BC preko vrha C takvu da je $CD' = CD$.



Neka je E presjek pravca AD' s pravcem BD. Dokazati ćemo da je D središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABD'$. Iz uvjeta, imamo

$$AB = BC + CD = BC + CD' = BD'$$

pa je trokut $\triangle ABD'$ jednakokračan s bazom AD'. Kako je BD simetrala kuta pri vrhu B u jednakokračnom trokutu, ona je ujedno i visina, odnosno, simetrala stranice.

Također,

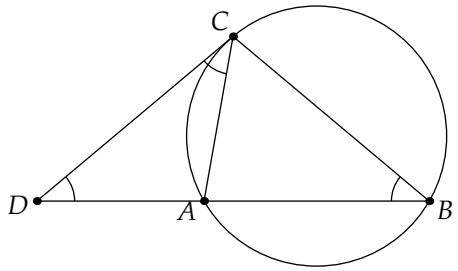
$$\angle DBC = \frac{\angle DCB}{2} = \angle DD'C$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog simetrale kuta i činjenice da je $\triangle ABC$ jednakokračan, a druga jednakost vrijedi jer je trokut $\triangle DCD'$ jednakokračan (iz konstrukcije) i vanjskog kuta. Iz ove jednakosti kuteva dobivamo da je $\triangle BDD'$ jednakokračan, odnosno, $DB = DD'$, odnosno, D je na simetrali dužine $\overline{BD'}$.

Dakle, točka D je na simetrali stranice $\overline{AD'}$ te stranice $\overline{BD'}$ trokuta $\triangle ABD'$ što znači da je središte opisane kružnice. Zboga toga je $\angle DAB = \angle DBA$ pa direktnim računom (suma kuteva u trokutu $\triangle ABC$) dobivamo da je

$$\angle BAC = 36°, \angle ABC = \angle ACB = 72°.$$

10. Neka je D na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A takva da je $AD = AC$.



Kako je $\angle A = 2\angle B$ te je trokut $\triangle DAC$ jednakokračan iz definicije, iz činjenice da je $\angle BAC$ vanjski kut u trokutu $\triangle DAC$, imamo

$$\angle DCA = \frac{\angle CAB}{2} = \angle CBA.$$

Sada iz obrata poučka o kutu između tetive i tangente, dobivamo da je DC tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$. Također, analognim argumentom vidimo da je

$$\angle CDA = \angle CBA,$$

odnosno, trokut $\triangle CDB$ je jednakokračan.

Sada, gledajući potenciju točke D na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$, dobivamo

$$DC^2 = DA \cdot DB \implies BC^2 = AC(AC + AB) \iff a^2 = b(b + c).$$

11. HMO 2019. prvi dan

20.4. N4: Luka Bulić Bračulj - Ako potenciramo mod n onda se ostatci periodično ponavljaju

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Možemo se pozvati na mali Fermatov teorem kako bismo ustvrdili da je $3^6 \equiv 5^6 \equiv 1 \pmod 7$. Zapišemo li potenciju 100 kao $6 \cdot 16 + 4$, možemo dobiti $3^{100} + 5^{100} = 3^{6 \cdot 16+4} + 5^{6 \cdot 16+4} = (3^6)^{16} \cdot 3^4 + (5^6)^{16} \cdot 5^4 \equiv 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 5^4 \equiv 6$. Dakle, $3^{100} + 5^{100}$ daje ostatak 6 pri dijeljenju sa 7.

2. Poglavlje 2.3., Example

3. Kako bismo odredili $7^{7^7} \pmod{10}$, korisno je odrediti $7^7 \pmod{\varphi(10)}$. Kako je $\varphi(10) = 4$, $7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Iz toga slijedi da 7^{7^7} možemo zapisati kao 7^{4k+3} gdje je k prirodan broj. Sada pomoću Eulerovog teorema možemo zaključiti da je $7^{7^7} \equiv 7^{4k+3} \equiv (7^4)^k \cdot 7^3 \equiv 1 \cdot 343 \equiv 3 \pmod{10}$. Odnosno, posljednja znamenka broja 7^{7^7} je 3.

4. Problem 7.

5. Poglavlje 2.3., Example 2.3.6.

6. Poglavlje 2.3., Example 2.3.2.

7. 250 problema elementarne teorije brojeva, 5

8. Poglavlje 2.5., Example 2.5.2.

9. Iz Malog Fermatovog teorema imamo $a^p \equiv a \pmod p$ i $b^p \equiv b \pmod p$, odnosno znamo da vrijedi
$$a \equiv b \pmod p.$$
Želimo pokazati $p^2 \mid a^p - b^p$. Dani izraz možemo faktorizirati kao
$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots ab^{p-2} + b^{p-1}).$$
Iz pretpostavke zadatka dobili smo da p dijeli lijevu zagradu pa nam je dovoljno pokazati da p dijeli i desnu zagradu. To nam slijedi iz Malog Fermatovog teorema i uvjeta $a \equiv b \pmod p$.
$$\begin{aligned} a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots ab^{p-2} + b^{p-1} &\equiv a^{p-1} + a^{p-1} + \cdots + a^{p-1} + a^{p-1} \pmod p \\ &\equiv 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 \pmod p \\ &\equiv p \equiv 0 \pmod p. \end{aligned}$$
Budući da p dijeli obje zagrade u faktorizaciji izraza, tvrdnja zadatka vrijedi.

10. Poglavlje 2.5., Example 2.5.3.

11. Poglavlje 2.5., Example 2.5.8.

12. Poglavlje 2.3., Example 2.3.10.

13. Iz Eulerovog teorema slijedi da je $a^{\varphi(a^n-1)} \equiv 1 \pmod{a^n-1}$, iz čega pomoću Teorema 1.4 možemo zaključiti da $\operatorname{ord}_{a^n-1}(a) \mid \varphi(a^n-1)$. Ali možemo primjetiti da je $\operatorname{ord}_{a^n-1}(a) = n$ iz čega slijedi $n \mid \varphi(a^n-1)$.

14. 250 problema elementarne teorije brojeva, 16

15. Poglavlje 2.5., Example 2.5.6.

16. IMO 2005 Problem 4.

20.5. X4: Boris Stanković - Uvod u funkcijske jednadžbe

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. Iz uvrštavanja $P(0,0)$ dobijamo $f(0) = 0$. Iz uvrštavanja $P(x,0)$ dobijamo $f(x) = x$ za sve realne brojeve. Provjerom vidimo da ta funkcija zaista jeste rješenje.

2. Za $y = 0$ uvjet postaje $f(x + f(x)) = f(2x)$ odakle je zbog injektivnosti $f(x) = x$ za sve realne brojeve. Provjerom vidimo da ta funkcija ne zadovoljava uvjet zadatka pa zaključujemo da ova funkcijska jednadžba nema rješenja.

3. Radovanović primjer 3

4. Poredeći $P(x,y), P(y,x)$ imamo $f(x + 3y) = f(y + 3x)$ za sve realne brojeve x, y. Stavimo li $y = -3x$ u taj uvjet imamo $f(-6x) = f(0)$ za sve realne brojeve tj. f je konstantna. Odatle lako slijedi $f(x) = 0$ ili $f(x) = \frac{1}{5}$ za sve realne brojeve x. Obje ove funkcije jesu rješenja.

5. Jasno je da postoji prirodan broj a takav da $f(a) = 1$. Ako je $a > 1$ tada je $f(1) \geq f(a)$ što je u kontradikciji s tim da je f strogo rastuća. Dokazujemo $f(n) = n$ indukcijom. Pretpostavimo da je $f(k) = k$ za sve $1 \leq k \leq n$. Sada posmatramo u takvo da je $f(u) = n + 1$. Znamo da je $f(n+1) > f(n) = n$. Ako je $u > n+1$ tada je $f(n+1) \geq f(u)$ što je u kontradikciji s tim da je funkcija strogo rastuća. Dakle $f(n+1) = n+1$ pa je $f(n) = n$ principom matematičke indukcije za sve prirodne brojeve.

6. Iran MO 2004

7. Iz $P(n, 2n)$ imamo $n = gcd(f(n), f(2n))$ za sve prirodne brojeve n, dakle $n \mid f(n)$ za svaki prirodan broj n. Pretpostavimo da postoji n takvo da je $n \neq f(n)$ za neki prirodan broj n. Iz $P(n, f(n))$ znamo da je $n = f(n)$ kontradikcija. Dakle $f(x) = x$ za sve prirodne brojeve što jeste rješenje.

8. AOPS

9. Državno 4.2 A varijanta 2017.

Dva zadatka vezana za razumijevanje funkcija

10. Eventualno periodična funkcija je ograničena. Međutim za $n = 999...99$ dobijamo $f(n) \geq k$ gdje je k broj cifara broja n. Sada znamo da je $f(n)$ neograničena pa ne može biti periodična.

11. Ako je f bijekcija onda je i g. Znamo da postoji x_0 takvo da je $f(x_0) = 1$. Za to x_0 važi $g(x_0) = 1$. Također znamo da je $f(1) + g(1) = 2$ pa ovo x_0 zadovoljava uvjete zadatka.
Pretpostavimo da za neko a važi $f(f(a))+g(g(a)) = 2$. Također znamo da je $f(f(a))+g(f(a)) = 2$ pa je $g(g(a)) = g(f(a))$ odakle je $g(a) = f(a)$ pošto je g injekcija. Sada iz $g(a) = f(a)$ slijedi $g(a) = f(a) = 1$ odakle je $a = x_0$ jer su f, g injekcije.

Dvije čuvene funkcijske jednadžbe

12. **Cauchyeva funkcijska jednadžba**

    Želimo dokazati da su rješenja sve funkcije oblika $f(x) = kx$. Što se tiče prve dvije verzije:

Uvrstimo $(0,0) \longrightarrow (x,y)$ i dobivamo: $f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$. Stavimo da je $f(1) = k$. Onda je $f(2) = f(1+1) = 2f(1) = 2k$. Indukcijom možemo dalje pokazati $f(n) = nk, n \in \mathbb{N}$. Ako uzmemo sada $n \in \mathbb{N}$, te negativni $-n$ dobivamo $0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$ pa je $f(n) = -f(-n)$. Sada još kao zadnji korak, neka je $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Onda $q(f(\frac{p}{q})) = f(p) = kp \implies f(\frac{p}{q}) = \frac{kp}{q}$.

U slučaju da rješavamo zadatak u slučaju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ primijetimo da na isti način i dalje vrijedi $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$ i da je f rastuća. Promatrajmo funkciju $g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$. Funkcija $g(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ također zadovoljava Košijevu jednadžbu i također je rastuća uz dodatan uvjet $g(1) = 1$. Želimo dokazati $g(x) = x$ za sve pozitivne realne brojeve x. Pretpostavimo da postoji racionalan broj x takav da $g(x) > x$. Tada postoji racionalan broj $\frac{a}{b}$ takav da je $g(x) > g(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b} > x$ što je u kontradikciji s tim da je g rastuća. Slično pokazujemo da je nemoguće da za neko x važi $g(x) < x$. Dakle $g(x) = x$ za sve pozitivne realne brojeve x što zaista jeste rješenje ove funkcijske jednadžbe.

13. **Jensenova funkcijske jednadžba**

    Provjerom se lako utvrdi da svi polinomi prvog stupnja zadovoljavaju jednadžbu. Sada napravimo transformaciju $g(x) = f(x) - f(0)$. Dakle $g(0) = 0$. Također, dobije se $g(x) + g(y) = 2g(\frac{x+y}{2})$ Uvrštavanjem (0,t) dobivamo $g(t) = 2g(\frac{t}{2}$. To znači da je $g(x)+g(y) = g(x+y) \implies g(x) = kx$. Dobili smo Cauchyevu jednadžbu.

