Zimska škola matematike

Ogulin, 2.-6. siječnja 2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

Sadržaj

1. Poglavlje

Predgovor

U ovoj knjizi, dana su sva predavanja sa Zimske škole matematike 2020., zajedno sa zadacima te hintovima i rješenjima istih.

Osnovna namjera bila je omogućiti nastavak rada i nakon zimske škole, jer su sama predavanja vremenski ograničena te je nemoguće proći kroz sve zadatke, a za uspješno razumijevanje bilo koje teme, potrebno je vježbati. Također, knjiga može poslužiti kao izvor zadataka za samostalne pripreme.

Knjiga sadrži i kratku povijest same udruge i kampova kao i opis formata kampa, zajedno sa zadacima s natjecanja održanih na kampu.

U slučaju da uočite bilo kakve pogreške, bili bismo zahvalni kada bi iste javili na sljedeću e-mail adresu: `mnm@mnm.hr`

Autori,
22. travnja 2020.

2. Poglavlje

Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tokom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkom PMF-u, gostovanjima udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Još od 2010. godine, udruga MNM održava ljetne matematičke kampove koji učenicima pružaju priliku da jedan tjedan ljetnih praznika provedu usvajajući nova matematička znanja. Zbog uspjeha ljetnog kampa i interesa učenika nastala je ideja o Zimskoj školi, "mlađoj sestri" Ljetnog kampa, sa željom da i preko zimskih praznika održimo nešto slično.
Ta ideja se i ostvarila početkom 2014. godine kad je održana prva zimska škola u Domu Crvenog Križa na Sljemenu. U školskoj godini 2014./2015. organizaciju provodimo u suradnji s Hrvatskim savezom informatičara (HSIN), a od 2016. godine Zimska škola održava se u Ogulinu. Iako su svojim sadržajem jako slični, Zimska škola je nešto više usmjerena na pripreme za nadolazeća natjecanja nego Ljetni kamp, upravo zbog toga što prethodi početku održavanja hrvatskih matematičkih natjecanja u siječnju.
Uz razne aktivnosti i povremene snježne radosti, na Zimskoj školi matematike iz godine u godinu učenike u ugodnoj atmosferi pripremamo za razne matematičke izazove te se nadamo da ćemo tako i nastaviti.

Slika 2.2: Zimska škola 2016.

Slika 2.3: Zimska škola 2015.

2.3. Ovaj kamp

Kao i prethodih godina Zimska škola matematike održala se u Ogulinu. Svi sudionici bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin, a predavanja su se održavala u Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin.

Slika 2.4: Učenički dom Ogulin [1]

Slika 2.5: OŠ Ivane Brlić-Mažuranić Ogulin [2]

[1] Izvor fotografije: OG portal
[2] Izvor fotografije: Stranice OŠ Ivane-Brlić Mažuranić

2.4. Aktivnosti na kampu

Glavne aktivnosti ove Zimske škole bila su jutarnja i popodnevna predavanja koja su obrađivala određene teme natjecateljske matematike. Budući da je trajala samo 4 dana, kraće nego inače, nije bilo vremena za kvalitetan rad na projektima, ali zato su umjesto klasičnog broja od 4 predavanja, održana čak 6.

Raspored je upotpunjen ekipnim natjecanjem relijem i individualnim ELMO-om koje su sastavili mentori naše Udruge. Oba natjecanja su na neki način vrlo korisna učenicima. Reli potiče timski rad, komunikaciju i sposobnost prezentacije rješenja, a ELMO je svojevrsna simulacija koja je uvijek dobrodošla ozbiljnim natjecateljima.

Iako nije bilo dovoljno vremena za popularno - znanstvena predavanja, pronašli smo način kako provesti vrijeme nakon večere. Prvu večer mentor Petar Nizić-Nikolac održao je već tradicionalni kviz na kojemu su učenici i mentori mogli pokazati svoje znanje iz opće kulture i matematike, ali i dobro se zabaviti.

Unatoč nešto kraćem trajanju, i dalje je ostalo vremena za druženje, što je sudionicima omogućilo međusobno povezivanje i uzajamno poticanje na daljnji napredak. Prijateljstva s ljudima sličnih interesa kakva se često sklapaju na kampovima odlična su motivacija polaznicima da se tijekom cijele školske godine nastave baviti matematikom.

2.5. Popis mentora

Tea Arvaj
Krunoslav Ivanović
Luka Kraljević
Petar Nizić-Nikolac
Ivan Novak
Petar Orlić
Lucija Relić
Borna Šimić
Daniel Širola
Andrija Tomorad
Tadej Petar Tukara
Marin Varivoda

2.6. O predavanjima

Glavni dio kampa su predavanja u trajanju od četiri sata, s pauzom nakon dva sata. Učenici su bili podijeljeni u četiri grupe, uglavnom po dobi/natjecateljskim ambicijama, od osnovnoškolaca do olimpijske grupe. Ove godine za svaku je grupu održano čak 6 predavanja.
Predavači su uglavnom bivši natjecatelji koji su i sami bili učenici na kampovima pa su upoznati s čestim idejama natjecateljskih zadataka. Bit predavanja jest prenijeti ideju rješavanja određenog dijela zadataka, a onda je na učenicima da kroz odabrane zadatke tu ideju razrade i provježbaju. Također, uz predavanja, pripremljeni su hintovi koji mogu pomoći u slučaju da netko zapne, a i rješenja ako netko želi provjeriti vlastito rješenje.

2.7. Raspored aktivnosti

	Grupa	Četvrtak 2.	Petak 3.	Subota 4.	Nedjelja 5.
PRIJEPODNE	Prva	Dolazak	Dirichletov princip Tadej P. Tukara	Sustavi jednadžbi Tea Arvaj	Sukl. i sličnost Tea Arvaj
	Druga		Igre i invarijante Ivan Novak	KAGH i CSB Daniel Širola	Potencija točke Andrija Tomorad
	Treća		Komb. na ploči Andrija Tomorad	Vieteove formule Tadej P. Tukara	Inverzija Borna Šimić
	Četvrta		TB funkcijske Marin Varivoda	Mixing variables Petar Orlić	Pisane kružnice Krunoslav Ivanović
POSLIJEPODNE	Prva	Djelj. i kongr. Lucija Relić	Logika i dokazi Andrija Tomorad	Reli/ELMO	Indukcija Tadej P. Tukara
	Druga	Diof. jednadžbe Daniel Širola	Uvod u funkcijske Daniel Širola		Uvod u grafove Lucija Relić
	Treća	TB funkc. i pol. Ivan Novak	Pripisana kružnica Krunoslav Ivanović		Bijekcije Petar Orlić
	Četvrta	Teorija grafova Petar Orlić	Komb. geometrija Marin Varivoda		Funkcijske $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Ivan Novak

Dio I

Zadaci s predavanja

3. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

3.1. A1: Sustavi jednadžbi - Tea Arvaj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ideje i tehnike koje se često koriste kod rješavanja sustava jednadžbi:
Algebarski izrazi: nekad je korisno uvesti supstituciju ili zbrojiti ili pomnožiti jednadžbe. Također, faktorizacija jednadžbe (pogotovo ako dobijemo da je produkt faktora jednak nuli) može puno pomoći.
Neki poznati identiteti:

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \\
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)
\end{aligned}
$$

Nejednakosti: ponekad jednadžbu možemo prikazati kao granični slučaj neke nejednakosti (tj. slučaj u kojemu se u toj nejednakosti postiže jednakost) i to iskoristiti kako bismo izvukli neke nove zaključke (ili direktno dobili rješenja jednadžbe).
Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost):
Za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$$

Jednakost se postiže samo u slučaju kada je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Lakši zadaci

1. Gargamel je uhvatio N Štrumfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Papu Štrumfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumfova u prvoj vreći se smanjila za 0.8 milimetara, a prosječne visine Štrumfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 0.5 milimetara i 0.8 milimetara. Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumfova, odredite N.

2. Neka je $\{p, r, s, t\} = \{4, 8, 12, 16\}$. Promatrajući sve moguće izbore brojeva p, r, s, t, nađite sva rješenja (x, y, z) sustava jednadžbi:
$$
\begin{aligned}
x + y + z &= p \\
x + y - z &= r \\
x - y + z &= s \\
x - y - z &= t.
\end{aligned}
$$

3. Nađite sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav:
$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= 9a^3 \\
x^2y + xy^2 &= 6a^3
\end{aligned}
$$
za $a \in \mathbb{R}$.

Zadaci

4. Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y+z)&=90\\(y+z)(x+y+z)&=105\\(z+x)(x+y+z)&=255\end{aligned}$$

5. Odredite sve realne brojeve x, y, z za koje vrijedi:

$$\begin{aligned}xy+x+y&=31\\xz+x+z&=-5\\yz+y+z&=-9\end{aligned}$$

6. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned}x^2-y&=z^2\\y^2-z&=x^2\\z^2-x&=y^2\end{aligned}$$

7. Odredite sva realna rješenja sustava:

$$\begin{aligned}\left(1+4x^2\right)y&=4z^2\\\left(1+4y^2\right)z&=4x^2\\\left(1+4z^2\right)x&=4y^2\end{aligned}$$

8. Odredite sve trojke pozitivnih realnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi:

$$x^3+2y^2+\frac{1}{4z}=1,\ y^3+2z^2+\frac{1}{4x}=1,\ z^3+2x^2+\frac{1}{4y}=1$$

Teži zadaci

9. Odredite sva realna rješenja sustava:

$$\begin{aligned}x^2+x-1&=y\\y^2+y-1&=z\\z^2+z-1&=x.\end{aligned}$$

10. U skupu realnih brojeva riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}x^{2006}+y^{2006}+z^{2006}&=2,\\x^{2007}+y^{2007}+z^{2007}&=2,\\x^{2008}+y^{2008}+z^{2008}&=2.\end{aligned}$$

11. Odredite sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}x+y-z&=-1\\x^2-y^2+z^2&=1\\-x^3+y^3+z^3&=-1\end{aligned}$$

3.2. C1: Dirichletov princip - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U rješavanju raznovrsnih problema, posebno pri dokazivanju postojanja objekata koji imaju neko odredeno svojstvo, često je vrlo korisna i uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, koji je poznat pod raznim popularnim nazivima kao što su ”princip kutija”, ”princip pretinaca”, ”princip golubinjaka”, ”problem zečeva i kaveza” i dr. Prvi ga je jasno formulirao i dao mu precizan matematički smisao njemački matematičar francuskog porijekla P.G.L. Dirichlet (1805-1859). Zato se taj princip naziva - Dirichletov princip. Osnovna tvrdnja Dirichleotvog principa je da, ako imamo n predmeta raspoređenih u m kutija, gdje je $n > m$, postoji kutija u kojoj se nalaze barem dva predmeta.
Princip ima nekoliko generalizacija. Verzija koju najčešće koristimo jest: za prirodne brojeve k i m, ako je $n = km + 1$ predmeta raspoređeno u m skupova, Dirichletov princip nalaže da neki od skupova koji sadrži barem $k + 1$ predmeta. Za proizvoljne n i m uzimamo: $k + 1 = \lfloor (n - 1)/m \rfloor + 1 = \lceil n/m \rceil$

Lakši zadaci

1. Na nekom natjecanju iz matematike sudjelovalo je 32 učenika. Na natjecanju je bilo 5 zadataka, a nagrađeni su bili oni koji su točno riješili barem 2 zadatka. Na kraju natjecanja nagrade je primilo 8 učenika. Dokaži da postoji zadatak koji je točno riješilo najviše 12 učenika.

2. Na nekoj zabavi je bilo n ljudi. Neki od njih međusobno su se rukovali. Dokaži da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

3. Unutar kvadrata duljine stranice 1 nalazi se pet obojanih točaka. Dokažite da postoje 2 od tih 5 točaka takve da je udaljenost među njima manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Umjereni zadaci

4. U jednakostranični trokut stranice duljine 2 smještene su 33 točke. Dokaži da postoje 3 koje se mogu prekriti krugom polumjera 0.3.

5. Dokažite da postoji prirodan broj koji počinje s 1297365412807, a djeljiv je s 2019.

6. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji broj koji je djeljiv s njim koji se sastoji samo od znamenaka 0 i 5.

7. Dokažite da se uvijek može naći proizvoljno mnogo prirodnih brojeva oblika $11 \cdots 11000 \cdots 00$ koji su djeljivi s nekim unaprijed danim prirodnim brojem.

8. 17 ljudi dopisuje se svaki sa svakim i u svojim pismima pišu o 3 teme, svaki par piše o točno jednoj temi. Dokaži da postoji trojka koja međusobno piše o istoj temi.

9. U ravnini su sve točke obojane jednom od dvije boje. Dokaži da postoji pravokutnik kojemu su sva 4 vrha obojana istom bojom.

Teži zadaci

10. Izabrano je k različitih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 100. Koliki je najmanji k za koji nužno postoje 2 izabrana broja takva da je jedan višekratnik drugog?

11. U ravnini je dano 2015 točaka. Dokažite da među svim udaljenostima dviju točaka postoje barem 32 različite.

12. Dan je kvadrat sa stranicama duljine $10\sqrt{2}$ čiji su vrhovi crveni. Dano je 99 obojanih točaka unutar kvadrata takvih da nikoje 3 crvene točke ne leže na pravcu. Dokaži da postoji trokut površine najviše 1 čiji su vrhovi obojane točke.

3.3. G1: Sukladnost i sličnost, angle chasing - Tea Arvaj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Prije svega, podsjetimo se osnovnih činjenica vezanih uz sukladnost i sličnost.
Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u:

- dvjema stranicama i kutu među njima (SKS poučak)
- jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (KSK poučak)
- svima trima stranicama (SSS poučak)
- dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj od njih (SSK poučak)

Tvrdnju da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni zapisujemo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, pri čemu je $\cong$ oznaka sukladnosti.
Dva su trokuta slična ako:

- im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (SKS poučak)
- su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (KKK poučak)
- su im odgovarajuće stranice proporcionalne (SSS poučak)
- su im jednaki omjeri dviju stranica i kut nasuprot veće od njih (SSK$^>$ poučak)

Tvrdnju da su trokuti $\triangle DEF$ i $\triangle D_1E_1F_1$ slični zapisujemo $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$, pri čemu je $\sim$ oznaka sličnosti.
Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest stalan (za te trokute) i naziva se koeficijentom sličnosti.
Također, u zadacima ćemo morati i promatrati relacije između kuteva na skici, pa je korisno prisjetiti se:

- Središnji kut dvostruko je veći od obodnog.
- Kutevi nad istom tetivom međusobno su jednaki.

Uvodni zadaci

1. Dokažite da je točka na simetrali dužine ako i samo ako je jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.
2. Dokažite da je točka na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova tog kuta.
3. Dokažite da je srednjica trokuta paralelna trećoj stranici i jednaka njenoj polovici.
4. Neka je T točka unutar kružnice k i neka se tetive te kružnice, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, sijeku u T. Tada vrijedi:
$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$
Umnošci s lijeve i desne strane jednakosti nazivaju se *potencijom točke T u odnosu na kružnicu k*.
5. Dokažite da je četverokut paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.
6. Zadana je kružnica, točka T izvan nje i iz T dvije tangente na kružnicu. Dokažite da su dirališta jednako udaljena od T.

Lakši zadaci

1. Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.
2. U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C, N je nožište visine na hipotenuzu. Dokažite da vrijedi $|CN| = \sqrt{|AN| \cdot |BN|}$, $|BC| = \sqrt{|AB| \cdot |BN|}$ i $|AC| = \sqrt{|AB| \cdot |AN|}$
3. Zadan je kut $\sphericalangle A$ i točka M unutar kuta. Točkama A i M prolazi bilo koja kružnica, koja krakove zadanog kuta siječe u točkama P i Q. Dokažite da omjer $|MP| : |MQ|$ ne ovisi o izboru kružnice.
4. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice $\overline{AM}$ i $\overline{AN}$ na pravce BC i CD. Dokažite da $\triangle ABC \sim \triangle AMN$.

5. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici BC. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokažite da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

6. Zadana je polukružnica i njen promjer $\overline{AB}$. Na polukružnici je uzeta točka C. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ konstruirani su, izvan trokuta ABC, kvadrati $ADEB$, $BFGC$ i $CHKA$. Dokažite da trokuti ABC, BEF, CGH i AKD imaju jednake površine.

