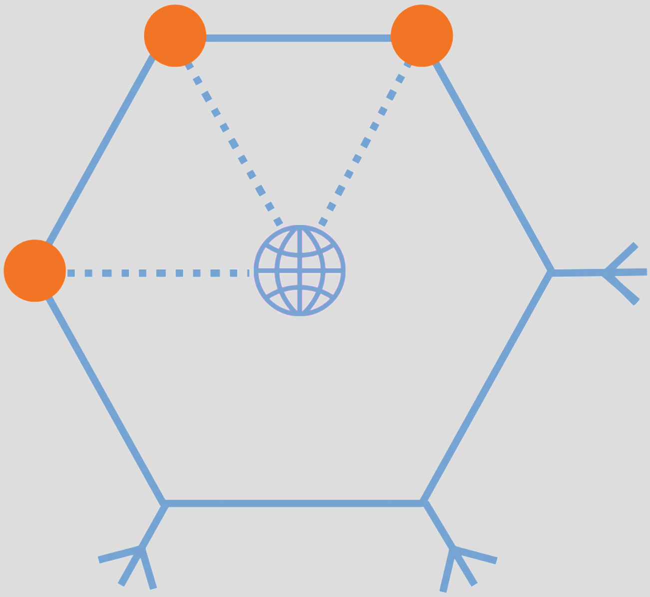


Online Zimska škola matematike

2. - 10. 1. 2021.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI

Marin Getaldić

Sadržaj

1. Poglavlje

Predgovor

U ovoj knjizi mogu se pronaći predavanja sa Zimske škole matematike 2021., zajedno sa zadacima te većinom hintova i rješenja.

Osnovna namjera bila je omogućiti nastavak rada i nakon zimske škole, jer su sama predavanja vremenski ograničena te je nemoguće proći kroz sve zadatke, a za uspješno razumijevanje bilo koje teme, potrebno je vježbati. Također, knjiga može poslužiti kao izvor zadataka za samostalne pripreme.

Knjiga sadrži i kratku povijest same udruge i kampova kao i opis formata kampa, zajedno sa zadacima s natjecanja održanih na kampu.

U slučaju da uočite bilo kakve pogreške, bili bismo zahvalni kada bi iste javili na sljedeću e-mail adresu: `mnm@mnm.hr`

Autori,
10. siječnja 2021.

2. Poglavlje

Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tokom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkom PMF-u, gostovanjima udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Još od 2010. godine, udruga MNM održava ljetne matematičke kampove koji učenicima pružaju priliku da jedan tjedan ljetnih praznika provedu usvajajući nova matematička znanja. Zbog uspjeha ljetnog kampa i interesa učenika nastala je ideja o Zimskoj školi, "mlađoj sestri" Ljetnog kampa, sa željom da i preko zimskih praznika održimo nešto slično.
Ta ideja se i ostvarila početkom 2014. godine kad je održana prva zimska škola u Domu Crvenog Križa na Sljemenu. U školskoj godini 2014./2015. organizaciju provodimo u suradnji s Hrvatskim savezom informatičara (HSIN), a od 2016. godine Zimska škola održava se u Ogulinu. Iako su svojim sadržajem jako slični, Zimska škola je nešto više usmjerena na pripreme za nadolazeća natjecanja nego Ljetni kamp, upravo zbog toga što prethodi početku održavanja hrvatskih matematičkih natjecanja u siječnju.
Uz razne aktivnosti i povremene snježne radosti, na Zimskoj školi matematike iz godine u godinu učenike u ugodnoj atmosferi pripremamo za razne matematičke izazove te se nadamo da ćemo tako i nastaviti.

Slika 2.2: Zimska škola 2016.

Slika 2.3: Zimska škola 2015.

2.3. Ovaj kamp

Nažalost, zbog epidemioloških razloga Zimska škola 2021. održala se online. Sudionici su na Zimskoj školi sudjelovali preko platforme Discord i slušali predavanja preko Zoom-a. Usprkos očekivanom slabijem interesu zbog online formata, ova Zimska škola okupila je uvjerljivo najveći broj sudionika do sad budući da nismo bili ograničeni smještajnim kapacitetima.

2.4. Aktivnosti na kampu

Glavne aktivnosti i ove Zimske škole bila su predavanja koja su obrađivala određene teme natjecateljske matematike. Iako je trajala čak dulje nego inače, održana su samo 4 predavanja, ali smo zato imali više drugih aktivnosti.

Raspored je upotpunjen ekipnim natjecanjem relijem i individualnim ELMO-om koje su sastavili mentori naše Udruge. Oba natjecanja su na neki način vrlo korisna učenicima. Reli potiče timski rad, komunikaciju i sposobnost prezentacije rješenja, a ELMO je svojevrsna simulacija koja je uvijek dobrodošla ozbiljnim natjecateljima.

Na ovoj Zimskoj školi učenici su imali priliku poslušati čak dva popularno - znanstvena predavanja. Prvo PZ predavanje održao je prof. Miljenko Huzak, profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, na temu Modeliranja rasta tumorskih sferoida. Na drugom PZ predavanju prof. Josip Tambača, također profesor Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, učenike je upoznao s matematičkim modeliranjem stentova. Oba profesora uključena su u projekt BioMedMath kojim se na zagrebačkom PMF-u radi na pokretanju novog diplomskog studija.

Za zainteresirane učenike organizirali smo i druženje s mentorima Udruge koji studiraju u inozemstvu od kojih su saznali mnoge korisne informacije i praktične savjete o odabiru i upisu studija. Umjesto kviza ove smo godine organizirali Estimathon, natjecanje u procjenjivanju, a autor zadataka bio je mentor Luka Banović.

Unatoč tome što je Zimska škola održana online, ipak smo pronašli načine za druženje (šahovski turnir izazvao je oduševljenje), što je sudionicima omogućilo međusobno povezivanje i uzajamno poticanje na daljnji napredak. Prijateljstva s ljudima sličnih interesa kakva se često sklapaju na kampovima odlična su motivacija polaznicima da se tijekom cijele školske godine nastave baviti matematikom.

2.5. Popis mentora

Tea Arvaj
Luka Banović
Matija Bašić (gost predavač)
Mislav Brnetić
Maja Drmač
Mateo Dujić
Matej Ljubičić
Petar Nizić-Nikolac
Ivan Novak
Lucija Relić
Borna Šimić
Matko Šimić
Tadej Petar Tukara
Nika Utrobičić

2.6. O predavanjima

Glavni dio kampa su predavanja u trajanju od četiri sata, s pauzom nakon dva sata. Učenici su bili podijeljeni u četiri grupe, uglavnom po dobi/natjecateljskim ambicijama, od osnovnoškolaca do olimpijske grupe. Ove godine za svaku je grupu održano 4 predavanja.
Predavači su uglavnom bivši natjecatelji koji su i sami bili učenici na kampovima pa su upoznati s čestim idejama natjecateljskih zadataka. Bit predavanja jest prenijeti ideju rješavanja određenog dijela zadataka, a onda je na učenicima da kroz odabrane zadatke tu ideju razrade i provježbaju. Također, uz predavanja, pripremljeni su hintovi koji mogu pomoći u slučaju da netko zapne, a i rješenja ako netko želi provjeriti vlastito rješenje.

Dio I

Zadaci s predavanja

3. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

3.1. A1: Faktorizacije i sustavi - Tea Arvaj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na natjecanjima u osnovnoj i srednjoj školi se često pojavljuju nelinearne jednadžbe i sustavi jednadžbi s dvije (ili više) nepoznanica. Danas ćemo proći neke od najkorisnijih metoda za rješavanje takvih zadataka.

Faktorizacija: ponekad nam olakšava rješavanje jednadžbe, pogotovo ako je na desnoj strani 0. Ponovimo algebarske identitete koji se najčešće koriste:

- kvadrat binoma - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- kvadrat trinoma - $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- razlika kvadrata - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- zbroj i razlika kubova - $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Uz ove identitete, korisna su nam svojstva asocijativnosti, distributivnosti, komutativnosti te naravno izlučivanje zajedničkog faktora (ako možemo).
Kvadratne jednadžbe faktoriziramo *metodom srednjeg člana*. Recimo da imamo izraz oblika $x^2 + mx + n$, gdje su m i n neki zadani koeficijenti. Neka su a, b brojevi takvi da vrijedi $a + b = m$ i $ab = n$, tada izraz možemo zapisati kao

$$x^2 + (a + b)x + ab \iff x^2 + bx + ax + ab \iff x(x + b) + a(x + b) \iff (x + a)(x + b).$$

Postoji još i metoda *nadopunjavanja do kvadrata*: jednadžbu $ax^2 + bx + c = d$ možemo napisati kao kvadrat binoma da dobijemo jednadžbu $(x + r)^2 = s$ pa su tada dva (ne nužno različita) realna rješenja $x = \pm\sqrt{s} - r$, ukoliko je $s > 0$.

Sustavi jednadžbi. Sustav m jednadžbi s n nepoznanica je skup m jednadžbi bilo kakvog oblika, sa sveukupno n nepoznanica. Rješenje sustava je uređena n-torka koja zadovoljava svih m jednadžbi.
Korisne stvari kod rješavanja sustava jednadžbi su:

- supstitucija ili izražavanje nepoznanica jedne preko druge
- međusobno zbrajanje, oduzimanje, množenje jednadžbi - da pokratimo neke nepoznanice ako možemo
- faktorizacija

Napomena: ne zaboravite provjeriti rješenja! Kad radimo neke operacije (npr. kvadriranje) može se dogoditi da dobijemo neka nova rješenja koja nisu rješenja originalne jednadžbe.

Lakši zadaci

1. Nađi sva realna rješenja sustava

$$3x + 5y = 8$$
$$7x - 2y = 5.$$

2. Odredite vrijednost izraza $x^2+y^2+z^2$ ako je poznato da je $x+y+z=13$, $xyz=72$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$.
3. Dokažite da je za svaki prirodan broj n broj n^3-n djeljiv sa 6.
4. Dokaži ako je jedan od pribrojnika u izrazu $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ jednak nuli, tada je cijeli izraz jednak nuli.
5. Broj 10 napiši kao zbroj dvaju brojeva čiji se kvadrati odnose kao $1:16$.

Umjereni zadaci

6. Izvedi formulu za rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ za $a,b,c\in\mathbb{R}$ i $a\neq 0$.
7. Rano ujutro Ana je automobilom krenula iz mjesta A u mjesto B, a Branka motociklom u isto vrijeme iz mjesta B u A, svaka svojom stalnom brzinom. Susrele su se točno u podne i nastavile voziti bez zaustavljanja. Ana je u mjesto B stigla u 16 sati, a Branka u mjesto A u 21 sat. U koliko su sati krenule na put ?
8. Gargamel je uhvatio N Štrumfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Papu Štrumfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumfova u prvoj vreći se smanjila za 0.8 milimetara, a prosječne visine Štrumfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 0.5 milimetara i 0.8 milimetara. Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumfova, odredite N.
9. Opseg pravokutnog trokuta je 18, a površina 9. Kolika mu je duljina hipotenuze?
10. Nađi sve prirodne brojeve (x,y) za koje je x^3+y^3 prost broj.
11. a) Faktoriziraj izraz a^4+4b^4 (identitet Sophie Germain).

    b) Nađi sve prirodne brojeve a,b za koje je a^4+4b^4 prost broj.
12. a) Faktoriziraj izraz a^n-b^n, gdje je n prirodan broj.

    b) Dokaži da je 2021^n-1 djeljivo s 2020 za svaki prirodan broj n.
13. Odredi vrijednost izraza $a^3+b^3+c^3-3abc$ ako je poznato da je $a+b+c=0$.

Teži zadaci

14. Odredi sve uređene trojke (x,y,z) realnih brojeva za koje vrijedi
$$x^2+y^2=5$$
$$xz+y=7$$
$$yz-x=1.$$
15. Odredi sve trojke realnih brojeva (x,y,z) takve da vrijedi
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$
16. Odredite sve uređene četvorke realnih brojeva (a,b,c,d) za koje vrijedi
$$\begin{aligned}(b+c+d)^{2010}&=3a\\(a+c+d)^{2010}&=3b\\(a+b+d)^{2010}&=3c\\(a+b+c)^{2010}&=3d\end{aligned}$$
17. Nađi vrijednost izraza $3x^2y^2$ ako su x,y cijeli brojevi takvi da je $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$.

3.2. C1: Dirichletov princip - Matko Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Dirichletov princip (engl. Pigeonhole principle) jedan je od osnovnih kombinatornih principa. Osnovna varijanta Dirichletovog principa glasi:

Ako n + 1 kuglicu raspoređujemo u n kutija, onda sigurno postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze (barem) dvije kuglice.

Dokaz ove tvrdnje provodi se kontradikcijom. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, odnosno da se u niti jednoj kutiji ne nalaze dvije kuglice. Tada se u svakoj kutiji može nalaziti maksimalno jedna kuglica, odnosno ukupno n kuglica. Međutim tvrdnja kaže da raspoređujemo $n + 1$ kuglicu pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, sigurno se u barem jednoj kutiji nalaze dvije kuglice.

Primijetimo da tvrdnja vrijedi i za bilo koji broj kuglica veći od $n + 1$.

Također primijetimo da princip možemo poopćiti te tada glasi:

Ako nk + 1 kugicu raspoređujemo u n kutija, onda sigurno postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi (barem) k + 1 kuglica.

Primjer 1. Dokažite da u skupini od 13 ljudi postoji barem dvoje ljudi rođenih u istom mjesecu.

Rješenje. U ovom primjeru ljudi predstavljaju kuglice, a mjeseci kutije, tj. broj kutija, $n = 12$, broj kutija, $m = 13$. Tada po Dirichletovom principu zbog $m = n + 1$ slijedi tvrdnja zadatka.

Primjer 2. U učionici se nalazi 10 klupa, a razred se sastoji od 23 učenika. Dokaži da za nekom klupom sjede 3 učenika

Rješenje. U ovom primjeru učenici predstavljaju kuglice, a klupe kutije, tj. $n = 10$, $m = 23$. Tada po Dirichletovom principu zbog $m = kn + l$, odnosno $23 = 2 \cdot 10 + 3$ slijedi tvrdnja zadatka.

Primjer 3. Unutar kvadrata duljine stranice 1 nalazi se pet obojanih točaka. Dokažite da postoje 2 od tih 5 točaka takve da je udaljenost među njima manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rješenje. Spojimo polovišta stranica i tako podijelimo kvadrat na četiri $(n - 1)$ manja, stranice duljine 0.5. S obzirom na to da u početni kvadrat (podijeljen na 4 manja) moramo smjestiti 5 točaka, znamo da će se u barem jednom malom kvadratu nalaziti barem dvije točke. Najudaljenije točke kvadrata su one na suprotnim krajevima njegove dijagonale, a dijagonala malog kvadrata duga je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ stoga zaključujemo da postoje barem dvije točke čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lakši zadaci

1. U ladici se nalaze crvene i plave čarape. Mrak je i Antun se sprema za put na kamp, ali ne želi upaliti svjetlo u sobi da ne probudi brata. Izvlači jednu po jednu čarapu i ne vraća ih u ladicu. Koliko najmanje čarapa mora izvući iz ladice da bude siguran da ima jedan istovrstan par?

   Napomena. Koliko bi čarapa morao izvući kad bi uz plave i crvene imao i žute čarape. Koliko kad bi imao 10 vrsta čarapa? Koliko za n vrsta čarapa?

2. Dokažite da ako odaberemo 5 različitih brojeva iz skupa 1, 2, ..., 7, onda među odabranima postoje dva koja u zbroju daju 8.

3. Državno povjerenstvo ove je godine bilo darežljivo pa je pozvalo čak 32 učenika osmih razreda. Natjecanje se sastoji od 5 zadataka. Dokažite da je barem 6 učenika riješilo isti broj zadataka.

4. Odabrana su 4 prirodna broja. Dokažite da postoje dva broja čija je razlika djeljiva s 3.

   Napomena. Dokaži da među $n + 1$ prirodnih brojeva moraju postojati dva čija je razlika djeljiva s n.

5. U konveksnom mnogokotu s 1998 stranica duljine stranica su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 1 997 000. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.