Olimpijski zadaci

14. Ovaj zadatak se može uraditi na 4 različita načina. Dajem linkove za sva 4 rješenja (redom kojim sam ih hintirao ranije):
    - Benelux 2009 P1 1. rješenje
    - Benelux 2009 P1 2. rješenje
    - Benelux 2009 P1 3. rješenje
    - Benelux 2009 P1 4. rješenje
15. Rumunjska EGMO TST 2022 P1
16. HMO 2020 2. dan 1. zadatak
17. IMO 2019 P1
18. APMO 2019 P1
19. MEMO 2017 I-1
20. HMO 2015 MEMO test 1. zadatak
21. HMO 2019 2. dan 4. zadatak
22. HMO 2010 1. dan 1. zadatak
23. Indian Team Selection Test 2015 Day 2 Problem 2
24. IMO 2010 P1
25. EGMO 2021 P2

21. Rješenja za petu grupu

21.1. A5: Vedran Cifrek - Polinomi

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. Pretpostavimo da $P(x)$ ima sve realne nultočke i nazovemo ih $x_1, \dots x_n$. Tada je $P(x) = (x - x_1)(x - x_n)$, iz vietovih formula slijedi $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -2n$ te $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = 2n^2$. Vrijedi da je $(x_1 + x_2 + \dots x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$ iz čega slijedi $x_1^2 + \dots x_n^2 = 0$, tj $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ što je u kontradikciji s tim da je zbroj nultočaka $-2n$.

2. Pretpostavimo da je $P(x)$ stupnja barem 2. Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ da određuje stupanj. Koeficijent uz x^{n-2} s lijeve strane je jednak $a_n \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 + a_{n-2} \cdot 2$, a s desne strane je jednak $2 \cdot a_{n-2}$, pa je $a_n \cdot n(n-1)$ jednak 0 što je kontradikcija.

3. Neka je $A_1 = a_1 + a_3 + \dots$ (svi neparni indeksi) te $A_2 = a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ (svi parni indeksi) Tada vidimo da je $P(1) = 1 + A_1 + A_2$ te je $P(-1) = -1 + A_1 - A_2$ ili $P(-1) = -1 + A_2 - A_1$. U svakom slučaju su $P(1)$ i $P(-1)$ realni brojevi.
Također, neka je $B = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Vidimo da je $Q(1) = B + 1$ tako da zapravo trebamo dokazati da je $Q(1)$ realan.
Zapišemo $P(x)$ i $Q(x)$ preko nultočaka:
$P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) \implies P(1) = (1 - x_1) \dots (1 - x_n)$, $P(-1) = (-1)^n \cdot (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$
$Q(x) = (x - x_1^2) \dots (x - x_n^2) \implies Q(1) = (1 - x_1^2) \dots (1 - x_n^2)$
Uočavamo da je $Q(1) = (1 - x_1)(1 + x_1) \dots (1 - x_n)(1 + x_n)$, pa je to realan broj te je B realan broj što je trebalo dokazati.

4. Definiramo novi polinom $Q(x) = (x+1)P(x) - x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Stupanj polinoma $Q(x)$ je najviše $n+1$ jer je n stupanj polinoma $P(x)$. Vrijedi $Q(k) = (k+1) \cdot P(k) - k = 0$ za svaki $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, pa znamo $n + 1$ različitih nultočk9 od $Q(x)$, a on ima najviše $n + 1$ različitu nultočku pa su mu to sve nultočke, tj. vrijedi $Q(x) = a \cdot (x - 0)(x - 1) \dots (x - n)$ gdje je $a \in \mathbb{R}$ vodeći koeficijent od Q. Uvrstimo $x = -1$ u jednadžbu koja definira Q:
$Q(-1) = 0 \cdot P(0) - (-1)$ tj.
$a \cdot (-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 2) \dots (-1 - n) = 1$. Iz čega slijedi $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ te je onda
$(n+2) \cdot P(n+1) = a(n+1-0)(n+1-1) \dots (n+1-n) + (n+1)$, pa je $P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2}$.

Teži zadaci

Zadatci su iz knjige Functional Equations - Andresscru, Boreico (2007)

5. stranica 55, Problem 125.

6. stranica 58, Problem 127.

7. stranica 62, Problem 131.

21.2. C5: Katja Varjačić - Dvostruka prebrojavanja

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Označimo sa x broj šahista, s y broj penzionera, a sa z broj onih koji su i šahisti i penzioneri.

Tada vrijedi:

$$z = \frac{x}{4}, z = \frac{y}{3}$$

Odakle slijedi

$$x = 4z, y = 3z$$

$$4z > 3z \implies x > y$$

odnosno u društvu ima više šahista (naravno, pod pretpostavkom da je broj ljudi u društvu veći od 0).

2. a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

b) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.

S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.

Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.

To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.

S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

d) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

3. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$ različitih parova, a kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, to je ujedno i ukupan broj parova učenika koji zajedno čiste učionicu. Svaki dan, među 3 učenika, pojavljuju se točno 3 različita para. Dakle, kako kamp traje k dana, broj parova jednak je i $3 \cdot k$. Imamo $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.

4. a) Desna strana odgovara broju načina na koji možemo izabrati ekipu od n članova od $2n$ sportaša. Pretpostavimo sada da se među $2n$ sportaša nalazi n dječaka i n djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati ekipu od k djevojčica i $n-k$ dječaka? Ovaj broj je očito $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = (\text{po 2.a}) = \binom{n}{k}^2$. Sada samo sumiramo po mogućem broju djevojčica u ekipi.

b) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba. S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru).

c) Desna strana odgovara broju odabira r–članog podskupa $m+n$–članog skupa S. Lijeva strana također odgovara broju odabira r–članog podskupa $m+n$–članog skupa S, s time da odabiremo r–člane podskupove na sljedeći način. Particioniramo skup S na dva skupa A i B, gdje je A m–člani, a B n–člani skup. Svaki odabir r–članog skupa od S odgovara odabiru k–članog podskupa od A i $r-k$–članog podskupa od B, za proizvoljan k između (i uključivo) 0 i r.

d) Izraz na lijevoj strani možemo interpretirati kao broj odabira podskupova skupa od n elemenata u kojem jedan od elemenata podskupa obojamo u crveno. Znači za svaki k između 0 i n na $\binom{n}{k}$ načina odaberemo k-člani podskup, u kojem zatim imamo k mogućih odabira elementa kojeg bojamo u crveno. S druge strane, možemo prvo na n načina odabrati element kojeg želimo obojati u crveno i zatim preostalih $n-1$ elemenata gledamo hoćemo ih izabrati u podskup ili ne, što možemo na 2^{n-1} načina.

5. Izraz možemo intepretirati kao broj odabira r–članih skupova n–članog skupa, te k–članih podkupova odabranog r–članog skupa, gdje je r prozvoljan broj između (i uključivo) k i n. No mogli smo prvo odabrati k–člani podskup n–članog skupa što možemo napraviti na $\binom{n}{k}$ načina, a zatim odlučiti koje ćemo preostale elemente uključiti u nadskup izabranog k–članog skupa što možemo napraviti na 2^{n-k} načina.

6. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak

7. Yufei Zhao: Counting in two ways - Problem 2 (IMC 2002.)

8. Imomath predavanje dvostruko prebrojavanje - 2.zadatak Zbroj $p_1+2p_2+\ldots+np_n$ predstavlja broj parova (π,i), gdje je π permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, a i njena fiksna točka. S druge strane, broj permutacija π koje fiksiraju točku i jednak je $(n-1)!$. Slijedi da je broj parova (π,i) jednak $n(n-1)!=n!$, što dokazuje tvrdnju.

9. članak s Brillianta, Double counting

10. Yufei Zhao: Counting in two ways - Problem 3 (IMO 1998)

11. Imomath predavanje dvostruko prebrojavanje - 2.primjer Pretpostavimo da su svi podintervali duljine veće od 3. Označimo podintervale sa $I_1,\ldots,I_{13}$. Napravimo tablicu 19×13 u kojoj redovi odgovaraju brojevima $1,2,\ldots,19$, a stupci podintervalima $I_1,\ldots,I_{13}$; u presjeku i-tog retka i j-tog stupca upisujemo 1 ako je $i\in I_j$, a 0 u suprotnom.

Ako neka tri podintervala imaju zajedničku točku, onda je jedan od njih podsukp unije druga dva, protivno uvjetu zadatka. Prema tome, svaka cjelobrojna točka je u najviše dva podintervala, tj. u svakom retku se nalazi najviše dvije jedinice. Slijedi da u tablici ima najviše 38 jedinica. S druge strane, po pretpostavci, svaki podinterval sadrži bar 3 cjelobrojne točke, tj. u svakom stupcu su bar 3 jedinice, pa tako u tablici ima bar $3\cdot 13=39$ jedinice, pa dolazimo do kontradikcije.

21.3. G5: Luka Kraljević - Homotetija

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Ako postoji homotetija, paralelnost dobivamo direktno iz svojstava homotetije. Ako vrijedi paralelnost, promatramo homotetiju koja šalje AB u DE. Neka ta homotetija šalje točku C u neku točku F^*. Iz svojstava homotetije, imamo $AC \parallel DF^*$ te $BC \parallel EF^*$ što uz paralelnosti dane u zadatku direktno daje $F^* \equiv F$, dakle, imamo homotetiju koja šalje $ABC \mapsto DEF$.

   Homotetija $AB \mapsto DE$ ne postoji ako i samo ako je $AD \parallel BE$, no, to onda daje $|AB| = |DE|$ te analogno dobijemo za ostale stranice trokuta, odnosno, imamo sukladnost!

2. Primijenimo prvi zadatak, odnosno, znamo da postoji homotetija koja šalje trokut AOB u trokut COD, pri čemu je središte upravo u točki O. Sada znamo da se te dvije kružnice dodiruju zbog homotetije.

3. Znamo da preslike ortocentra preko polovišta stranica i nožišta visina leže na opisanoj kružnici (ako ne, pogledajte predavanja iz nižih grupa!).

   Promotrimo homotetiju sa središtem u H i faktorom $\frac{1}{2}$. Zbog prethodno opisanih svojstava, znamo da se opisana kružnica šalje u kružnicu koja prolazi kroz polovišta stranica i nožišta visina.

   Štoviše, ta kružnica će prolazit i kroz polovišta dužina AH, BH i CH, odnosno, dokazali smo tvrdnju zadatka. Središte te kružnice je zapravo polovište dužine $\overline{OH}$, no, znamo da je Eulerov pravac pravac kroz OH pa smo dokazali i drugi dio zadatka.

4. Poznato je da je kružnica (AHC) preslika opisane kružnice preko pravca BC (iskoristimo onu lemmu o preslici ortocentra preko BC).

   Također, uočimo da homotetija iz A s faktorom $\frac{1}{2}$ šalje kružnicu (AHC) u kružnicu (AH_aB'). Dakle, kružnica (AH_aB') je jednaka "polovici" kružnice (AHC) koja je jednaka opisanoj kružnici, a znamo da je $(H_aH_bH_c)$ također jednaka polovici opisane kružnice, dakle, $(AH_aB') \equiv (H_aH_bH_c)$. Analogno pokažemo za ostalih pet kružnica.

5. Promotrimo homotetiju koja šalje ω u Γ, sa središtem u T. Neka pravac TP siječe kružnicu Γ u točki M. Zbog te homotetije, imamo da je tangenta u M na kružnicu Γ paralelna sa tetivom AB.

   Koristeći poučak o kutu između tetive i tangente i upravo dokazanu paralelnost, lagano vidimo da je $\angle MAB = \angle MBA$, odnosno, $|MA| = |MB|$, odnosno, M je polovište luka AB.