7. Krakovi i kraća osnovica trapeza tangente su kružnice sa središtem na dužoj osnovici. Dokažite da je duljina duže osnovice jednaka zbroju krakova.

8. Ako u trokutu $\triangle ABC$ simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki K tada vrijedi:
$$|BK| : |KC| = |BA| : |AC|$$

Zadaci

9. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Označimo s P polovište dužine $\overline{AC}$. Dokažite da je $|DM| = 2|BP|$.

10. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C i D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne ovise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

Angle chase zadaci

11. Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku AB točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti.

12. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD > 90°$. Neka su E, F i G nožišta okomica iz vrha C na pravce AB, BD i DA, redom, i H sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$. Dokažite da točke E, F, G i H leže na istoj kružnici.

13. Dan je tetivni peterokut $ABCDE$. Neka su točke F, G, H i I polovišta dužina BC, CD, DE i EA, redom. Neka se pravci FG i HI sijeku u točki J, a pravci AC i HI u točki K. Dokazati da se točka K nalazi na kružnici opisanoj trokutu FCJ.

14. Kružnica upisana u ABC dodiruje stranice BC, CA i AB u točkama D, E i F, redom. Neka je točka K sa iste strane pravca EF kao i točka A, takva da vrijedi $\sphericalangle KFE = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle KEF = \sphericalangle ABC$. Dokažite da vrijedi $KD \perp BC$.

15. Upisana kružnica dodiruje stranice AB i AC trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokažite da je $BP \perp CP$.

16. Kružnice ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac kroz B siječe ω_1 i ω_2 u C i D, redom. Točke E i F su na ω_1 i ω_2, redom, takve da $CE = CB$ i $BD = DF$. BF siječe kružnicu ω_1 u točki P, a BE kružnicu ω_2 u točki Q. Dokažite da su točke A, P i Q kolinearne.

17. $ABCD$ je tetivni četverokut. E je sjecište pravaca paralelnih s AC i BD koji prolaze kroz B i A, redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB u F i G, redom. Dokažite da točke C, D, F i G leže na istoj kružnici.

18. U šiljastokutnom trokutu ABC, BH je visina iz vrha B. Točke D i E su polovišta dužina AB i AC redom. F je osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac ED. Dokažite da pravac BF prolazi središtem opisane kružnice trokuta ABC.

19. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka je t tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A. Kružnica sa središtem u točki A koja prolazi točkom C siječe stranicu AB u točki D, a pravac t u točkama E i F tako da su C i E s iste strane pravca AB. Dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na pravcu DE.

3.4. N1: Djeljivost i kongruencije - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

"TB Blic"

U svakom zadatku a, b, c i d su cijeli brojevi različiti od nule, n je prirodan, a p i q prosti. NZM označava najveću zajedničku mjeru (djelitelj), a NZV najmanji zajednički višekratnik.
Za svaki zadatak odredite je li odgovor DA (ako tvrdnja vrijedi za sve izbore brojeva, u tom slučaju navedite kratak dokaz tvrdnje) ili NE (ako postoji slučaj za koji tvrdnja ne vrijedi, tada nađite neki kontraprimjer).

1. Ako $a \mid b$ i $a \mid c$ mora li biti $a \mid b+c$?
   DA / NE. Zašto:
2. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$ mora li biti $a+b \mid c$?
   DA / NE. Zašto:
3. Ako $a \mid c$ i $b \mid c$ mora li biti $ab \mid c$?
   DA / NE. Zašto:
4. Ako $a \mid b$ i $b \mid c$ mora li biti $a \mid c$?
   DA / NE. Zašto:
5. Ako $a \mid b$ i $c \mid b$ mora li biti zadovoljeno $a \mid c$ ili $c \mid a$?
   DA / NE. Zašto:
6. Ako $a \mid b$ i $c \mid d$ mora li biti $ac \mid bd$?
   DA / NE. Zašto:
7. Ako $a \mid b$ i $c \mid d$ mora li biti $a+c \mid b+d$?
   DA / NE. Zašto:
8. Ako $a \mid b$ i $a \mid c$ mora li biti $a \mid \text{NZM}(b, c)$?
   DA / NE. Zašto:
9. Ako $b \mid a$ i $c \mid a$ mora li biti $\text{NZM}(b, c) \mid a$?
   DA / NE. Zašto:
10. Ako $b \mid a$ i $c \mid a$ mora li biti $\text{NZV}(b, c) \mid a$?
    DA / NE. Zašto:
11. Ako $a \mid bc$ mora li biti zadovoljeno $a \mid b$ ili $a \mid c$?
    DA / NE. Zašto:
12. Ako $a \mid b+c$ mora li biti zadovoljeno $a \mid b$ ili $a \mid c$?
    DA / NE. Zašto:
13. Ako $ab \mid c$ mora li biti zadovoljeno i $a \mid c$ i $b \mid c$?
    DA / NE. Zašto:
14. Ako $a^n \mid b^n$ mora li biti $a \mid b$?
    DA / NE. Zašto:
15. Ako $a \mid b$ mora li biti $a^n \mid b^n$?
    DA / NE. Zašto:

16. Ako $a \mid b^n$ mora li biti $a \mid b$?

    DA / NE. Zašto:

17. Ako $a \mid b$ i $b \mid a$ mora li biti $a = b$?

    DA / NE. Zašto:

18. Ako $a \mid bc$ i $\mathrm{NZM}(b, c) = 1$ mora li biti zadovoljeno $a \mid b$ ili $a \mid c$?

    DA / NE. Zašto:

19. Ako $p \mid ab$ mora li biti zadovoljeno $p \mid a$ ili $p \mid b$?

    DA / NE. Zašto:

20. Ako $p \mid a + b$ mora li biti zadovoljeno $p \mid a$ ili $p \mid b$?

    DA / NE. Zašto:

21. Ako $p \mid a^n$ mora li biti $p^n \mid a^n$?

    DA / NE. Zašto:

22. Ako $p \mid q$ mora li biti $p = q$?

    DA / NE. Zašto:

Djeljivost

Definicija. Za cijele brojeve a i b kažemo da a dijeli b (odnosno da je b djeljiv sa a), u oznaci $a \mid b$, ako postoji cijeli broj k takav da vrijedi $b = ak$. Ako $a \mid b$ tada kažemo da je a djelitelj od b i b višekratnik od a.

Teorem o dijeljenju s ostatkom. Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r$ i $0 \leqslant r < a$.

Prisjetimo se pravila o djeljivosti nekim brojevima (pokušajte ih i dokazati za vježbu):

- Broj je djeljiv s 2 ako i samo ako mu je zadnja znamenka parna.
- Broj je djeljiv s 5 ako i samo ako mu je zadnja znamenka 5 ili 0.
- Broj je djeljiv s 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- Broj je djeljiv s 9 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Definicija. Neka su a i b cijeli brojevi.
Za cijeli broj d koji dijeli i a i b kažemo da je **zajednički djelitelj** od a i b. Najveći takav broj zovemo **najveći zajednički djelitelj** (mjera) brojeva a i b i označavamo $\mathrm{M}(a, b)$.
Najmanji prirodan broj c za koji vrijedi $a \mid c$ i $b \mid c$ zovemo **najmanji zajednički višekratnik** brojeva a i b.
Bezoutov identitet. Neka su a i b cijeli brojevi i neka je $d = \mathrm{M}(a, b)$. Tada postoje cijeli brojevi x i y takvi da vrijedi $ax + by = d$.

Prosti brojevi

Definicija. Prirodan broj $p > 1$ se zove **prost** ako p nema niti jednog djelitelja d takvog da je $1 < d < p$. Ako je $p > 1$ i p nije prost, kažemo da je p složen.
Fundamentalni teorem aritmetike. Svaki prirodni broj n ima jedinstvenu faktorizaciju na proste faktore. Preciznije, za svaki prirodni broj n postoje (različiti) prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i eksponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ takvi da vrijedi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Definicija. Za cijele brojeve a i b kažemo da su **relativno prosti** ako vrijedi $M(a, b) = 1$.

Kongruencije

Definicija. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a **kongruentan** broju b **modulo** n ako vrijedi $n \mid a-b$. To pišemo kao $a \equiv b \pmod{n}$.
Dakle, a je kongruentan b modulo n ako i samo ako a i b daju isti ostatak pri dijeljenju sa n. (Zašto?)
Primjer.

- $13 \equiv 3 \pmod{10}$ jer $10 \mid 13 - 3$
- $-2 \equiv 4 \pmod{6}$ jer $6 \mid (-2) - 4$

Navedimo sada osnovna svojstva kongruencija. Ona slijede direktno iz svojstava djeljivosti (dokažite ih za vježbu).

1. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ onda je i $b \equiv a \pmod{n}$
2. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n}$ onda je $a \equiv c \pmod{n}$
3. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$ onda je $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
4. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$ onda je $ac \equiv bd \pmod{n}$
5. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $k \in \mathbb{N}$ onda je $a^k \equiv b^k \pmod{n}$
6. Ako je $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $\mathrm{M}(c, n) = 1$ onda je $a \equiv b \pmod{n}$;
   općenito vrijedi ako je $ac \equiv bc \pmod{n}$ onda je $a \equiv b \pmod{\frac{n}{\mathrm{M}(n,c)}}$
7. Ako je f polinom sa cjelobrojnim koeficijentima i $a \equiv b \pmod{n}$ onda je $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$

Zadaci

1. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.
2. Postoji li cijeli broj x za koji su oba broja $\dfrac{14x + 5}{9}$ i $\dfrac{17x - 5}{12}$ cijela?
3. Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.
4. Neka je n prirodni broj i neka je S zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do n. Dokaži da broj S ne može biti za 1 manji od višekratnika broja 3.
5. Nađite ostatak pri dijeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ brojem 7.
6. Za koje $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $2x + 3 \equiv 4 \pmod{7}$?
7. Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.
8. (a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654.
   (b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.
9. Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve n za koje brojevi n i n^2 imaju jednake zadnje tri znamenke.
10. Dokažite sljedeći kriterij djeljivosti brojem 11: prirodan broj je djeljiv brojem 11 ako i samo ako mu je razlika zbroja znamenki na parnim i zbroja znamenki na neparnim mjestima djeljiva s 11.
11. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva djeljiv sa 9.
12. Dokažite da niti jedan član niza $a_n = 4^n + \dfrac{5 + (-1)^n}{2}$ nije kvadrat prirodnog broja.

3.5. X1: Logika i dokazi - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Jesu li zadatci koji počinju s "Dokaži..." teži od ostalih? Prije nego što išta zaključujemo, pogledajmo sljedeće primjere.

1. (a) Odredi sumu $\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{100^2+1}{100^2-1}$.

   (b) Dokaži da je $\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{100^2+1}{100^2-1}=100\frac{4849}{10100}$

2. (a) Odredi najveći realan k takav da za sve realne a,b,c vrijedi $(a+b+c)^2 \geqslant k(ab+ac+bc)$

   (b) Dokaži da je $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc)$

Prvi primjer pokazuje da sama tvrdnja, tj. ono što se dokazuje može biti i uputa za rješavanje. A u drugom primjeru imamo slučaj u kojem je dokazivanje samo korak unutar odredbenog zadatka (spoiler alert - odgovor u 2. primjeru je 3).
Sam koncept dokazivanja jest stvar logike više nego matematike. Jedino što je zajedničko svim dokaznim zadatcima jest to što imamo neku istinitu tvrdnju za koju pokazujemo da nužno slijedi iz uvjeta zadatka i nekih već poznatih tvrdnji (npr. teorema i aksioma).

Uvod u formalnu logiku

Prvi pojam jest sud (izjava). To je izjavna rečenica čiju istinitost možemo odrediti. Sud može biti ili istinit (često pridružujemo vrijednost 1) ili lažan (vrijednost 0). Često zbog jednostavnosti sudove označimo velikim slovima. Primjeri sudova:

1. Danas je petak.
2. Broj 4 je kvadrat broja 2 ili je broj 5 manji od nule.
3. Na ovom predavanju je barem 5, ali manje od 10 učenika.
4. Svaka mačka ima rep.
5. Postoje dva prosta broja čiji je umnožak prost broj.
6. Tisućita decimala broja π nije parna znamenka.

Vjerojatno ste primjetili da su neki sudovi nekim veznicima složeni od drugih jednostavnijih sudova. To možemo poopćiti logičkim operacijama. Najjednostavnije su negacija suda A (pišemo $\neg A$) što je sud koji je istinit samo kad je A lažan, zatim konjunkcija sudova $(A \wedge B)$ koja je istinita samo kad su svi sudovi istiniti i disjunkcija $(A \vee B)$ koja je lažna samo kad su svi sudovi lažni. Konjunkcija odgovara vezniku "i", a disjunkcija "ili".
U primjerima 4. i 5. imamo novi način slaganja sudova - pomoću kvantifikatora i varijabla. Imamo univerzalni kvantifikator ($\forall$) koji znači da se sud odnosi na sve opisane varijable iz domene, i egzistencijalni kvantifikator ($\exists$), on znači da postoji barem jedno što zadovoljava sud.

Uvodni zadatak 1: Napišite negacije sudova 2. - 5. ne na način sličan ovome: "Nije tako da *prepisani sud*". Razlog je to što nam složeni sudovi koji počinju negacijom daju vrlo slabu podlogu za zaključivanje i često ih je lakše dokazati tek kad se riješimo tog vanjskog operatora negacije.

Implikacija i ekvivalencija

Sljedeći važan pojam je implikacija. Radi se o još jednom binarnom operatoru sudova (pišemo $A \implies B$) koji je lažan samo ako je A (premisa, pretpostavka, hipoteza) istinit sud, a B (konluzija) lažan, inače je implikacija istinita. U svakodnevnom govoru to možemo izreći na razne načine ("A povlači/implicira B", "Ako A, onda B","A samo ako B", "Iz A slijedi B", "A, dakle B", "A je dovoljan uvjet za B, "B je nužan uvjet za A", ...).
S druge strane, ako znamo da je neka implikacija istinit sud $A \implies B$, i da je A istinit sud, onda smo sigurni da je i B istinit sud. Taj način zaključivanja logičari nazivanju *Modus ponens*. Ali ako je A lažan ili B istinit, **ne možemo ništa zaključiti o onom drugom sudu**. Npr. znamo da ako sam bio u Parizu, onda sam bio u Francuskoj, no ako znamo da sam bio u Francuskoj, ne može se znati jesam li bio u Parizu ili ne. *Modus ponens* je prisutan u gotovo svakom matematičkom zaključku. Ono što zapravo radimo u dokazu jest rastavljanje jednog dugod složenog zaključka na više malih jasnih istinitih implikacija. Te implikacije su vrlo

trivijalne kod npr. algebarskih zadataka - rješavanje linearne jednadžbe nije ništa drugo nego primjenjivanje nekih računskih operacija na obje strane pri čemu znamo da će jednakost ostati valjana ako je vrijedila i prije operacije.
Ekvivalencija ($A \iff B$) jest sud koji je istinit kad su A i B oba istinita ili oba lažna. Odgovara složenom vezniku "ako i samo ako".

Uvodni zadatak 2: odredite istinitost sljedećih implikacija/ekvivalencija, ako se radi o implikaciji, odredite negaciju tvrdnje :

1. Ako je danas utorak, sutra će biti srijeda.
2. $x = 2 \iff x^2 = 4$
3. Ako i samo ako su sve stranice trokuta ABC jednake duljine, onda su svi kutovi trokuta ABC jednake veličine.
4. Ako su neki prosti brojevi djeljivi sa 6, onda ja imam 20 godina.
5. Ako je implikacija $A \implies B$ istinita, onda je B istinit.
6. Ako i samo ako je "Odaja tajni" četvrta knjiga Harryja Pottera, onda je "Nova nada" drugi nastavak Ratova zvijezda.
7. Za svaku izjavu istinitu izjavu P, $\neg P$ je lažno.