Umjereni zadaci

6. U svako polje 3x3 tablice upišemo jedan od brojeva -1, 0, 1 i izračunamo zbrojeve po retcima, stupcima, i dvije glavne dijagonale. Dokažite da će uvijek dvije od tih suma biti jednake.

7. 16 vitezova okruglog stola rješavalo je zadatke iz kombinatorike, sjedeći jednako udaljeni jedni od drugih. Ispred svakog viteza stajala je kartica s njegovim imenom. Nakon višesatnog rješavanja otišli su na pauzu, vrativši se za stol, smušeni od odmora, posjedali su ne obazirući se na kartice s imenima. Ubrzo su shvatili da niti jedan ne sjedi na svome mjestu. Može li se okretanjem stol dovesti u takav položaj da ispred barem dva viteza stoje kartice s njihovim imenima.

8. Yusuf i njegov đedo su nakon susreta sa zaraženim zabijačem dugova u prodavnici Game završili u samoizolaciji pa sada krate vrijeme smišljajući razne kartaške zagonetke. Đedo je na jednu kartu napisao broj 1, na dvije karte broj 2, na tri karte broj 3, ..., i na 50 karata broj 50 (ukupno ima $1+2+3+\ldots+50=1275$ karata u špilu). Yusuf ima dobar osjećaj. Ide ućoravo naslijepo i neće karte ni gledat. Koliko karata Yusuf mora izvući iz špila da bi bio siguran da ima 10 karata na kojima piše isti broj?

9. U galaksiji 82n371c postoji n, neparan broj planeta. Nakon velikog intergalaktičkog rata bilo je potrebno uspostaviti mir te su matematičari planeta p374 smislili plan. Dogovorili su se da će na svakome od tih n planeta postaviti astronoma koji promatra njemu najbliži planet i osigurava da se žitelji promatranog planeta ne naoružavaju. Udaljenosti među planetima su različite (niti jednom planetu ne postoje dva jednako blizu). Dokažite da plan ima manu te da postoji planet koji nitko ne promatra.

   Napomena. Bi li plan bio uspješan kada bi broj n bio paran?

10. Na matematičkom kampu okupilo se 500 učenika. Dokažite da postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj poznanika (poznanstva su uzajamna).

11. U košari se nalaze jabuke, naranče i banane. Maja ne vidi košaru, ali želi biti sigurna da je u njoj ili barem 8 jabuka ili barem 6 banana ili barem 9 naranči. Odredi minimalan broj voća u košari takav da u njoj sigurno bude ili barem 8 jabuka ili barem 6 banana ili barem 9 naranči.

Teži zadaci

12. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Poznanstva su uzajamna.

13. 9 zadanih pravaca dijeli kvadrat na dva četverokuta čije se površine odnose kao 2:3. Dokažite da najmanje 3 od tih 9 pravaca prolazi kroz neku istu točku.

14. Uzmimo neki prirodan broj n. Dokažite da se može pronaći broj oblika 11.....1100......00 koji je djeljiv s brojem n.

15. Dano je $n+1$ prirodnih brojeva manjih ili jednakih od $2n$. Dokažite da postoje dva broja takva da je jedan djelitelj drugog.

16. Dokažite da u skupu od 10 različitih dvoznamenkastih brojeva možemo naći dva disjunktna podskupa čiji članovi imaju istu sumu.

3.3. G1: Angle chase, sukladnost i sličnost - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Angle chase je "metoda" u kojoj je cilj, korištenjem nekih bitnih svojstava, odrediti veličine određenih kutova. U svakom zadatku uvijek je dobro odrediti veličine što više kutova jer se iz njih mogu dobiti neki novi zaključci koji mogu dovesti do rješenja.

Prisjetitimo se sljedećih tvrdnji:

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je 180°), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni
- zbroj unutarnjih kutova u trokutu je 180°, u četverokutu 360°, a u općenitom mnogokutu s n stranica $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$)
- zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je 360°
- u jednakostraničnom trokutu svi kutovi su jednaki, a u jednakokračnom su kutovi uz osnovicu jednaki
- za dva trokuta koja su sukladna, vrijedi da su im odgovarajuće stranice jednake duljine i odgovarajući kutovi jednaki, za dva trokuta koja su slična, vrijedi da su im duljine odgovarajućih stranica u istom omjeru, a kutovi su im jednaki
- poučci o sukladnosti (SSS, SKS, KSK, SSK - dvije stranice i kut nasuprot veće) i sličnosti (KK, SKS, SSS) trokuta
- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta
- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta
- u pravokutnom trokutu je središte opisane kružnice polovište hipotenuze, a u jednakostraničnom trokutu se središte opisane i upisane kružnice poklapaju (zajedno s ortocentrom i težištem)
- paralelogram: dijagonale se raspolavljaju, nasuprotni kutovi su jednaki, a susjedni su suplementarni; za romb još vrijedi da se dijagonale sijeku pod pravim kutem
- trapez: kutovi uz isti krak su suplementarni, srednjica je paralelna s osnovicama; u jednakokračnom trapezu su još kutovi uz istu osnovicu jednaki te su dijagonale jednake duljine i raspolavljaju se
- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni (središnji kut nad nekim lukom je kut nad tim lukom s vrhom u središtu kružnice, a obodni s vrhom u točki kružnice koja se ne nalazi na tom luku)
- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)
- u pravokutnom trokutu je zbroj kvadrata duljina stranica kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze (Pitagorin poučak), vrijedi obrat (ako ta jednakost vrijedi za stranice trokuta, tada je taj trokut pravokutan - ovo je korisno za uočiti prave kutove)
- kut između tangente i polumjera u diralištu je pravi

Uvodni zadaci

1. Dokažite da je vanjski kut trokuta jedanak zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta.
2. Dokažite da je središnji kut kružnice dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta nad istom tetivom.
3. Zadan je $\triangle ABC$ i tangenta na njemu opisanu kružnicu kroz točku B. Dokažite da je tada kut između te tangente i tetive $\overline{BC}$ jednak obodnom kutu $\angle BAC$ (*kut između tangente i tetive*).
4. Neka je $\triangle ABC$ trokut u kojem je $\angle CAB = 20°$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $\angle CDB = 40°$, odredite veličinu kuta $\angle ABC$.

Umjereni zadaci

5. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je $MN \perp AB$.

6. Zadana je kružnica k, točka T izvan nje, te dvije različite tangente iz T na kružnicu koje kružnicu diraju u točkama A i B. Dokažite da je $|TA| = |TB|$.

7. U raznostraničnom trokutu ABC simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka je M točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|BM| = |BD|$, a N točka na produžetku stranice $\overline{AC}$, preko vrha C, takva da je $|CN| = |CD|$. Dokažite da su kutovi $\angle DMA$ i $\angle NDA$ jednaki.

8. Zadan je tupokutni trokut ABC s tupim kutom u vrhu B. Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C siječe pravac AB u točki D, a simetrala vanjskog kuta pri vrhu A siječe pravac BC u točki E. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako vrijedi da je $|AE| = |AC| = |CD|$.

9. Neka su točke A i B sjecišta kružnica k_1 i k_2. Neka su pravci a i b kroz točku A takvi da a siječe k_1 i u točki C, a k_2 i u točki D i b siječe k_1 i u točki E, a k_2 i u točki F, pri čemu točke C, D, E, F pripadaju istoj poluravnini u odnosu na pravac AB i točka E se nalazi unutar kuta $\angle BAC$. Dokaži da je $\triangle BEC \sim \triangle BFD$.

10. Dan je pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici $\overline{BC}$ koja sadrži točku C. Polukružnica dira stranicu $\overline{AB}$. Koliki je polumjer upisane polukružnice?

11. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

12. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

13. Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?

Teži zadaci

14. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokažite da je pravac BD simetrala kuta $\angle CBA$.

15. U trokutu ABC je $\angle ABC = 45°$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka D tako da je $|CD| = 2|BD|$ i $\angle BDA = 120°$. Odredite veličine kutova trokuta ABC.

16. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredite kutove danog trokuta.

17. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

18. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $\angle ABC + \angle CDA = 180°$. Dokažite da se tom četverokutu može opisati kružnica.

3.4. N1: Prosti brojevi - Matko Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

- **Definicija:** Kažemo da je prirodan broj p prost broj ako ima točno dva (različita) djelitelja (konkretno, to su 1 i p). U suprotnom kažemo da je broj složen.
- **Fundamentalni teorem aritmetike:** Svaki prirodan broj n ima jedinstvenu faktorizaciju na proste faktore.

  Preciznije, za svaki prirodni broj n postoje (različiti) prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i eksponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ takvi da vrijedi
  $$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$
- 2 je jedini paran prost broj, ostali su neparni
- Svaki prost broj veći od 3 se može zapisati u obliku $6k - 1$ ili $6k + 1$.
- **Euklidova lema:** Neka je p prost broj i neka $p|ab$. Tada $p|a$ ili $p|b$.
- **Euklidov teorem:** Skup prostih brojeva je beskonačan.
- **Najveća zajednička mjera:** oznaka za zajedničku mjeru brojeva a i b je $M(a, b) = m$ gdje je m najvći broj sa svojstvom $m|a$ i $m|b$.
- **Euklidov algoritam:** $M(a, b) = M(b, a)$, $M(a, b) = M(a, b - a)$, $M(a, 1) = 1$.
- **Relativno prosti brojevi:** brojevi a i b sa svojstvom $M(a, b) = 1$.
- Dva uzastopna broja su relativno prosta.

Lakši zadaci

1. Dokaži da za svaki prost broj p veći od 3 vrijedi $24|p^2 - 1$
2. Dokaži da je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2020 i 2021 jednak $2020 \cdot 2021$.
3. Dokaži da ima beskonačno mnogo prostih brojeva.

Umjereni zadaci

4. Ako su brojevi p i $p + 10$ i $p + 14$ prosti, odredi p.
5. Odredi sve proste brojeve p takve da je $14p^2 + 1$ također prost.
6. Dokaži da ako su brojevi p i $p^2 + 2$ prosti, onda je i $p^3 + 4$ prost.
7. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^4 + 4$ prost broj.

   Napomena. Formula za rješavanje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ glasi $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
8. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?

Teži zadaci

9. Pronađi sve proste brojeve p, q, r takve da vrijedi jednakost $p^q = r - 1$.
10. Pokažite da postoji proizvoljan broj uzastopnih složenih brojeva.
11. Dokaži da je razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ do kraja skraćen.

4. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

4.1. A2: KAGH - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

KAGH nejednakosti (nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom) su jedne od temeljnih nejednakosti. Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu (za n brojeva označenih $x_1, x_2, ..., x_n$):

- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost **za pozitivne realne brojeve**:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Općenito, za nejednakosti vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Osim za pozitivne realne brojeve, KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.
Jednakost (za sve KAGH nejednakosti) vrijedi (samo) za:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Dokaz.
Prvo dokazujemo AG nejednakost.
Dokažimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{2} &\geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ \iff (x_1+x_2)^2 &\geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff x_1^2+x_2^2+2x_1 \cdot x_2 &\geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff x_1^2+x_2^2-2x_1 \cdot x_2 &\geq 0 \\ \iff (x_1-x_2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

što vrijedi.
Lako se dokaže kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.
Dokaz za $n > 2$ ostavljam za vježbu (hint: pokušajte primijeniti ovaj dokaz na $n = 4$)
Dokažite KA i GH nejednakost.

Uvodni zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z za koje je $x + y + z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1+a^x)(1+a^y)(1+a^z) \geq 8$$

   Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

   Kada vrijedi jednakost?

5. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) \geq 2^n$$

   Kada vrijedi jednakost?

6. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p, q vrijedi nejednakost:

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq$$

Umjereni zadaci

7. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

8. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

9. Za pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$$

10. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b i prirodan broj n vrijedi nejednakost:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leq\frac{a+nb}{n+1}$$

12. Ako je $b>a>0$, odredite minimalnu vrijednost izraza:

$$b+\frac{1}{a(b-a)}$$

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2a^2+2b+2c^2}+\frac{1+9c^2}{1+2a^2+2b^2+2c}<4$$

Teži zadaci

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2c-1}\leq 3$$

15. Dani su realni brojevi $x_0, x_1, ..., x_n$ takvi da vrijedi $x_0>x_1>...>x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$x_0-x_n+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\geq 2n$$

16. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3}\leq 4$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$$

18. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složimo kutiju bez poklopca. Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.

4.2. C2: Indukcija - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Matematička indukcija je jedan od Peanovih aksioma kojima je definiran skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Navodi sljedeće: ako skup prirodnih brojeva sadrži neki broj n, sadrži i broj $n+1$ (njegovog sljedbenika) pa ako krenemo od prvog prirodnog broja 1 i od svakog broja prijeđemo na njegovog sljedbenika, proći ćemo cijeli skup $\mathbb{N}$.
Iz ovoga slijedi **princip matematičke indukcije**, kojeg koristimo u zadacima kada trebamo dokazati da neka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n. On ima tri dijela:

1. **baza indukcije** (T_1): pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **induktivna pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći induktivnu pretpostavku, pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$

Kako tvrdnja vrijedi za 1, zbog indukcije vrijedi i za $1+1=2$ pa za $2+1=3$, $3+1=4$, itd. dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.

Indukcija se zna često u zadacima *ne pojavljivati* u klasičnom obliku objašnjenom gore. Ona ima nekoliko "varijacija", od kojih su najkorisnije:

- poopćeni princip matematičke indukcije: ako dokazujemo neku tvrdnju za prirodne brojeve $n \geqslant n_0$, baza indukcije je $n = n_0$ te u 2. koraku pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za prirodan $k \geqslant n_0$,
- jaka indukcija: ponekad nam zbog strukture tvrdnje treba induktivna pretpostavka da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ te sve $n \leqslant k$,
- princip indukcije možemo prilagoditi za bilo koji konačni i prebrojivo beskonačni skup, npr. za parne brojeve ili za cijele brojeve: to možemo napraviti prilagođavanjem koraka indukcije.

Lakši zadaci

1. Dokaži da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Dokaži da je zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak n^2, tj. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
3. Dokaži da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Dokaži da je $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ za nenegativne cijele brojeve n i $a \neq 1$. (*formula za sumu geometrijskog niza*)
5. Dokaži da je $n! > 2^n$ za $n \geqslant 4$.

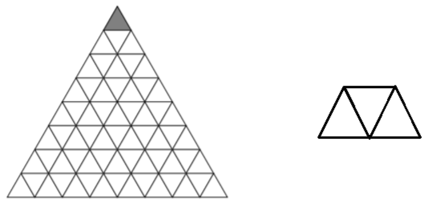
Umjereni zadaci

6. Zadan je niz brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takav da je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ te $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ za $n \geqslant 4$. Dokaži da je $a_n < 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
7. Neda ima pravokutnu tablu čokolade sastavljenu od n manjih "kockica" čokolade. Razbija tu tablu na dijelove tako da neki od dijelova koje ima prelomi po dužini ili širini uz označene rubove kockica, sve dok ne ostane s n potpuno razdvojenih kockica čokolade. Dokaži da će, bez obzira na strategiju, Neda to uvijek napraviti u točno $n-1$ poteza.
8. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva različitih od nule takav da vrijedi
$$x_n{}^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1, \qquad \forall n \geqslant 2.$$
Dokaži da izraz $\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}$ poprima istu vrijednost za svaki $n \geqslant 2$.
9. Neka je F_n Fibonaccijev niz definiran s $F_0 = 0, F_1 = 1$ te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geqslant 2$. Dokaži da je
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$
gdje su α i β rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

10. Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$. Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.

Teži zadaci

11. Barbara ima ploču u obliku jednakostraničnog trokuta sastavljenog od 4^n manjih trokuta te izbacuje trokutić s jednog od vrhova velikog trokuta (primjer za $n = 3$ je priložen). Dokaži da ostatak ploče Barbara može popločati dominama prikazanima ispod.



12. *Hanojski tornjevi* se sastoje od tri tornja, gdje se na prvom nalazi n diskova naslaganih jedan na drugi po veličini tako da je na dnu najveći, a na vrhu najmanji disk. Cilj je prebaciti diskove s prvog na treći toranj tako da u svakom potezu pomičemo *samo jedan* disk te da ni u jednom trenutku ne smijemo staviti veći disk na manji (dakle, na kraju završavamo s identičnim poretkom diskova kao na početku). Dokaži da se to može ostvariti u $2^n - 1$ poteza.