Tri zadataka s tri Kružnice

6. Povucimo zajedničku tangentu na kružnice kroz E. Iz prošlog zadatka, znamo da pravci AE i BE raspolavljaju lukove definirane tom tangentom, što upravo govori da je XY promjer.

7. Homotetija iz A koja šalje ω_1 u Ω daje da je $O_1F \parallel OX$, a homotetija iz B koja šalje ω_2 u Ω daje da je $O_2F \parallel OY$. Sada imamo

$$\angle XOY = \angle O_1FO_2 = \angle O_1EO_2$$

   pri čemu prva jednakost vrijedi zbog paralelnosti, a druga zbog simetrije (točka F je preslika točke E preko O_1O_2, alternativno, možemo provest standardni angle chase).

8. Uvedemo točke F i G kao što je opisano u hintu. Homotetija iz A koja šalje (O_1) u Ω nam daje $XF \parallel BE \equiv BY$. Homotetija iz B koja šalje (O_2) u Ω nam daje $GY \parallel AE \equiv AX$.

Dakle, za trokute $\triangle AXF$ i $\triangle BYG$ imamo $AF \equiv BG$, $XF \parallel YB$ te $AX \parallel GY$ pa prema prvom zadatku imamo da postoji homotetija između ta dva trokuta. Središte te homotetije je presjek pravaca XY i AB.

Kako se pod tom homotetijom opisana kružnica (AXF) šalje u opisanu kružnicu (BYG), također imamo da je središte homotetije kolinearno s O_1 i O_2, odnosno, dokazali smo tvrdnju zadatka.

21.4. N5: Ivan Sinčić - Diofantske jednadžbe

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi:

$$m^3 + n^3 = (m+n)^2$$

Rješenje: Dana jednakost je ekvivalentna s:

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2 - m - n) = 0$$

Ako je $m+n=0$, dobivamo beskonačno mnogo parova rješenja $(m,n) = (k,-k)\ \forall k \in \mathbb{Z}$, a za $m+n \neq 0$ imamo:

$$m^2 - mn + n^2 - m - n = 0$$
$$\iff (m-n)^2 + (m-1)^2 + (n-1)^2 = 2$$

Iz čega lako dobivamo preostala rješenja: $(m,n) = (1,2),(2,1),(0,1),(1,0)$

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x,y,z) koje zadovoljavaju:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \geq y \geq z$. Kada bi imali $z > 3$, lijeva strana bi sigurno bila manja od 1.

Ako je $z = 3$, imamo jedino rješenje $(x,y,z) = (3,3,3)$ jer bi za veće vrijednosti x, y lijeva strana bila manja od 1.

Ako je $z = 2$, preostaje jednadžba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Za $y > 4$ nemamo rješenja jer je tada lijeva strana manja od desne, pa provjeravajući ostale moguće vrijednosti za y dobivamo $(x,y,z) = (4,4,2),(6,3,2)$ i permutacije.

Ako je $z = 1$, preostaje jednadžba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$ koja očito nema rješenja u prirodnim brojevima.

3. Odredi sve parove m, n prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$n! + 5 = m^3$$

Rješenje: Provjeravajući vrijednosti n od 1 do 9 dobivamo da je jedno rješenje $n = 5, m = 5$. Kada bi imali rješenje za $n > 9$, imali bi $5|LHS \Rightarrow 5|m \Rightarrow 5^3|m^3 \Rightarrow 5^3|LHS$ što je nemoguće.

4. Odredi sve prirodne n za koje postoji prost broj p takav da vrijedi:

$$n^4 + 4^n = p$$

Rješenje: Za paran n lijeva strana je djeljiva s 2 i veća od 2 pa je dovoljno promatrati n oblika $2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ i jednadžba postaje:

$$(2k+1)^4 + 4^{2k+1} = p$$
$$\iff ((2k+1)^2 + 2^{2k+1})^2 - (2k+1)^2 2^{2k+2} = p$$
$$\iff ((2k+1)^2 - (2k+1)2^{k+1} + 2^{2k+1})((2k+1)^2 + (2k+1)2^{k+1} + 2^{2k+1}) = p$$

Kako su oba faktora na lijevoj strani strogo veća od 1 za $n > 1$, dana jednadžba nema rješenja osim za $n = 1$.

5. Odredi sve cijele x, y koji zadovoljavaju:

$$15x^2 - 7y^2 = 9$$

Rješenje: Iz jednadžbe slijedi:

$$y = 3y_1 \Rightarrow 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \Rightarrow x = 3x_1 \Rightarrow 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1 \Rightarrow y_1^2 \equiv -1 \pmod 3$$

Što je očito nema rješenja.

6. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

Rješenje: Lijeva strana mora biti parna pa imamo dva slučaja: Prva mogućnost je da je točno jedan od brojeva x, y, z paran, ali tada je desna strana djeljiva s 4 dok lijeva nije. Druga mogućnost je da su sva tri broja parna pa možemo uvesti supstituciju:

$$x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$$

Jednadžba sad postaje:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Ponavljajući iste argumente dobivamo da i sve tri nove varijable moraju biti parne. Ovaj postupak ponavljat će se beskonačno pa svaki od brojeva x, y, z mora biti djeljiv s 2^n za proizvoljno veliki n iz čega slijedi da je jedina mogućnost $x = y = z = 0$ što je uistinu rješenje jednadžbe.

7. Odredi sve parove x, y cijelih brojeva koji zadovoljavaju:

$$x^3 + 3 = 4y(y + 1)$$

Rješenje: Dana jednadžba ekvivalentna je s:

$$x^3 + 4 = (2y + 1)^2$$

$$\iff x^3 = (2y - 1)(2y + 3)$$

Budući da su faktori na desnoj strani relativno prosti, slijedi da su oba potpuni kubovi koji se razlikuju za 4. Kako takvi kubovi ne postoje, dana jednadžba nema rješenja.

8. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$a(a + 1) = b^c$$

Rješenje: Za $c = 1$ dobivamo beskonačno rješenja: $(a, b, c) = (k, k^2 + k, 1)$. Za $c > 1$ moramo imati $a > 1$, pa promotrimo prosti faktor p od a:

$$p|a \Rightarrow p|b \Rightarrow p^c|b^c \Rightarrow p^c|a$$

Gdje zadnja implikacija vrijedi jer su a i $a + 1$ relativno prosti. Dobivamo da svaki prosti broj koji dijeli a, dijeli ga višekratnikom od c puta ($c \mid v_p(a)$) te slijedi da je a potencija nekog broja s eksponentom c. Analogno dobivamo da je i $a + 1$ c-ta potencija, međutim to je kontradikcija jer ne postoje dvije takve uzastopne potencije u prirodnim brojevima.

9. Riješi u skupu prostih brojeva jednadžbu:

$$p^q + 1 = r$$

Rješenje: Ako je p prost broj veći od 2, on je neparan pa r mora biti paran, ali to je kontradikcija jer ne postoji paran prost broj veći od 2. Dakle $p = 2$. Ako je q neparan prost broj, tada vrijedi:

$$LHS \equiv (-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

Iz čega slijedi $r = 3$, ali ne postoji prost q koji zadovoljava $2^q + 1 = 3$. Dakle q ne smije biti neparan pa imamo $q = 2$ te iz jednadžbe dobivamo $r = 5$.

10. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

Rješenje: Iz dane jednadžbe slijedi:

$$36a + b = 2^x \tag{21.1}$$

$$a + 36b = 2^y \tag{21.2}$$

Kako su lijeve strane obje jednadžbe veće ili jednake od 37, moramo imati $x, y \geq 6$. Sada iz (1) slijedi $4|b \Rightarrow b = 4b_1$, a iz (2) slijedi $4|a \Rightarrow a = 4a_1$. Nove jednadžbe sada glase:

$$36a_1 + b_1 = 2^{x-4} \tag{21.3}$$

$$a_1 + 36b_1 = 2^{y-4} \tag{21.4}$$

Nove jednadžbe izgledaju isto kao i prošle dvije s razlikom u eksponentima na desnoj strani. Zbog ovoga možemo ponoviti argumente koje smo već iskoristili pa ćemo imati $x-4,\ y-4 \geq 6$. Zapravo, budući da ćemo se beskonačno vrtiti u krug, moramo imati $x-4k,\ y-4k \geq 6,\ \forall k \in \mathbb{N}$ što je nemoguće pa početna jednadžba nema rješenja.

11. Odredi sve $a, b \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju:

$$(a^a)^5 = b^b$$

Rješenje: Neka je $d = gcd(a, b)$. Imamo $a = da_1,\ b = db_1,\ gcd(a_1, b_1) = 1$ i jednadžba postaje:

$$d^{5a_1 d} a_1^{5a_1 d} = d^{b_1 d} b_1^{b_1 d}$$

Odnosno, uzimajući d-ti korijen:

$$d^{5a_1} a_1^{5a_1} = d^{b_1} b_1^{b_1}$$

Prvi slučaj: $5a_1 \geq b_1$:

$$d^{5a_1 - b_1} a_1^{5a_1} = b_1^{b_1}$$

Budući da $a_1^{5a_1}$ dijeli desnu stranu s kojom je relativno prost, slijedi $a_1 = 1$ i jednadžba postaje:

$$d^{(5-b_1)} = b_1^{b_1}$$

Dovoljno je provjeriti vrijednosti od b_1 koje su manje ili jednake od 5 jer je inače lijeva strana manja od 1 ili je $d = 1$ što je lako provjeriti. Dobivamo dva rješenja: $(a, b) = (1, 1), (256, 1024)$

Drugi slučaj: $5a_1 < b_1$:

$$a_1^{5a_1} = d^{b_1 - 5a_1} b_1^{b_1}$$

Budući da $b_1^{b_1}$ dijeli lijevu stranu s kojom je relativno prost, slijedi $b_1 = 1$ i jednadžba postaje:

$$a_1^{5a_1} = d^{1-5a_1}$$

Za svaku prirodnu vrijednost a_1, desna strana je manja ili jednaka od 1 pa u ovom slučaju imamo samo jedno rješenje $(a, b) = (1, 1)$ koje smo već dobili.

12. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$$

Rješenje: Provjeravajući $x = 1, 2, 3, 4$ nailazimo na dva rješenja $(x, y) = (3, 3), (1, 1)$. Za $x \geq 5$ vrijedi $LHS \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod 5$, a nijedan kvadrat ne postiže ostatak 3 pri dijeljenju s 5, pa za $x \geq 5$ nema rješenja.

13. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + x^x = y^x$$

Rješenje: Za $x > 1$ vrijedi $x^x < y^x$ te matematičkom indukcijom pokazujemo $y^x = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + x^x < (x+1)^x$. Ovdje je prikazan samo korak indukcije:

$$(x+1)^x + (x+1)^{x+1} < (x+2)^{x+1}$$

$$\iff (x+1)^x(1 + x + 1) < (x+2)^{x+1}$$

Što očito vrijedi. Vidimo da y mora biti cijeli broj između x i $x+1$ što je nemoguće pa je jedino rješenje $(x, y) = (1, 1)$

14. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu:

$$a^a + b^b + c^c = d^d$$

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$ i mora vrijediti $a < d$. Iz tih nejednakosti imamo:

$$LHS \leq 3a^a, \quad (a+1)^{a+1} \leq RHS$$

Ako dokažemo da za svaki prirodan a vrijedi $3a^a < (a+1)^{a+1}$, znat ćemo da dana jednadžba nema rješenja. Provjerom vidimo da tvrdnja vrijedi za $a = 1$, a za veće vrijednosti a imamo:

$$(a+1)^{a+1} = (a+1)^a \cdot (a+1) \geq (a+1)^a \cdot 3 > 3a^a$$

15. (Baltic Way 2011.) Odredi sve uređene parove (p, q) prostih brojeva za koje su $p^2 + q^3$ i $p^3 + q^2$ potpuni kvadrati.