Kako negiramo implikaciju? Tako da konjunkcijom povežemo pretpostavku i negaciju konkluzije, jer je to jedini slučaj u kojem je po definiciji negacija lažna.
Ovaj pojam nam je jako važan jer gotovo svaki dokazni zadatak se može svesti na oblik implikacije (ili ekvivalencije) $P \implies Q$ pri čemu je P uvjet, a Q tvrdnja.
Jedan jasan način dokazivanja implikacije je *Modus ponens*, tj. direktan dokaz (pretpostavimo P i dokažemo Q), ali postoji i još načina. Možemo dokazati da je negacija implikacije lažna tako da pretpostavimo suprotno i dokažemo da iz tog slijedi nešto što ne može biti istinito u tom slučaju (svođenje do kontradikcije). Treći način je da umjesto $P \implies Q$ dokazujemo $\neg Q \implies \neg P$ jer se može dogoditi da to budu ljepše tvrdnje, tzv. obrat po kontrapoziciji ili *Modus tollens.*

Uvodni zadatak 3. (za demonstraciju dokazivanja):

a) Dokažite da je skup prostih brojeva beskonačan.

b) Ako je a^2 paran, onda je a paran. Dokaži.

Pitanje za razmišljanje: Kad matematičkom indukcijom dokazujemo $(\forall n \in N)P(n)$, zapravo dokazujemo konjunkciju nekih tvrdnji. Kojih? (Hint: dvije su, jedna od njih ima implikaciju i jedna od njih ima neki kvantifikator.)

Zadaci

1. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.
2. Odredi najmanji n takav da u svakom skupu od n brojeva uvijek postoje dva različita čiji je zbroj ili razlika djeljiva s 1000.
3. Malo geometrije:
   (a) Jednakokračni trapez definiramo kao trapez kojem su kraci jednake duljine, dokaži da su mu i dijagonale jednake duljine.
   (b) Dokaži da je visina jednakokračnog trokuta iz vrha nasuprot osnovici ujedno i težišnica. Dokaži i obrat te tvrdnje.
4. Neka su a, b duljine kateta pravokutnog trokuta, c duljina hipotenuze, a v duljina visine na hipotenuzu. Dokaži da vrijedi $c + v > a + b$.
5. Odredi najmanji broj prirodni k takav da je zbroj bilo kojih k kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva uvijek djeljiv s 15.
6. Krivi dokazi. Gdje je greška u zadanim dokazima?

(a) Neka je x (kompleksan) broj takav da vrijedi $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x + 1 + \frac{1}{x} = 0 \text{ (očito je } x \neq 0) \implies x + 1 = -\frac{1}{x} \implies$$
$$\implies x^2 - \frac{1}{x} = 0 \implies x^2 = \frac{1}{x} \implies x^3 = 1 \implies x = 1 \implies$$
$$\implies 1^2 + 1 + 1 = 0 \implies 3 = 0$$

(b) Dokazat ćemo indukcijom da su svi konji iste boje.

Baza: skup od 1 konja, taj konj je iste boje kao i sam on pa je baza istinita.

Korak: Pretpostavimo da su svi konji u skupu od n konja iste boje. Dodamo još jednok konja koji sa svima iz početnog skupa osim prvog čini novi skup od n konja koji su svi jednake boje po pretpostavci, dakle ostaje nam samo provjeriti da su prvi i naknadno dodani konj iste boje, a jesu zato jer su oba iste boje kao neki drugi (koji se našao u oba skupa)

(c) Očito je $0 < \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$. Također,

$$0 < \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 1 - \sqrt{3},$$

ali to je broj manji od nule. Dakle postoji broj koji je i pozitivan i negativan.

(d) Zašto ne možemo pokazati da je $2 = \sqrt{4}$ iracionalan broj na isti način kao što dokazujemo da je $\sqrt{2}$ iracionalan?

Teži zadaci

7. Zadan je trokut $\triangle ABC$ i točka D na stranici AC takva da vrijedi $|DB| = |DC|$. Ako je AB tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle BCD$, dokaži da je BD simetrala kuta $\angle ABC$

8. U ravnini je zadano konačno mnogo crnih i bijelih točaka. Na svakoj dužini čije su krajnje točke iste boje nalazi se točka druge boje. Dokaži da su sve te točke kolinearne (pripadaju istom pravcu).

9. Dvostruki šah je igra identična šahu samo što svaki igrač vuče dva poteza za redom umjesto jednoga. Dokaži da bijeli (koji igra prvi) ima negubitničku strategiju.

10. (MEMO 2018) Na brodu je n gusara od kojih svatko drži na ciljniku točno dvojicu drugih gusara. Kad je neki gusar prozvan, onda on (ako je živ) puca u onu dvojicu. Gusari su prozvani nekim redosljedom i na kraju je ubijeno ukupno 28 gusara. Dokaži da bi za svaki drugi redosljed prozivanja ("tko koga cilja" ostaje isto) barem 10 gusara bilo ubijeno.

3.6. Y1: Indukcija - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Zadaci

1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2 + 4 + ... + 2n = n^2 + n$.
2. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Dokažite sljedeću nejednakost: $n < 2^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
4. Dokažite $13|3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
5. Dokažite nejednakost: $3^n > 2^n + 3n$, za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$.
6. Dokažite da je broj $3^{2n+1} + 40n - 67$ djeljiv sa 64 za svaki $n \in \mathbb{N}$.
7. Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.
8. Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokaži da je tada $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodni broj n.
9. Dokažite da n pravaca u ravnini, od kojih nijedna dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom, dijele ravninu na ukupno $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ dijelova.
10. Ravnina je podijeljena pravcima na regije. Dokažite da regije možemo obojati u 2 boje, npr. crvenu i plavu, tako da nijedne dvije susjedne regije nisu obojane istom bojom.

Teški zadaci

11. Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. Ogrlica može biti i bez kamenja. Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ različitih vrsta kamenja, i da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.
12. Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.

4. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

4.1. A2: KAGH i CSB - Daniel Širola

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Zadaci iz nejednakosti su široko rasprostanjen tip zadataka čija težina može varirati od općinskog natjecanja pa sve do najtežih zadataka s međunarodnih olimpijada. Stoga je imperativ svakog, makar i neambicioznog natjecatelja poznavati barem osnovne metode rješavanja istih.

O nejednakostima generalno

Zadaci iz neejdnakosti se u pravilu svode na dokazivanje da je neki izraz u ovisnosti o nekim brojevima veći ili jednak od drugog za sve takve brojeve.

Primjer 4.1.1. ***Općinsko, 1993. 2. razred*** *Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i $x^2 + y^2 = 1$. Dokažite da je onda*

$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi $(x-y)^2 \geqslant 0$ pa je $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Ako dodamo $x^2 + y^2$ na obe strane jednakosti imamo

$$2(x^2 + y^2) \geqslant (x+y)^2 \implies |x+y| \leqslant \sqrt{2}$$

što smo trebali i pokazati. □

U rješavanju nejednakosti, često se pomažemo poznatim nejednakostima koje su nešto jednostavnije za dokazati. Slijedi nekoliko osnovnih nejednakosti koje ćemo koristiti.

Lemma 4.1.2. *Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda vrijedi*

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 \geqslant 2ab \\ \iff & a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \\ \iff & (a-b)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

a zadnja tvrdnja vrijedi jer je kvadrat realnog broja uvijek veći ili jednak nuli. □

Lemma 4.1.3. *Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda vrijedi*

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \\ \iff & \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\ \iff & 2a^2 + 2b^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2 \\ \iff & a^2 + b^2 \geqslant 2ab. \end{aligned}$$

a zadnja tvrdnja vrijedi jer je to upravo prethodno dokazana lemma. □

Lemma 4.1.4. *Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda vrijedi*

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} &= \frac{2ab}{a+b} \\ \iff (a+b)\sqrt{ab} &\geqslant 2ab \\ \iff a+b &\geqslant 2\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Kako su a i b pozitivni realni brojevi, znamo da postoje brojevi x i y takvi da je $a = x^2, b = y^2$ pa je zadnja nejednakost upravo $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ što je opet prva lemma. □

Gore navedene nejednakosti ne vrijede samo za dva člana, nego i generalno.

Teorem 4.1.5 (Nejednakosti među sredinama)**.** *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Definirajmo:*

- *kvadratna sredina - $K = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$*
- *aritmetička sredina - $A = \sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$*
- *geometrijska sredina - $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$*
- *harmonijska sredina - $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$*

Tada vrijedi

$$\max(a_1,\ldots,a_n) \geqslant K \geqslant A \geqslant G \geqslant H \geqslant \min(a_1,\ldots,a_n).$$

Često kolokvijalno kažemo, npr. $A - G$ nejednakost umjesto "nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine".
Potpuni dokaz ovog teorema je opširan pa ga nema smisla ovdje navoditi, ali možete ga pokušati dokazati za vježbu. Prisjetimo se da je na predavanju iz indukcije jedan od zadataka bio dokaz $A - G$ nejednakosti.
Za kraj, pokažimo na još par primjera kako koristiti nejednakosti u zadacima.

Primjer 4.1.6. *Ako su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ uz uvjet $abc = 1$, pokaži da je onda*

$$a+b+c \geqslant 3.$$

Dokaz. Ako primijenimo $A - G$ nejednakost na lijevu stranu, imamo

$$\frac{a+b+c}{3} \overset{A-G}{\geqslant} \sqrt[3]{abc} = 1$$

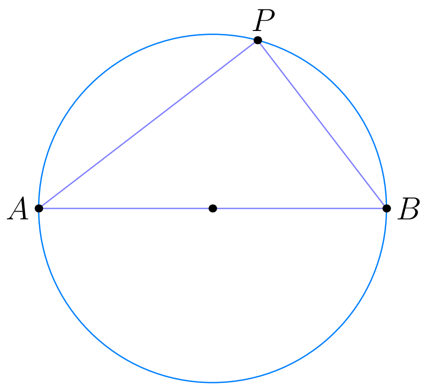
gdje zadnja jednakost vrijedi jer je $abc = 1$. □

Sljedeći primjer je svojevrsna geometrijska nejednakost, odnosno, zadatak u kojem kombiniramo neke geometrijske zaključke zajedno s algebarskima.

Primjer 4.1.7. *Neka je ω kružnica s promjerom $\overline{AB}$ gdje je $|AB| = 1$. Ako je P bilo koja točka na kružnici različita od A i b, pokaži da vrijedi*

$$|PA| + |PB| \leqslant \sqrt{2}$$

Dokaz. Uočimo sljedeće.



Kako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, prema Talesovom teoremu znamo da je $\angle APB = 90°$. Prema Pitagorinom poučku, imamo $|AP|^2 + |BP|^2 = |AB|^2 = 1$. Naposljetku, primijenimo $K - A$ nejednakost na $|AP|$ i $|BP|$ pa imamo

$$\frac{|AP| + |BP|}{2} \leqslant \sqrt{\frac{|AP|^2 + |BP|^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

čime je tražena nejednakost dokazana. □

Zadatci

1. Dokažite da za svaki realni broj a vrijedi

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0.$$

2. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c.$$

3. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve p i q vrijedi

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geqslant 9pq.$$

4. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

5. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y takve da je $x + y = 1$ vrijedi

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9.$$

6. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x + y + z = 1$ vrijedi

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

7. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ vrijedi

$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) \geqslant 8.$$

8. **Nesbittova nejednakost** Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Teži zadatci

9. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$(a + b + c)abc \leqslant a^4 + b^4 + c^4.$$

10. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi

$$3abc(a + b + c) \leqslant (ab + bc + ac)^2.$$

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

12. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Kamp mi je lagan i imam viška vremena

Ovo su mnogo teži zadaci za koje nećemo pisati rješenja te služe primarno za one koji ostale zadatke smatraju jednostavnima, ali i za one koje zanima kako izgledaju teži/olimpijski zadaci.

13. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite da onda vrijedi

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1\cdots b_n}.$$

14. Neka su $a_1, \dots, a_n$ realni brojevi takvi da je $a_i \geqslant 0, \forall i$ te definirajmo $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Dokažite da onda vrijedi

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leqslant 1 + S_n + \frac{1}{2!}{S_n}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}{S_n}^n$$

15. Neka je n prirodan broj veći ili jednak dva te neka je x realan broj takav da je $|x| < 1$. Dokažite da onda vrijedi

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

16. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi, $n \geqslant 2$ takvi da je $S = a_1 + \cdots + a_n = 1$. Dokažite da onda vrijedi

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a_1}{1+S-a_1} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

17. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2$ dokažite da je onda

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

18. Let w, x, y, z are non-negative reals such that $wx + xy + yz + zw = 1$. Show that

$$\frac{w^3}{x+y+z} + \frac{x^3}{w+y+z} + \frac{y^3}{w+x+z} + \frac{z^3}{w+x+y} \geqslant \frac{1}{3}$$

.

Cauchy-Schwarz

19. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_1-x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

20. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2 = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}.$$

21. Za pozitivne brojeve a_1, a_2, $\dots$, a_n, $n \geqslant 2$ označimo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$. Dokažite nejednakost

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

22. Neka su $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

4.2. C2: Igre i invarijante - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Invarijante i monovarijante

Zamislimo da imamo neki sustav nad kojim vršimo određene promjene. Svojstvo koje se ne mijenja tijekom tih promjena zove se *invarijanta*, a svojstvo koje se cijelo vrijeme mijenja jednoliko (npr. smanjuje se) zove se *monovarijanta*.

U zadacima je često korisno pokušati pronaći neku invarijantu ili monovarijantu, jer onda neki naizgled komplicirani proces možemo pojednostaviti i fokusirati se samo na neku invarijantu ili monovarijantu.

Primjer: Na ploči je na početku napisan broj 2021. U svakom potezu, ako je na ploči napisan broj x, možemo ga zamijeniti ili s $x - 12$ ili s $x^2 + 7$. Je li moguće postići da na ploči u nekom trenutku piše broj 0?

Rješenje: Uočimo da se ostatak koji broj daje pri dijeljenju s 3 ne mijenja tijekom ovog procesa, odnosno cijelo vrijeme je jednak 1, pa se ni u kojem trenutku ne dobije na ploči broj djeljiv s 3, pa tako niti 0.

Igre

Kod nekih zadataka koji su frazirani kao igre gdje igrači igraju naizmjence često je korisno promatrati koje su pozicije pobjedničke odnosno gubitničke. Pozicija će biti pobjednička (za igrača koji je na redu) ako je iz nje moguće doći u poziciju koja je gubitnička. Pozicija će biti gubitnička ako svaki potez vodi iz te pozicije u pobjedničku poziciju. Tada je korisno promotriti male primjere iz kojih se često može vidjeti neki uzorak. Odrediti pobjedničku strategiju znači dati algoritam kojim igrač pobjeđuje bez obzira kako njegov protivnik odigrao.

Primjer: Santos i Namik igraju igru. Na početku se na hrpi nalazi 2019 kamena. Igraju naizmjence, prvi igra Namik. Dozvoljen potez je s hrpe maknuti $1, 2$ ili 3 kamena. Pobjednik je onaj koji makne zadnji kamen s hrpe. Tko ima pobjedničku strategiju?

Rješenje: Ako je na hrpi 1, 2 ili 3 kamena, tada igrač koji je na redu ima pobjedničku strategiju. Ako je na hrpi 4 kamena, tada svaki potez vodi u neku pobjedničku poziciju, pa je 4 gubitnička pozicija. Ako je na hrpi $5, 6$ ili 7 kamenova, tada je moguće maknuti neki broj kamenova da broj kamenova postane 4. Ako je na hrpi 8 kamenova, tada svaki potez vodi u pobjedničku poziciju, pa je 8 gubitnička pozicija. Primjećujemo uzorak: sve pozicije djeljive s 4 su gubitničke, a ostale su pobjedničke. Pobjednička strategija za Namika je tada sljedeća:

$$\text{ako je broj bombona } 4k + l \text{ gdje je } l \leqslant 3, \text{ onda makni } l \text{ bombona.}$$

Prije svakog Namikovog poteza, broj bombona neće biti djeljiv s 4, a nakon njegovog poteza hoće, pa će upravo on maknuti zadnji kamen. Dakle, kako 2019 nije djeljiv s 4, Namik ima pobjedničku strategiju.

Zadaci

1. Na ploči su zapisani brojevi $3, 4$ i 12. U svakom potezu, Anibal bira dva broja (a, b) koji su na ploči, obriše ih i umjesto njih napiše brojeve $\dfrac{3a-4b}{5}$ i $\dfrac{4a+3b}{5}$. Moće li Anibal postići da su nakon konačno mnogo poteza na ploči napisani brojevi $202, 80$ i 310?