13. Neka je $a = \sqrt[2020]{2020}$ i neka je (a_n) niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geqslant 1$. Nađi najmanji prirodni broj n takav da je $a_n \geqslant 2020$.

14. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n + 1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

15. Na ploči je zapisano nekoliko prirodnih brojeva. Ivan igra igru: u svakom koraku bira neki broj n s ploče, briše ga i umjesto njega zapiše bilo koji niz prirodnih brojeva takav da je svaki od brojeva strogo manji od n. Ako obriše broj 1 s ploče, ne može napisati ništa umjesto njega. Dokaži da je ova igra konačna, odnosno da će Ivan u nekom trenutku završiti s praznom pločom.

4.3. G2: Karakteristične točke trokuta i tetivni četverokuti - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Za kvalitetno praćenje predavanja korisno je ponoviti neke osnovne pojmove i teoreme iz geometrije:

- simetrala dužine, simetrala kuta
- srednjica trokuta, opisana i upisana kružnica trokuta, visina, težišnica
- središnji i obodni kut
- poučci o sličnosti i sukladnosti trokuta
- Teorem o simetrali dužine: točka C leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.
- Teorem o simetrali kuta: točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova tog kuta.
- Teorem o srednjici trokuta: srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.
- Teorem o obodnom i središnjem kutu: središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.
- Talesov teorem: obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.
- Teorem o kutu između tangente i tetive: Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Znate li i dokazati navedene teoreme?

Primjer 1. Dokažimo Teorem o kutu između tangente i tetive.

Rješenje. Promatramo kružnicu k i njenu tetivu $\overline{AB}$ te tangentu t na kružnicu k u točki B. Neka je S središte kružnice k i C neka točka na kružnici različita od A i B. Vidimo da točka C određuje obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$.Označimo $|\angle ACB| = \gamma$. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $|\angle ASB| = 2\gamma$. Budući da je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan, vrijedi $|\angle ABS| = 90° - \gamma$, a jer je kut između polumjera $\overline{SB}$ i tangente pravi dobivamo da je kut između tangente i tetive jednak γ. $\square$

Karakteristične točke trokuta

U ovom predavanju promatrat ćemo sljedeće karakteristične točke trokuta:

- središte trokutu opisane kružnice O - sjecište simetrala dužina stranica trokuta
- središte trokutu upisane kružnice I - sjecište simetrala kuteva trokuta
- ortocentar trokuta H - sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta
- težište trokuta T ili G - sjecište težišnica trokuta

Za vježbu pokušajte dokazati ove osnovne činjenice o karakterističnim točkama:

1. Dokaži da se sve simetrale stranica trokuta sijeku u istoj točki koja je jednako udaljena od svih vrhova trokuta.
2. Dokaži da se sve simetrale kuta u trokutu sijeku u istoj točki koja je jednako udaljena od svih stranica trokuta.
3. Dokaži da se sva tri pravca koji sadrže visine trokuta sijeku u istoj točki.
4. Dokaži da se sve težišnice trokuta sijeku u istoj točki i ona dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha.

Tetivni četverokuti

U rješavanju geometrijskih zadataka vrlo često su od koristi i tetivni četverokuti i zato je dobro naučiti prepoznati ih u zadacima i znati primijeniti njihova svojstva.

Definicija. Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je 180°
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
  - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$
- **(Ptolomejev poučak)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Primjer 2. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.

Rješenje. Stranice trokuta zapravo su tangente na upisanu kružnicu, pa su kutevi $|\angle IEC| = |\angle IDC| = 90°$. Sada vidimo da četverokut IECD ima nasuprotne kuteve prave pa po karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $IECD$ tetivan. □

Lakši zadaci

1. Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu sa središtem O. Ako je $\angle ADO = \dfrac{\angle ADC}{2}$, $\angle DAO = \dfrac{\angle DAB}{2}$, $\angle DCB = 110°$ i $\angle ABC = 140°$, izračunaj veličini kuta $\angle AOD$.
2. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.
3. Dokažite da ako simetrale unutarnjih kuteva četverokuta tvore četverokut onda je taj (drugi) četverokut tetivan.
4. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
5. Točke P i Q su polovišta nasuprotnih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$. Dokaži da dužine $\overline{DP}$ i $\overline{BQ}$ dijele dijagonalu $\overline{AC}$ na tri sukladna dijela.
6. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.
7. Dokaži da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
8. U šiljastokutnom trokutu ΔABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ΔABC leži na visini $\overline{BN}$.

Teži zadaci

9. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.
10. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

11. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

12. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Pravci l_1 i l_2 su okomiti na AB i redom prolaze točkama A i B. Neka je M poloviše stranice $\overline{AB}$. Okomice iz M na AC i BC sijeku pravce l_1 i l_2 redom u točkama E i F. Ako je D sjecište EF i MC, dokaži da je $\angle ADB = \angle EMF$.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut i neka su D i E redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je F točka takva da je D polovište dužine $\overline{EF}$. Točka G je na segmentu $\overline{CD}$ tako da polovište od $\overline{BG}$ leži na kružnici Γ opisanoj trokutu FDB. Označimo sa H drugo sjecište kružnice Γ i FC. Pokaži da je četverokut $BHGC$ tetivan.

4.4. N2: Diofantske jednadžbe - Matej Ljubičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Diofantske jednadžbe su jednadžbe u n ili više varijabli za $n \geqslant 2$. Cilj predavanja jest pokazati neke od metoda rješavanja koje nisu nužno ograničene na rješavanje njih samih, već se pojavljuju i u drugim područjima, ali su svakako dobra metoda (za početak) ako se s diofantskom jednadžbom susretnete na natjecanju.

Metoda faktorizacije

1. Riješi jednadžbu u skupu prirodnih brojeva:
$$xy - x - y = 0$$
2. Riješi jednadžbu u skupu cijelih brojeva:
$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$$
3. Pronađi sva cjelobrojna rješenja od:
$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$
4. Nađi sve prirodne n tako da sljedeća jednadžba ima 5 rješenja:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$
5. Odredi sve nenegativne parove cijelih brojeva (x, y) za koje je
$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$
6. Nađi sve prirodne brojeve $1 < a < b < c$ takve da je $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ djelitelj broja $abc - 1$.

Rješavanje preko nejednakosti

7. Pronađi sve parove (x, y) cijelih brojeva t. d.
$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$
8. Riješi sljedeću jednadžbu u skupu prirodnih brojeva:
$$3(xy + yz + zx) = 4xyz.$$
9. U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu:
$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10$$
10. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da:
$$(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$$
11. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu
$$x^2y + y^2z + z^2x = 3xyz$$
12. Pronađi sve prirodne brojeve n, $k_1, ..., k_n$ t. d. vrijede sljedeće tvrdnje:
$$k_1 + \cdots + k_n = 5n - 4 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Modularna aritmetika

13. Riješi jednadžbu u skupu prirodnih brojeva:

$$5x^2 = 2000y + 100003$$

14. Dokaži da jednadžba

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + ... + (x+99)^2 = y^z$$

nema rješenja za $z \geqslant 2$.

15. Pronađi sve parove (p, q) prostih brojeva t. d.

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

16. Nađi sve prirodne x, y takve da

$$x^2 - y! = 2001$$

17. Dokaži da ako je n prirodan broj t. d. jednadžba

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

ima rješenja u cijelim brojevima x, y, tada ima barem 3 takva rješenja. Dokaži da jednadžba nema cjelobrojna rješenja za $n = 2891$.

18. Dokaži da jednadžba

$$4xy - x - y = z^2$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

5. Poglavlje

Zadaci za treću grupu

5.1. A3: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na početku predavanja ispisane su najvažnije tvrdnje koje će biti korištene. Znatiželjni čitatelj može pokušati sam dokazati KAGH nejednakosti (ideja: indukcijom). Dokaz CSB nejednakosti je također dokazan indukcijom i raspisan.

Ovo predavanje zamišljeno je kao prijelaz između predavanja o KAGH nejednakostima i predavanja za olimpijsku grupu pa je predviđeno širokom spektru natjecatelja. Ako rješavaču ne budu išla prva tri zadatka, možda je bolja ideja prebaciti se u nižu grupu za ovo predavanje. S druge strane, ako se rješavaču početni zadatci učine prelaganima, neka odmah prijeđe na zadatke "Za one koji žele više". Očekivano je da će većina rješavati prvih 9 zadataka, a oni najbolji složenije zadatke. Svakako, pokušajte rješiti početne zadatke, jer ni oni nisu previše trivijalni.

Trivijalne nejednakosti

Teorem 1. *Postoji mnogo trivijalnih činjenica koje su baza za dokazivanje nejednakosti. Neke od njih su sljedeće:*

1. *Ako* $x \geqslant y$ *i* $y \geqslant z$, *onda* $x \geqslant z$, *za svaki* $x, y, z \in \mathbb{R}$
2. *Ako* $x \geqslant y$ *i* $a \geqslant b$, *onda* $x + a \geqslant y + b$, *za svaki* $x, y, a, b \in \mathbb{R}$
3. *Ako* $x \geqslant y$, *onda* $x + z \geqslant y + z$, *za svaki* $x, y, z \in \mathbb{R}$
4. *Ako* $x \geqslant y$ *i* $a \geqslant b$ *onda* $xa \geqslant yb$, *za svaki* $x, y \geqslant 0$ *ili* $a, b \geqslant 0$
5. *Ako* $x \in \mathbb{R}$ *onda* $x^2 \geqslant 0$, *pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako* $x = 0$.

Iskaz nejednakosti o sredinama

Teorem 2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. *Tada vrijedi sljedeće*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^n}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Iskaz i dokaz CSB - a

Teorem 3. *Neka je* n *prirodan broj. Neka su* $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ *realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}. \tag{5.1}$$

Pri tome jednakost vrijedi akko postoji k *realan t. d.* $k = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} \wedge b_i \neq 0, i = 1, 2, ..., n$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Baza indukcije: za n = 1, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki n prirodan broj tvrdnja teorema vrijedi. Zapišimo i tvrdnju za n = 2, kasnije ćemo ju iskoristiti.

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \tag{5.2}$$

Gornja tvrdnja vrijedi jer raspisom dobivamo:

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leqslant a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 \tag{5.3}$$

što je ekvivalentno

$$0 \leqslant (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \tag{5.4}$$

a posljednje je očita istina, pa je (1) istina.
Provedimo sada korak indukcije:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + b_{n+1}^2} \end{aligned}$$

Prva nejednakost je pretpostavka indukcije, a iz (2) vrijedi druga nejednakost zato što (2) možemo zapisati kao

$$(\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1})^2 \leqslant (\alpha^2 + a_{n+1}^2)(\beta^2 + b_{n+1}^2) \tag{5.5}$$

te stavimo $\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ i $\beta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$ □

KAGH zadatci

1. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokaži nejednakost

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geqslant 8$$

2. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geqslant 2$$

3. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da $a + b + c + d = 4$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geqslant 2$$

CSB zadatci

4. **(Engel forma)** Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

5. Dokaži za $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ realne brojeve:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+b_1)^2 + \ldots + (a_n+b_n)^2}$$

6. Dokaži da ako je $a, b, c > 0$ onda je

$$abc(a+b+c) \leqslant a^3b + b^3c + c^3a$$

7. Dva trokuta sa stranicama a, b, c i a_1, b_1, c_1 su slične ako i samo ako

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$$

8. Minimiziraj $x_1^2 + \ldots x_n^2$ za $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ i $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

9. Neka su a, b, c realni brojevi veći od $-\frac{1}{4}$ i neka je $a + b + c = 1$. Dokaži sljedeću nejednakost:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant \sqrt{21}$$

Za one koji žele više

10. (Ruska MO 2004) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. i $a+b+c=3$. Dokaži

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ca$$

11. (IMO Shortlist 1998) Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ i $xyz=1$. Dokaži

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+x)} \geqslant \frac{3}{4}$$

12. (USAMO 1998) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}$$

13. (IMO 1969 Shortlist) Ako je $x_i>0$ i $x_i y_i - z_i^2 > 0$ za $1 \leqslant i \leqslant n$, tada je

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\right)-\left(\sum_{i=1}^n\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}$$

Dokaži ovu nejednakost za $n=2$, a onda i za općeniti n.

14. (IMO 1983) Za bilo koji trokut sa stranicama duljina a, b, c vrijedi:

$$a^2 b(a-b)+b^2 c(b-c)+c^2 a(c-a) \geqslant 0.$$

15. (IMO 1995) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi t. d. $abc=1$. Dokaži da je:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

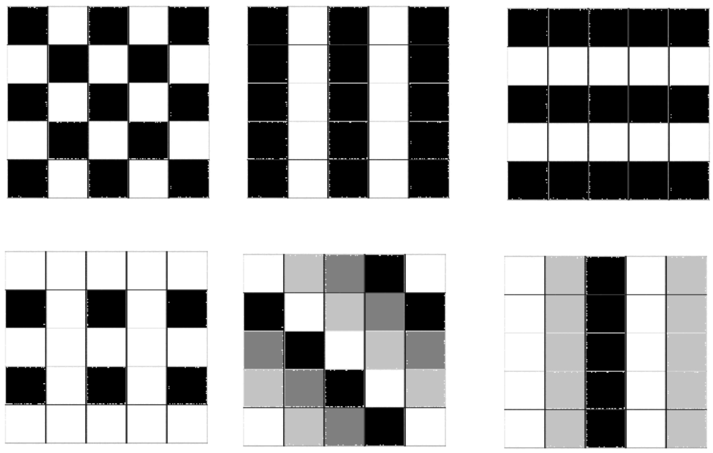
5.2. C3: Ploče - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Savjeti za rješavanje zadataka vezanih za ploče:

- U zadacima s igrama korisno je odsimulirati igru kako biste naslutili rješenje.
- Ako se u zadatku radi o $n \times n$ ploči, korisno je proučiti što se događa na manjim pločama te potom naslutiti nešto o ploči dimenzija $n \times n$.
- Ako je u zadatku odgovor da je nešto moguće, ne zaboravite napraviti konstrukciju za taj slučaj.
- Kada tražimo najmanji ili najveći broj za koji nešto vrijedi, koristan nam je Dirichletov princip i princip ekstrema
- Kad želimo doći do kontradikcije, jako je korisno pronaći neku invarijantu na ploči. U tu svrhu je često korisno obojati ploču.



Lakši zadaci

1. Dva igrača stavljaju pješake na ploču dimenzija 2001×2001. Igrač može staviti pješaka na prazno mjesto na ploči ako i samo ako u pripadnom retku i stupcu zajedno, ima više od 1000 slobodnih mjesta. Gubi onaj igrač koji ne može staviti pješaka. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?
2. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.

   Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?
3. Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima $1, 2, 3, \ldots, 2009$ tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2009$. Dokaži!
4. Kvadratna ploča podijeljena je na 5×5 jediničnih kvadrata (polja). Na nju postavljamo osam triomina, tako da samo jedno polje ploče ostane nepokriveno.

   Odredi koja sve polja dane kvadratne ploče mogu ostati nepokrivena pri takvom popločavanju.
5. Polja ploče 2×50 potrebno je obojati u dvije boje, crvenu i plavu, tako da budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:
   - na ploči se pojavljuju obje bolje
   - uklanjanjem svih crvenih polja ploča ostaje povezana
   - uklanjanjem svih plavih polja ploča ostaje povezana

Ploča je povezana ako se od svakog polja može doći do svakog drugog, prelazeći u svakom koraku s polja na njemu susjedno polje. Polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.

Na koliko je načina to moguće napraviti?

6. Ploča P je dobivena uklanjanjem tri polja u kutovima ploče 7×7. U svako od 46 polja ploče P upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva polja koja imaju zajedničku stranicu je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja upisani isti brojevi.

Umjereni zadaci

7. Ploča dimenzija 6×6 popločana je dominama. Pokaži da uvijek možemo pronaći pravac duž kojeg ćemo prelomiti ploču tako da ne prelomimo niti jednu dominu!