Rješenje: Ako je $p = q$ imamo $p^2(p+1) = x^2$ za neki x iz čega slijedi $p + 1 = x_1^2$ za neki x_1, ali tada imamo $p = (x_1 - 1)(x_1 + 1) \implies x_1 - 1 = 1 \implies p = 3$ te dobivamo jedno rješenje $(p, q) = (3, 3)$. U suprotnom je $p \neq q$ te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p < q$ iz čega je $q \geq 3$. Iz $p^2 + q^3 = a^2$ za neki a imamo $q^3 = (a-p)(a+p)$ te kada bi oba faktora s desne strane bila djeljiva s q, tada bi q dijelio $a + p - (a - p) = 2p$ što je nemoguće. Dakle $a - p = 1$ pa je $a + p = q^3 \implies 2p = (a+p) - (a-p) = q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1) > 2q$ što je kontradikcija pa nemamo drugih rješenja.

16. (Vojtech izborno 2019.) Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\sigma$ svi djelitelji n. Odredite n ako znamo:
    1. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$
    2. $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

Rješenje: Kad bi bilo $d_{15} \leq \frac{n}{3}$, bilo bi $d_{14} \leq \frac{n}{4}$ i $d_{13} \leq \frac{n}{5}$, pa bi bilo $d_{13} + d_{14} + d_{15} < n$. Zato je $n > d_{15} > \frac{n}{3}$ pa je jedino moguće $d_{15} = \frac{n}{2}$ i $2 \mid n$. Kad bi bilo $3 \nmid n$, bilo bi $d_{14} \leq \frac{n}{4}$ i $d_{13} \leq \frac{n}{5}$, što je opet nemoguće jer bi bilo $d_{13} + d_{14} + d_{15} < n$. Zato $3 \mid n$ i $d_{14} = \frac{n}{3}$. To nam odmah daje $d_{13} = \frac{n}{6}$. Iz toga je jasno da je $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6$. To nam odmah daje da $4 \nmid n$ i $5 \nmid n$. Kako $6 \mid n$, to $3 \mid \frac{n}{2}$, odnosno $3 \mid d_{15}$. Zato imamo $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \equiv 1 (mod 3)$. Iz malog Fermatovog teorema slijedi $d_5 + 1 \equiv 1 (mod 3)$ pa $3 \mid d_5$. Zato je $d_5 = 3d_i$ za neki $1 \leq i \leq 4$. Vrijedi $d_5 > d_4 = 3d_2 > 3d_1$, pa je $d_5 = 3d_i$ za neki $3 \leq i \leq 4$. Kako su i d_3 i d_4 djeljivi s 3, slijedi $9 \mid d_5$ pa i $9 \mid n$. Kad bi bilo $d_5 > 9$, tada bi postojao djelitelj od n između d_4 i d_5 (upravo 9), a to je nemoguće. Zato je $d_5 = 9$. Sada lagano iz uvjeta zadatka slijedi $d_{15} = 999$ i odmah imamo $n = 2d_{15} = 1998$. Lagana provjera pokazuje da je to zaista rješenje.

17. (Poljska 2005.) Odredi sve trojke (x, y, n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju $(x - y)^n = xy$.

Rješenje: Za $n = 1$ imamo $x - y = xy$, ali $xy \geq x > x - y$ pa u ovom slučaju nemamo rješenja. Za $n = 2$ jednadžba glasi $x^2 - y^2 = 3xy$. Neka je $d = gcd(x, y),\ x = dx_1,\ y = dy_1,\ gcd(x_1, y_1) = 1,$

jednadžba postaje $x_1^2 + y_1^2 = 3x_1y_1$ iz čega vidimo $x_1 \mid y_1^2$ te $y_1 \mid x_1^2 \implies x_1 = y_1 = 1$ što ne zadovoljava dobivenu jednadžbu pa ni u ovom slučaju nemamo rješenja.
U nastavku je $n \geq 3$, odnosno $m = n - 2 \in \mathbb{N}$. Opet korištenjem $d = gcd(x, y),\ x = dx_1,\ y = dy_1,\ gcd(x_1, y_1) = 1$ dana jednadžba postaje:

$$d^m(x_1 - y_1)^{m+2} = x_1y_1$$

Ako prost broj p dijeli $x_1 - y_1$, onda dijeli i bar jednog od x_1 i y_1, a kako dijeli njihovu razliku, mora dijeliti obojicu što je u kontradikciji s $gcd(x_1, y_1) = 1$. Dakle nijedan prost broj ne dijeli $x_1 - y_1$ pa slijedi $|x_1 - y_1| = 1$. Izraz $(x_1 - y_1)^{m+2}$ ne može biti jednak -1 jer bi tada lijeva strana jednadžbe bila negativna dok je desna pozitivna. Supstitucijom $t = \min\{x_1, y_1\}$ i kombinirajući je s $|x_1 - y_1| = 1$ dobivamo jednadžbu:

$$d^m = t(t + 1)$$

Ako prost broj p dijeli t, tada on dijeli i d, a onda i lijevu stranu kratnošću koja je djeljiva s m. Zbog toga je kratnost kojom p dijeli desnu stranu također djeljiva s m, a kako su t i $t + 1$ relativno prosti imamo $(p^k)^m \mid t$. Ovo vrijedi za svaki prost djelitelj broja t pa on mora biti m-ta potencija nekog prirodnog broja. Analogan argument vrijedi i za $t + 1$, no sada imamo dvije uzastopne m-te potencije prirodnih brojeva što je nemoguće za $m \geq 2$. Dakle $m = 1 \implies n = 3$, $x_1 > y_1$, $d = t(t + 1)$, $x = t(t + 1)^2$, $y = t^2(t + 1)\ \ \forall t \in \mathbb{N}$ te provjerom vidimo da su ovo uistinu rješenja dane jednadžbe

21.5. X5: Krunoslav Ivanović - Funkcijske jednadžbe, naprednije

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Ako je $f(a) = f(b)$, onda uvrštavajući a, odnosno, b dobivamo

$$a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$$

dakle f je injekcija. Ako je a realan, uočimo da je $f(f(a)) = a$, odnosno, za $b = f(a)$, imamo $f(b) = a$, odnosno, f je surjekcija.

Dakle, f je bijekcija.

2. Nakon substitucije, imamo

$$bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2)$$

za sve realne a, b. Uvrštavanje para $(0, b)$ daje $f(0) = 0$. Nadalje, za $ab \neq 0$, dijeljenjem obe strane s ab dobivamo

$$\frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2,$$

dakle,

$$\frac{f(a)}{a} - a^2 = f(1) - 1 \implies f(a) = a^3 + xa,$$

gdje je x neka konstanta. Sad samo uvrstimo i provjerimo rješenje.

3. VJIMC 2017.
4. AOPS
5. IMO 2019.
6. Državno 2016. 4. r.
7. Državno 2015. 4. r.
8. Evan Chen - Introduction to FE
9. SRB IMOmath FE - Problem 5
10. MEMO 2009. I1

Teži zadaci

11 RMM shortlist 2019.

12 HMO 2017. 2. dan

13 HMO 2016. MEMO test

14. Državno 2019. 4.r.
15. Turska TST 2016.

22. Rješenja za šestu grupu

22.1. A6: Ivan Novak - Gledanje niza kako raste

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Državno natjecanje 2013., 4. razred, 2. zadatak
2. Baltic Way 2014.
3. Fiksirajmo x, i stavimo $a_n = f^n(x)$ (funkcija f primijenjena n puta na x). Onda uvjet kaže $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Opća formula za niz je $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n$. Međutim, ako B nije 0, onda je za dovoljno veliki n pripadne parnosti (ovisno o predznaku od B) također i $a_n < 0$, što je kontradikcija. Dakle, $B = 0$ i $a_n = A \cdot 2^n$. Iz početnog uvjeta $a_0 = x$ dobivamo $a_n = 2^n x$. Posebno, $a_1 = f(x) = 2x$.
4. Mala olimpijada 1998.
5. Poljska 1970.
6. Baltic Way 2021.
7. 3. ELMO, 2. zadatak
8. APMO 2020., P2
9. IMO 2014., P1

22.2. C6: Boris Stanković - Dokazivanje u procesu

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Lakši zadaci

1. Pretpostavimo da za sve $n > M$ pobjeđuje Lucija. Promatrajmo broj $n = M^4 - 1$. Lucija za njega ima pobjedničku strategiju ako i samo ako se može spustiti na neki broj kamenčića koji je pobjednička pozicija za drugog igrača. Međutim, može se spustit najviše na $(M^4-1)-(M^2-1)^2 = 2M^2 - 2 > M$ pa na koje god polje se spusti ono je pobjedničko za prvog igrača u tom trenutku što je sad Sinčić što je kontradikcija s pretpostavkom da Lucija dobija za sve n počevši od nekad.

2. Arthur Engel Problem Solving Strategies - Games 18.

3. I rješenje: Dodatno izborno za EGMO Srbija 2012.

   II rješenje: Indukcija. Pretpostavimo da vrijedi za bilo koji raspored $1, 2, ..., n-1$ i gledamo gdje smo ubacili n. Dovoljno je dokazati $|n-x|+|n-y| \geq |x-y|+2$ što lako dobijemo raspisivanjem.

4. Pretpostavimo suprotno, tj. da svaki učenik u klubu ima najviše 5 poznanika. Tada postoji učenik koji ima najviše 4 susjeda jer bi suprotnom ukupan broj poznanstava bio $\frac{49 \cdot 5}{2}$. Neka je Fran učenik koji ima najviše 4 poznanika u klubu. Promatrajmo njega, njegove poznanike i poznanike njegovih poznanika. Svako od Franovih poznanika ima najviše 4 druga poznanika. Znači da postoji barem $49 - 21 = 28$ učenika od kojih niko ne poznaje ni Frana ni Franove poznanike. Promatrajmo sada Petru, neku od preostalih učenica, Petrine poznanike i poznanike Petrinih poznanika. Petra ima najviše 5 poznanika, a svako od njenih poznanika ima najviše 4 poznanika osim nje. Sada od preostalih $28 - 26 = 2$ osobe postoji treća osoba Marko koja ne zna ni Frana ni Petru, a po definiciji ne poznaje nikog od Petrinih i Franovih poznanika što je kontradikcija.

5. Dodatno izborno za EGMO Srbija 2018

6. Srbija egmo izborno 2014.

7. Australian Mathematical Olympiad 2020 P7

Umjereni zadaci

8. Srbija dodatno izborno za EGMO 2019

9. I rješenje: Arthur Engel Problem Solving Strategies - Games 10.

   II rješenje: Pretpostavimo da je moguće u 10 poetza i da smo u tim potezima micali $a_1, a_2, ..., a_10$ kuglica. Tada svaki početni broj kuglica možemo zapisati kao zbir nekih a-ova. Međutim, tako možemo predstaviti najviše $2^{10} = 1024$ brojeva.

   III rješenje: Jasno da je u nekom potezu moramo maknuti tačno 1 kuglicu da bismo ispraznili onu kutiju u kojoj je tačno 1 kuglica na početku. Da bismo ispraznili kutiju u kojoj su na početku 2 kuglice potreban nam je još jedan potez. Sada indukcijom dokazujemo da nam da ispraznimo kutije $1, 2, ..., 2^k$ treba bar $k+1$ poteza. Znamo da nam treba k poteza da ispraznimo $1, 2, ..., 2^{k-1}$, a u tim potezima smo maknuli najviše $1 + 2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$ kuglica pa nam treba barem još jedan da bismo ispraznili kutiju u kojoj je 2^k kuglica.