2. Stella i Emanuel igraju igru za dva igrača(igraju naizmjence), prva je na redu Stella. Na početku, na ploči je zapisan broj 2020!. U svakom potezu, igrač izabere prirodan broj s najviše 20 prostih faktora koji je manji ili jednak broju na ploči. Broju na ploči oduzme se taj broj i na ploču se napiše dobivena razlika. Pobjednik je igrač koji može izabrati broj jednak broju na ploči. Tko ima pobjedničku strategiju?

3. Na beskonačnoj ploči sastavljenoj od jediničnih kvadratića konačan broj polja obojan je crno, a ostala su obojana bijelo. U svako polje je upisan broj njemu susjednih polja (onih koja dijele stranicu s njim) koja su različite boje od njega. Dokaži da je zbroj svih brojeva na ploči djeljiv s 4.

4. Za dva prirodna broja a i b, Gabrijela i Vice igraju sljedeću igru: S dvije hrpe koje sadrže redom a i b keksića, u svakom potezu igrač bira prirodan broj n, uzima $2n$ keksića s jedne od hrpa, pojede n kolačića i stavi n kolačića na drugu hrpu. Osoba koja ne može napraviti potez je gubitnik. Igrači igraju naizmjence, a prvi je na redu Vice. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje Gabrijela ima pobjedničku strategiju.

5. Na ploči je napisano 2020 prirodnih brojeva. Dozvoljen potez je zamjena tri broja (a, b, c) s ploče koji su stranice nejednakostraničnog trokuta brojevima $(a+b-c, b+c-a, c+a-b)$. Dokaži da nije moguće napraviti beskonačno dozvoljenih poteza.

6. Matej i Bruno Roko igraju kartašku igru s $2n$ karata koje su numerirane s $1, \ldots, 2n$. Na početku se svakom podijeli n karata. Nakon toga naizmjence bacaju karte sve dok zbroj bačenih karata nije djeljiv s $2n+1$. Ako je zbroj bačenih karata djeljiv s $2n+1$, pobjeđuje zadnja osoba koja je bacila kartu. Dokaži da ako Matej igra prvi, onda Bruno Roko ima pobjedničku strategiju.

7. Na ploči je napisano 2020 prirodnih brojeva. U svakom potezu, Adian prvo izračuna najmanji zajednički višekratnik svih brojeva na ploči (označimo ga s L) i nakon toga bira prirodan broj a koji je na ploči, izbriše a i umjesto njega napiše broj $\frac{L}{a}$. Dokaži da Adian bez obzira na to kojih 2019 brojeva je na početku na ploči uvijek može postići da se nakon konačno mnogo koraka na ploči nalazi 2019 jedinica.

8. Kristijan i Borna igraju igru. Kristijan izabere 2 prirodna broja a i b, i broj $a+b$ se napiše na ploču. Nakon toga, Kristijan dobije 2016 papirića s brojevima $a+1, \ldots, a+2016$ a Borna dobije $b+1, \ldots, b+2016$. U svakom koraku, Kristijan bira neki svoj papirić s brojem x a Borna nakon što vidi Kristijanov papirić bira neki svoj papirić s brojem y, i broj na ploči se množi s $x+y$. Igra staje kad oboje ostanu bez papirića. Kristijanov cilj je da posljednji broj na ploči ima različit ostatak od $a+b$ pri dijeljenju s 2017, u suprotnom pobjeđuje Borna. Tko ima pobjedničku strategiju?

4.3. G2: Potencija točke - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Evo za početak nekoliko uputa koje vrijede za gotovo svaki geometrijski zadatak. Ako to već radite, odlično.

1. Nacrtaj urednu skicu s priborom, može i više njih ako je neka točka nasumično odabrana. To ne daje samo više prostora za označavanje elemenata skice, nego i mogućnost za uočiti i zatim dokazati neku tvrdnju koja je korak prema rješenju (npr. jednakost dužina/kutova, paralelnost pravaca, kolinearnost točaka...).
2. Uvijek odredi sve kutove koje možeš (ako nema poznatih brojeva, onda algebarski, tzv. angle-chasing), To, ako nije ono što se traži, često vodi nečem složenijem (npr. sukladnost, sličnost, tetivnost...).
3. Pazi na to da iskoristiš svaki uvjet zadatka.
4. Nekad ako se zapne, dobro je i krenuti od kraja, tj. zapitati se što je ekvivalentno s onim što se želi dokazati da se pronađe korak koji nedostaje.

Prije svega, potrebno je definirati potenciju točke.

Definicija: Neka je $k(S, r)$ kružnica, i T proizvoljna točka u ravnini. Potencija točke T na kružnicu k je $|OT|^2 - r^2$.

Uvodni zadatak 1: Neka je k kružnica i s pravac koji ju siječe. Neka su A i B sjecišta, a T bilo koja točka na pravcu s izvan kružnice. Dokaži da je potencija točke T na k jednaka $|TA||TB|$. Kako glasi tvrdnja ako je T unutar kružnice? Dokaži.

Potencijom točke lako pokažemo da, ako su A, B, C, D na istoj kružnici i T sjeište AB i CD, vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. Vrijedi li obrat?

Uvodni zadatak 2: Zadane su dvije kružnice u ravnini, nađite geometrijsko mjesto svih točaka T koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

Zadatci će imati malo čudne tvrdnje, npr. kolinearnosti ili koncikličnosti točaka koje baš i nemaju veze jedna s drugom, pa umjesto angle chasinga koristimo druge načine za dokazivanje. Sad smo obradili neku bazu iz koje sijedi valjanost metoda koje koristimo zadatcima. Glavni smisao ovog predavanja je učenje nečeg što može poslužiti za razne oblike tvrdnji, nije trivijalno i ne traži "dobru povezanost" geometrijskih elemenata.

Lakši zadaci

1. Zadane su dvije kružnice koje se sijeku u K i L te njihova zajednička tangenta koja ih dira u A i B. Neka je $M = AB \cap KL$. Dokaži da je M polovište dužine AB.
2. Dana je kružnica promjera AB i proizvoljne točke D i C na luku AB. E je točka na presjeku pravaca ADi BC. Dokažite da vrijednost izraza $|AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$ ne ovisi o izboru točaka D i C.
3. Na stranicama BC , CA i AB trokuta $\triangle ABC$ odabrane su redom točke D , E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivan. Neka je T sjecište kružnica opisanih trokutima $\triangle BDF$ i $\triangle CDE$. Dokažite da su točke A , D i T kolinearne.
4. Zadane su tri kružnice. Dokažite da se radikalne osi parova tih kružnica ili sijeku u jednoj točki (tu točku nazivamo radikalno središte) ili su paralelne te odredite dovoljan i nužan uvjet za postojanje radikalnog središta.

Umjereni zadaci

5. Dvije kružnice k i l sijeku se u S i T. Neka je P proizvoljna točka na pravcu ST, te p i q pravci koji prolaze kroz P. Neka je $A, B = p \cap k$ i $C, D = q \cap l$. Dokaži da A, B, C, D pripadaju istoj kružnici.
6. Dvije kružnice sa središtima P i Q radijusa 1 i 2 redom, sijeku se u X i Y. Dokaži da je proizvoljna točka A s iste strane pravca XY kao P ako i samo ako je $|AQ|^2 - |AP|^2 > 3$
7. Neka je $ABCD$ trapez i E sjecište pravaca AD i BC. Dokažite da se kružnice čiji su promjeri AC i BD sijeku na pravcu koji prolazi kroz E i okomit je na AB.
8. Zadan je trokut $\triangle ABC$. Neka su K, L, M, N točke na stranicama AB, AC, BC, BC takve da vrijedi $|AK| = |AL|$,$|\angle ALK| = |\angle LMK|$, $|\angle LKA| = |\angle LNK|$. Dokaži da je četverokut $KLMN$ tetivan.

9. Zadane su dvije kružnice. Dokaži da je geometrijsko mjesto točaka koje mogu biti središte ortogonalne kružnice (na obje zadane) zapravo njihova radikalna os. Kružnice su međusobno ortogonalne ako se sijeku te su njihove tangente u svakom sjecištu međusobno okomite.

Teži zadaci

10. Neka su $A, B, C,$ i D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera AC i BD sijeku se u točkama X i Y. Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad AC i BD tim redom. Dokažite da su pravci AM, DN i XY kopunktalni.

11. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut ortocentra H i neka je D točka na stranici BC. Neka su E i F nožišta visina iz B i C redom. Neka je k kružnica opisana trokutu $\triangle BDF$ i X točka takva da je dužina DX promjer od k. Analogno definiramo kružnicu l i točku Y. Dokaži da H, X, Y pripadaju istom pravcu.

12. Dvije kružnice k, l se sijeku u točkama X i Y. Pravac p prolazi kroz središte kružnice k i siječe l u A i B, a pravac q prolazi kroz središte kružnice l i siječe k u C i D. Ako su A, B, C, D na istoj kružnici, dokaži da je središte te kružnice na pravcu XY.

13. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut s okomitim dijagonalama i k njegova opisana kružnica. Neka su E i F osnosimetrične slike točke D preko AB, BC redom, a P sjecište EF i BD. Ako su Q i R sjecišta k (različita od D) s kružnicama opisanim trokutima $\triangle DPE$ i $\triangle DPF$, dokaži da je $|EQ| = |FR|$

14. Neka je $\triangle ABC$ trokut s ortocentrom H. Kružnica koja prolazi kroz H i središte joj je na polovištu stranice BC siječe BC u točkama A_1 i A_2. Analogno definiramo B_1 i B_2 te C_1 i C_2. Dokaži da A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leže na istoj kružnici.

4.4. N2: Diofantske jednadžbe - Daniel Širola

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Diofantske jednadžbe su jedan od najstarijih oblika matematičkih problema. Nazvani su po svom tvorcu, matematičaru Diofantu iz Aleksandrije. Naime, i njegov je život, prema legendi, na njegovoj nadgrobnoj ploči opisan diofantskom jednadžbom. Neka to bude naš prvi zadatak danas.

Putniče, ovdje leži Diofant iz Aleksandrije.
Umjetnost aritmetike može nam, o čuda li, kazati kakav bješe njegov životni vijek.
Šestinu je života trajalo njegovo djetinjstvo.
Još je dvanaestina života njegova prošla dok mu nije brada počela rasti.
Od tada je sedminu života Diofant oženjen bez djece bio.
Nakon još 5 godina bogovi su mu podarili prekrasna sina.
Nakon što je poživio samo polovinu očeva života,
Diofantova prvijenca sudbina je odvojila od ovozemaljskog života.
Nakon još četiri godine žalosti, i Diofant je pošao na Elizejske poljane.

Diofantske jednadžbe su matematički problemi teorije brojeva koji obično zahtijevaju rješenja u cijelim ili prirodnim brojevima određenje jednadžbe. Dati ćemo na početku nekoliko više ili manje trivijalnih primjera diofantskih jednadžbi.

Primjer 4.4.1. *Odredi sva prirodna rješenja jednadžbe*

$$x^2 + 100 = y^2$$

Dokaz. Prebacimo x^2 na drugu stranu i dobivamo $y^2 - x^2 = 100$. Faktorizirajući lijevu stranu dolazimo do:

$$(y - x)(y + x) = 100.$$

Pošto su $x, y \in \mathbb{N}$, $x + y \in \mathbb{N}$, pa onda i $y - x \in \mathbb{N}$. Dakle tražimo sve mogućnosti faktorizacije 100 na dva faktora. Pošto je $x + y > x - y$, vrijedi:

$$(x + y, x - y) \in \{(100, 1), (50, 2), (20, 5), (10, 10)\}$$

Sada svaki od tih slučajeva rješavamo pojedinačno. Primjerice

$$(x + y, x - y) = (50, 2) \implies x + y = 50, x - y = 2 \implies 2x = 52 \iff x = 26, \implies y = 24.$$

Provjerom se utvrdi da su to ujedno i jedina rješenja. □

Idući primjer pokazuje dvije moguće metode rješavanja diofantskih jednadžbi:

Primjer 4.4.2. *Nađi sve $x, y \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.*

Dokaz. Prezentirati ćemo dva rješenja.

1. **Prvo rješenje.** Pomnožimo jednadžbu s $5xy$. Tako dobivamo:

   $$5x + 5y = xy \iff xy - 5x - 5y + 25 = 25 \iff (x - 5)(y - 5) = 25.$$

   Dalje se to raspiše analogno predhodnom primjeru.

2. **Drugo rješenje.** Malko drukčije izmanipuliramo jednadžbu:

   $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{y} = \frac{y - 5}{5y} \iff x = \frac{5y}{y - 5} = 5 + \frac{25}{y - 5}.$$

   Kako bi x bio prirodan, mora vrijediti $y - 5 | 25$. Sada ispišemo sve djelitelje od 25 i dobivamo: $y \in \{6, 10, 30\}$. Te opet dobivamo ista rješenja za x.

□

Zajedljivi i spretni promatrač će s lakoćom prigovoriti da suštinski prvi i drugi način rješavanja i nisu nešto pretjerano različiti i raznoliki jer se praktički svedu na isto. Poanta oba rješenja je da vam na laganom zadatku pokažu dvije važne metode u rješavanju diofantskih jednadžbi. **Metodu umnoška** i **metodu kvocijenta**, redom. U pravilu kod ovakvih zadataka preferiram metodu umnoška, no stvar je osobne prirode. Bitno je da se zadatak riješi. :)

Primjer 4.4.3. *(Pitagorine trojke) Nađite sve trojke prirodnih brojeva a, b, c za koje vrijedi: $a^2 + b^2 = c^2$*

Dokaz ovog primjera nije predmet ovog predavanja i možda će se u samo pojaviti kao svojevrsna digresija, no znatiželjni čitatelj pozvan je da sam istraži ovu zanimljivu temu.

Lakši zadaci

1. Rješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$
2. Odredite sve proste brojeve p i sve cijele brojeve x takve da vrijedi $13p + 4x^2 - 1470 = 0$.
3. Dokažite da za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ jednadžba $(n^2 + n + 2)x + 2y = 1$ nema cjelobrojna rješenja.
4. Riješite u skupu cijelih brojeva $5x + 2y^2 = 2001$
5. Rješi u prirodnim brojevima $2^x + 1 = y^2$.
6. Rješi u prirodnim brojevima $2^x - 1 = y^2$.

Umjereni zadaci

7. Nađite $x, y, z \in \mathbb{N}, x \leqslant y \leqslant z$ koji zadovoljavaju jednadžbu:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$
8. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je $\sqrt{n^2 + 4n - 5} \in \mathbb{N}$.
9. Odredi sve trojke prirodnih brojeva za koje vrijedi $x^y - 2^z = 1$.
10. Dokaži da za prosti broj $p > 5$ jednadžba $x^4 + 4^x = p$ nema rješenja.

Zadatci za ambiciozne

11. Riješi u skupu prirodnih brojeva $x! + y! + z! = u!$.
12. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $xy + yz + zx - xyz = 2$
13. Riješi u prirodnim brojevima $a^2 + b^2 + 3c^2 = (a + b + c)^2$.
14. Nađite sve proste p, q, r takve da $p^3 = p^2 + q^2 + r^2$.

4.5. X2: Uvod u funkcijske jednadžbe - Daniel Širola

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Funkcije su jedne od najfundamentalnijih matematičkih objekata i temelj mnogim proučavanjima i matematičkim teorijama. Iako je ovo predavanje pisano isključivo kao uvod u pojam funkcije i metode rješavanja zadataka sa natjecanja koji se temelje na funkcijama, daljnji razvoj funkcija u matematici seže daleko iza i mojih i vaših poimanja i saznanja. Neformalno, funkcija je pridruživanje elemenata skupa B elementima skupa A.

Obično se zapisuje $f\colon A \to B$,te $f(a) = b, a \in A$, $b \in B$ (b je element pridružen elementu a. Svakom elementu skupa A pridružen je neki element skupa B. Skup A naziva se domena, a skup B kodomena funkcije f. Postoje neke posebne skupine funkcija koje nazivamo injekcijama, surjekcijama i bijekcijama.

Injekcije su sve funkcije za koje vrijedi $f(a) = f(b) \implies a = b$, odnosno, različiti elementi domene slikaju se u različite elemente kodomene.