8. Imamo 5×10 zemljište na kojem je n polja obraslo u korov. Svakog dana, polje koje je prošli dan imalo barem 2 susjedna koja su obrasla u korov, i samo obraste u korov. Nakon nekoliko dana, cijelo zemljište je obraslo u korov. Odredi najmanji n za koji je to moguće.

9. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geqslant 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos.

   Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

10. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak. Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

11. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.

    Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

12. *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh. Odredi najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

13. Dan je prirodni broj N. U svakom polju tablice $N \times N$ na početku je upisana nula. U svakom potezu dozvoljeno je odabrati redak ili stupac, obrisati sve brojeve koji se nalaze u njemu i upisati brojeve od 1 do N proizvoljnim redom. Koliko maksimalno može iznositi zbroj svih brojeva u tablici?

14. Neka je N prirodni broj. Stepenicama zovemo dio kvadratne ploče dimenzija $N \times N$ koji se sastoji od prvih K polja u K-tom retku za $K = 1, 2, ..., N$. Na koliko je načina moguće razrezati stepenice na pravokutnike različitih površina koji se sastoje od polja dane ploče?

Teži zadaci

15. Zemljište kvadratnog oblika dimenzija 8×8, čije su stranice orijentirane sjever–jug i istok–zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija 1×1. Na svakoj od tih parcela može se nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne 1×1 parcele. Za kuću kažemo da je u sjeni ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća. Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni. Napomena: Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

16. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svako polje tablice $n \times n$ ispuniti jednim od slova I, M, O tako da su ispunjeni sljedeći uvjeti:

    - u svakom retku i svakom stupcu, jedna trećina svih slova su I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O.

- u svakoj dijagonali, ako je broj slova upisanih u tu dijagonalu višekratnik broja 3 onda su jedna trećina tih slova I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O.

17. *Pozicija* je bilo koja točka (x, y) u ravnini takva da su x i y prirodni brojevi manji ili jednaki od 20. Na početku, svaka od 400 pozicija je slobodna. Ana i Borna igraju igru u kojoj naizmjenično povlače poteze, pri čemu Ana igra prva. U svakom svom potezu Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju tako da je udaljenost bilo koje dvije pozicije na kojima se nalaze crveni kamenčići različita od $\sqrt{5}$. U svakom svom potezu Borna postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kojoj udaljenosti od drugih pozicija na kojima se nalazi neki kamenčić.) Igra se završava kad neki igrač više ne može povući potez.

    Odredi najveći broj K takav da Ana sigurno može postaviti barem K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Borna postavlja svoje plave kamenčiće.

18. Neka je $n > 2$ prirodni broj. Dana je šahovska ploča $n \times n$ koja se sastoji od n^2 polja. Raspored n topova na toj ploči je miroljubiv ako se u svakom retku i u svakom stupcu nalazi točno jedan top. Odredi najveći prirodni broj k sa svojstvom da, za svaki miroljubivi raspored n topova, postoji kvadrat $k \times k$ na čijih se k^2 polja ne nalazi niti jedan top.

5.3. G3: Korisne leme u geometriji - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ponovit ćemo nekoliko činjenica korisnih pri rješavanju zadataka.

Tetivni četverokut Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

Potencija točke P s obzirom na kružnicu $k(r, S)$ po definiciji jednaka je $|PS|^2 - r^2$.

Potencija točke Ako je proizvoljna točka A na kružnici $k(r, S)$, a B drugo sjecište pravca PA i k, tada je potencija točke P s obzirom na kružnicu k jednaka $|PA| \cdot |PB|$.

Radikalna os je skup točaka ravnine koje imaju jednaku potenciju na dvije nekoncentrične kružnice.

Radikalna os Radikalna os dvije kružnice je pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica. Ako se kružnice sijeku, radikalna os prolazi kroz sjecišta kružnica.

Radikalno središte je točka koja ima jednaku potenciju na tri nekoncentrične kružnice.

Radikalno središte Ako se tri kružnice sijeku u jednoj točci, upravo je ta točka njihovo radikalno središte.

Poučak o simetrali kuta Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.

Poučak o tetivi i tangenti Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut izmedu tangente t i tetive AB jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Sjecište simetrale stranice i nasuprotnog kuta Simetrala unutarnjeg kuta trokuta ABC i simetrala njemu nasuprotne stranice sijeku se na opisanoj kružnici tog trokuta.

Lema o trozupcu Neka je ABC trokut. Neka je I središte trokutu upisane kružnice. Neka je D sjecište BI (simetrala kuta $\angle ABC$) i opisane kružnice trokuta ABC. Lema o trozupcu kaže da je

$$\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DE}$$

gdje je E središte B-pripisane kružnice trokuta.

Eulerov pravac Ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta leže na istom pravcu kojeg zovemo Eulerov pravac. Vrijedi $|HT| : |TO| = 2 : 1$

Kružnica 9 točaka Polovišta stranica trokuta, polovišta dužina koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta i nožišta visina nalaze se na jednoj kružnici koju nazivamo kružnica 9 točaka ili Feuerbachova kružnica. Središte te kružnice leži na Eulerovom pravcu i polovište je $|OH|$.

Preslike ortocentra

1. Preslika ortocentra trokuta preko stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.
2. Preslika ortocentra trokuta preko polovišta stranice leži na njegovoj opisanoj kružnici.
3. <u>*(korisni korolar)*</u> Neka je H ortocentar, O središte opisane kružnice trokuta ABC, M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je P sjecište pravaca HM i AO. Tada P leži na opisanoj kružnici trokuta.

Ptolomejev poučak Ako je četverokut $ABCD$ tetivan, tada vrijedi

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$$

Lema o diralištu pripisane kružnice Neka upisana kružnica trokuta ABC dira BC u D, a neka je DT promjer upisane kružnice. Ako se AT i BC sijeku u X, dokažite da je tada $BD = CX$, te da je X diralište A-pripisane kružnice s BC.

Lema o diralištu pripisane kružnice Neka upisana kružnica trokuta ABC dira BC u D, a neka je DT promjer upisane kružnice. Ako se AT i BC sijeku u X, dokažite da je tada $BD = CX$, te da je X diralište A-pripisane kružnice s BC.

Simedijana je osnosimetrična slika težišnice s obzirom na simetralu kuta.

Svojstvo simedijane Neka je ABC trokut i X sjecište tangenti na njegovu opisanu kružnicu u B i C. Tada je AX simedijana.

Spiralna sličnost je kompozicija rotacije i homotetije

Lema o spiralnoj sličnosti Neka su A, B, C i D različite točke takve da AC nije paralelno s BD. Neka se AC i BD sijeku u X. Opisane kružnice trokutima ABX i CDX drugi put se sijeku u O. Tada je O središte jedinstvene spiralne sličnosti koja šalje A u C i B u D.

Zadaci:

1. Dana je kružnica k sa središtem O. Neka je $\overline{AB}$ tetiva te kružnice i M njeno polovište. Tangente na kružnicu k u točkama A i B sijeku se u T. Pravac l prolazi točkom T, siječe kraći luk AB u točki C, a dulji luk AB u točki D i pritom je $|BC| = |BM|$. Dokaži da je središte kružnice opisane trokutu ADM osnosimetrično točki O u odnosu na pravac AD.

2. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut takav da $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ i $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Ako je P presjek BD i CE, dokaži da AP raspolavlja CD.

3. U šiljastokutnom trokutu ABC, u kojem je $|AC| < |BC|$, točke M i N su redom nožišta visina iz vrhova A i B. Kružnica sa središtem O opisana trokutu ABC i kružnica sa središtem S opisana trokutu MNC sijeku se u točkama C i D. Ako je točka P polovište dužine AB, dokaži da točke P, O, S i D leže na istoj kružnici.

4. Neka su A, B, C i D redom četriri različite točke na pravcu. Kružnice polumjera AC i BD sijeku se u X i Y . Pravac XY siječe BC u Z. Neka je P točka na pravcu XY različita od Z. Pravac CP siječe kružnicu s promjerom AC u C i M, a pravac BP siječe kružnicu s promjerom BD u B i N. Dokaži da su pravci AM, DN i XY konkurentni.

5. Neka je ABC trokut u kojem je $|AB| < |CA| < |BC|$ i neka su D i E redom točke na polupravcima BA i BC takve da je $|BD| = |BE| = |AC|$. Opisana kružnica trokuta BDE siječe dužinu AC u točki P, a pravac BP siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točki $Q(Q \neq B)$. Dokaži da je $|AQ| + |QC| = |BP|$.

6. Neka je ABC trokut u kojem je $AC + BC = 3 \cdot AB$. Upisana kružnica trokuta ABC ima središte I i dira BC i CA u D i E, redom. Neka su K i L preslike D i E preko I. Dokaži da A, B, K, L leže na kružnici.

7. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$ takav da se tangente u točkama B i D na njegovu opisanu kružnicu k sijeku na pravcu AC. Točke E i F leže na kružnici k tako da su pravci AC, DE i BF paralelni. Neka je M sjecište pravaca BE i DF. Ako su P, Q i R nožišta visina trokuta ABC, dokaži da točke P, Q, R i M leže na istoj kružnici.

8. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut takav da je $|AD| = |BD|$ i neka je M sjecište njegovih dijagonala. Nadalje, neka je N drugo sjecište dijagonale AC s kružnicom koja prolazi točkama B, M i središtem kružnice upisane trokutu BCM. Dokaži da vrijedi $|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|$.

9. Neka su Ω i O opisana kružnica trokuta ABC u kojem $AB > BC$, i njeno središte. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe Ω u $M \neq B$. Neka je Γ kružnica radijusa BM. Simetrale $\angle AOB$ i $\angle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q, redom. Točka R odabrana je na pravcu PQ t.d. $BR = MR$. Dokaži da $BR \parallel AC$. (Uzimamo da je simetrala kuta polupravac)

5.4. N3: CRT, Euler, MFT - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovome predavanju na relativno jednostavan način biti će dokazani svima poznati Kineski teorem o ostatcima, Eulerov teorem i Mali Fermatov teorem. S obzirom da to nije teško provesti, svi teoremi i korolari zadani su kao zadatci učenicima jer način dokazivanja (pogotovo u Teoriji brojeva) dosta koristi poboljšanju "Problem solving" vještina. Nakon teorema i korolara slijede zadatci. One bez ikakvih zvjezdica pretpostavljeno je da velika većina u grupi može riješiti. Teži zadatci označeni su sa zvjezdicama, najteži i s više zvjezdica.

Kineski teorem o ostatcima

Definicija 1. *Eulerova funkcija $\phi(m)$ je broj svih prirodnih brojeva koji su strogo manji i relativno prosti s m.*

Definicija 2. *Kažemo da je broj b **inverz** broja a modulo m gdje su a i m relativno prosti ako vrijedi*

$$ab \equiv 1 \pmod{m}$$

Definicija 3. ***Reducirani sustav ostataka** modulo m je skup svih prirodnih brojeva strogo manjih od m koji su relativno prosti s m.*

Napomena 4. *Uočimo da svaki reducirani sustav ostataka ima $\phi(m)$ elemenata. Zato taj skup možemo označiti*

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(m)}\}$$

Teorem 5. *Neka su a i m relativno prosti. Neka je reducirani sustav ostataka od m skup $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(m)}\}$. Dokaži da je skup $S = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(m)}\}$ jednak skupu R*

Teorem 6. *Ako je $\gcd(a, m) = 1$, tada a uvijek ima jedinstven inverz modulo m.*

Korolar 6.1. *Jednadžba $ax \equiv b \pmod{m}$ ima rješenje kada je $\gcd(a, m) = 1$.*

Teorem 7 (Kineski teorem o ostatcima)**.** *Sustav kongruencija*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{b_n} \end{cases}$$

pri čemu su $b_1, b_2, \ldots, b_n$ u parovima relativno prosti (tj. $\gcd(b_i, b_j) = 1$ ako i samo ako $i \neq j$) ima jedinstveno rješenje x modulo $b_1 b_2 \ldots b_n$.

1. Odredi inverz od 3 modulo 4. Zašto je jedinstven?
2. Odredi inverz od 9 modulo 82. Zašto je jedinstven?
3. * Neka su m i n prirodni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće. Jednadžba
$$\gcd(11k - 1, m) = \gcd(11k - 1, n)$$
vrijedi za sve prirodne k. Dokaži da je $m = 11^r n$ za neki $r \in \mathbb{Z}$
4. * Neka su a i b dva relativno prosta prirodna broja i promotrimo aritmetički niz $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$. Dokaži da postoji beskonačno mnogo u parovima relativno prostih elemenata ovog niza.
5. Pronađi rješenje sustava kongruencija
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$
6. * Za prirodan broj p, zovemo prirodan broj n p-sigurnim ako se n u apsolutnoj vrijednosti razlikuje za više od 2 od svih višekratnika od p. Npr. 10-sigurni brojevi su $3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 23, \ldots$. Odredi broj svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 10000 koji su istodobno 7-sigurni, 11-sigurni i 13-sigurni.
7. *** Zovemo točku iz rešetke *vidljivom* ako su joj koordinate relativno proste. Dokaži da postoji kvadrat 100×100 takav da mu nije točka nije *vidljiva*.

Eulerov i Mali Fermatov teorem

Teorem 8 (Eulerov teorem)**.** *Za relativno proste brojeve a i m, vrijedi*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Korolar 8.1 (Mali Fermatov teorem)**.** *Za relativno proste a i p, te p prost vrijedi*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

8. Odredi $2^{98} \pmod{33}$.
9. Neka je $a_n = 6^n + 8^n$. Odredi ostatak pri dijeljenju a_{83} s 49.
10. Izračunaj sumu
$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor$$
11. Odredi zadnje dvije znamenke broja 1032^{1032}.
12. Odredi zadnje 3 znamenke broja $2008^{2007^{2006^{\cdots^{2^1}}}}$.
13. Neka je $f(x) = x^{x^{x^x}}$. Odredi zadnje dvije znamenke od $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.
14. * Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Dokaži da je
$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$
djeljiv s 1989.
15. ** Odredi zadnje 3 znamenke broja $2003^{2002^{2001}}$.
16. *** Dokaži da, za bilo koji fiksan prirodan broj $n \geqslant 1$, sljedeći niz
$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots \pmod{n}$$
je nakon nekog člana konstantan.

6. Poglavlje

Zadaci za četvrtu grupu

6.1. A4: Funkcijske iz $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}^+$ - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

[1]

I Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(f(x)) = \sqrt{f(x) - x}.$$

II Odredi sve surjekcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$2x \cdot f(f(x)) = f(x) \cdot (f(f(x)) + x).$$

III Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(x + f(x) + y) = f(2x) + f(y).$$

IV Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

V Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(xf(y)) + xf(x + y) = 1.$$

[1] Sa $\mathbb{R}^+$ označavamo skup pozitivnih realnih brojeva.

6.2. G4: Geometrijski tulum - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci za zagrijavanje

1. Neka je $ABCD$ paralelogram čije se dijagonale sijeku u točki P. M je polovište stranice AB. Neka je Q točka takva da je pravac QA tangenta na opisanu kružnicu trokuta MAD i QB tangenta na opisanu kružnicu trokuta MBC. Dokažite da su točke Q, M, P kolinearne.

2. Neka je ABC šiljastokutan raznostraničan trokut u kojem je $AB < AC$. Polovišta stranica AB i AC su M i N, redom. Neka su P i Q točke na pravcu MN takve da je $\angle CBP = \angle ACB$ i $\angle QCB = \angle CBA$. Opisana kružnica trokutu ABP siječe pravac AC u točki $D \neq A$, a opisana kružnica trokuta AQC siječe pravac AB u točki $E \neq A$. Pokažite da su pravci BC, DP i EQ konkurentni.

3. Neka je ABC trokut i $AB < AC$. T je točka na BC takva da je AT tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC. Nadalje, O i H su redom središte opisane kružnice i ortocentar trokuta ABC. Ako CH prolazi polovištem dužine AT, dokažite da AO raspolavlja CH

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $AC < BC$ i ω njegova opisana kružnica. M je polovište stranice BC. Točke F i E su odabrane na stranicama AB i BC, redom, tako da je $AC = CF$ i $EB = EF$. Pravac AM siječe ω u $D \neq A$. Pravac DE siječe pravac FM u G. Dokažite da G leži na ω.