10. MEMO 2018 T3

11. MOP 2019 Red Group test 1

12. Greece National Olympiad 2022

13. (a) Označimo redove i kolone rednim brojevima $1, 2, \ldots, 2n$. Ako je u početnom rasporedu sijalica u polju i-tog reda i j-te kolone upaljena ako i samo ako je $j \in i+1, i+2, \ldots, i+n-1$, upaljeno je tačno $2n(n-1)$ sijalica, a nijedan korak se ne može izvršiti.

(b) Pretpostavimo da ima više od $2n(n-1)$ upaljenih sijalica, a da se njihov broj ne može smanjiti nizom koraka. Jasno je da tada ni u jednom redu ne može biti više od n upaljenih sijalica - u suprotnom bi korak na tom redu smanjio broj upaljenih sijalica.

Red ili kolonu zovemo dobrim ako u njemu ima tačno n upaljenih sijalica. Po Dirihleovom principu postoji bar po jedan dobar red i dobra kolona. Neka je a broj dobrih redova, a b broj dobrih kolona. Primjetimo da sijalica u presjeku dobrog reda i dobre kolone mora biti upaljena - u suprotnom, ako primjenimo korak na dobrom redu, kolona koja je prethodno bila dobra imaće $n+1$ upaljenih sijalica, što smo videli da je nemoguće.

Promijenimo stanja sijalicama u svih a dobrih redova. U kolonama koje su bile dobre, a sijalica se gasi, pa ostaje po $n-a$ upaljenih. S druge strane, pojavljuje se izvjestan broj c novih dobrih kolona. U svakoj od preostalih $2n-b-c$ kolona ima najviše $n-1$ upaljenih sijalica. Dakle, upaljenih sijalica ima ukupno ne više od $b(n-a)+cn+(2n-b-c)(n-1) = 2n(n-1)+b+c-ab$. Slijedi da je $b+c > ab$. Primenom istog postupka na novi raspored dobijamo $b+c > ac$, pa sabiranjem slijedi $a < 2$, tj. tačno jedan red je dobar. Tada svi ostali redovi sadrže tačno po $n-1$ upaljenih sijalica. Međutim, onda bismo primjenom koraka na bilo kojoj dobroj koloni bar n redova učinili dobrim, protivno našem razmatranju.

14. MEMO 2016 I2

15. JBMO 2014 p4

16. MEMO 2016 T4

17. IMO SL 2018 C3

18. Razmatramo igru unazad, gdje u jednom potezu uzimamo dva broja $x+1$ i $x-1$, koja mijenjamo s dvije kopije broja x. Očito je da je dokazivanje da ova igra završava za $\frac{n^3}{6}$ poteza ekvivalentna sa dokazivanjem da početna igra završava za $\frac{n^3}{6}$

Podijelit ćemo sve početne brojeve na ploči na komponente, tako da su dva broja a i b u istoj komponenti, ako postoji niz $a = c_1, c_2, \ldots, c_k = b$ početnih brojeva na ploči, tako da vrijedi $|c_i - c - i + 1| \leq 2$. U biti, komponente su podnizovi koji se dobiju od niza sortiranih brojeva, gdje taj niz "lomimo" kad god je razlika preko 2. Ovo znači da u svakoj komponenti, ako su na početku brojevi $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \leq a_k$.

Očigledno brojeve iz različitih komponenti nikad nećemo moći odabrati pa je dovoljno dokazati da je u jednoj komponenti najviše $\frac{k^3}{6}$ poteza, iz čega će tvrdnja zadatka slijediti, zbog $(x+y)^3 > x^3+y^3$.

Komponente se mogu razdvajati na više komponenata. Neka su nam početne vrijednosti u jednoj komponenti $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Pogledajmo vrijednost sume kvadrata unutar jedne komponente. U jednom potezu ova se vrijednost smanjuje za $(x+1)^2 + (x-1)^2 - 2x^2 = 2$. Primjetimo da se suma brojeva u jednoj komponenti ne mijenja.

Stoga, zbog nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine, vrijedi da je suma kvadrata na kraju barem $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2$. Stoga, broj poteza S nam je najviše bio

$$S \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} a_i)^2\right) =$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j)^2.$$

Ако је $k_i = a_{i+1} - a_i$, из чињенице да је $0 \leqslant k_i \leqslant 2$, видимо да је

$$S \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sum_{t=i}^{j-1} k_t)^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sum_{t=i}^{j-1} 2)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)\cdot(2i)^2) = \frac{2}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^3\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(\frac{(n-1)n^2(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4}\right) = (n-1)n\left(\frac{2n-1}{3} - \frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)(n+1)n}{6} < \frac{n^3}{6},$$

чиме је доказ завршен.

Теži zadaci

19. IMO SL 2021 C4
20. IMO SL 2021 C3 (IMO 2021 P5)
21. Dušan Đukić invarijante 16. zadatak (IMO SL 2005 C5)
22. IMO SL 2017 C4 (IMO 2017 P5)
23. IMO 2005 C6 (IMO 2005 P6)
24. IMO SL 2007 C6 (IMO 2007 P3)

22.3. G6: Krunoslav Ivanović - Inverzija

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Zadaci su u načelu iz:

1. Evan Chen - EGMO (link na poglavlje o inverziji),
2. Gunmay Handa - Inversion on the fly, bude prvi rezultat kad guglate.

Oba pdfa su izvrsna ako želite naći teže/kompliciranije zadatke i dublje ući u materiju.

Lakši zadaci

1. 8.10 ovdje
2. Chen, EGMO, 8.23.
3. Chen, EGMO, 8.24.
4. Lemma 8.13. u gore linkanom pdfu (EGMO).
5. Chen, EGMO, 8.25.
6. Example 8.12. u gore linkanom pdfu (EGMO).
7. Chen, EGMO, 8.32.
8. Turkey TST 2015.

Teži zadaci

9. EGMO 2013. 5.
10. ELMO SL 2013 G5
11. China TST 2012.
12. IMO SL 2005. G5
13. IMO 2015. 3.

22.4. N6: Vedran Cifrek - Dizanje eksponenata

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

Većina rješenja zadataka nalazi se u LTE Handout.pdf

Uvodni zadaci

1. Dokazat ćemo da lijeva i desna strana imaju isti v_p za svaki prosti broj p pa moraju biti isti brojevi. Neka je p proizvoljan prosti broj:

v_p desne strane je

$$\begin{aligned} v_p(RHS) &= v_p\left(\frac{abc\,\mathrm{lcm}(a,b,c)}{\mathrm{lcm}(a,b)\,\mathrm{lcm}(b,c)\,\mathrm{lcm}(c,a)}\right) \\ &= v_p(abc\,\mathrm{lcm}(a,b,c)) - v_p(\mathrm{lcm}(a,b)\,\mathrm{lcm}(b,c)\,\mathrm{lcm}(c,a)) \\ &= v_p(a)+v_p(b)+v_p(c)+\max(v_p(a),v_p(b),v_p(c)) \\ &- \max(v_p(a),v_p(b)) - \max(v_p(b),v_p(c)) - \max(v_p(a),v_p(c)). \end{aligned}$$

v_p lijeve strane je

$$\min(v_p(a),v_p(b),v_p(c)).$$

Budući da je izraz iz zadatka simetričan s ozbirnom na a, b i c možemo preimenovati brojeve tako da vrijedi $v_p(a) \geq v_p(b) \geq v_p(c)$ tada je v_p desne strane:

$$2v_p(a)+v_p(b)+v_p(c)-2v_p(a)-v_p(b)=v_p(c),$$

a lijeve strane je $v_p(c)$.

v_p obje strane je jednak za svaki prost broj p pa su ti izrazi jednaki.

2. Tekst zadatka nam daje da za svaki prirodni broj k vrijedi $a^{2k-1} \mid b^{2k} \mid a^{2k+1}$. Pretpostavimo da je $a \neq b$ tj. postoji prosti broj p takav da je $v_p(a) \neq v_p(b)$. Iz početne relacije dijeli slijedi

$$(2k-1)\cdot v_p(a) \leq 2k \cdot v_p(b) \leq (2k+1)\cdot v_p(b)$$

za svaki prirodni broj k. Drugačije zapisano

$$(1-\frac{1}{2k})\cdot v_p(a) \leq v_p(b) \leq (1+\frac{1}{2k})\cdot v_p(a).$$

Ako uzmemo prirodan broj k takav da je $k > v_p(a)$: Kada bi vrijedilo $v_p(b) \geq v_p(a)+1$, iz toga bi slijedilo

$$(1+\frac{1}{2k})\cdot v_p(a) \geq v_p(a)+1$$

što je kontradikcija s izborom od k.

Analogno kada bi vrijedilo $v_p(b) \leq v_p(a)-1$, iz toga bi slijedilo

$$(1-\frac{1}{2k})\cdot v_p(a) \leq v_p(a)-1,$$

što je kontradikcija s izborom od k. Znači mora vrijediti $v_p(b)=v_p(a)$ jer je $v_p(b)$ cijeli broj, no to je kontradikcija s definicijom prostog broja p.

3. LTE Handout Problem 1.1.3 (7. stranica)

Zadaci

4. LTE Handout Problem 1.2.1 (19. stranica)

5. Pretpostavimo da je $n \geq 2$. Ručno provjerimo slučajeve $p = 2$: $2^2 + 3^2 = 13$ i $p = 5$: $2^5 + 3^5 = 275 = 25 \cdot 11$ i vidimo da u njima nema rješenja. U svim ostalim slučajevima p je neparan i nije djeljiv s 5. Iz formule za zbroj p-tih potencija znamo da $(2+3) \mid 2^p + 3^p$ tj $5 \mid a^n$. Budući da je $n \geq 2$ $v_5(a^n) = n \cdot v_5(a) \geq 2$, ali po LTE za zbroj vrijedi $v_5(2^p + 3^p) = v_5(2+3) + v_5(p) = 1$. Kontradikcija pa je $n = 1$.

6. LTE Handout Problem 1.1.5 (8. stranica)

7. LTE Handout Problem 1.2.5 (20. stranica)

8. LTE Handout Problem 1.2.6 (21. stranica)

9. LTE Handout Problem 1.2.7 (21. stranica)

10. LTE Handout Problem 1.2.2 (19. stranica)

Teži zadaci

11. IMO SL 2006 N5

12. CHINA TST 2016

22.5. X6: Bernard Inkret - Miješanje varijabli

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Problem 1.
2. Problem 2.
3. IMO SL 2019. A3
4. IMO SL 2015. A3
5. Problem 3.
6. Problem 1.
7. Problem 2.
8. AOPS
9. IMO 2020. 2

23. Rješenja za sedmu grupu

23.1. A7: Ivan Sinčić - Funkcijske jednadžbe

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2015/02/HMO2017-rje.pdf
2. https://www.skoljka.org/solution/16195/
3. https://artofproblemsolving.com/community/c6h498383p2800435
4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h529313p3016148
5. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1502364p8868742
6. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2002/2002-SS-zup-1234-zad+rj/2002-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
7. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1243431p6362873

23.2. G7: Boris Stanković - Geometrija mix

Link na zadatke. Link na hintove.