Surjekcije su sve funkcije za koje vrijedi: $\forall b \in B$, $\exists\, a \in A : f(a) = b$, odnosno, funkcija postiže sve vrijednosti iz kodomene, tj. slika funkcije je upravo kodomena.

Bijekcije su one funkcije za koje vrijedi i da su injekcije i da su surjekcije.

Rješavanje funkcijskih jednadžbi jedan je od najčešćih algebarskih zadataka na višim razinama natjecanja. Iz tih razloga ovo predavanje će možda biti malo teže od ostalih na ovoj grupi, ali i to je za ljude.
Funkcijska jednadžbe je problem u kojem treba pronaći sve funkcije koje zadovoljavaju zadani izraz(e). Rješavanje takvog problema obično ima dva koraka. Prvi je pronalazak skupa funkcija koje zadovoljavaju izraz. Drugi je korak mnogo lakši i svodi se na fizičku provjeru koje od tih funkcija stvarno zadovoljavaju jednadžbu.

Kada se suočite sa funkcijskom jedadžbom pokušajte sljedeće stvari:

1. Probajte shvatiti o kojoj se funkciji radi, uvrstite $f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = -x$ u jednadžbe i provjerite radi li.

2. Drugi korak je da elementarno promijenite funkciju, ako je potrebno, skaliranje ili pomakom u neku točku. Npr. $g(x) = f(x) - f(0)$

3. Najčešći korak je uvrštavanjem vrijednosti. Vi želite da vam se što više stvari pokrpati i zato uvrštavate u funkcije $0, 1, -1, (x, -x)$...

4. Budite na oprezu jer postoji mogućnost da dokažete neko važno ranije spomenuto svojstvo.

5. I naravno, kod funkcija nad prebrojivim skupovima $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ možda indukcija radi.

Prijeđimo sad na par primjera.

Primjer 4.5.1. ***Cauchyeva funkcijska jednadžba*** *Nađite sve $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ takve da vrijedi. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

Dokaz. Prvo probajmo pogoditi rješenje. Uvrstimo $f(x) = kx + l$ i dobivamo $k(x + y) + l = kx + ky + 2l$. Dakle, $l = 0$, a k može biti bilo što.

Uvrstimo $(0, 0) \longrightarrow (x, y)$ i dobivamo: $f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$. Stavimo da je $f(1) = k$. Onda je $f(2) = f(1 + 1) = 2f(1) = 2k$. Indukcijom možemo dalje pokazati

$$f(n) = nk, n \in \mathbb{N}.$$

Ako uzmemo sada $n \in \mathbb{N}$, te negativni $-n$ dobivamo

$$0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \implies f(n) = -f(-n).$$

Sada još kao zadnji korak, neka je $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Onda

$$q\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right) = f(p) = kp \implies f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{kp}{q}.$$

□

Primjer 4.5.2. ***Jensenova funkcijske jednadžba*** *Nađite sve $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ takve da vrijedi $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2})$.*

Dokaz. Provjerim se lako utvrdi da svi polinomi prvog stupnja zadovoljavaju jednadžbu.
Sada napravimo transformaciju $g(x) = f(x) - f(0)$. Dakle $g(0) = 0$. Također, dobije se

$$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Uvrštavanjem $(0, t)$ dobivamo $g(t) = 2g(\frac{t}{2})$. To znači da je

$$g(x) + g(y) = g(x+y) \implies g(x) = kx.$$

Dobili smo Cauchyevu jednadžbu. □

Lakši zadaci

1. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2$$

2. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Pronađi sve takve funkkcije.
3. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je: $f(x + y) + f(x - y) = x^2 + y^2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
4. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je:

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Umjereni zadaci

5. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je:

$$2f(1 - x) + 1 = xf(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $x + f(x) = f(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Nađite sve x takve da $f(f(x)) = 0$.
7. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x + f(x + y^2) + y) = f(2x - y) + 3y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

uz uvjet da je funkcija f injektivna.

Teži zadaci

8. Ako je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća surjekcija, dokažite da je $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
9. Zadane su funkcije f i g iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. f je bijekcija i za svaki realni x vrijedi:

$$f(x) + g(x) = 2.$$

Pokaži da postoji točno jedan x_0 takav da je:

$$f(f(x_0)) + g(g(x_0)) = 2.$$

4.6. Y2: Uvod u grafove - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Graf G je uređeni par skupova V (*vertices*, skup vrhova) i E (*edges*, skup bridova) pri čemu su članovi skupa E dvočlani podskupovi skupa vrhova grafa koji predstavljaju vezu između tih vrhova. Intuitivno, vrhovi grafa su točke ili kružići, a bridovi spojnice između vrhova. Graf je konačan ako mu je skup vrhova konačan.

Neka su U i V vrhovi grafa G. Ako u G postoji $e = \{U, V\}$ brid između njih kažemo da su vrhovi U i V **susjedni** te da je vrh U (V) **incidentan** sa bridom e. Dva brida sa zajedničkim vrhom zovu se susjedni bridovi. Graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridovima naziva se **potpun graf**.

Stupnjem vrha V zovemo broj bridova incidentnih s vrhom V (broj bridova koji iz njega izlaze ili broj vrhova koji su susjedni s njim) i označavamo ga s $d(V)$. Vrh je **izoliran** ako je stupnja 0.

Teorem 1. ***(Lema o rukovanju)*** *Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je paran.*

Šetnja u grafu je niz vrhova u kojemu je svaki vrh (osim prvoga) susjedan sa svojim prethodnikom u nizu, a **put** je šetnja u kojem nema ponavljanja vrhova. **Ciklus** je niz vrhova u kojemu su svaka dva uzastopna povezana i svi osim prvog i zadnjeg su različiti. Graf je **povezan** ako između svaka dva vrha tog grafa postoji neki put. Ako graf nije povezan možemo ga rastaviti na komponente povezanosti.

Graf je **bipartitan** ako mu čvorove možemo odvojiti u dva skupa (particije) tako da ne postoji brid koji povezuje dva vrha iz istog od ta dva skupa. Drugim riječima, bipartitnom grafu možemo čvorove obojiti u crno i bijelo tako da svaki brid povezuje čvorove različite boje.

Teorem 2. *Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži ciklus neparne duljine.*

Šetnju koja sadrži sve bridove točno jednom (svi bridovi su posjećeni točno jednom) zovemo **Eulerova staza**, a ako ta šetnja počinje i završava u istom čvoru nazivamo ju **Eulerova tura**. **Eulerov graf** je graf u kojem postoji Eulerova tura. S Eulerovim grafovima sigurno ste se sreli u problemima crtanja raznih oblika (koji su zapravo bili grafovi) bez podizanja olovke s papira.

Povezani graf koji ne sadrži cikluse zove se **stablo**. Graf u kojemu je svaka komponenta povezanosti stablo zovemo **šumom**. Vrh u stablu stupnja 1 zove se **list**.

Teorem 3. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- *Graf je stablo.*
- *Graf nema ciklusa i dodavanjem brida dobije se ciklus.*
- *Graf je povezan i micanjem brida prestaje biti povezan.*
- *Graf je povezan i ima jedan brid manje nego čvorova.*
- *Između svaka 2 čvora u grafu postoji jedinstven put.*

Zadaci

1. Koliko bridova ima potpun graf sa n vrhova?
2. Dokaži *Lemu o rukovanju* (Teorem 1).
3. Dokažite da u grupi od 50 ljudi postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj prijatelja unutar te grupe.
4. Koji je najveći broj vrhova u grafu koji ima 19 bridova i u kojemu je stupanj svakog vrha barem 3?
5. Je li moguće umrežiti 77 računala tako da je svako računalo direktno povezano sa točno 15 drugih računala?
6. U gornjem lijevom uglu šahovske ploče (dimenzija 8×8) nalazi se žeton. Susjedna polja su polja koja imaju zajedničku stranicu. Možemo li žeton pomicati po poljima te ploče tako da u svakom koraku prelazimo na susjedno polje, da svako polje posjetimo točno jednom i da završimo u donjem desnom uglu ploče?
7. Dokažite da stablo koje ima vrh stupnja d ima barem d listova.
8. Dokaži Teorem 2.
9. Na nekom turističkom putovanju bilo je ukupno 17 turista. Utvrđeno je da su bilo koja dvojica od njih bili međusobno "na ti" ili "na Vi" ili uopće nisu razgovarali. Dokažite da među tih 17 ljudi postoje bar trojica koji su međusobno bili "na ti" ili bar trojica koji su međusobno bili "na Vi" ili bar trojica koji međusobno nisu razgovarali.
10. Dokažite da je graf sa n vrhova kojima je stupanj najmanje $\dfrac{n-1}{2}$ nužno povezan.
11. Dokaži Teorem 3.
12. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?
13. U nekoj zemlji postoji barem 101 grad. Glavni grad te zemlje spojen je sa 100 gradova izravnim (dvosmjernim) zrakoplovnim linijama. Svaki grad osim glavnog grada spojen je s 10 drugih gradova. Poznato je da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji drugi grad unutar te države. Dokažite da je moguće zatvoriti polovicu zrakoplovnih linija glavnog grada tako da se sačuva svojstvo da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad.
14. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \longleftrightarrow B, B \longleftrightarrow C, C \longleftrightarrow D, D \longleftrightarrow A$).
15. U nekoj državi neki parovi gradova su povezani cestama i to tako da iz svakog grada izlaze barem 3 ceste. Dokaži da postoji put kroz gradove koji počinje i završava u istom gradu takav da broj cesta od kojih se sastoji nije djeljiv sa 3.
16. Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

5. Poglavlje

Zadaci za treću grupu

5.1. A3: Polinomi - Vieteove formule - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Lakši zadaci

1. Nađi ostatak pri dijeljenju polinoma $x^{100} + 8x^{97} - x^5 + 3x + 4$ polinomom $x^2 + x - 2$.

2. Nađite koeficijente p i q ako znamo $x^2 + px + q = 0$, $x_1 - x_2 = 5$, ${x_1}^3 + {x_2}^3 = 35$, gdje su x_1 i x_2 nultočke polinoma.

3. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 9 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 41 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 225 \end{aligned}$$

4. Dana je jednadžba $2x^2 + mx + 2 - n = 0$, $n \neq 2$, pri čemu su m i n cijeli brojevi te su njena rješenja cijeli brojevi. Dokažite da je $\dfrac{m^2 + n^2}{4}$ složen broj.

5. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} &= -2 \\ x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3. \end{aligned}$$

Teži zadaci

6. Ako je $P(x)$ polinom stupnja n takav da $P(k) = \frac{k}{k+1}$ za sve $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, odredi $P(n + 1)$.

7. Neka je $p(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 1$ polinom kojem su sve nultočke realne. Dokaži da je $|a| > \sqrt{2}$.

8. (IMO 2004) Nadi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju jednakost $P(a - b) + P(b - c) = P(c - a) = 2P(a + b + c)$ za sve realne brojeve a, b, c takve da je $ab + bc + ca = 0$.

9. Neka je $p(x)$ nekonstantan polinom s realnim koeficijentima. Za svaki prirodni broj n, neka je

$$q_n(x) = (x + 1)^n p(x) + x^n p(x + 1).$$

Dokaži da postoji samo konačno mnogo brojeva n takvih da su sve nultočke polinoma $q_n(x)$ realne.

5.2. C3: Kombinatorika na ploči - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Za početak evo nekoliko uputa koje se tiču svih zadataka u kojima su definirani neki "potezi" tj. dozvoljena operacija koju vršimo nad nekim elementima bila to polja ili možda brojevi ili figure koje se na njima nalaze:

1. Pokušaj raditi s malim primjerima ako je zadana ploča varijabilnih dimenzija. To često daje uputu za opći slučaj. Čak i kad je ploča fiksno zadana s nekim random velikim brojevima, ima smisla potrošiti 5-10 minuta u potrazi za općim slučajem i malim primjerima.

2. Ne zaboravi na bojanja i invarijante (odlično za formalizaciju, ako ne i za rješenje), niti na princip ekstrema (pogotovo ako je zadatak "Odredi najmanji/najveći broj...").

3. S druge strane, ako je odgovor na pitanje "Može li se ... ?" potvrdan, potrebno je naći konstrukciju koja vrijedi u svakom slučaju. Često odgovor bude primjenjivati slično na različita polja. Tada razmišljaj kao programer, razmišljaj o slijedovima, rekurzijama i ponavljanjima kao novim dozvoljenim potezima.

4. Odredi si cilj. Prouči neka svojstva parametra koja se čine važnima (npr. parnost) za početak i kraj, te kako se mijenjaju u potezu, ili, još važnije ako je pitanje DA/NE, slobodno pretpostavi nešto, izbjegavaj promatranje glavnog pitanja *random* potezima.

Lakši zadaci

1. Zadana je 6×6 ploča koja je opločena dominima. Dokaži da postoji pravac (vodoravan ili okomit) koji prolazi granicama između polja i ne siječe niti jedan domino.

2. Zadana je $m \times n$ ploča. Odredi za koje (m, n) je moguće obojati ploču u proizvoljno mnogo različitih boja tako da svako polje P ima točno dva susjeda koja su iste boje kao P.

3. Imamo 5×10 zemljište na kojem je n polja obraslo u korov. Svakog dana, polje koje je prošli dan imalo barem 2 susjedna koja su obrasla u korov, i samo obraste u korov. Nakon nekoliko dana, cijelo zemljište je obraslo u korov. Odredi najmanji n za koji je to moguće.

4. Roger i David igraju igru s 100×100 pločom. Prvo Roger postavi na ploču 50 figura kraljeva, zatim David jednog topa. Zatim naizmjence povlače poteze. Roger u potezu može pomaknuti dva kralja, a David topa (onako kako se inače kreću u šahu), no David ne smije uzimati kraljeve niti pomicati topa preko njih. Roger želi nekim kraljem uzeti topa. Može li David to spriječiti?

Umjereni zadaci

5. Zadana je $n \times n$ ploča. U svako polje je upisan neki prirodni broj. U potezu je dozvoljeno odabrati jedno polje i dva njegova susjedna, ali tako da nisu sva tri u istom retku ili istom stupcu, zatim povećati njihove brojeve za jedan. Broj n nazivamo *savršenim* ako možemo opisanim potezom postići da su svi brojevi jednaki.

   (a) Je li 6 savršen?

   (b) Je li 512 savršen?

6. Na 6×6 ploči točno n polja je plavo. Odredi najveći n takav da za svaki mogući raspored polja možemo odabrati točno 3 retka i točno 3 stupca koji svi zajedno pokrivaju sva plava polja.

7. U kvadratnoj mreži se nalazi 16 žetona koji formiraju 4×4 kvadrat. Prvo uklanjamo jedan žeton pa ponavljamo sljedeći potez. U potezu je dozvoljeno odabrati dva žetona na susjednim poljima, zatim jednog premjestiti na polje preko drugoga (preskočimo ga), a preskočenog trajno ukloniti s ploče. Koje žetone možemo maknuti na početku kako bismo mogli postići da ostane samo 1 žeton?

8. Zadana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. *Plus* je pločica koja pokriva jedno polje i sve njegove susjede, a *minus* je pločica koja pokriva 5 uzastopnih polja u istom retku/stupcu (5×1 pravokutnik) Je li moguće ukloniti 2 polja u zadnjem stupcu tako da dobivenu ploču možemo opločiti plusevima i minusevima?

9. Robert i Jimmy igraju sljedeću igru sa šahovskom pločem (8×8) i figurom skakača. Prvo Robert postavi skakača na bilo koje polje. Zatim ga igrači naizmjence (prvo Jimmy) pomiču onako kako se inače skakač kreće u šahu, ali ga ne smiju pomaknuti na polje na kojem je već bio. Igrač koji ne može napraviti potez, izgubio je. Tko ima pobjedničku strategiju?

10. Neka su m, n neparni prirodni brojevi. Ploču dimenzija $m \times n$ smo razrezali na manje ploče cjelobrojnih dimenzija. Neka su a, b, c, d udaljenosti rubova neke manje ploče od odgovarajućih rubova velike ploče. Dokaži da postoji manja ploča za koju su a, b, c, d brojevi iste parnosti.