5. Neka je ABC trokut i točka P u unutrašnjosti trokuta ABC. Neka su P_1, P_2 nožišta visina iz P na stranice AC i BC. Neka su Q_1 i Q_2 nožišta visina iz C na AP i BP. Neka su Q_1 i Q_2 nožišta tih visina. Ako je $Q_2 \neq P_1$ i $Q_1 \neq P_2$, dokažite da su pravci P_1Q_2, Q_1P_2 i AB konkurentni.

6. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC dane su točke A_1 i B_1, redom. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, redom, takve da su pravci PQ i AB paralelni. Neka je P_1 točka na pravcu PB_1 takva da točka B_1 leži strogo između točaka P i P_1 te da je $\angle PP_1C = \angle BAC$. Neka je Q_1 točka na pravcu QA_1 takva da točka A_1 leži strogo između točaka Q i Q_1 te da je $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

   Dokaži da su točke P, Q, P_1 i Q_1 konciklične.

Malo teži zadaci

7. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut s $BA \neq BC$. Neka su k_1 i k_2 upisane kružnice trokuta ABC i ADC, redom. Pretpostavimo da postoji kružnica k koja dodiruje polupravac BA nakon A i polupravac BC nakon C te također dodiruje pravce AD i CD.

   Dokažite da se zajedničke vanjske tangente na kružnice k_1 i k_2 sijeku na k.

8. Neka je ABC šiljastokutan trokut s opisanom kružnicom Γ. Neka je ℓ neka tangenta na Γ te neka su ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c pravci dobiveni refleksijom pravca ℓ preko pravaca BC, CA i AB, redom. Pokažite da je opisana kružnica trokuta omeđenog pravcima ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c tangencijalna na Γ.

6.3. N4: Kombinatorna teorija brojeva - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Cilj predavanja je riješiti nekoliko zadataka koji na neki sadrže i kombinatorne i brojevno-teorijske elemente. Česte ideje će biti uvođenje nekakvog grafa ili tablice povezane sa zadatkom i korištenje nekih kombinatornih svojstava tih objekata, kao i korištenje Dirichletovog principa na prikladan način.

Zadaci

1. Ana i Bojan igraju igru. Ana izabere 2 prirodna broja a i b, i broj $a+b$ se napiše na ploču. Nakon toga, Ana dobije 2016 papirića s brojevima $a+1,\dots,a+2016$ a Bojan dobije $b+1,\dots,b+2016$. U svakom koraku, Ana bira neki svoj papirić s brojem x a Bojan nakon što vidi Anin papirić bira neki svoj papirić s brojem y, i broj na ploči se množi s $x+y$. Igra staje kad oboje ostanu bez papirića. Anin cilj je da posljednji broj na ploči ima različit ostatak od $a+b$ pri dijeljenju s 2017, u suprotnom pobjeđuje Bojan. Tko ima pobjedničku strategiju?

2. Dan je prirodan broj n. Nad brojevima $-n \leqslant k \leqslant n$, osim $k=0$, nalaze se lopoči. Žaba kreće iz lopoča nad 1, i može iz lopoča iznad broja a skočiti na lopoč nad brojem broj b ako vrijede sljedeći uvjeti:

   - $a \mid b$ ili $b \mid a$
   - nije već skočila iz a u b ili iz b u a
   - $|a| \neq |b|$

   Dokaži da žaba može napraviti niz skokova tako da je za sve a, b za koje vrijede uvjeti skočila ili iz a u b ili iz b u a, i da se na kraju nalazi na lopoču 1.

3. Dan je povezan graf G sa k bridova. Dokaži da je moguće brojeve $1, 2, \dots k$ napisati u bridove na takav način da je u svakom čvoru koji je sadržan u bar dva brida najveći zajednički djelitelj brojeva u njegovim bridovima 1.

4. Let $n \geqslant 3$ be an integer. Prove that for all integers k, with $1 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}$, there exists a set A with n distinct positive integer elements such that the set $B = \{\gcd(x, y) : x, y \in A, x \neq y\}$ (gotten from the greatest common divisor of all pairs of distinct elements from A) contains exactly k distinct elements.

5. Let p be a prime number. Eduardo and Fernando play the following game making moves alternately: in each move, the current player chooses an index i in the set $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ that was not chosen before by either of the two players and then chooses an element a_i from the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eduardo has the first move. The game ends after all the indices have been chosen. Then the following number is computed:
$$M = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 10^i$$
   Eduardo wishes to make M divisible by p, and the goal of Fernando is to prevent this.

   Prove that Eduardo has a winning strategy.

6. Let p be a prime, and let $a_1, \dots, a_p$ be integers. Show that there exists an integer k such that the numbers
$$a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$$
   produce at least $\frac{1}{2}p$ distinct remainders upon division by p.

7. Determine all integers $n \geqslant 2$ having the following property: for any integers $a_1, a_2, \dots, a_n$ whose sum is not divisible by n, there exists an index $1 \leqslant i \leqslant n$ such that none of the numbers
$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$$
   is divisible by n. Here, we let $a_i = a_{i-n}$ when $i > n$.

8. Neka je p prost broj, P polinom sa cjelobrojnim koeficijentima, j prirodan broj te a neki cijeli broj takav da:

   - $P(a) \equiv 0 \pmod{p^j}$

- $P'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$

Dokaži da postoji jedinstven cijeli broj $0 \leqslant t < p$ takav da $P(a + tp^j) \equiv 0 \pmod{p^{j+1}}$.

(ovo je takozvana *Henselova lema*)
Za potrebe ovog zadatka, dovoljno je znati da:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \implies P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Dio II

Hintovi predavanja

7. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

7.1. A1: Faktorizacije i sustavi - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Izrazi x preko y ili obrnuto.
2. Treći izraz svedi na zajednički nazivnik i iskoristi poznate informacije.
3. Faktorizacija, djeljivost prirodnih brojeva.
4. Raspiši izraz i faktoriziraj.
5. Postavi sustav jednadžbi i izrazi jednu nepoznanicu preko druge.
6. Nadopunjavanje do kvadrata.
7. Postavi sustav jednadžbi - znamo da su brzine Ane i Branke konstantne te da nakon susreta Ana prelazi put koji je Branka već prešla i obratno.
8. Postavi sustav jednadžbi gdje su "glavne" nepoznanice broj Štrumfova u vrećama, a "sporedne" visine Mrguda, Štrumfete i Pape. Pokušaj zatim eliminirati sporedne nepoznanice manipulacijama između jednadžbi (zbrajanje, oduzimanje, i sl.)
9. Sustav jednadžbi, Pitagorin poučak.
10. Faktorizacija zbroja kubova.
11. a) Nadopunjavanje do kvadrata. b) Iskoristi faktorizaciju iz a) dijela.
12. a) pokušati zapisati kao nešto$\cdot(a-b)$
13. pokušati faktorizirati kao nešto$\cdot(a+b+c)$
14. Iskoristi 2. i 3. jednadžbu gdje ima nepoznanica stupnja 1 da izraziš nepoznanice jednu preko druge.
15. Svedi na zajednički nazivnik i napravi "novi" sustav jednadžbi. Jednadžbe dalje zbrajaj ili oduzimaj.
16. Sustav je cikličan: pretpostavi uređenost, npr. $d \geqslant c \geqslant b \geqslant a$.
17. Faktoriziraj sve nepoznanice.

7.2. G1: Angle chase, sukladnost i sličnost - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koristite činjenicu da je zbroj unutarnjih kutova trokuta $180°$.
2. Ako je tetiva $\overline{AB}$, a obodni kut u vrhu C, pogledajte što se događa ako je $\overline{BC}$ promjer, središte kružnice unutar kuta $\angle ACB$ te središte kružnice izvan kuta $\angle ACB$.
3. Koristite činjenicu da je tangenta okomita na polumjer kružnice.
4. Odredite sve kutove i primijetite da su neki trokuti jednakokračni.
5. Koristite Talesov teorem.
6. Ako je S središte kružnice, dokažite da su $\triangle TAS$ i $\triangle TBS$ sukladni.
7. Promatrajte trokute CDN i DMB.
8. Uočite jednakokračne trokute.
9. Koristite da su obodni kutovi nad istim lukom jednaki.
10. Koristite tvrdnju iz zadatka 6.
11. Promatrajte trokut $\triangle AOC$.
12. Ako je E sjecište $\overline{AC}i\overline{BD}$, promatrajte $\triangle AED$.
13. Primijetite da je središte upisane i opisane kružnice sjecište simetrala kutova.
14. Koristite teorem o obodnom i središnjem kutu te činjenicu da je tangenta okomita na polumjer.
15. Spustite okomicu iz vrha C na AD i promotrite $\triangle CED$.
16. Dokažite da je trokut $\triangle ABA_0$ jednakokračan.
17. Koristite da su obodni kutovi nad istom tetivom jednaki te primijetite tetivne četverokute.
18. Opišite kružnicu $\triangle ABC$ te promatrajte središnje i obodne kutove.

8. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

8.1. A2: KAGH - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pomnožite zadanu nejednakost sa 2 te zatim primijenite AG nejednakost ili svedite na tvrdnju da je kvadrat nenegativan.
2. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
3. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane i iskoristite uvjet iz zadatka.
4. Pomnožite nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ i zatim iskoristite AG nejednakost.
5. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
6. Ponovno primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
7. Koristite AG nejednakost na lijevoj strani kako biste dobili da je zadani izraz veći ili jednak od nekog fiksnog broja.
8. Supstituirajte izraze $(a+b),(b+c),(c+a)$, primijenite zadatak 7..
9. *1. hint*

   Primijetite da je zadana nejednakost ekvivalentna sa sljedećom:

   $$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

   2. hint

   Primijenite KA nejednakost.
10. Primijenite AG nejednakost na svaki par brojeva s lijeve strane i zbrojite te nejednakosti.
11. Primijenite AG nejednakost na $(n+1)$ brojeva.
12. Dodajte i oduzmite a s lijeve strane nejednakosti.
13. Primijetite da iz uvjeta zadatka vrijedi $a^2 < a, b^2 < b, c^2 < c$.
14. *1. hint*

    Dokažite da je svaki od pribrojnika manji ili jednak 1.

    2. hint

    Primijenite AG nejednakost na dio nazivnika svakog pribrojnika.
15. *1. hint*

    Raspišite $x_0 - x_n$ kao $x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_n$.

    2. hint

    Primijenite zadatak 7.

16. *1. hint*

    Primijenite AG nejednakost na nazivnike razlomaka s lijeve strane.

    2. hint

    Primijenite KA nejednakost na tako dobivenu nejednakost.

17. *1. hint*

    Koristite uvjet $a + b + c = 1$ u svakom nazivniku i primijenite AG nejednakost na cijeli nazivnik.

    2. hint

    Primijenite AH nejednakost na tako dobiveni rezultat.

18. Odredite formulu za volumen, primijenite sličnu ideju kao u 12. zadatku i primijenite AG nejednakost.

8.2. C2: Indukcija - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Klasična matematička indukcija
2. Klasična matematička indukcija
3. Klasična matematička indukcija
4. Klasična matematička indukcija
5. Klasična matematička indukcija
6. Jaka indukcija
7. Jaka indukcija na broj kockica u čokoladi
8. Klasična matematička indukcija
9. Jaka indukcija po n
10. Treba naslutiti opću formulu niza i zatim ju dokazati indukcijom
11. Klasična matematička indukcija, treba naći konstrukciju iz n u $n+1$
12. Klasična matematička indukcija, treba naći konstrukciju iz n u $n+1$
13. Što ako takav n ne postoji? Klasična matematička indukcija
14. Klasična matematička indukcija, promatrajte pobjednika turnira i koliko je igrača on minimalno pobijedio.
15. Što ako posložimo brojeve na ploči od najvećeg prema najmanjem (uz ponavljanja), i poredamo sve moguće kombinacije na ploči "leksikografski"?

8.3. G2: Karakteristične točke trokuta i tetivni četverokuti - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Prva karakterizacija tetivnih četverokuta.
2. Iskoristite prvu karakterizaciju tetivnih četverokuta i Talesov teorem.
3. Prva karakterizacija tetivnih četverokuta.
4. Pokažite da sjecište simetrale stranice i opisane kružnice leži na simetrali nasuprotnog kuta. Koristiti obodne kuteve (obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki).
5. Sjecište dužina $\overline{DP}$ i $\overline{AC}$ je težište trokuta ΔABD.
6. Tetivni četverokut ABCF, obodni kutevi.
7. Neka je T tražena osnosimetrična slika ortocentra. Dovoljno je dokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan (zbroj dva nasuprotna kuta je $180°$).
8. Dovoljno je dokazati da je točka N polovište stranice $\overline{AC}$.
9. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
10. *HINT 1:* Neka je M polovište od $\overline{AB}$. Treba pokazati da su točke S, R i M kolinearne. To ćemo pokazati ako pokažemo $\angle RSP = \angle MSP$.
    HINT 2: BQSM i PQSR su tetivni.
11. Tetivni četverokut i *angle chase*.
12. *HINT 1:* $\triangle MGH \sim \triangle MEF$
    HINT 2: $CM \perp EF$, a iz toga možemo dobiti i tetivnost nekih četverokuta.
13. Ako sa I označimo drugo sjecište kružnice Γ i BG, pokaži da je $FI \parallel CD$.

8.4. N2: Diofantske jednadžbe - Matej Ljubičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. HINT: $(x-1)(y-1)=1$
2. HINT: izlučiti $(x+2y)$ iz prva 3 člana, te iz posljednja dva s lijeve strane
3. HINT: 4 ostaje zdesna, a slijeva pokušavamo dobiti kvadrat
4. HINT: $(x-n)(y-n)=n^2$, broj djelitelja prirodnog broja preko prostih faktora
5. HINT: +2xy
6. HINT: supstitucija $a-1=x$ $(b-1=y$ i $c-1=z)$ i ograničavanje
7. HINT: faktorizacija i ograničavanje
8. HINT: ograničavanje i pretpostavka $x \leqslant y \leqslant z$
9. HINT: smještanje među kvadrate
10. HINT: smještanje među kvadrate
11. HINT: A-G nejednakost
12. HINT: CSB nejednakost
13. HINT: mod 4
14. HINT: mod 3
15. HINT: mod 3
16. HINT: mod 3 i ograničavanje y
17. HINT: algebarske manipulacije i mod 3
18. HINT: faktorizacija i x^2+1 nema prosti faktor oblika $p=4k+3$

9. Poglavlje

Hintovi za treću grupu

9.1. A3: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

KAGH

1. Uoči $1-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=\frac{2}{\sqrt{yz}}$.

2. Primijeni A-G nejednakost za 2 člana na brojnike.

3. Uoči $\frac{1}{a^2+1}=\frac{a^2+1-a^2}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geqslant 1-\frac{a^2}{2\sqrt{a^2}}=1-\frac{a}{2}$.

CSB

4. Pomnožimo obje strane jednakosti sumom $\sum_{k=1}^{n} b_k$, a kako su svi b_k pozitivni, predznak jednakosti se ne mijenja.

5. Kvadrirati i raspisati.

6. Podijeli s abc i Engel forma.

7. Uvjet jednakosti CSB - a.

8. Trik s jedinicom.

9. Trik s jedinicom da svedemo na oblik s $a+b+c$.

Za one koji žele više

10. Iskoristi formulu za kvadrat trinoma. Pokušaj pametno primijeniti A-G.

11. Iskoristi A-G tako da svaki od sumanada kombiniras s drugim izrazima da se u produktu geometrijske sredine pokrate izrazi.

12. Uoči da je $a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$.

13. U CSB - u uzmimo $a_i=\sqrt{x_iy_i}-z_i$, $b_i=\sqrt{x_iy_i}+z_i$. Dovoljno je dokazati

$$\frac{n^3}{(\sum a_i)(\sum b_i)}\leqslant\frac{1}{\sum a_ib_i}$$

14. Ravi supstitucija, tj. $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$ pa je $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Tada ubacujući u nejednakost dobivamo

$$xy^3+yz^3+zx^3\geqslant xyz(x+y+z)$$

što vrijedi po CSB nejednakosti.