Lakši zadaci

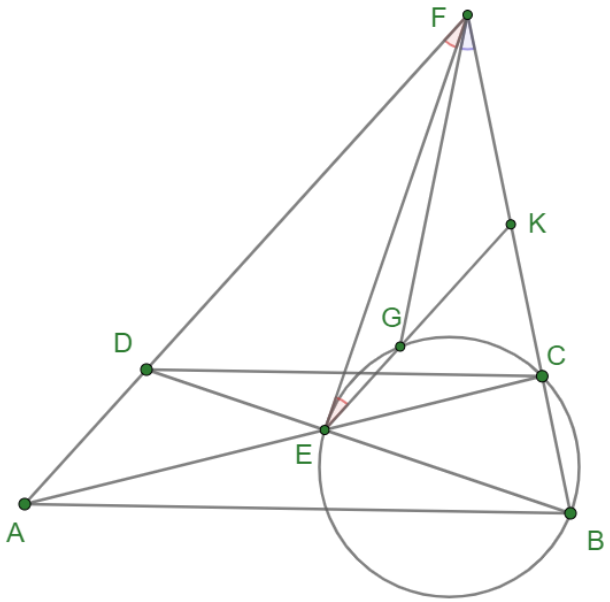
1. I rješenje: Doda se točka D na produžetku stranice CA preko A takva da je $AI = AD$. Iskoristi se da je trokut DCB jednakokračan i dokaže se da je četverokut $AIBD$ tetivan odakle se angle chasingom dokaže tvrdnja.

II rješenje: Može se uzeti točka E na stranici BC takva da je $CE = AC$. Dokaže se da je $ABEI$ tetivan pa da je jednokračni trapez. Odatle angle chasingom se dokaže tvrdnja.

2. Iran MO 2018 3rd round geometry 1

3. Baltic way 2020 P13

4. I rješenje: Dovoljno je dokazati $\angle AFE = \angle BFG$. Iz $AD \parallel EG$ je $\angle AFE = \angle GEF$. Neka je $EG \cap BF = K$, zapravo želimo pokazati da je KF tangenta na opisanu kružnicu $\triangle GEF$, tj $KF^2 = KG \cdot KE$.



Vrijedi $KG \cdot KE = KB \cdot KC$ iz potencije K na kružnicu opisanu oko $BEGC$. Znamo $\frac{KF}{KC} = \frac{AE}{CE}$, $\frac{KB}{KF} = \frac{BE}{DE}$ iz Talesa zbog $AD \parallel KE$, a $ABCD$ je trapez pa su $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$ slični odakle je tvrdnja zadatka dokazana.

II rješenje: Kako je $\angle BGC = \angle BEC = \angle AED$ i $\angle CBG = \angle CEG = \angle EAD$, trouglovi BCG i ADE su slični. Pritom je $\frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CF}$, pa su i trouglovi BFG i AFE slični. Otuda je $\angle AFE = \angle BFG$.

5. Nizozemska EGMO TST 2018. P4

6. IMO 2022 P4

7. BH TST 2016 P1

8. BMO 2020 P1

Umjereni zadaci

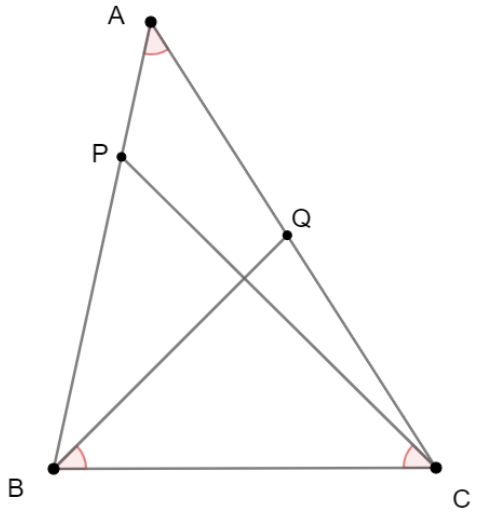
9. BMO 2011 P1

10. IMO SL 2013 G4

11. EGMO 2021 P4

12. MEMO 2021 T1

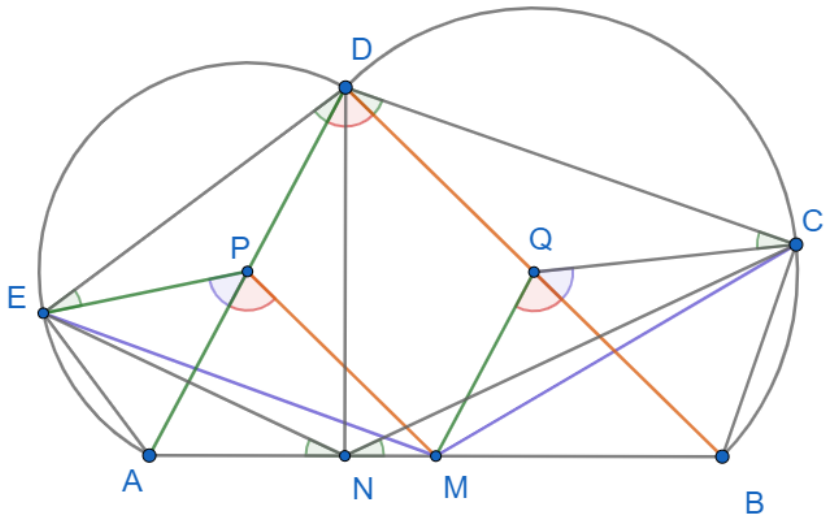
13. Iz uvjeta zadatka vidimo da je BC tangenta na opisane kružnice $\triangle ACP$ i $\triangle ABQ$, odakle je $BA \cdot BP = BC^2 = CA \cdot CQ$ pa zaključujemo da B i C imaju jednaku potenciju u odnosu na opisanu kružnicu $\triangle APQ$ odakle slijedi tvrdnja.



14. All-Russian Olympiad 2019 grade 10 Problem 6

15. Romanian JTST 2019 P3

16. Neka su P, Q polovišta DA, DB redom. Vrijedi $DP = AP = EP, DQ = BQ = CQ$ te $\angle EPM = \angle EPA + \angle APM = 2 \cdot \angle ADE + \angle ADB = 2 \cdot \angle CDB + \angle BQM = \angle CQB + \angle BQM = \angle CQM$ pa su trokuti EPM i MQC sukladni odakle je $MP = MQ$. Sada da bi $ENMC$ bio tetivan potrebno je i dovoljno dokazati da je MN vanjska simetrala $\angle ENC$.



Ovo vrijedi jer iz tetivnih četverokuta $ANDE, BNDC$ vrijedi $\angle ANE = \angle ADE = \angle CDB = \angle CNB$.

17. SMO 2014

18. G5 JBMO shortlist 2015.

Teži zadaci

19. (I rješenje) Označimo sa M polovište BC i neka je ℓ simetrala BC. Znamo da $Q = \ell \cap EF$. Odatle $\angle QMD = \angle QPD = 90^\circ$ pa su D, P, M, Q konciklične. Neka je $G = EF \cap BC$. Označimo opisanu kružnicu trokuta $DPMQ$ sa ω_1. Sada imamo

$$Pow_{\omega_1}(G) = GP \cdot GQ = GD \cdot GM$$

Želimo pokazati da su B, P, C, Q konciklične, pa nam je dovoljno pokazati

$$GD \cdot GM = GB \cdot GC$$

Ovo vrijedi jer je $BCEF$ tetivan, pa $GB \cdot GC = GE \cdot GF$, a $EFMD$ je isto tetivan (kružnica 9 točaka) pa je $GE \cdot GF = GD \cdot GM$. Iz ovoga zaključujemo da je $BPCQ$ tetivan četverokut. Sada lako dobijamo $\angle APD = \angle B - \angle C$. Neka je $\angle BPF = x$. Sada je $\angle BCQ = \angle CBQ = x$, pa je

$$\angle BPD = 90^\circ - x, \angle BDP = 90^\circ - \angle B + \angle C$$

Ovo implicira $\angle PBQ = \angle B - \angle C$ odakle smo gotovi.

Komentar: Mogli smo zaključiti da vrijedi $GD \cdot GM = GB \cdot GC$ i na osnovu leme za potenciju i sredinu stranice iz uvoda.

(II rješenje) Ključni dio je pokazati tetivnostt $BCPQ$. To možemo i na sljedeći način: Vidimo da zbog $QB = QC$ je dovoljno pokazati da je PQ vanjska simetrala $\angle BPC$, što je ekvivalentno s tim da je PD unutrašnja. Međutim znamo da je $PD \perp PQ$ i da je $\frac{BG}{CG} = \frac{BD}{CD}$ (Ceva za točke D, E, F, Menelaj za točke E, F, G) pa je zadovoljen kriterij za simetralu kuta koji smo naveli u uvodu.

20. HMO 2012 drugi dan 3. zadatak

21. BH TST 2017 P1

22. BMO 2019 P3

23. IMO 2019 P2

23.3. N7: Ivan Vojvodić - Tb funkcijske

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. BMO 2017/3
2. MEMO 2016 I4
3. BMO 2019/1
4. Državno 2019 4. razred, 5. zadatak
5. USAMO 2012/4
6. Korea National Olympiad 2013/5
7. IMOSL 2020 N5

23.4. X7: Ivan Novak - Kvadratni ostaci i slično

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Državno natjecanje 2013., 4. razred, 2. zadatak
2. Baltic Way 2014.
3. Fiksirajmo x, i stavimo $a_n = f^n(x)$ (funkcija f primijenjena n puta na x). Onda uvjet kaže $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Opća formula za niz je $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n$. Međutim, ako B nije 0, onda je za dovoljno veliki n pripadne parnosti (ovisno o predznaku od B) također i $a_n < 0$, što je kontradikcija. Dakle, $B = 0$ i $a_n = A \cdot 2^n$. Iz početnog uvjeta $a_0 = x$ dobivamo $a_n = 2^n x$. Posebno, $a_1 = f(x) = 2x$.
4. Mala olimpijada 1998.
5. Poljska 1970.
6. Baltic Way 2021.
7. 3. ELMO, 2. zadatak
8. APMO 2020., P2
9. IMO 2014., P1

23.5. M1: Ivan Vojvodić - Izogonalne konjugate

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. China Team Selection Test 2016 Test 1 Day 1 Q1
2. Neka je $Q = AC \cap BD$. Po korolaru 3.2 vrijedi:
   $AC \perp BD \iff Q$ ima izogonalnu konjugatu u $ABCD$ (neka je to P), a P po laganom angle chaseu zadovoljava traženu jednakost kuteva (sjetimo se konstrukcije konjugate iz teorema 3.1).
   Izvor: IMOSL 2008 G6
3. IOM 2020/6
4. MEMO 2017 I3
5. Projekcije P na $ABCD$ čine tetivni četverokut $\implies$ P ima izogonalnu konjugatu u $ABCD$, a lagani angle chase daje da je ta konjugata upravo E. Tada su M i N projekcije E na FA, FB redom, a onda Pascalov teorem na $WNNYMM$ dovršava.
6. IMOSL 2007 G3
7. IMOSL 2012 G2

23.6. M2: Bernard Inkret - Sve osim funkcijskih

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Znamo da za polinom P s cjelobrojnim koeficijentima vrijedi

$$a - b \mid P(a) - P(b)$$

za sve cijele brojeve a i b. Neka su a, b i c točke u kojima P postiže vrijednost ± 1, a u cjelobrojna nultočka za P. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} u - a \mid P(u) - P(a) = \pm 1 \\ u - b \mid P(u) - P(b) = \pm 1 \\ u - c \mid P(u) - P(c) = \pm 1. \end{aligned}$$

Kako je u različit od a, b i c, nužno imamo da su brojevi $u - a$, $u - b$ i $u - c$ upravo ± 1. Po Dirichletovom principu, barem dva od ta tri broja imaju isti predznak. Bez smanjenja općenitosti, recimo da je $u - a = 1$ i $u - b = 1$, no, to bi značilo da je $a = b$ što je kontradikcija.