Teži zadaci

11. Stepenice reda k su pločica koja pokriva dijagonalu $k \times k$ kvadrata i sva polja kvadrata s jedne strane dijagonale. Ploči 2018×2018 smo uklonili dva polja u istom retku. Možemo li ju opločiti stepenicama reda 3 i stepenicama reda 4?

12. U donjem lijevom kutu ploče 4×2020 se nalazi figura skakača. Može li skakač šahovskim kretanjem posjetiti svako polje točno jednom i vratiti se u početno polje?

13. Na 8×8 ploču stavljamo L-tromine. Odredi najmanji n takav da postoji raspored n L-tromina na ploči takav da se više niti jedan L-tromino ne može staviti bez preklapanja s drugim.

14. Na ploči $n \times n$ da dijametralno suprotna polja su crna, a ostala su bijela. U potezu je dozvoljeno odabrati jedan redak/stupac i promijeniti boju svim poljima.

    (a) Dokaži da je ponavljanjem opisanog poteza nemoguće postići da sva polja budu istobojna

    (b) Koliko najmanje bijelih polja treba obojati u crno (ne računajući ova 2 polja koja su na početku crna) kako bi to bilo moguće?

15. Neka je α realan broj. Posejdon i Hefest igraju igru. Zadana je beskonačna kvadratna mreža. Prvo posejdon odabere nekoliko polja koja postanu *poplavljena*, zatim naizmjence povlače poteze (prvo Hefest), Hefest u svojem potezima gradi zid koji je jedna izlomljena crta po rubovima polja koja se ne siječe, a nakon njegovog n-tog poteza ne smije biti dulji od $n\alpha$ jediničnih dužina. Posejdon u svojem potezu poplavljuje sva polja koja tad imaju poplavljenog susjeda, osim ako zid prolazi njihovom granicom. Za koje α Hefest može osigurati da zid nakon konačno mnogo poteza bude zatvoren i da se sva poplavljena polja nađu unutar njega?

5.3. G3: Inverzija - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Postoji nekoliko čestih inverzija čija primjena znatno može olakšati zadatke u kojima su sve ili većina točaka upravo one za koje je poznata njihova slika pod nekom od tih inverzija. Zajedničko im je da jako puno točaka zapravo čuvaju ili prenose u nešto poznato.
Neke od njih su, uz standardne oznake A, B, C, I, H te N, D, E nožišta visina iz A, B, C, M polovište luka BC na opisanoj kružnici koji ne sadrži A:

1. Inverzija sa središtem u A radijusa $\sqrt{|AD| \cdot |AE|}$
2. Inverzija sa središtem u M radijusa $|MB| = |MC| = |MI|$
3. Kompozicija inverzije sa središtem u A radijusa $\sqrt{|AB| \cdot |AC|}$ i osne simetrije oko AI
4. Kompozicija inverzije sa središtem u H radijusa $\sqrt{|HA| \cdot |HN|}$ i centralne simetrije oko H

Zadaci

Zadaci nisu nužno poredani po težini.

1. Dvije kružnice se sijeku u točkama P, Q, te obje diraju treću kružnicu i neku njenu tetivu $\overline{AB}$. Dokaži da pravac PQ raspolavlja luk treće kružnice sa suprotne strane tetive $\overline{AB}$ od prve dvije.
2. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe dužinu $\overline{BD}$ u točki F. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe pravac CE u točkama G i H, pri čemu je G između C i E. Ako je $|\angle CHF| = 12^\circ$, odredi $|\angle AGF|$.
3. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC|$. Točka I je središte kružnice upisane tom trokutu. Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$, a N polovište luka $\widehat{AC}$ opisane kružnice tog trokuta koji sadrži točku B. Dokaži da je
$$\angle IMA = \angle INB$$
4. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem je $|AB| < |AC|$. Točka D je polovište kraćeg luka $\widehat{BC}$ njegove opisane kružnice. Točka I je središte njegove upisane kružnice, a točka J je osnosimetrična točki I u odnosu na pravac BC. Pravac DJ siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki E koja pripada luku $\widehat{AB}$. Dokaži da vrijedi $|AI| = |IE|$.
5. Neka je H ortocentar u trokutu ABC i neka su P, Q na kružnici s promjerom $\overline{BC}$ takve da su AP, AQ tangente na nju. Dokaži da su H, P, Q kolinearne.
6. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, Γ njegova opisana kružnica. Neka je D drugo sjecište AI i Γ. Neka je E na luku $\widehat{BDC}$, F na $\overline{BC}$ takve da $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Ako je G polovište $\overline{IF}$, dokaži da se EI i DG sijeku na Γ.
7. Neka je ABC šiljastokutan raznostraničan trokut sa ortocentrom H. Neka je M polovište $\overline{BC}$ te D, E točke na na AB i AE takve da je $|AD| = |AE|$ te su D, E, H kolinearne. Dokaži da je HM okomita na zajedničku tetivu kružnica opisanih trokutima ABC, ADE.

5.4. N3: TB funkcijske i polinomi - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Funkcijske s djeljivostima

Postoji puno zadataka oblika 'Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaka dva prirodna broja x i y vrijedi

Neki izraz koji ovisi o $x, y, f(x), f(y)$ | Neki drugi izraz koji ovisi o $x, y, f(x), f(y)$.'

Sada navodimo neke od glavnih strategija za rješavanje takvih zadataka:

- Pokušaj uvrstiti nešto jednostavno, npr. (x, x), $(x, 1)$, $(x + 1, x)$...
- Primijeni Euklidov algoritam da modificiraš desnu stranu
- Pokušaj namjestiti da je desna strana prost ili skoro prost broj; tada je skup vrijednosti koje poprima lijeva strana prilično ograničen.
- Pokušaj namjestiti da je lijeva strana u nekom slučaju po apsolutnoj vrijednosti veća od desne; to će implicirati da je desna strana jednaka 0 jer $x \mid y$ implicira $|x| \leqslant |y|$ ili $y = 0$.
- Pokušaj namjestiti da desna strana ne ovisi o nekoj varijabli, a lijeva ovisi.

Polinomi s cjelobrojnim koeficijentima

Kamen temeljac natjecateljskih zadataka o polinomima s cjelobrojnim koeficijentima je činjenica da za svaki polinom P s cjelobrojnim koeficijentima i svaka dva cijela broja x i y vrijedi

$$x - y \mid P(x) - P(y).$$

Još neke od korisnih stvari u zadacima su:

- Osnovni teorem algebre: polinom stupnja n ima n kompleksnih nultočaka (računajući kratnost). Često je korisna i puno slabija verzija koja kaže da je polinom stupnja n koji ima $n + 1$ nultočaka jednak nulpolinomu.
- Gaussova lema: ako se polinom $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima može zapisati kao $Q(x)R(x)$, gdje su Q i R neki polinomi s racionalnim koeficijentima, onda se može zapisati i kao $A(x)B(x)$, gdje su A i B neki polinomi s cjelobrojnim koeficijentima. Drugim riječima, ako je polinom ireducibilan nad $\mathbb{Z}$, tada je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.
- Schurova lema: ako je P nekonstantan polinom s cjelobrojnim koeficijentima, onda postoji beskonačno prostih brojeva q koji dijele barem jedan od brojeva $P(1), P(2), \ldots$.

Zadaci

1. Neka su a, b i c različiti cijeli brojevi. Postoji li polinom s cjelobrojnim koeficijentima P takav da vrijedi $P(a) = b$, $P(b) = c$ i $P(c) = a$?

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi
$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$
za sve prirodne brojeve m i n.

3. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je
$$xf(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$$
potpun kvadrat za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

4. Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima stupnja n i neka je k prirodan broj.
Neka je $Q = P^k = P \circ P \circ \ldots \circ P$ (kompozicija P samog sa sobom k puta). Dokaži da $Q(t) = t$ ne može vrijediti za više od n cijelih brojeva t.

5. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$n! + f(m)! \mid f(n)! + f(m!).$$

6. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koje vrijedi
$$f(m)^2 + f(n) \mid \left(m^2 + n\right)^2$$
za svaka dva prirodna broja m i n.

7. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za svaka dva prirodna broja m i n, broj $f(m) + f(n) - mn$ je različit od nule i dijeli $mf(m) + nf(n)$.

8. Neka je $\mathbb{Z}[x]$ skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Odredi sve funkcije $\theta\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ takve da za svaka dva polinoma $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ vrijedi
   - $\theta(p + 1) = \theta(p) + 1$,
   - ako $\theta(p) \neq 0$, tada $\theta(p)$ dijeli $\theta(p \cdot q)$.

5.5. X3: Pripisana kružnica - Krunoslav Ivanović

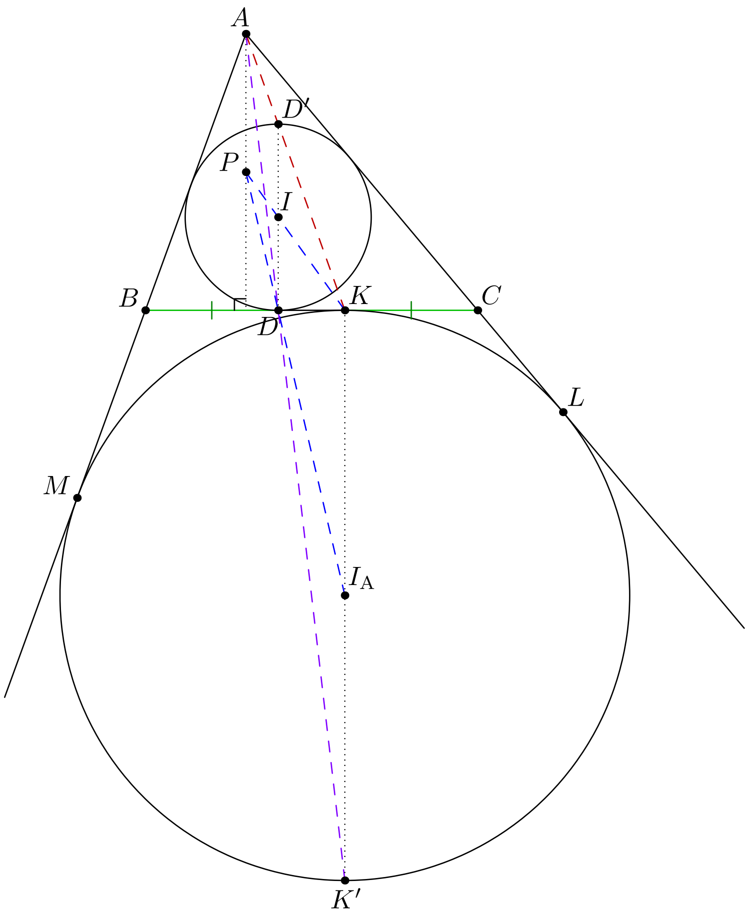
Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ideja ovog predavanja je istaknuti neka glavna svojstva konfiguracija s pripisanim kružnicom te uočiti kako nam ona mogu pomoći u natjecateljskim zadacima.

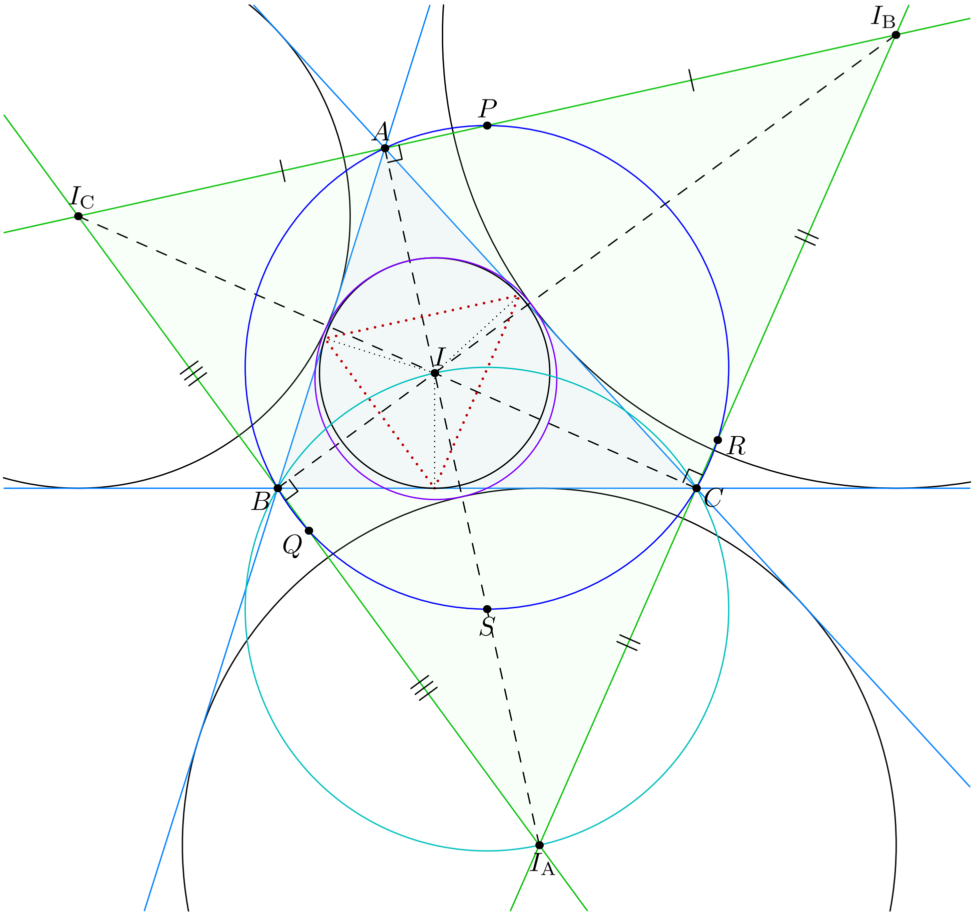
Dvije konfiguracije

Na sljedećoj skici D je diralište upisane sa stranicom $\overline{BC}$, K, L i M su dirališta pripisane sa stranicama trokuta, I i I_{A} su središta upisane i pripisane kružnice redom, a točka P je polovište visine iz A. Vrijedi sljedeće:



1. Dokaži da je $BD = CK$.
2. Dokaži da su točke A, D' i K kolinearne.
3. Dokaži da su točke A, D i K' kolinearne.
4. Dokaži da su točke P, I, K i P, D, I_{A} kolinearne.

Istražili smo neka osnovna svojstva kada imamo samo jednu kružnicu, no pogledajmo što sve vrijedi kada uključimo sve 3 kružnice. Neka su I_{A}, I_{B} i I_{C} središta pripisanih kružnica te neka su P, Q i R polovišta stranica trokuta $\triangle I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{C}}$. Vrijedi sljedeće (zadnju činjenicu nećemo dokazivati):



1. I je ortocentar trokuta $\triangle I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{C}}$.

2. Točke I, B, C i I_{A} su konciklične, a središte njihove opisane kružnice je S.

3. P, Q i R leže na kružnici opisanoj trokutu ABC.

4. Ako su D, E, F dirališta upisane sa stranicama trokuta $\triangle ABC$, onda postoji homotetija između trokuta $\triangle DEF$ i $\triangle I_{\mathrm{A}}I_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{C}}$.

5. Feuerbachova kružnica (Eulerova kružnica, kružnica 9 točaka) trokuta $\triangle ABC$ je tangenta na upisanu kružnicu i na sve 3 pripisane kružnice.

Zadaci

Zadaci su poredani po težini, po nekoj subjektivnoj procjeni.

1. Neka pravac AI siječe kružnicu (ABC) u točkama A i S. Neka je L preslika točke I preko S, a J preslika točke I preko BC. Ako je K nožište visine iz vrha A na stranicu BC, pokažite da su točke K, J i L kolinearne.

2. Dan je trokut $\triangle ABC$. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q. Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

3. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta BCD dira $\overline{CD}$ u točki E. Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu $\triangle ACF$ siječe pravac CD u točkama C i G. Dokaži da je trokut $\triangle AFG$ jednakokračan.

4. Neka je J središte pripisane kružnice $\triangle ABC$ nasuprot vrha A. Ta pripisana kružnica dira stranicu BC u M, a stranice AB i AC u K i L redom. Pravci LM i BJ sijeku se u F, a pravci KM i CJ sijeku se u G. Neka je S presjek pravaca AF i BC, a neka je T presjek pravaca AG i BC. Dokaži da je M polovište dužine ST.