15. Neka je $x = 1/a$, $y = 1/b$ i $z = 1/c$. Tada je $xyz = 1$ i

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Označimo desnu stranu jednakosti kao S. Želimo dokazati $S \geqslant \frac{3}{2}$. CSB primijenjena na nizove

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right), \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right)$$

daje $(x+y+z)^2 \leqslant 2S(x+y+z)$ odnosno $S \geqslant (x+y+z)/2$. Koristeći A-G nejednakost dobivamo

$$S \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

Jednakost vrijedi akko $x = y = z = 1$ što je ekvivalentno s $a = b = c = 1$.

9.2. C3: Ploče - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pobjedničku strategiju ima prvi igrač! Pronađi simetriju!
2. Oboji ploču pa pronađi invarijantu!
3. Promatraj broj pojavljivanja svakog od brojeva!
4. Dirichletov princip!
5. Promatraj krajnje točke povezanih područja!
6. Kolika je najveća moguća razlika 2 broja na ploči?
7. Pretpostavi suprotno. Koliko je najmanje domina na pravcu koji prelama dominu?
8. Pronađi invarijantu.
9. Pokušaj konstruirati algoritam za neke slučajeve.
10. Za koliko bubamara možeš konstruirati rješenje? Oboji ploču!
11. Prebroji broj parova polje - crveni brid na 2 načina.
12. prikaži strelicama u kojim smjerovima ludi lovac napada. Kada 2 luda lovca smiju biti na istoj dijagonali?
13. Ako su pravokutniku na početku sva polja bijela i u svakom potezu biramo stupac ili redak i bojamo najviše k polja u crno, koliko je u pravokutniku najmanje bijelih polja?
14. Koliko mora biti pravokutnika i kojih površina?
15. Na kojim poljima se čini da sigurno može biti kuća? Probaj prvo dokazati da ona moraju biti popunjena u idealnoj konfiguraciji. Onda nešto zaključi za ostatak polja.
16. Pokušaj naslutiti koje je rješenje. Onda pokušaj nešto promatrati na 2 načina i dobiti jednadžbu iz koje ćeš dobiti rješenje.
17. Odgovor je $k = 100$. Podijeli ploču nekako tako da pokažeš da je to najviše što se može.
18. Odgovor je $k = \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$. Dokaži da u svakoj mirnoj konfiguraciji postoji $k \times k$ dobri kvadrat, i da postoji mirna konfiguracija koja nema $(k + 1) \times (k + 1)$ dobri kvadrat.

9.3. G3: Korisne leme u geometriji - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Iskoristi svojstvo simedijane pa uoči neku sukladnost!
2. Iskoristi lemu o spiralnoj sličnosti.
3. Koji geometrijski lik je $POSD$?
4. Radikalne osi!
5. Primijeni Ptolomejev teorem!
6. Iskoristi lemu o diralištu pripisane!
7. Što je M trokutu ABC?
8. Koliki je $\angle MIB$? Možeš iskoristiti Ptomoleja!
9. Uvedi točku X koja je drugo sjecište OM sa kružnicom. Što možeš reći o BX?

10. Poglavlje

Hintovi za četvrtu grupu

10.1. A4: Funkcijske iz $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}^+$ - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Imamo $f(1) > 1$ i $f(f(1)) > f(1)$.
2. Fiksiraj x i promotri niz $a_n = f^n(x)$. Imamo rekurzivnu relaciju za njega i niz je strogo pozitivan.
3. Ne smije vrijediti $x + f(x) + y = 2x$.
4. Ponovno imamo rekurzivnu relaciju za $f^n(x)$ i možemo naći opće rješenje te rekurzije.
5. Dokažite $f(x) \leqslant 1/x$. Zatim probajte to pametno iskoristiti.

10.2. N4: Kombinatorna teorija brojeva - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. 2017 je prost. Igraj simetrično i koristi mali Fermat.
2. Uvedi graf. Kada se može napraviti opisani obilazak na nekom grafu?
3. $\gcd(k, k+1) = 1$
4. Uvedi graf. Piši brojeve na bridove.
5. Rastavi na slučajeve ovisno o tome koliko je $10^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p. Igraj simetrično.
6. Kada neka dva broja poprimaju isti ostatak? Kombinatorno promotri uvjete na k koje dobiješ.
7. Samo prosti n. Uvedi graf na indeksima i promatraj cikluse.
8. Ako označiš $R(x, y) = (P(x) - P(y))/(x - y)$, R je polinom u dvije varijable. Što je $R(x, x)$?

Dio III

Rješenja predavanja

11. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

11.1. A1: Faktorizacije i sustavi - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Iz prve jednadžbe dobivamo $x = \frac{8-5y}{3}$. Uvrstimo li to u drugu jednadžbu dobivamo $56 - 35y - 6y = 15$. Tj. $y = 1$, odnosno $x = \frac{8-5}{3} = 1$. Dakle rješenje sustava je uređena dvojka $(1, 1)$. Kratkom provjerom vidimo da doista zadovoljava i prvu i drugu jednadžbu.

2. Rješenje pod #2

3. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$. Ovo je umnožak tri uzastopna prirodna broja pa je (barem) jedan od njih djeljiv s 2, a jedan s 3 pa je umnožak djeljiv s $2 \cdot 3 = 6$.

4. MNM predavanje - Zadatak 2.

5. Županijsko 8. razred, 2016.

6. $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7. Državno 2012. OŠ - 8. razred, 2. zadatak

8. Županijsko 2017. SŠ A - 1.2.

9. Županijsko 2016. SŠ A - 1.1.

10. Izraz se može faktorizirati u $(x+y)(x^2-xy+y^2)$, dakle izraz x^2-xy+y^2 mora biti jednak 1 jer je desni izraz veći od 1 i jer su x i y prirodni. Primjetimo da $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy$, prema tome izraz je jednak 1 samo kad je $y = x = 1$. Iz ovoga slijedi da je jedino rješenje $x = 1$ i $y = 1$, a prost broj je 2.

11. a) Izvor. b) Izraz se može faktorizirati u
$$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2),$$
dakle izraz $a^2-2ab+2b^2$ mora biti jednak 1 jer je desni izraz veći od njega. Primjetimo da $a^2-2ab+2b^2 = (a-b)^2+b^2$, prema tome izraz je jednak 1 samo kad je $a = b$ i $b = 1$. Iz ovoga slijedi da je jedino rješenje $a = 1$ i $b = 1$, a prost broj je 5.

12. a) $1 = 1^n$, $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ b) iz a)

13. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ pa je $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

14. Županijsko 2020. SŠ A - 2.1.

15. Državno 2016. SŠ A - 1.3.

16. Rješenje pod #6

17. 1987. AIME - Problem 5

11.2. C1: Dirichletov princip - Matko Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. U ovom zadatku jedino treba prepoznati što su "kutije", a što "kuglice". Kutije predstavljaju boje čarape (svaku bismo čarapu mogli smjestiti u kutiju s crvenim ili kutiju s plavim čarapama), dok kuglice predstavljaju same čarape. Tada zaključujemo da je potrebno izvući barem 3 čarape (broj kutija + 1) kako bismo bili sigurni da imamo istovrstan par.

2. Pogledajmo kako se 8 može zapisati kao zbroj brojeva $1, 2, 3, ..., 8$. 8 se može napisati kao $1+7, 2+6, 3+5$ (zanemarujemo poredak). Ako među naših 5 odabranih brojeva uzmemo broj "4" tada još uvijek moramo odabrati 4 različita broja. S obzirom na to da postoje 3 para koja u zbroju daju 8, a mi biramo 4 broja po Dirichletovom principu zaključujemo da ćemo iz jednog para uzeti oba broja.

3. Zamijetimo da neki učenik može točno riješiti 0, 1, 2, 3, 4 ili 5 zadataka (ukupno 6 izbora, "kutija"). S obzirom na to da je $32 = 6 \cdot 5 + 2$ po Dirichletovom principu zaključujemo da je barem 6 učenika riješilo isti broj zadataka.

4. Gledajmo koje ostatke neki broj može dati pri dijeljenju s 3. Mogući ostatci su 0, 1, 2. Ako biramo 4 broja tada će sigurno postojati barem jedan s par s jednakim ostatkom pri dijeljenju s 3, tada će razlika ta dva broja biti djeljiva s 3

   Napomena. Za bolje razumijevanje proučite kongruencije.

5. Pretpostavimo da taj 1998-terokut ima sve stranice različite cjelobrojne duljine. Minimalan opseg koji tada može postići je kada su mu stranice duljine 1, 2, 3, ..., 1998. Tada opseg iznosi $1+2+3+...+1998 =$ (*Gaussova dosjetka*) $\frac{1998\cdot(1998+1)}{2} = 1\ 997\ 001$. Budući da je opseg promatranog mnogokuta jednak 1 997 000 što je manje od najmanjeg mogućeg kada su sve stranice različite duljine prema Dirichletovom principu zaključujemo da barem dvije stranice moraju biti jednake duljine.

6. Mogućih suma je 7 (-3, -2, ..., 2, 3), a stupaca, redaka i dijagonala je ukupno 8, pa će po Dirichletovom principu dvije sume biti jednake.

7. Primijetimo da se stol uvijek može okrenuti za $\frac{k}{16}\cdot 360°, k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant 15$ tako da ispred bilo kojeg viteza dođe kartica s njegovim imenom. Broj vitezova je 16, a broj položaja stola različit od početnog 15, stoga postoji takav položaj stola kod kojeg ispred barem dva viteza stoje kartice s njihovim imenima.

8. Izvuče li 414 karata može se dogoditi da nema 10 istih karata (45 karata s brojevima od 1 do 9 i po 9 karata od svih ostalih brojeva). Jednom kad izvučemo 415. kartu, po Dirichletovom principu Yusuf će sigurno imati bar jedan isti broj na bar 10 izvučenih karata.

9. Prva stvar koju moramo primijetiti je da promatranja nisu uzajamna, npr. planeti A i B su udaljeni 10 svjetlosnih godina, planeti A i C 80 svjetlosnih godina, a planeti B i C 15 svjetlosnih godina. Tada astronom planeta A promatra planet B, astronom planeta B promatra planet A, a astronom planeta C također promatra planet A. Sagledajmo prvo dva međusobno najbliža planeta. Očito je da astronomi na tim planetima promatraju jedan drugoga. Ostaje nam još neparan $n-2$ planeta i $n-2$ astronoma. Sada ostaju dvije mogućnosti:

   - Ako ta dva planeta više nitko ne promatra, tada opet postoje dva planeta koja su međusobno najbliža te nastavljamo s njihovim izdvajanjem nakon čega nam ostaje novih neparnih $n-2$ planeta i $n-2$ astronoma.
   - Ako neki od preostalih astronoma promatra jedan od ova dva planeta preostaje nam $n-2$ planeta, ali samo $n-3$ astronoma.

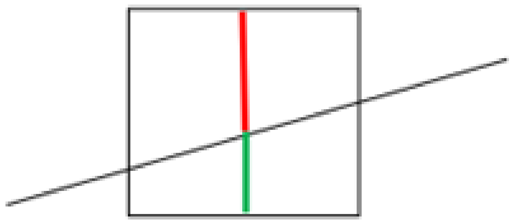
   Sada s obzirom na to da imamo $n-2$ planeta, ali samo $n-3$ astronoma po Dirichletovom principu preostaje planeta na kojeg nitko ne motri.

10. Neka osoba može imati 0 ili 1 ili 2 ili ... ili 499 poznanika, što bi nam dalo 500 "kutija". Međutim zamijetimo da se na kampu ne može istovremeno nalaziti i osoba sa 0 poznanika i osoba sa 499 poznanika (tada osoba s 0 poznanika ne bi poznavala nikoga, a osoba sa 499 poznanika svakoga što bi nas dovelo do kontradikcije). Znači, barem jedna od te dvije mogućnosti nemamo, pa nam ostaje 499 "kutija". Sada imamo 500 osoba koje moramo rasporediti na 499 "kutija" (broj poznanstva) pa sigurno postoje dvije osobe koje imaju jednak broj poznanika.

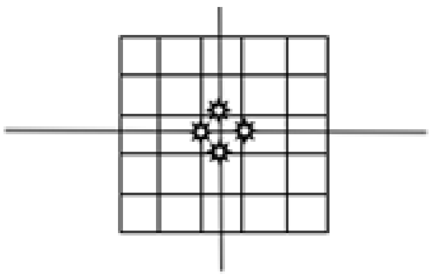
11. Traženi broj dobijemo gledanjem "najgoreg slučaja" do ispunjavanja uvjeta. Kada bismo u košari imali 7 jabuka i 5 banana i 8 naranči tada još uvijek ne bi bio ispunjen uvjet zadatka. Međutim dodavanjem nekog voća u košaru u njoj bi se nalazilo ili dovoljno jabuka ili dovoljno banana ili dovoljno naranči, stoga zaključujemo da je traženi broj jednak $(7+5+8+1=21)$.

12. Prvo ćemo pretpostaviti da ne postoje takve tri osobe. Vizualizirajmo dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut. Fiksirajmo jednu točku (osobu) i promatrajmo dužine koje izlaze iz nje. Tih dužina ima 5 pa su barem 3 iste boje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je ta boja crvena. Sada gledamo te tri točke na drugim krajevima tih dužina. One međusobno ne smiju biti povezane crvenim dužinama jer smo onda odmah dobili crveni trokut što je suprotno našoj pretpostavci, pa su stoga sve međusobno povezane plavim dužinama, što čini plavi trokut. Zato postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne)poznaju. Ova tvrdnja je u suprotnosti s našom pretpostavkom pa to znači da nam je pretpostavka bila kriva, tj. da postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne) poznaju.

13. Pravac dijeli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose kao 2:3.



Ti trapezi imaju jednake visine (stranice kvadrata) pa s obzirom na to da je površina trapeza $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ zaključujemo da su duljine njihovih srednjica u odnosu 2:3 (na slici crvena i zelena). Dakle zadani pravac u istom omjeru dijeli liniju kvadrata koja sadrži srednjice tih trapeza. Postoje ukupno 4 točke koje dijele srednje linije kvadrata u omjeru 2:3.



S obzirom na to da imamo 9 pravaca, a 4 točke kroz koje oni prolaze po Dirichletovom principu slijedi da najmanje 3 pravca prolaze jednom od tih točaka.

14. Promatrajmo brojeve 1, 11, 111, ..., 111...11 i njihove ostatke pri dijeljenju s n. Mogući ostatci su 0, 1, 2, ..., $n-1$. Ako je neki od ostatka jednak 0, tada je taj broj djeljiv s n. Ako nije tada ukupno imamo konačan broj $n-1$ ostataka pa će neka dva broja imati jednak ostatak. Oduzmemo li ta dva broja dobit ćemo broj oblika 11...11000...00. Tada je taj broj djeljiv s n

15. Zapišimo svaki od $n+1$ brojeva $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ kao umnožak potencije broja 2 i nekog neparnog prirodnog broja. Drugim riječima, neka je $a_i = 2^{k_i} \cdot q_i$ (za $i = 1, 2, ..., n+1$), $k_i \in \mathbb{N}_0$ i q_j neparan. Primijetimo da su $q_1, q_2, ..., q_{n+1}$ pozitivni, neparni brojevi manji od $2n$. S obzirom na to da postoji samo n pozitivnih neparnih brojeva manjih od $2n$ po Dirichletovom principu zaključujemo da su neka dva od brojeva $q_1, q_2, ..., q_{n+1}$ jednaki. Recimo da su jednaki q_i i q_j te ih označimo jednostavno sa q. Tada $a_i = 2^{k_i} \cdot q$ te $a_j = 2^{k_j} \cdot q$. Sada slijedi da ako je $k_i \leqslant k_j$ onda a_i dijeli a_j i obratno, ako $k_i \geqslant k_j$ tada a_j dijeli a_i

16. Očito je da nećemo odabrati prazan skup jer tada je njegova suma 0 pa ne možemo pronaći drugi disjunktni skup s jednakom sumom. Znači u svakom odabranom skupu nalazit će se između 1 i 9 (ne može 10 jer moraju bit disjunktni) elemenata. Fiksirajmo neki odabrani (neprazni) podskup. Primijetimo kako postoji $2^{10} - 2 = 1022$ različitih nepraznih podskupova. Također zamijetimo da je suma svakog podskupa između

10 (ako odaberemo samo 10) i $91+92+93+\ldots+99$ (ako odaberemo najvećih 9 elemenata). $91+92+93+\ldots 99 < 100+100+100+100+100+100+100+100+100+100+100 = 1000 < 1022$. Broj suma koje se mogu postići čak je još i manji. Po Dirichletovom principu postoje dva različita podskupa koji će dati jednaku sumu. Nazovimo ih A i B. Sada još samo moramo "naštimati" da su ti podskupovi disjunktni. Lako se pokaže da disjunktni skupovi $A \setminus B$ i $B \setminus A$ tada i dalje imaju jednaku sumu. Ta dva skupa tada će biti primjeri koji će dokazivati tvrdnju zadatka

11.3. G1: Angle chase, sukladnost i sličnost - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Označimo unutarnje kutove trokuta s α, β, γ i traženi vanjski kut trokuta s γ'.