Dakle, polinom P nema cjelobrojnu nultočku.

2. Kanada 2018.

3. MEMO 2019. T2

4. APMO 2021. 1.

5. APMO 2020. 2.

23.7. M3: Boris Stanković - Promjena perspektive

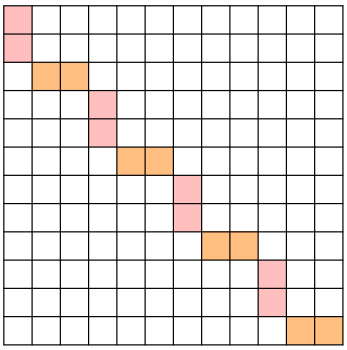
Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. IGO 2017. Advanced P2

2. Polish MO 2020 second round P2

3. Neka je A broj redaka s dva označena polja i B broj redaka s jednim označenim poljem. Tada je $2A + B$ broj označenih polja.
   Za svako polje iz retka s jednim označenim poljem postoji jedinstveno polje iz nekog drugog retka s jednim označenim poljem koje je u istom stupcu s njim. Time smo podijelili polja iz retka s jednim označenim poljem u $B/2$ parova, i svakom paru pridružili jedinstveni stupac s dva označena polja. Dakle, broj stupaca s dva označena polja je $B/2$. Analogno, broj stupaca s jednim označenim poljem je $2A$.
   Sada je još potrebno maksimizirati zbroj $2A + B$, uz uvjete $A + B \leqslant 2019$ i $2A + B/2 \leqslant 2019$.
   Zbrajanjem tih dvaju nejednakosti dobijemo $(2A+B)\cdot 3/2 \leqslant 4038 \implies 2A+B \leqslant \frac{2019\cdot 4}{3} = 2692$.
   Dokažimo još da se 2692 postiže. Promotrimo sljedeće označavanje (skica za 12×12 tablicu):



   Označimo retke i stupce brojevima od 1 do 2019. Ako je oznaka retka $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki $k \geqslant 0$, tada u tom retku označimo polje u $3k + 1$-tom stupcu. Ako je oznaka retka $3k$ za neki $k > 0$, tada u tom retku označimo polja u stupcima $3k$ i $3k - 1$.
   Lako se vidi da je konstrukcija valjana tj. da za svako označeno polje postoji jedinstveno drugo označeno polje u istom retku ili stupcu. Broj redaka s dva označena polja je $2019/3$, a broj redaka s jednim označenim poljem je $2 \cdot 2019/3$, pa je broj označenih polja upravo $4 \cdot 2019/3$.

4. Baltic Way 2021 P6

5. Po Diracovoj teoremi graf njihovih prijateljstava ima Hamiltonov ciklus.

6. IMO SL 2019 N3

7. Ako je $|S|$ paran ili je S beskonačan, neka su $a_1 < a_2 < \ldots$ elementi S. Stavimo $g(a_{2k-1}) = a_{2k}$, $g(a_{2k}) = f(a_{2k-1})$, $g(f(a_{2k-1}) = a_{2k}$, ...
   Općenito, stavimo $g(f^j(a_{2k-1})) = f^j(a_{2k})$ i $g(f^j(a_{2k})) = f^{j+1}(a_{2k-1})$. Lako se provjeri da je g dobro definirana i da je $g \circ g = f$.
   Ako je $|S|$ neparan, pretpostavimo da postoji g za koju je $g \circ g = f$. Tada je i g injekcija. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementi skupa $\mathbb{N} \setminus g(\mathbb{N})$. No tada je S upravo jednak

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k, g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_k)\},$$

   no tada S ima parno mnogo elemenata, što je kontradikcija.

8. IMO SL 2017 N3
9. Swiss TST 2006
10. Prvo rješenje, čisto algebarsko
    Šturo zapisano alternativno rješenje, s geometrijskom interpretacijom
11. SMO 2021 P4
12. Obratite pažnju na 2. rješenju imajući u vidu da se radi o 3. zadatku s EGMO 2016.
13. I rješenje
    II rješenje
14. IMO SL 2020 C4
15. IMO 2020 P3

Dio IV.

Projekti na Ljetnom kampu

24. Projekti

24.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 5 do 8 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz par popodneva detaljnije neku temu. Na ovogodišnjem je kampu bilo ponuđeno sveukupno 10 projekata.

Većina projekata može se svrstati u sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema.

24.2. Popis projekata

24.2.1. Geometrijska razonoda

Vrsta: fakultetski **Predavači:** Laura Horvat, Patricija Dovijanić

Na ovom projektu bavili smo se raznim zabavnim i jednako edukativnim područjima geometrije koje ne susrećemo na redovnoj nastavi.

Nakon što smo se upoznali s osnovama prostorne geometrije, zakoračili smo u svijet sferne geometrije. Uz pomoć naranči i plastelina naučili smo svašta, od oplošja i volumena sfere te površina sfernih trokuta, pa sve do dvokuta. Posebno su nam bile zanimljive razlike euklidske i sferne geometrije. Puno nam je pomogla naša lopta za plažu, kao i motivi na njoj. Primjerice, glava malog praščića naslikana na njoj bila je izvrstan primjer sfernog trokuta.

Još jedno nama zanimljivo tijelo bio je torus - geometrijsko tijelo oblika američke krafne. Proučavali smo njegova razna svojstva, poput volumena, oplošja, zakrivljenosti i slično. Čak smo naučili igrati križić-kružić na torusu, te kako na torusu (ili šalici) spojiti tri odabrana mentora s izvorima vode, struje i plina.

Kad smo već kod domaćinstva, jeste li ikad obraćali pažnju kako vam je popločana kuhinja ili kupaonica? Da ste bili na našem projektu, znali biste sve o tome. Pomoću diofantskih jednadžbi spojili smo građevinarstvo i matematiku te naučili na koje sve načine možemo mnogokutima popločati ravninu.

Ako ste mislili da je to sve, u krivu ste! Za sam kraj projekta ostavili smo jednu izrazito zanimljivu plohu - Möbiusovu vrpcu. Općenitiji slučaj Möbiusove vrpce su i fleksagoni. To su igračke od papira u obliku pravilnih mnogokuta koje osim prednje i stražnje strane imaju i skrivene, unutarnje strane. Fleksajući fleksagone kao i naše mlade umove, završili smo projekt.

Našim najdražim mentoricama L.H. i P.D. zahvaljujemo na novom iskustvu i što su nas obogatile cijelim novim svijetom geometrije.

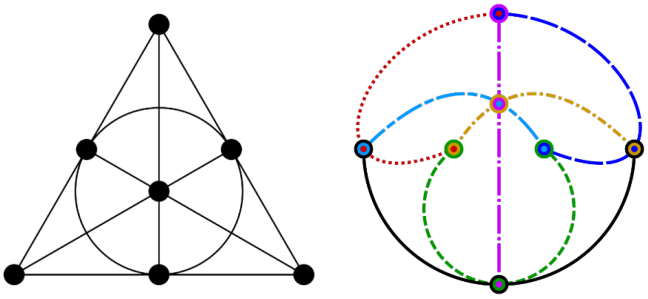
24.2.2. InDizajn s MnM-om

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavači:** Lucija Relić, Ivan Premuš

Započeli smo projekt tako što smo definirali što je dizajn i predstavili ga formulom:

$$t - (v, b, r, k, \lambda)$$

gdje je v broj vrhova, b broj blokova, r broj blokova kroz svaki vrh, k broj vrhova na svakom bloku, a za svaki skup t vrhova postoji λ blokova koji ga sadrži. Utvrdili smo svoje znanje iz dizajna ilustriranjem par praktičnih primjera primjene dizajna u stvarnom životu (degustacija vina, lotto). U primjeru s degustacijom vina kao rezultat smo dobili Fanovu ravninu, odnosno dizajn $2 - (7, 3, 1)$, najpoznatiji primjer simetričnog dizajna.



Slika 24.1.: Fanova ravnina

Onda smo izveli formule za r i b:

$$r = \lambda \frac{v-1}{k-1}, \quad b = \frac{vr}{k}, \quad \text{za } t = 2.$$

te prošli kroz razne vrste dizajna, poput simetričnog, komplementarnog, dualnog i deriviranog i odredili njihove parametre. Zabavili smo se crtanjem težih primjera, izvođenjem općenitijih formula i... Na kraju smo se upoznali i s latinskim kvadratima. I onda smo prošli latinske kvadrate. Bilo je fun!

P.S. Čak smo i otkrili koliko može najviše postojati međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata. Ali to nije sve! Nego smo ih i odredili i nacrtali za $n = 4$ koristeći vezu s projektivnom ravninom reda 4.

24.2.3. Teorija brojeva

Vrsta: fakultetski/natjecateljski **Predavač:** Ivan Novak

Na ovom projektu bavili smo se kvadratnim ostacima, primitivnim korijenima i proširenjima cijelih brojeva $\mathbb{Z}[i]$ i $\mathbb{Z}[\omega]$.

Koristili smo svojstva ovih prstenova kao npr. jedinstvenu faktorizaciju, Euklidov algoritam i Bezoutov teorem. Pomoću toga smo dokazali da se svaki prost broj koji nije oblika $4k+3$ može zapisati kao suma kvadrata prirodnih brojeva i riješili neke diofantske jednadžbe u $\mathbb{N}$.

Koristili smo ordere kako bi pokazali postojanje primitivnog korijena modulo p i definirali smo kvadratne ostatke pomoću potencija primitivnog korijena. Rješavali smo zadatke slične Ilkovoj lemi (x^2+1 nema proste $4k+3$ djelitelje) i spomenuli smo Gaussov zakon reciprociteta.

Koristili smo i Jacobijev simbol kako bismo si olakšali račun reciprociteta. Povezivali smo kvadratne ostatke modulo p sa kvadratima u $\mathbb{N}$ i spominjali smo rezultate iz $\mathbb{R}$ u drugim poljima, npr $\mathbb{F}_p$, što nam je omogućilo da kvadratne jednadžbe i općenito neke polinomijalne relacije modulo p, a to nam je govorilo o broju rješenja kvadratne modulo p.

24.2.4. (Projekt)ivna geometrija

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Luka Kraljević, Krunoslav Ivanović

Na ovom projektu bavili smo se projektivnom geometrijom, koja daje alternativni pogled na određene tipove zadataka unutar natjecateljske geometrije.

Prije svega, upoznali smo se s nekim osnovnim teoremima poput Cevinog i Menelajevog teorema koji su nam kasnije pomogli u dokazivanju relacija između projektivnih objekata.

Nakon toga, upoznali smo se s definicijom dvoomjera na pravcu, dvoomjera među pravcima i dvoomjera na kružnici te vidjeli kako su ti objekti međusobno povezani i kako ih možemo prenositi u različitim situacijama. Kasnije, upoznali smo se s harmonijskim četvorkama i raznim svojstvima koje za njih vrijede te vidjeli kako se prirodno javljaju u raznim konfiguracijama. Također, na primjeru raznih natjecateljskih zadataka, vidjeli smo da su harmonijske četvorke česta pojava u zadacima i da leme koje smo dokazali uvelike pomažu kod rješavanja takvih zadataka.

U kontekstu harmonijskih četvorki, upoznali smo se s polovima i polarama te vidjeli kako su kružnice i tangente uključene u cijelu priču.

Naposljetku, upoznali smo se s projektivnim transformacijama i vidjeli fizikalnu interpretaciju istih preko projiciranja sjena na ploču, što je ujedno bio i najzanimljiviji dio projekta.