5. U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$, točke D, E i F su nožišta visina iz A, B i C redom. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Točke P i Q su na $\overline{EF}$ takve da je $\overline{AP} \perp \overline{EF}$ i $\overline{HQ} \perp \overline{EF}$. Pravci DP i QH sijeku se u R. Odredi HQ/HR.

6. Neka je $\triangle ABC$ trokut sa središtem upisane kružnice I. U unutrašnjosti trokuta dana je točka P za koju vrijedi
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$
Pokaži da je $|AP| \geqslant |AI|$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako se P podudara s I.

7. Neka je k upisana kružnica šiljastokutnog trokuta $\triangle ABC$ sa središtem u točki I, a k_c pripisana kružnica istog trokuta nasuprot kuta $\angle BCA$. Ako je točka D diralište stranice $\overline{AB}$ i kružnice k_c, a točka S sjecište pravca DI s kružnicom k_c (različito od točke D), dokaži da je pravac DI simetrala kuta $\angle ASB$.

8. Neka je $\triangle ABC$ trokut s upisanom kružnicom ω. Označimo s D_1 i E_1 točke u kojima ω dira redom stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Označimo s D_2 i E_2 redom točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ takve da je $|CD_2| = |BD_1|$ i $|CE_2| = |AE_1|$ te s P sjecište dužina $\overline{AD_2}$ i $\overline{BE_2}$. Kružnica ω siječe dužinu $\overline{AD_2}$ u dvije točke od kojih točku bližu točki A označimo s Q. Dokaži da vrijedi $|AQ| = |D_2P|$.

5.6. Y3: Komba - metode bijekcije/injekcije - Petar Orlić

Link na hintove. Link na rješenja.

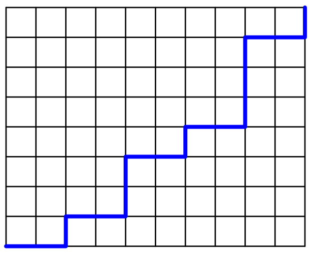
Uvod

Izvorno predavanje, u malo opširnijoj verziji na engleskom jeziku možete naći na sljedećem linku.

Funkciju f, $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ nazivamo *injekcijom* ako se svaka dva elementa domene slikaju u različite elemente kodomene, to jest, $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$, a *surjekcijom* ako za svaki element kodomene, postoji neki element domene koji se slika u njega, tj, $\forall y \in \mathcal{B}$, $\exists x \in \mathcal{A}$ t.d. $f(x) = y$. Ako je funkcija i injekcija, i surjekcija, nazivamo je *bijekcijom*.
Kada je riječ o konačnim skupovima, činjenica da postoji bijekcija između skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ nam govori da su ti skupovi jednakobrojni, odnosno, $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.
Cilj predavanja je upravo iskoristit svojstvo bijekcija kako bi lakše prebrojavali, odnosno, za neki skup koji trebamo prebrojati, pronaći neki drugi skup koji je lakše prebrojati, a pritom postoji bijekcija između tih skupova.

Primjer 5.6.1. *Odredi broj šetnji iz* $(0,0)$ *u* (m,n) *ako je jedini dozvoljeni korak pomaknuti se za jednu jediničnu dužinu udesno ili prema gore.*

Rješenje. Promotrimo sljedeću sliku.



Svakom ovakvom putu možemo pridružiti niz znakova sastavljenih od G i D ovisno o tome jesmo li se u tom koraku pomaknuli gore ili desno. Primjera radi, niz za ovu šetnju bi bio

$$DDGDDGGDDGDDGGGDDG.$$

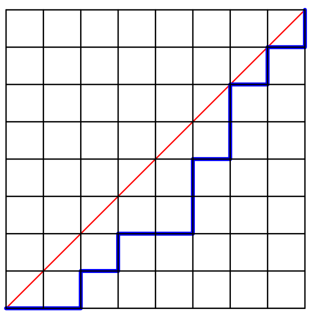
Naravno, ako su nizovi različiti, onda su i šetnje, i ako su šetnje različite, onda su i nizovi, odnosno, svaki niz jedinstveno definira šetnju i obrnuto pa možemo zaključiti da postoji bijekcija između skupa svih šetnji i skupa stringova sastavljenih od m slova D i n slova G.
Sada samo trebamo prebrojiti koliko takvih stringova ima, no to je jednostavno. Naime, string je duljine $m+n$ i u njemu mora biti m slova D i n slova G. Ako odaberemo gdje se nalaze sloga D, odabrali smo i gdje se nalaze slova G, a to možemo napraviti na $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ načina.

Kao što vidite, glavno u zadacima s bijekcijama će biti upravo pronaći skup s kojim je naš početni u bijekciji, a nakon toga se lagano završi. Naravno, uvijek moramo razmišljati je li nešto zapravo u bijekciji, tj. moramo biti svjesni kako za neki element iz $\mathcal{A}$ jedinstveno dobiti element iz $\mathcal{B}$ i obrnuto.

Catalanovi brojevi

Čest niz koji se pojavljuje u zadacima s bijekcijama su Catalanovi brojevi.

Primjer 5.6.2. *Neka je n prirodan broj. Koliko ima puteva iz* $(0,0)$ *u* (n,n) *koristeći samo korake za jedan prema gore i udesno takvih da je cijeli put sadržan u regiji* $x \geqslant y$*?*



Rješenje.
Znamo da je ukupan broj puteva iz $(0,0)$ u (n,n) bez restrikcije jednak $\binom{2n}{n}$. Nađimo broj puteva koji ulaze u regiju $x<y$. Nazovimo ih "lošim" putevima.
Pretpostavimo da je P loš put. S obzirom da P ulazi u regiju $x<y$, mora u nekom trenutku dotaknuti pravac $y=x+1$. Neka je X prva točka puta P koja leži na pravcu $y=x+1$. Preslikajmo dio puta P to točke X preko pravca $y=x+1$, a ostatak ostavimo onakvim kakav jest. To nam daje novi put P'.
Tvrdimo da nam ovo daje bijekciju između loših puteva i puteva iz $(-1,1)$ u (n,n) koristeći korake gore i desno, a dokaz ostavljamo kao vježbu.
Naposljetku, loših puteva ima koliko i puteva između $(-1,1)$ do (n,n), a to je $\binom{2n}{n+1}$, dakle, dobrih puteva ima

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\binom{2n}{n}-\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Broj $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ nazivamo n-tim Catalanovim brojem i označavamo ga s C_n.

Zadaci

1. Dokažite početnu tvrdnju, odnosno, ako imamo konačne skupove $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takve da postoji bijekcija $f\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, onda su oni jednakobrojni.

2. Neka su n i k prirodni brojevi. Dokaži da je broj particija od n u točno k dijelova jednak broju particija od n kojima je najveći dio jednak k.

3. Dokažite da je broj particija broja n u različite dijelove jednak broju particija od n u neparne dijelove. (Dakle, particija $6=3+2+1$ je particija u različite dijelova, a particija $6=3+1+1+1$ je particija u neparne dijelove.)

4. Imamo trokutastu ploču koju smo dobili tako što smo podijelili jednakostraničan trokut stranice duljine n u n^2 manjih stranice duljine 1 te stranice tih manjih trokuta su paralelne sa stranicama većeg. Odredi broj paralelograma određenih dužinama unutar ploče.

5. Pokažite da je n-ti Catalanov broj broj izraza koji sadrže n dobro sparenih zagrada (dakle, ni u jednom trenutku nije više zatvoreno zagrada nego što ih je otvoreno).

6. Neka su m i n prirodni brojevi. Koliko rješenja $(x_1,\dots,x_m)$ u skupu prirodnih brojeva ima jednadžba $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$?

6. Poglavlje

Zadaci za četvrtu grupu

6.1. A4: Mixing variables - Petar Orlić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Izvorno predavanje u malo opširnijoj verziji možete naći na sljedećem linku.

Mixing metoda je svaki način dokazivanja nejednakosti u kojem nejednakost dokzaujemo tako da jednu stranu shvatimo kao funkciju u n varijabli i promatramo kako se ponaša prilikom mijenjanja vrijednosti varijabli. Činjenice koje ovdje iskažemo nećemo dokazivati jer zahtijevaju pojmove analize.

Teorem 6.1.1. *Neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ uređena n-torka realnih brojeva. Provedimo sljedeću (nazovimo je Δ) transformaciju:*

- *odaberimo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takve da je*

$$a_i = \min\{a_1, \ldots, a_n\} \quad i \quad a_j = \max\{a_1, \ldots, a_n\};$$

- *zamijenimo a_i i a_j s $\frac{a_i+a_j}{2}$.*

Ponavljanjem ove transformacije, svaki član niza uređene n-torke konvergira k

$$a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

U prethodnom teoremu, konvergira k znači da prilikom velikog broja ponavljanja navedene transformacije, svi članovi n-torke se približavaju broju a.

Teorem 6.1.2 (Mixing variables teorem)**.** *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da za svaku uređenu n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva vrijedi $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\Delta(x_1, \ldots, x_n))$. Tada je*

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, \ldots, x).$$

Prethodni teorem govori da funkcija sa danim svojstvom može "postići" supremum samo u točkama oblika $(x, \ldots, x)$.
Za sljedeći teorem, prvo ćemo definirati transformacije $\Delta_{\min}$ i $\Delta_{\max}$ u kojima najprije odabiremo najmanji, odnosno, najveći član n-torke te zatim primjenjujemo Δ transformaciju na sve članove osim njega.

Teorem 6.1.3 (Mixing variables teorem)**.** *Neka je $c \in \mathbb{R}$,*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = c\}$$

i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da za svaku uređenu n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva vrijedi

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\Delta_{min}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Tada vrijedi

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup\left\{ f(x_1, \ldots, x_n) : x_i = a \leqslant \frac{c}{n}, x_j = \frac{c-a}{n-1} \text{ za } j \neq i \right\}.$$

Ako Δ_{min} zamijenimo s Δ_{max}, onda vrijedi

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup\left\{ f(x_1, \ldots, x_n) : x_i = a \geqslant \frac{c}{n}, x_j = \frac{c-a}{n-1} \text{ za } j \neq i \right\}.$$

Ovaj teorem govori da ako sve osim jedne varijable miksamo Δ transformacijom, funkcija može "postizati" supremum samo u točkama kad su varijable koje smo miksali jednake, a o onoj koju nismo dirali ne možemo ništa reći.

Zadaci

1. Neka su $a, b, c \geqslant 0$ realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. DOkažite da vrijedi
$$a^2+b^2+c^2+abc \geqslant 4.$$

2. Zadani su realni brojevi $a, b, c, d > 0$ takvi da je $abcd = 1$. Dokažite da je
$$a^2+b^2+c^2+d^2-4 \geqslant 2(a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$

3. Za $a, b, c \geqslant 0$ takve da je $a+b+c=2$ dokaži da vrijedi
$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \leqslant 2.$$

4. Zadani su realni brojevi $a, b, c, d \geqslant 0$, takvi da je $a+b+c+d=2$. Dokažite da vrijedi:
$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2) \leqslant 4.$$

5. Zadani su realni brojevi $a, b, c, d \geqslant 0$ takvi da je $a+b+c+d=1$. Dokažite da vrijedi
$$abc+abd+acd+bcd \leqslant \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$
i odredi slučajeve jednakosti.

6.2. C4: Teorija grafova - Petar Orlić

Link na hintove. Link na rješenja.

Neke korisne lemme i teoremi

Lemma 6.2.1. *Ako je G planaran povezan graf koji ima v vrhova, e bridova i dijeli regiju na f dijelova, vrijedi*

$$v - e + f = 2.$$

Lemma 6.2.2. *Ako je G planaran povezan graf koji ima v vrhova i e bridova, onda vrijedi*

$$e \leqslant 3v - 6.$$

Lemma 6.2.3. *Ako je G planaran povezan graf koji ima v vrhova i $e \geqslant g$ bridova bez ciklusa duljine $< g$, onda*

$$e \leqslant \frac{g}{g-2}(v-2).$$

Teorem 6.2.4 (Hallov teorem o ženidbi)**.** *Neka je G konačan bipartitan graf sa skupovima vrhova X i Y. Sa $N(W)$, za $W \subset X$ označavamo skup svih vrhova iz Y koji su povezani s nekim vrhom iz W. Postoji sparivanje (matching) koji pokriva svaki vrh iz X ako i samo ako za svaki $W \subseteq X$ vrijedi*

$$|W| \leqslant |N(W)|.$$

Zadaci

1. Dokaži da graf K_5, odnosno, potpun graf s pet vrhova nije plaran.
2. Dokaži da graf $K_{3,3}$, odnosno, potpuni bipartitan graf s dva skupa od 3 vrha nije planaran.
3. Dokažite da u planarnom, bipartitnom, jednostavnom grafu postoji vrh stupnja manjeg od četiri.
4. Dokažite da vrhove jednostavnog, planarnog, povezanog grafa možemo obojati u šest boja tako da nikoja dva susjedna vrha nemaju istu boju.
5. Dokažite da u bipartitnom grafu gdje svaki vrh ima stupanj k postoji savršen matching.
6. Dana je $m \times n$ tablica u kojoj je u svako polje upisan neki nenegativan broj tako da u svakom retku i svakom stupcu postoji barem jedan strogo pozitivan broj. Za svaki strogo pozitivan broj u tablici, redak u kojem se nalazi i stupac u kojem se nalazi imaju istu sumu elemenata. Dokaži da je $m = n$.

6.3. N4: TB funkcijske - Marin Varivoda

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Nađi sve polinome P s cjelobrojnim koeficijentima takve da je $P(0) \neq 0$ i
$$P^n(m) \cdot P^m(n)$$
kvadrat prirodnog broja za sve prirodne brojeve m i n. (Za prirodne brojeve k i n, broj $P^k(n)$ je definiran na sljedeći način: $P^k(n) = n$ za $k = 0$, a za $k > 0$, $P^k(n) = P(P^{k-1}(n))$.)

2. Nađi sve surjektivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ i svaki prost broj p, broj $f(m+n)$ je djeljiv s p ako i samo ako je $f(m) + f(n)$ djeljiv s p.

3. Nađi sve funkcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je
$$(g(m) + n)\,(g(n) + m)$$
savršen kvadrat za sve prirodne brojeve m i n.

4. Neka je f funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(1) = 1$ i $f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)}$ za sve prirodne brojeve n. Dokaži da onda brojevi $f(1), f(2), \ldots, f(3^{2020})$ čine potpun sustav ostataka modulo 3^{2020}.

5. Ako je broj $4^n + 2^n + 1$ prost za neki n, dokaži da je onda n oblika 3^k za neki $k \in \mathbb{N}_0$.

6. Neka su $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2a_1$ prirodni brojevi i neka je m broj različitih prostih dijeljitelja koji dijele produkt $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$. Dokaži da je
$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{m-1} \geqslant (n!)^m.$$

7. Neka su p i r neparni prirodni brojevi te neka je p prost. Dokaži da $pr + 1$ ne dijeli $p^p - 1$.

8. Postoji li prost broj p oblika $p = 6k + 1$ takav da je
$$\binom{3k}{k} \equiv 1 \pmod{p}?$$

9. Pretpostavimo da je $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$ za neke prirodne brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ pri čemu je φ Eulerova fi funckija. Dokažite da je $\gcd(m, n) > 1$.

10. Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$ normirani polinom sa cjelobrojnim koeficijentima takav da za sve prirodne brojeve n postoji neki cijeli broj x za koji je $P(x) = 2^n$. Dokaži da je P linearan.

11. Neka je N prirodan broj takav da je suma kvadrata svih pozitivnih djeljitelja broja N jednaka umnošku $N(N+3)$. Dokažite da onda postoje dva indeksa i i j takvi da je $N = F_iF_j$ gdje je $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ Fibonaccijev niz.

6.4. G4: Pisane kružnice - Krunoslav Ivanović

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Vrlo česte konfiguracije koje se mogu pronaći na natjecanjima uključuju neke vrste "pisanih kružnica". Pod "pisane kružnice" uglavnom mislimo na kružnice koje su tangentne na stranice trokuta i ili na kružnicu opisanu trokutu. Na ovome predavanju, istaknuti ćemo neke najosnovnije i najpoznatije činjenice o upisanim, pripisanim i mixtilinearnim kružnicama te ih dokazati, a nakon toga vidjeti kako se primjenjuju na ozbiljnije zadatke.