   Vrijedi $\gamma' = 180° - \gamma$ (vanjski kut trokuta).

   Vrijedi $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ iz čega uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi $\gamma' = \alpha + \beta$ što je i trebalo dokazati.

2. Dokaz se nalazi na linku (Teorem o obodnom i središnjem kutu).

3. Označimo sa α traženi kut između tangente i tetive $\overline{BC}$. Neka je S središte trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice. Tada je $\angle CBS = 90° - \alpha = \angle BCS$.

   Zato je $\angle BSC = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$ pa po teoremu o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\angle BAC = \alpha$ što je i trebalo dokazati.

4. Školsko natjecanje 2019. SŠ A-1.3.

5. BSO (bez smanjenja općenitosti), pravci AQ i BP sijeku se unutar kružnice, a AP i BQ izvan.

   Po Talesovom teoremu $\angle APB = \angle AQB = 90°$.

   Ako promotrimo $\triangle AMB$, $\overline{BP}$ i $\overline{AQ}$ su visine tog trokuta.

   Tada je N ortocentar (sjecište visina) u $\triangle AMB$.

   Zato treća visina leži na pravcu MN iz čega slijedi da je $MN \perp AB$.

6. Neka je S središte zadane kružnice.

   Promotrimo $\triangle TAS$ i $\triangle TBS$.

   Njima je $\overline{TS}$ zajednička stranica, $|SA| = |SB|$ (radius kružnice) te vrijedi $\angle TAS = \angle TBS = 90°$ (tangenta na kružnicu je okomita na polumjer).

   Tada po poučku o sukladnosti trokuta SSK zaključujemo $\triangle TAS \cong \triangle TBS$ iz čega slijedi $|TA| = |TB|$.

7. Županijsko natjecanje 2006. OŠ 7.3.

8. Županijsko natjecanje 2016. OŠ 7.4.

9. Županijsko natjecanje 2014. OŠ 8.5.

10. Školsko natjecanje 2018. SŠ A-1.2.

11. Školsko natjecanje 2015. SŠ A-2.2.

12. Državno natjecanje 2017. OŠ 7.5.

13. Državno natjecanje 2016. OŠ 7.5.

14. Državno natjecanje 2015. OŠ 8.3.

15. Državno natjecanje 2010. OŠ 8.5.

16. Školsko/gradsko natjecanje 2014. Sš A-1.7.

17. Općinsko natjecanje 2010. SŠ-A 2.7.

18. *(Tetivni četverokut)*

    Neka je k kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ sa središtem u S.

    Promotrimo središnji kut $\angle ASC$ kojemu je pridružen obodni kut $\angle ABC$. Vrijedi $\angle ASC = 2\angle ABC$. Ako promotrimo kut $\angle CSA = 360° - \angle ASC$, vrijedi $\angle CSA = 360° - 2\angle ABC = 2(180° - \angle ABC) = 2\angle ADB$.

    Sada se lako dokaže da je $\angle ADB$ obodni kut na istoj kružnici nad tetivom $\overline{AC}$, odnosno D je točka na kružnici k čime je dokaz završen.

    Vrijedi i obrat ove tvrdnje, a to je ujedno i karakterizacija tetivnog četverokuta.

11.4. N1: Prosti brojevi - Matko Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. p je neparan, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, $p-1$ i $p+1$ su parni brojevi i to dva parna uzastopna broja, što znači da je jedan od njih višekratnik broja broja 4 tj. djeljiv je s 4. time smo dokazali djeljivost s 8. $p-1$, p i $p+1$ su tri uzastopna broja, kako je p prost broj veći od 3, znamo da nije djeljiv s 3, pa to mora biti $p-1$ ili $p+1$.

2. Zajednička mjera dva relativno prosta broja je 1 stoga oni nemaju zajedničkih djelitelja osim 1. Brojevi 2020 i 2021 su uzastopni pa su i relativno prosti. Tada možemo zaključiti da je njihov najmanji zajednički višekratnik jednak njihovom umnošku.

3. Dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, to je da postoji konačno mnogo prostih brojeva. Recimo da ih ima n i označimo ih sa $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Sada pogledajmo broj $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Taj broj nije djeljiv s niti jednim od brojeva $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ (daje ostatak 1), a trebao bi imati faktorizaciju na proste faktore, stoga je on prost.

4. Primjetimo da brojevi 10 i 14 daju različite ostatke pri djeljenju s 3. Dakle, ako je $p \equiv 1 \pmod 3$ onda je $p + 14 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 3$ pa $p + 14$ nije prost. Ako je $p \equiv 2 \pmod 3$ onda je $p + 10 \equiv 12 \equiv 0 \pmod 3$ pa $p + 10$ nije prost. Dakle, mora vrjediti da je $p \equiv 0 \pmod 3$, to jest $p = 3$.

5. 1. slučaj $p = 3$, $14p^2 + 1 = 127$. 2. slučaj p prost broj različit od 3 tj. $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$. $14p^2 + 1 = 126k^2 + 84k = 3(42k^2 + 28k)$ ili $14p^2 + 1 = 126k^2 - 84k = 3(42k^2 - 28k)$. $14p^2 + 1$ je djeljiv s 3 pa ne može biti prost.

6. Kako se spominje kvadrat, ponovno ćemo gledati ostatke pri djeljenju s 3. Pogledajmo koje ostatke kvadrati daju pri djeljenju s 3:

n	0	1	2
n^2	0	1	1

Dakle, ako $p \neq 3$ onda je $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ pa je $p^2 + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ pa očito nije prost. Dakle, $p = 3$ pa je $p^2 + 2 = 11$, a $p^3 + 4 = 31$ što je prost broj.

7. $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. Kako bi $x^4 + 4$ bio prost jedan od faktora mora biti 1. $x^2 + 2x + 2 = 1$ ili $x^2 - 12x + 2 = 1$ rješavanjem ovih jednadžbi dolazimo do rješenja da je $x = 1$ ili $x = -1$

8. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2001/2001-SS-drz-1234-zad+rj/2001-SS-drz-1234-zad%2Brj.pdf

9. U ovom zadatku još je jednom ključno gledati parnosti i ostatke pri cijelobrojnom dijeljenju. Pogledajmo prvo može li r biti paran. Ako je $r = 2$ onda $p^q = 1$ što ne može biti jer su p i q prosti, a 1 nije. Zaključujemo r je neparan pa ga možemo zapisati u obliku $2k+1$. Tada je $p^q = 2k + 1 - 1 = 2k$. S obzirom na to da je p prost, a jedini paran prost broj je 2 zaključujemo da $p = 2$. Sada imamo jednadžbu $2^q = 2k$. Pogledajmo slučaj kad je q paran, odnosno $q = 2$. Tada je $2^q = 2^2 = 4 = r - 1$ što bi značilo da je $r = 5$ i to je jedno zadovoljavajuće rješenje. Još moramo pogledati slučaj kad je q neparan. Tada ga možemo zapisati kao $q = 2l + 1$. Jednadžba sada glasi $2^{2l+1} = 2k$. odnosno $2 * 4^l = 2k$ odnosno $4^l = k$. Sada gledajmo ostatak pri dijeljenju s 3. 4 i sve njegove potencije daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3 pa i k mora daavati ostatak jedan pri dijeljenju s 3. S obzirom na to da je $r = 2k + 1$ značilo bi da r daje ostatak 0 pri dijeljenju s 3 pa kako je r prost jedina opcija je da je on upravo 3. Ako je $r = 3$ onda bi moralo vrijediti da je $q = 1$, a q je prost. Zaključujemo jedino rješenje je $p = 2, q = 2, r = 5$.

10. Pogledajmo brojeve $n! + 2, n! + 3, n! + 4, ..., n! + n$. $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n)$. Svaki od njih je složen (uvjerite se izlučivanjem broja 2 iz prvog zbroja, broja 3 iz drugog zbroja ... broja n iz $n-1$ zbroja). S obzirom na to da je n proizvoljan postoji proizvoljno velik broj uzastopnih složenih brojeva.

11. Dokazujemo Euklidovim algoritmom. Pokušajmo pronaći najveći zajednički djelitelj. $M = (21n + 4, 14n + 3) = (7n + 1, 14n + 3) = (7n + 1, 1) = 1$.

12. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

12.1. A2: KAGH - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. *1. način*

   Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Oduzimanjem $2ab + 2bc + 2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

   $$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

   Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

   2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

   Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

   $$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

   Analogno dobivamo i

   $$b^2 + c^2 \geq 2bc$$
   $$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

   Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

   Napomena.

   Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

2. Primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

   $$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

   što je i trebalo dokazati.

3. Kao i u prethodnom zadatku, primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

   $$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 2\sqrt{1 \cdot a^x} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^y} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^z} = 8\sqrt{a^x a^y a^z} = 8\sqrt{a^{x+y+z}} = 8\sqrt{a^0} = 8$$

   AG nejednakost smijemo primijeniti s obzirom da su članovi na koje primijenjujemo pozitivni brojevi.

Preostaje odrediti kada vrijedi jednakost.

Dokazali smo da jednakost vrijedi (samo) kada su svi članovi na koje primijenjujemo KAGH nejednakosti jednaki. Dakle u ovom slučaju jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$1 + a^x = 1 + a^y = 1 + a^z$$

Odnosno

$$a^x = a^y = a^z$$

$$x = y = z$$

4. Pomnožimo nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ (kako je taj broj pozitivan, nejednakost i dalje vrijedi i ekvivalentna je prethodnoj). Dobivamo

$$x^2 + 2 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff (x^2+1) + 1 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

Primjenom AG nejednakosti na $(x^2+1)+1$ dobivamo traženu nejednakost.

Analogno, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x^2 + 1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

5. Primjenom AG nejednakosti na $a_k + 1$ dobivamo:

$$a_k + 1 \geq 2\sqrt{a_k}$$

Dobivamo:

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) \geq 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}$$

Korištenjem uvjeta zadatka vrijedi

$$2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = 2^n$$

iz čega slijedi i tražena nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = 1, a_2 = 1, ..., a_n = 1$.

6. Primjenom AG nejednakosti na $p^2 + p + 1$ dobivamo:

$$p^2 + p + 1 \geq 3\sqrt[3]{p^2 \cdot p \cdot 1} = 3p$$

Analogno dobivamo;

$$q^2 + q + 1 \geq 3q$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq$$

7. Za minimalnu vrijednost izraza (označimo ju sa t) mora vrijediti sljedeće:
   - izraz je uvijek veći ili jedak od te vrijednosti ($x + \frac{1}{x} \geq t$)
   - moguće je postići tu vrijednost

Ako primijenimo AG nejednakost na zadani izraz, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

Sada dokažimo da je moguće postići da izraz poprima vrijednost 2.

Jednakost se poprima ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x} \\ \iff x^2 &= 1 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

(s obzirom da je zadano da je x pozitivan). Kako zadana jednadžba ima rješenja (ima jedinstveno rješenje), vrijednost 2 se postiže, a lako je i uvrstiti $x = 1$ te se vidi da se vrijednost 2 stvarno postiže.

8. *Za Nesbittovu nejednakost postoji više dokaza, ovdje ću prikazati jedan od njih.*

Krenimo od lijeve strane nejednakosti;

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Uvedimo nove oznake:

$$\begin{aligned} x &:= a+b \\ y &:= b+c \\ z &:= c+a \end{aligned}$$

Vrijedi $(a+b+c) = \frac{x+y+z}{2}$

Sada imamo:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

i trebamo dokazati;

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 &\geq \frac{3}{2} \\ \iff (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 6 &\geq 3 \end{aligned}$$

Množenjem izraza na lijevoj strani dobivamo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 6 = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{z} - 6 = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 6$$

Po zadatku 7. vrijedi da je

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\geq 2 \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} &\geq 2 \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{y} &\geq 2 \end{aligned}$$

Pa je

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 6 \geq 3 + 22 + 2 - 6 = 3$$

što je i trebalo dokazati.

9. Zadana nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

pri čemu ova zadnja nejednakost vrijedi po KA nejednakosti.

10. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b} \geq 2a$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right) \geq \frac{1}{2}(2a+2b+2c) = a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

11. Vrijedi:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{abb\cdots b} \leq \frac{a+b+b+..+b}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

pri čemu srednja nejednakost vrijedi po AG nejednakosti na brojevima $a, b, ..., b$ (b se ponavlja n puta), a iz ovoga slijedi tvrdnja zadatka.

12. Vrijedi:

$$b+\frac{1}{a(b-a)} = (b-a)+a+\frac{1}{a(b-a)} \geq 3\sqrt[3]{a\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{a(b-a)}} = 3$$

Dakle, izraz je veći ili jednak 3, a za $a=1, b=2$ se postiže vrijednost 3, dakle to je i minimum izraza.

13. Državno natjecanje 2019., SŠ A-1.3.

14. Državno natjecanje 2019., SŠ A-3.4.

15. Državno natjecanje 2009., SŠ A-4.2.

16. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.3.

17. Državno natjecanje 2015. SŠ A-2.4.

18. Volumen kutije je $(a-2x)^2x$, vrijedi $a, x \in \mathbb{R}, 2x < a$ i $x, a > 0$.
Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost tog izraza.

$$(a-2x)^2x = (a-2x)(a-2x)x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(a-2x)(a-2x)\cdot 4x}$$

$$\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 \geq (a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

$$(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3$$

Uvrštavanjem ove nejednakosti u gornju nejednakost dobivamo:

$$\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$$

Cilj je dokazati da je to maksimum i odrediti za koji x se postiže.

Jednakost u ovoj AG nejednakosti vrijedi ako i samo ako je

$$a-2x = a-2x = 4x$$
$$6x = a$$
$$x = \frac{a}{6}$$

Dakle, postoji rješenje ove jednadžbe za svaki a pa se postiže jednakost, odnosno dobivena vrijednost je maksimum. Tada vrijedi $x = \frac{a}{6}$ pa je to rješenje.

12.2. C2: Indukcija - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Problem 1.a)
2. Problem 1.b)
3. Problem 2.a)
4. Problem 4.
5. Problem 5.
6. Tvrdnju dokazujemo jakom indukcijom po n.

   Baza indukcije su $n = 1, 2, 3$ jer rekurzivna formula niza za te brojeve nije definirana. Kako je $1 < 2^1 < 2^2 < 2^3$, vrijedi $a_n < 2^n$ za $n \leqslant 3$ pa je baza dokazana.