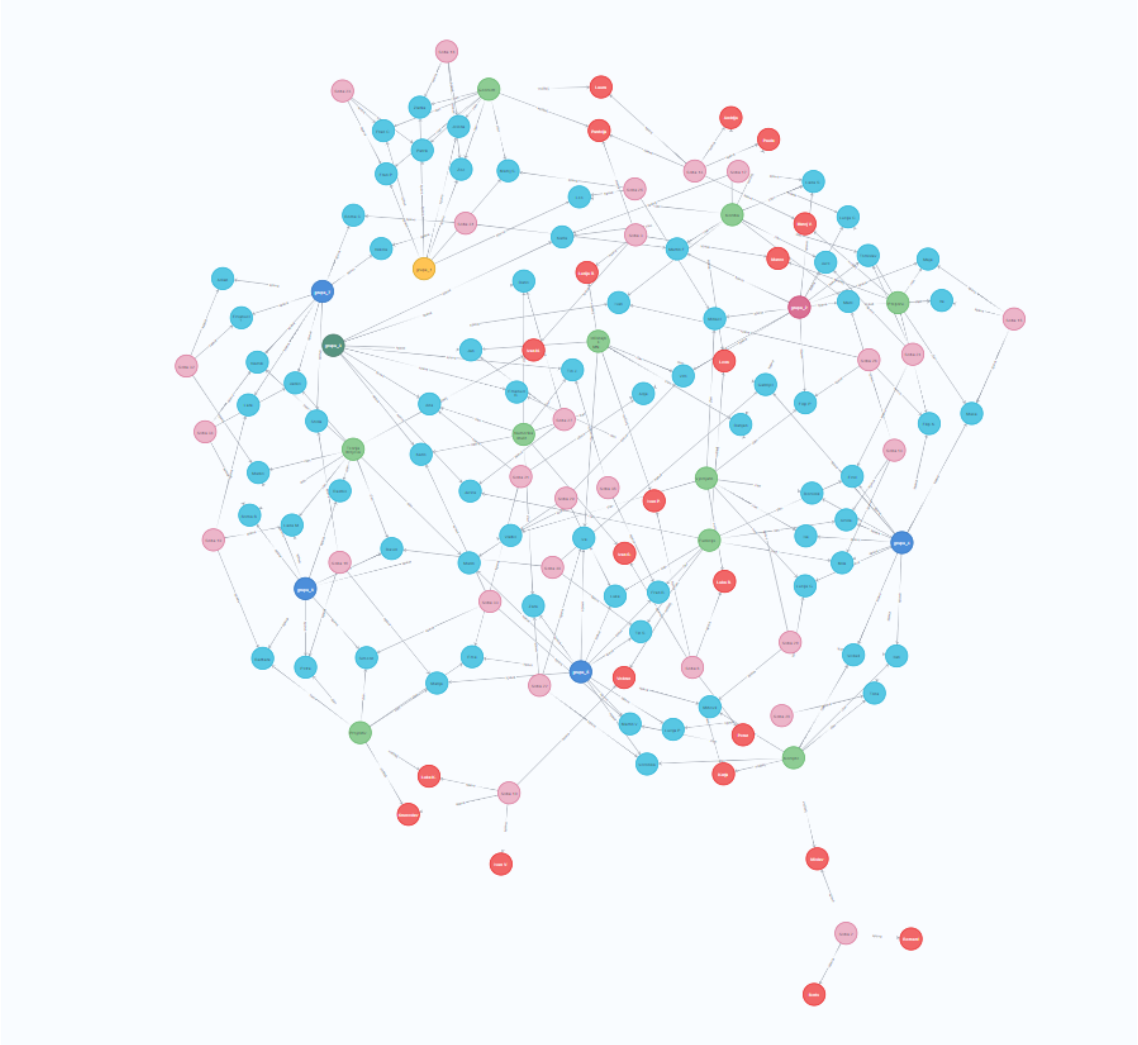
24.2.5. "Preporučujemo ovaj projekt"

Vrsta: primjena **Predavači:** Mateo Dujić, Matej Vojvodić

Cilj našeg projekta bio je upoznati se sa sintaksom programskog jezika Cypher i sustavom Neo4j koji se koriste pri radu sa grafovskim bazama podataka.

Prvih nekoliko dana smo se bavili teorijom, naučili imenovati vrste grafova i osnovne pojmove vezane uz njih (poput vrhova, usmjerenih bridova, klika, šetnja...), te smo se upoznali sa funkcijama MATCH, CREATE i drugim korisnim pri radu u grafovskim bazama podataka.

Zatim smo na drugoj polovici uspjeli sve podatke o učenicima i mentorima s kampa spojili u graf koji prikazuje koji učenici su bili u istim sobama, grupama predavanja, projektima, tko je od mentora bio odgovoran za njih, koja je predavanja držao... Koristeći taj graf, uspjeli smo predložiti osobe koje bi bile dobro društvo drugim grupama osoba.



P.S. Definitivno preporučamo ovaj projekt! :)

24.2.6. Funkcijske jednadžbe

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Vedran Cifrek, Leon Križanić

Funkcijske jednadžbe su zadaci koji se pojavljuju na olimpijadama iz matematike, i to su jednadžbe u kojima su nepoznanice cijele funkcije, a ne samo brojevi kao u običnim jednadžbama. Npr:
Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f\left(f(x)+y\right) = 2x + f\left(f(y)-x\right)$$

za sve realne brojeve x i y.
U svrhu rješavanja tih zadataka definirali smo posebna svojstva koja neke funkcije imaju:

- injektvnost
- surjektivnost
- parnost
- neparnost

Dokazavali smo da neke funkcije iz zadataka imaju ova svojstva, te smo ih dalje primjenjivali da bi zaključuli više o funkciji.
Još smo promatrali koji su dovoljni uvjeti da ako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu $f(x+y) = f(x)+f(y)$, ona mora biti oblika $f(x) = c \cdot x$ gdje je $c \in \mathbb{R}$ bilo koja konstanta.

24.2.7. Numerika i društvo

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavač:** Ivan Sinčić

Na projektu Numerika i društvo bavili smo se problemom aproksimiranja konačnog skupa podataka za što smo pronalazili odgovarajuće metode.
Počeli smo ponavljanjem osnovnih pojmova vezanih uz funkcije poput domene i kodomene, svojstava injektivnosti i surjektivnosti, te smo naučili nekoliko novih kao što su neprekidnosti funkcije i derivabilnosti. Dalje smo se bavili polinomima i derivacijama. Za svaki skup od $n+1$ točaka u ravnini s različitim x koordinatama postoji jedinstveni polinom n-tog stupnja koji prolazi tim točkama, a mi smo ga određivali trima metodama — rješavanjem sustava jednadžbi, Lagrangeovim i Newtonovim oblikom interpolacijskog polinoma. Pri određivanju Newtonovog oblika polinoma koristili smo se podijeljenim razlikama. Zaključili smo da je rješavanje običnih sustava jednadžbi najneučinkovitija metoda od tih triju. Interpolacijski polinomi imaju veliku grešku pri aproksimiranju nekih funkcija, stoga se koristimo drugim metodama aproksimacije poput linearne i kubne interpolacije po dijelovima te diskretne metode najmanjeg kvadrata pri čemu smo se upoznali s parcijalnim derivacijama.
Zadovoljni smo izborom teme za projekt i na njemu smo se odlično zabavili.

24.2.8. Komba

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Nika Utrobičić, Paula Horvat, Andrija Tomorad

Prebrojavanja nam nisu baš jača strana
u rješenjima smo imali puno mana
Zato došli smo na projekt Komba
I bilo nam je baš bomba

Paula, Andrija i Nika
Kombini ponos i dika
Naučili smo baš puno novih stvari
Da napokon netko i za kombu mari

Đaci smo u prosjeku prvaši
Ali nas više komba ne plaši
Kombu preporučujemo svima
Tko imalo pameti ima

24.2.9. Kompresija slika

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavači:** Mislav Brnetić, Katja Varjačić

Cilj našeg projekta bio je upoznati se s osnovnim pojmovima linearne algebre na primjeru kompresije slika. Krenuvši od osnovnih definicija i pravila postepeno smo poboljšavali naše razumijevanje kompresije slika, koja je nužna da bi što više fotografija ili videozapisa bilo moguće pohraniti u memoriju računala.
Postupak koji smo proučavali temeljen je na SVD dekompoziciji (singular value decomposition), za čije je upoznavanje prvo trebalo razumjeti koncepte poput polja, vektorskih prostora, baza, sustava izvodnica, matrica i operacija nad njima, determinanti, svojstvenih vrijednosti te svojstvenih vektora. Crno bijele slike interpretirali smo kao matrice realnih brojeva. Smanjivanjem ranga odnosno broja linearno nezavisnih redaka matrice bilo je moguće uz mali gubitak na vizualnoj kvaliteti slike zauzeti značajno manje memorije pri njenom spremanju.
Na kraju projekta napisali smo program kojim smo uspoređivali izglede slika dobivenih variranjem parametara kompresije.

24.2.10. Vjerojatnost i statistika

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavač:** Luka Bulić Bračulj

Na ovom projektu učili smo o vjerojatnosti (s malo kombe) i statistici. Krenuli smo bez ikakvog predzanja u statistici i s malo znanja o vjerojatnosti. Kroz 5 puta što smo imali projekt opismenili smo se u jezicima statistike i vjerojatnosti te naučili neke koncepte u njima.
Više smo učili teoriju nego što smo radili na primjerima u kojima smo manje radili s brojevima, a više s algebarskim izrazima.
Sada možemo drugima tumačiti neke osnovne principe i oznake u statistici koje do sada nismo znali ili smo i krivo tumačili kao i većina ljudi.
Nakon što smo naučili teoriju, primjenili smo je provodeći anketu i analizirajući ju. Studirali smo statistiku i iz našeg iskustva je statistika veoma teška i stvarno se istinski divimo ljudima koji ju rade.

Dio V.

Završne riječi

25. Završno

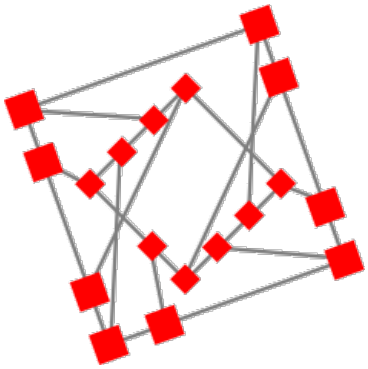
25.1. Zahvale

Organizacija Ljetnog kampa bila je kao i svake godine zahtjevna i nepredvidljiva, no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su nam u tome pomogli na bilo koji način. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jednog Ljetnog kampa.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu i Srednjoj školi "Braća Radić", koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Kaštel Štafiliću.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim donatorima: Photomath, HashCode, Stype te Jane Street. Posebno želimo zahvaliti i Hrvatskom matematičkom društvu i Ministarstvu znanosti i obrazovanja. Omogućili ste da se kamp održi, ali i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše udruge.

MINISTARSTVO ZNANOSTI
I OBRAZOVANJA
REPUBLIKE HRVATSKE



photomath
smart camera calculator

Jane Street

HashCode

Od srca zahvaljujemo i predavačima popularno znanstvenih predavanja Ivici Puljku, Danielu Paleki i Borni Vukorepi na tome što su kroz svoja predavanja našim polaznicima pružili znanja iz prakse te ih zainteresirali za daljnje bavljenje znanošću.

Naravno, kamp ne bi bio moguć bez svih mentora koji su organizirali i održali još jedan Ljetni kamp. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i kada kamp završi.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem bez obzira na okolnosti. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv potvrđuje da ono što radimo u MNM-u i na Ljetnom kampu zaista čini razliku.

Veliko vam hvala na svemu!

25.2. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: https://mnm.hr/

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.