   Pretpostavimo sada da za $1, 2, ..., k$ vrijedi $a_k < 2^k$, gdje je $k \geqslant 3$ prirodan broj. Kako je $k + 1 \geqslant 4$, možemo iskoristiti rekurzivnu formulu niza da izrazimo a_{k+1} kao

   $$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}.$$

   Koristeći induktivnu pretpostavku, dobivamo nejednakost

   $$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2}.$$

   Kako je $2^{k-2} < 2^{k-1}$, dalje vrijedi

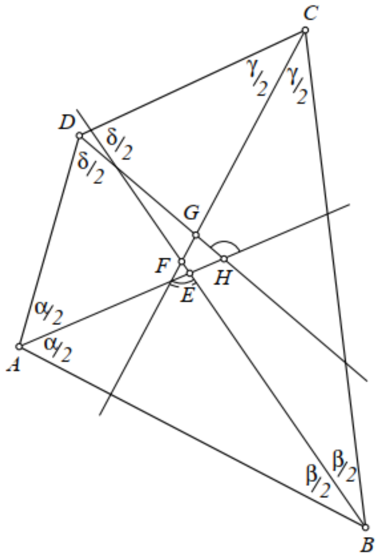
   $$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

   odnosno $a_k < 2^k \implies a_{k+1} < 2^{k+1}$ što smo i htjeli dobiti pa je po jakoj matematičkoj indukciji tvrdnja dokazana.
7. Problem 33.
8. Općinsko 2007. A - 4.3.
9. Problem 20.
10. Općinsko 2020. A - 4.2.
11. Problem 37.
12. Problem 35.
13. Županijsko 2015. A - 4.1.
14. Županijsko 2012. A - 4.5.
15. Problem 50.

12.3. G2: Karakteristične točke trokuta i tetivni četverokuti - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. AoPS
2. 2016., opć 2A, 4.
3. Neka je $ABCD$ bilo koji četverokut čije simetrale kutova tvore četverokut $EFGH$ te neka su redom $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unutarnji kutevi četverokuta $ABCD$. Iskoristimo činjenicu da je zbroj kuteva u trokutu jednak $180°$.



U $\triangle ABE$ dobivamo $\angle BEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, a iz $\triangle CDG$ imamo $\angle DGC = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$. Zbog vršnih kuteva imamo i $\angle HEF = \angle BEA$ te $\angle FGH = \angle DGC$.
Kutevi $\angle HEF$ i $\angle FGH$ su nasuprotni kutevi u četverokutu $EFGH$ i za njih vrijedi

$$\begin{aligned}\angle HEF + \angle FGH &= 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{360°}{2} = 180°\end{aligned}$$

pa po prvoj karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $EFGH$ tetivan.

4. Neka je O središte opisane kružnice, P polovište stranice $\overline{AB}$ i S sjecište simetrale stranice $\overline{AB}$ (to je pravac OP budući da je središte opisane kružnice na simetrali stranice) sa opisanom kružnicom. Želimo pokazati $\angle ACS = \angle SCB$.
Odmah vidimo da je četverokut $ASBC$ tetivan. Budući da su $\angle ACS$ i $\angle ABS$ kutevi nad (istom) tetivom $\overline{AS}$, vrijedi $\angle ACS = \angle ABS$. Simetrala stranice okomita je na tu stranicu, pa po SKS poučku o sukladnosti trokuta znamo da su trokuti ΔASP i ΔBSP sukladni ($\overline{SP}$ je zajednička stranica, $|AP| = |PB|$ po definiciji točke P i kut između njih je pravi). Iz toga slijedi $\angle ABS = \angle BAS$.
Sada opet primijenimo isti trik s obodnim kutevima, ovaj puta nad tetivom $\overline{BS}$, i dobivamo $\angle SCB = \angle SAB = \angle ABS = \angle ACS$, što je i trebalo pokazati.

5. Po SSS poučku o sukladnosti trokuta, trokuti ΔABD i ΔBCD su sukladni. Budući da se dijagonale paralelograma raspolavljaju, dužina $\overline{AC}$ siječe $\overline{BD}$ u polovištu, označimo ga sa S. Zato dobivamo da je sjecište dužina $\overline{DP}$ i $\overline{AS}$ težište trokuta ΔABD (označimo ga sa T_1), a sjecište dužina $\overline{BQ}$ i $\overline{SC}$ je težište trokuta ΔBCD (označimo ga sa T_2).
Težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha. Iz sukladnosti koju smo pokazali na početku imamo $\overline{AT_1} = \overline{T_2C}$ i $\overline{T_1S} = \overline{ST_2}$. Sada možemo zaključiti $\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2C}$.

6. 2016., žup 3A, 3.

7. Neka je H ortocentar trokuta ABC i T njegova osnosimetrična slika u odnosu na AB. Dovoljno je pokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan. Označimo sa M, N i P redom nožišta visina na BC, AB i AC.
   Neka je $|\angle ACB| = \gamma$. Budući da je $|\angle CPH| = |\angle CMH| = 90°$, četverokut $CPHM$ je tetivan. U tetivnom četverokutu zboj nasuprotnih kuteva je 180°, pa je $|\angle PHM| = 180° - \gamma$, a zbog toga je i $|\angle AHB| = 180° - \gamma$ (vršni kutevi).
   Točka T je osnosimetrična slika od H u odnosu na AB pa vrijedi $\triangle ABH \cong \triangle ABT$. Zbog toga imamo
   $$|\angle ATB| = |\angle AHB| = 180° - \gamma.$$
   Sada smo dobili da je zbroj nasuprotnih kuteva u četverokutu $ATBC$ jednak 180° ($|\angle ACB| + |\angle AHB| = 180°$) pa je četverokut $ATBC$ tetivan.

8. 2012., opć 2A, 8.

9. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
   Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.

10. 2018., žup 4A, 3.

11. 2010, drž 2A, 4.

12. JBMO 2015., 3.

13. EMC 2020., J1

12.4. N2: Diofantske jednadžbe - Matej Ljubičić

Link na zadatke. Link na hintove.

Većina zadataka dio je knjige Andreescu T. i dr. *An introduction to Diophantine equations. A problem-based approach.* Birkhauser. 2010. Ona se može pronaći na sljedećem linku.

1.

$$\begin{aligned} xy - x - y &= 0 \\ xy - x - y + 1 &= 1 \\ x(y-1) - 1(y-1) &= 1 \\ (x-1)(y-1) &= 1 \end{aligned}$$

   - Iz $x - 1 = -1$ i $y - 1 = -1$ dobivamo $x = y = 0$, što nije rješenje.
   - Iz $x - 1 = 1$ i $y - 1 = 1$ dobivamo $x = y = 2$, što je rješenje.

2. Exercise 1. str. 11.
3. Example 1. str. 4.
4. Exercise 2. str. 11.
5. Example 3. str. 6.
6. izvor
7. Example 1. str. 13
8. Exercise 1. str. 17.
9. županijsko Natjecanje iz matematike 2017./2018., 1. razred, 2. zadatak
10. Exercise 3. str. 17.
11. Exercise 6. str. 18.
12. Example 6. str. 16.
13. Promatrajući jednadžbu modulo 4, dobivamo $x^2 \equiv 3(mod 4)$. Ako ispitamo ostatke koje x^2 daje pri dijeljenju s 4, vidimo da to nije moguće; dakle nema rješenja.
14. Exercise 1. str. 33.
15. Example 2. str. 29.
16. Exercise 2. str. 34.
17. izvor
18. Exercise 8. str. 35.

13. Poglavlje

Rješenja za treću grupu

13.1. A3: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

KAGH

Rješenja prva tri zadatka nalaze se u knjizi na linku.

1. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.8, str. 14
2. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.9, str. 14
3. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.16, str. str. 18

CSB

CSB zadatci dio su knjige "Problem Solving Strategies" koju je napisao Arthur Engel. U knjizi se nalaze rješenja zadataka.

4. Engel forma
5. Inequalities - Problem 10.
6. Inequalities - Problem 17.
7. Inequalities - Problem 57.
8. Inequalities - Problem 59.
9. Inequalities - Problem 80.

Za one koji žele više

Prva tri složena zadatka nalaze se u knjizi na linku.

10. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.1, str. 17
11. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.2, str. 18
12. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.7, str. 20
13. IMO 1969 Shortlist
14. IMO 1983, Problem 6
15. IMO 1995, Problem 2

13.2. C3: Ploče - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Županijsko 2001., 1. razred
2. Županijsko 2010., 1. razred
3. Županijsko 2009., 3. razred
4. Županijsko 2010., 2. razred
5. Županijsko 2016., 2. razred
6. Županijsko 2018., 3. razred
7. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 28.
8. Analiziramo sve moguće uvjete širenja korova i zaključimo da se opseg svih polja u korovu ne može povećati što nam daje da je nemoguće $n<8$, a za $n=8$ primjer je (1, 6), (1, 8), (1, 10) i svih pet (i, i) polja.
9. Državno 2015., 1. razred
10. Državno 2017., 4. razred
11. Državno 2018., 2. razred
12. HMO 2017., MEMO test
13. HMO 2015., drugi dan
14. HMO 2014., IMO test
15. MEMO 2016., T3
16. IMO 2016., 2. zadatak (C4)
17. IMO 2018., 4. zadatak
18. IMO 2014., 2. zadatak

13.3. G3: Korisne leme u geometriji - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

Dokazi lema:

- Potencija točke, radikalna os, radikalno središte
- Poučak o simetrali kuta
- Poučak o tetivi i tangenti
- Lema o trozupcu
- Preslike ortocentra (6. i 7. zad)
- Kružnica devet točaka
- Eulerov pravac
- Ptolomejev poučak, Ptolomejev poučak (bez riječi)
- Lema o diralištu pripisane kružnice
- Simedijana
- Lema o spiralnoj sličnosti

Rješenja zadataka:

1. HMO 2018.
2. IMOSL 2006. , G3
3. HMO 2014., IMO test
4. IMO 1995, 1.
5. HMO 2010, IMO test
6. IMOSL 2005, G1
7. HMO 2016., prvi dan
8. HMO 2012, prvi dan
9. IMOSL 2014., G3

13.4. N3: CRT, Euler, MFT - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Predavanje je preuzeto iz knjige na linku i spada pod poglavlje Modular Arithmetic.

14. Poglavlje

Rješenja za četvrtu grupu

14.1. A4: Funkcijske iz $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}^+$ - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Imamo $f(x) > x$ za sve x. Nadalje, imamo $f(f(1)) > f(1)$, iz čega slijedi $f(1) - 1 > f(1)^2$, ali također i $f(1) > 1$, što je kontradikcija. Dakle, takva f ne postoji.

2. Prvo primijetimo da je f injekcija pa je i bijekcija. Uzmimo proizvoljan x. Neka je $b_n = 1/f^n(x)$ za $n \in \mathbb{Z}$ (dobro je definirano i za negativne n zbog bijektivnosti).

   Tada iz uvjeta slijedi da je $(b_n)_n$ aritmetički niz, a kako je indeksiran s cijelim brojevima i svugdje je pozitivan, mora biti konstantan niz. Dakle, $b_1 = b_0$ odnosno $f(x) = x$.

3. Imamo $x + f(x) + y \neq 2x$ za sve x, y. Međutim, onda je $x + f(x) \geqslant 2x$ jer inače možemo naštimati y da vrijedi jednakost koja ne smije vrijediti. Dakle, $f(x) \geqslant x$.

   Ako bi bilo $f(y) = f(z)$ za neka dva y i z za koje je $y > z$, onda bi f bila periodična za dovoljno velike vrijednosti, tj. bilo bi $f(x + (y - z)) = f(x)$ za sve dovoljno velike x.

   Međutim, to je kontradikcija s $f(x) \geqslant x$. Naime, ako krenemo od nekog x, imamo $x + n(y - z) \leqslant f(x + n(y - z)) = f(x)$ za sve prirodne brojeve n, što je nemoguće. Dakle, f je injekcija.

   Sada stavljanjem $2y$ umjesto y dobivamo da je desna strana simetrična u odnosu na x i y, pa je $f(x + f(x) + 2y) = f(y + f(y) + 2x)$ (ovo dobijemo ako uvrstimo $(x, 2y)$ i $(y, 2x)$). Zbog injektivnosti je sada $x + f(x) + 2y = y + f(y) + 2x$, tj. $f(x) = x + f(y) - y$, tj. $f(x) - x = c$ za neku konstantu neovisnu o x. Lako se provjeri da sve takve funkcije zadovoljavaju uvjet.

4. Fiksirajmo x. Neka je $a_n = f^n(x)$ za $n \geqslant 0$. Tada je $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Možemo naći opću formulu za a_n, naime $a_n = a \cdot 2^n + b \cdot (-3)^n$ za neke realne brojeve a i b. Ako bi bilo $b \neq 0$, dobili bi da je neki a_n negativan, pa je $b = 0$ i $a_n = a \cdot 2^n$. Za $n = 0$ dobijemo $a = x$, pa je $a_n = 2^n x$. Posljedično, $a_1 = f(x) = 2x$. Lako se provjeri da je funkcija $f(x) = 2x$ rješenje.

5. Imamo $xf(x + y) < 1$ za sve x i y, tj. $(z - y)f(z) < 1$ za sve y, z takve da je $z > y$. Približavanjem y prema nula dobivamo $zf(z) \leqslant 1$.

   Skica nastavka rješenja: stavimo $x/f(y)$ umjesto x, iskoristimo $f(z) \leqslant 1/z$ na $z = \frac{x}{f(y)} + y$ i dobijemo $f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$. Zatim koristeći tu nejednakost treba nekako dobiti suprotnu nejednakost i zaključiti da je $f(x) = \frac{1}{x+1}$ za sve x.

14.2. N4: Kombinatorna teorija brojeva - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. U koraku kada Ana odabere broj $a+k$, Bojan bira $b+2016-k$. Time je konačan umnožak na ploči
$$(a+b)\cdot(a+b+2016)^{2016} \equiv a+b \pmod{2017}$$
jer je 2017 prost broj.
2. Codeforces 520D
3. IMO 1991 P4
4. Brazilian MO 2017 P2
5. IMOSL 2017 N2
6. USAMO 2018 P4
7. IMOSL 2017 N3
8. Consider some $m \in \{0,1,\dots p-1\}$. Obviously, we have $P(a+mp^j) \equiv P(a) \equiv 0 \pmod{p^j}$. We aim to prove that the p numbers
$$\frac{P(a+0\cdot p^j)}{p^j}, \frac{P(a+1\cdot p^j)}{p^j}, \dots, \frac{P(a+(p-1)\cdot p^j)}{p^j}$$
all take different remainders modulo p. This is sufficient, as then one of them will take the remainder 0 and thus satisfy our claim.
Denote
$$R(x,y) = \frac{P(x)-P(y)}{x-y}$$
Crucially, R is a polynomial with integer coefficients, and it holds that $R(a,a) = P'(a)$. Further, for $m \neq n$ we have:
$$0 \not\equiv R(a,a) \equiv R(a+mp^j, a+np^j) \equiv \frac{P(a+mp^j)-P(a+np^j)}{(m-n)p^j} \pmod{p}$$
Multiplying by $m-n$, we get that:
$$\frac{P(a+mp^j)}{p^j} - \frac{P(a+np^j)}{p^j} \not\equiv 0 \pmod{p}$$
which proves our claim and thus the lemma.

Dio IV

Završne riječi

15. Poglavlje

Završno

15.1. Zahvale

Organizacija online Zimske škole matematike je nešto što ne bi bilo moguće bez volje, truda i nesebičnosti svih onih koji su nam pomogli da je i u ovom formatu održimo najbolje što možemo. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su nam pri tom pothvatu pomogli i izašli nam u susret.

Zahvaljujemo, naravno, svim mentorima koji su iznenadno suočeni s novim izazovima online verzije Zimske škole dali sve od sebe i čiji je volonterski rad omogućio mladim matematičarima da prodube svoja matematička znanja, bolje se pripreme za natjecanja, dobiju savjete od bivših natjecatelja i budu u društvu ostalih zainteresiranih učenika iz cijele države i šire.

Za kraj, zahvaljujemo svima ostalima koji su nam na bilo kakav način pomogli i bili dio ovog projekta, a posebno svim vrijednim učenicima koji su sudjelovali u Zimskoj školi i njihovim roditeljima koji su ih u tome podržali. Hvala vam na odazivu i nadamo se da smo vas potakli na daljnji rad i bavljenje matematikom, jer upravo to jedan je od naših glavnih ciljeva.

Nadamo se da ćemo surađivati i dogodine!

15.2. Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Možete nas kontaktirati i osobno:

Lucija Relić
Predsjednica Udruge
e-mail: lucijarelic7@gmail.com
mob: +385 95 845 2964

Mislav Brnetić
Dopredsjednik Udruge
e-mail: mislav.brnetic@gmail.com
mob: +385 91 395 8198

Mateo Dujić
Tajnik Udruge
e-mail: mdujic212@gmail.com
mob: +385 91 955 0282

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.