Upisana i pripisana kružnica

Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i njegova upisana kružnica ima središte I te dira stranice BC, CA i AB u točkama D, E i F. Pripisana kružnica nasuprot vrha A dira pravce BC, CA i AB u točkama D', E' i F'. Vrijedi sljedeće:

1. Pravci AD, BE i CF sijeku se u jednoj točki (Gergonneova točka), kao što se sijeku i pravci AD', BE' i CF'.
2. Vrijedi da je $BD = CD'$.
3. Presjek $ID \cap EF$ je na težišnici iz vrha A.
4. Preslika od D preko I, A i D' leže na jednom pravcu.
5. Ako je $BI \cap EF = B'$, $CI \cap EF = C'$, vrijedi da su $BCB'C', BIFC'$ i $CIEB'$ tetivni.
6. Pravac kroz I_A i nožište visine iz vrha prolazi kroz presliku I preko stranice.
7. Točke B, I, C, I_A s konciklične, a središte njihove opisane kružnice je u polovištu kraćeg luka BC.
8. Preslika A preko O (A^*), I i nožište visine iz D u $\triangle DEF$ su kolinearni.
9. Ako je S polovište kraćeg luka BC, a A^* je definirana isto kao i u prethodnom zadatku, vrijedi da je $A^*I \cap DS$ na (ABC).
10. Ako je Z dirалište A-mixtilinearne, onda su kružnice (ABC) i (AIZ) ortogonalne.

Zadaci

Zadaci nisu nužno poredani po težini.

1. Neka su D, E, F dirališta upisane, a D', E', F' dirališta pripisane kružnice nasuprot A redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Neka je točka K presjek pravaca DE i $D'F'$. Dokaži da je pravac AK okomit na stranicu $\overline{BC}$.
2. Neka je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$, a točke D, E, F dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom. Neka je K nožište visine iz A na stranicu $\overline{BC}$. Ako definiramo točke B_0 i C_0 takve da je $B_0 = BI \cap AK, C_0 = CI \cap AK$, a K_0 je polovište visine, dokaži da je K_0 na radikalnoj osi kružnica (BFB_0) i (CEC_0).
3. Neka pripisana kružnica $\triangle ABC$ nasuprot vrha A dira stranicu $\overline{BC}$ u točki A_1. Definirajmo analogno točke B_1 na CA i C_1 na AB, koristeći pripisane kružnice nasuprot B i C, redom. Pretpostavimo da središte opisane kružnice $\triangle A_1B_1C_1$ leži na opisanoj kružnici $\triangle ABC$. Dokaži da je onda trokut $\triangle ABC$ pravokutan.
4. Neka su Γ_B i Γ_C B i C mixtilinearne kružnice trokuta $\triangle ABC$. Ako je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$, a D diralište upisane kružnice sa stranicom BC, dokaži da radikalna os kružnica Γ_B i Γ_C prolazi kroz polovište dužine $\overline{ID}$.
5. U raznostraničnom trokutu $\triangle ABC$ točka I je središte upisane kružnice, a točka O središte opisane kružnice. Neka je s pravac kroz I okomit na IO. Pravac l simetričan pravcu BC s obzirom na s siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama K i L, redom (K i L su različiti od A). Dokaži da je centar opisane kružnice $\triangle AKL$ na pravcu IO.

6.5. X4: Kombinatorna geometrija - Marin Varivoda

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ključan teorem u ovom predavanju će biti Hellyjev teorem:

Teorem 6.5.1 (Hellyjev teorem)**.** *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset \mathbb{R}^2$ konveksni skupovi takvi da svaka tri imaju neprazan presjek. Tada je njihov presjek neprazan, to jest, $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$.*

Neke primjene Hellyjevog teorema mogu se pronaći u sljedećim zadacima:

1. Neka su $z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}^2$ točke u ravnini takve da se svake 3 mogu prekriti sa kružnicom radijusa r. Tada se sve mogu prekriti sa kružnicom radijusa r.
2. Pokaži da ako je $|z_i - z_j| \leqslant 1$ za sve i, j. Tada se točke mogu prekriti kružnicom radijusa $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. Postoji li beskonačni mnogo (ne nužno konveksnih) 2015-terokuta u ravnini takvih da svaka tri imaju zajedničku unutrašnju točku, no nikoja četiri nemaju zajedničku unutrašnju točku?
4. Dokaži da se svaki mnogokut $Q \subset \mathbb{R}^2$ opsega L može pokriti krugom radijusa L.
5. Dokaži da ako imamo n pravaca u ravnini takvih da se svaka tri od njih mogu presjeći jediničnom kružnicom, onda se svi oni mogu presjeći jediničnom kružnicom.
6. Dokaži da ako se svake tri točke iz $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^2$ mogu pokriti trokutom površine jedan, da se onda konveksna ljuska skupa $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ može pokriti trokutom površine 4.

Zadaci

1. Neka su a_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ realni brojevi takvi da je a_{ij} pozitivan za $i = j$, a negativan za $i \neq j$. Dokaži da postoje pozitivni realni brojevi c_1, c_2 i c_3 takvi da su brojevi

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3, \qquad a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3, \qquad a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3$$

   ili svi negativni, ili svi pozitivni, ili svi nula.

2. Dan je kvadrat duljine stranice n i dano je $(n+1)^n$ točaka unutar kvadrata. Dokaži da je moguće odabrati tri od tih točaka takvih da one tvore trokut (potencijalno degeneriran) površine manje ili jednake $\frac{1}{2}$.
3. U ravnini je dan skup A koji sadrži 2016 točaka tako da nikoje četiri točke iz skupa A ne leže na istom pravcu. Dokaži da je moguće odabrati podskup $B \subset A$ koji sadrži barem 63 točke tako da nikoje tri točke iz skupa B ne leže na istom pravcu.
4. U ravnini je dano 2017 pravaca tako da nikoja tri nisu kopunktalna. Puž Turbo stoji u točci na točno jednom od tih pravaca i kreće se gibati po pravcima prema sljedećim pravilima: kreće se po danom pravcu dok ne dođe do presjeka neka dva pravca. U tom presjeku, nastavlja s putovanjem na drugom pravcu, birajući lijevo ili desno, ali alternirajući odabir u svakoj točki (dakle, ako je u prethodnoj iteraciji otišao lijevo, sada mora desno). Turbo može samo promijeniti smjer u točkama presjeka. Postoji li pravac kroz koji Turbo prolazi u oba smjera tijekom putovanja?
5. Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Imamo skup L koji se sastoji od n pravaca u ravnini takvih da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri nisu kopunktalna. Označimo s I skup presjeka pravaca iz L. Neka je O točka u ravinini koja ne leži niti na jednom od pravaca iz O. Točka $X \in I$ je obojana crveno ako otvorena dužina (dužina bez krajnjih točaka) OX siječe maksimalno k pravaca iz L. Dokaži da I sadrži barem $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ crvenih točaka.

6.6. Y4: Funkcijske jednaždbe $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(n+1) > f(f(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $f(1) > 1$ i takva da je $f \neq g \circ g$ za svaku funkciju $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nadalje, neka S označava skup svih prirodnih brojeva koji nisu u slici od f.

   (a) Može li S biti beskonačan ?

   (b) Odredi sve prirodne brojeve n za koje je moguće da vrijedi $|S| = n$.

3. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(f(m)^2 + 2f(n)^2) = m^2 + 2n^2$$

   za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

4. Neka su f i g funkcije iz skupa prirodnih brojeva u skup prirodnih brojeva, takve da vrijedi $f(g(n)) = f(n) + 1$ i $g(f(n)) = g(n) + 1$ za sve prirodne brojeve n. Dokaži da je $f = g$.

5. Neka je $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ skup svih nenegativnih cijelih brojeva. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ takve da vrijedi

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

   za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Dio II

Hintovi predavanja

7. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

7.1. A1: Sustavi jednadžbi - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. sustav linearnih jdbi
2. sustav linearnih jdbi
3. iskoristiti formulu za zbroj kubova, izraziti stvari preko $x + y$ i xy
4. Zbrojiti sve jednadžbe, faktorizirati, riješiti slučajeve.
5. U svakoj jednadžbi dodati 1 s obje strane, faktorizirati lijeve, pomnožiti sve tri jednadžbe.
6. Zbrojiti sve tri jednadžbe, izraziti jednu nepoznanicu preko drugih.
7. Pomnožiti sve jednadžbe, riješiti slučaj kad je xyz nula, AG (ili kvadrat $\geqslant 0$).
8. Sve zbrojiti, primijetiti kvadrat binoma.
9. Zbroji sve, slijedi suma kvadrata je 3. Prebaci 1 na drugu stranu, pomnoži sve; ako je jedan -1 svi su, inače ostaje da je $xyz = 1$. Kvadrate u AG, slijedi svi su 1.
10. Srednju kvadriraj, krajnje dvije pomnoži, oduzmi, vidi kvadrate, suma kvadrata je nula.
11. Treba izraziti z preko x i y i skontati razlike kvadrata.

7.2. C1: Dirichletov princip - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koliko je najviše moglo biti točnih rješenja?
2. Podijelite ljude u skupine u ovisnosti o tome s koliko su se ljudi rukovali. Koliko takvih skupina ima?
3. Podijelite kvadrat na četiri manja, jednake veličine (odnosno, povucite spojnice polovišta nasuprotnih stranica). U nekom od tih četiri manja kvadrata, nalaze se dvije točke. Što možete reći o njima?
4. Pokušajte napraviti neku sličnu podjelu kao i u prethodnom zadatku, samo ovaj put s trokutima.
5. Htjeli bi nekako "iskonstruirati" odgovarajući broj. Što možete reći o brojevima oblika 1297365412807, 12973654128071297365412807, $\ldots$, $1297365412807\cdots1297365412807$? (Ovi brojevi su dobiveni tako da dani broj napišemo jednom, dvaput, triput, ...)
6. Pokušajte napraviti nešto slično onome što smo napravili u prethodnom zadatku.
7. Opet, pokušajte napraviti nešto slično prethodnom zadatku.
8. Odaberimo jednu osobu i promatramo sve njene susjede i teme o kojima razgovaraju. Što možemo zaključiti?
9. Povucimo tri paralelna pravca i 9 paralelnih okomica na njih. Time smo definirali mrežu točaka koji su nam kandidati za vrhove pravokutnika. Kako naći jednobojan pravokutnik?
10. Odgovor je 51, probajte nekako podijeliti brojeve u disjunktne skupine tako da su svaka dva broja unutar iste skupine takvi da je jedan višekratnik drugog.
11. Pretpostavite da postoji najviše 31 različita udaljenost. Odaberimo neke dvije točke i onda promatrajmo udaljenosti od njih, odnosno, moguće lokacije za preostale točke.
12. Pokušajte "triangulirati" danu konfiguraciju, odnosno, cijeli kvadrat podijeliti na manje trokute. Koliko manjih trokuta ima?

7.3. G1: Sukladnost i sličnost, angle chasing - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. spustiti okomice iz F i G na DA i AB redom, sukladnost jer kutevi s okomitim kracima
2. sličnost
3. Nacrtaj dvije takve kružnice i dokaži da su $\triangle MPQ$ i $\triangle MP_1Q_1$ slični.
4. angle chase
5. samo raspisati kuteve
6. ABC i HGC su sukladni, u ostala dva izračunaj visine na stranice čiju duljinu znaš
7. spustiti visine iz vrhova kraće osnovice, povezati dirališta sa središtem kružnice
8. Nadocrtaj nešto da dobiješ slične trokute sa stranicama $\overline{BK}, \overline{KC}, \overline{BA}, \overline{AC}$
9. $|PB|$ i $|DM|$ će valjda biti stranice sličnih trokuta, probaj naći kojih ili nešto nadocrtati da se pojave slični trokuti
10. Dokaži da je udaljenost presjeka dijagonala s p od neke od točaka A, B, C ili D stalna. Napravi angle chase, nađi slične trokute i raspiši omjere stranica.
11. T je centar upisane QPR, ili T i P su osnosimetrične preko AB
12. $AECG$, $FCDG$ su tetivni, H je polovište hipotenuze pa je centar opisane AEC
13. samo raspisati kuteve
14. KID bi trebali biti kolin.
15. $IPNC$ ili $IPCK$ konciklične
16. gledati kuteve $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle BAQ$
17. suma nasuprotnih je 180° u tetivnom
18. kutevi između str i spojnica vrhova s centrom opisane, traži tetivne četverokute ($MDBF$, $HABF$)
19. fantomiranje, $I' = DE$ presjek simetrale kuta $\sphericalangle A$, središnji i obodni, $AI'CE$ je tetivan

7.4. N1: Djeljivost i kongruencije - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Svaki troznamenkasti broj možemo zapisati kao $100a + 10b + c$ pri čemu su a, b i c njegove znamenke.
2. Pretpostavi da postoji i izrazi x.
3. Faktoriziraj dani izraz.
4. Promatraj sve slučajeve ovisno o tome koji ostatak daje n pri dijeljenju sa 3.
5. Iskoristi dana svojstva kongruencija. Npr. $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ pa imamo $(3^3)^{33} \equiv (-1)^{33} = -1 \pmod 7$
6. Iskoristi dana svojstva kongruencija. Kada smijemo dijeliti?
7. Zapiši izraz na neki drugi način. Može ti pomoći to da su a i $a+1$ relativno prosti ili pak da ako neki broj dijeli 1 on mora biti 1 ili -1.
8. Faktoriziraj razliku kvadrata i razliku kubova. Također, primijeti da je 987654 djeljiv sa 2 i sa 3.
9. Želimo brojeve n takve da je $n^2 - n$ djeljiv sa $1000 = 125 \cdot 8$.
10. Broj zapiši slično kao u Zadatku 1 i iskoristi svojstva kongruencija.
11. Raspiši zbroj kubova i provjeri za sve slučajeve ovisno o tome koji ostatak daje n pri dijeljenju sa 3.
12. Jedini ostatci koje kvadrat nekog broja može dati pri dijeljenju sa 4 su 0 i 1.

7.5. X1: Logika i dokazi - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pretpostavi suprotno. Što vrijedi za sve racionalne brojeve?
2. Potrebno je dokazati da za svakih n brojeva tvrdnja vrijedi i da postoji skup od n-1 broja za koji to ne vrijedi. Promatraj moguće troznamenkaste završetke
3. Docrtaj još nešto što ti daje mogućnost za primjenu sukladnosti trokuta.
4. Jedan od ključnih uvjeta jest da je trokut pravokutan, dakle trebat će neke formule koje vrijede za pravokutni trokut. Možeš li dokazati sličnu, ekvivalentnu nejednakost koja sadrži izraze iz tih formula?
5. Sličan tip kao 2. zadatak. Ostatci se periodično ponavlaju. Rastavi zadatak na dva dijela: djeljivost s 3 i djeljivost s 5
6. Ovo nije pravi natjecateljski zadatak, ali je važan za razumjevanje koncepta dokaza kao slijeda implikacija. Potrebno je pronaći nevaljanu implikaciju
7. Kreni od kraja zadatka (što je ekvivalentno s tvrdnjom ?)
8. Pretpostavi suprotno.
9. Opet pretpostavi suprotno.
10. Obrat po kontrapoziciji.

7.6. Y1: Indukcija - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Provedite direktno indukciju.
2. Provedite direktno indukciju.
3. Provedite direktno indukciju.
4. Provedite direktno indukciju (pokušajte povezati izraz za $n+1$ sa izrazom za n).
5. Što je u ovom slučaju baza? Provedite indukciju.
6. Provedite direktno indukciju (pokušajte povezati izraz za $n+1$ sa izrazom za n).
7. Provodimo indukciju. Koliko dijagonala ima $n-1$-terokut? Što se dogodi kada dodamo još jedan vrh?
8. Opet, ideja je indukcija. Probajte povezati izraz $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ s izrazom $x^n+\frac{1}{x^n}$.
9. Ideja je indukcija. Na koliko dijelova je n pravaca podijelilo ravninu? Što se dogodi kada dodamo novi pravac?
10. Radimo indukciju. Pretpostavimo da smo uspjeli obojati za neki n i sada dodamo još jedan pravac. Kako možemo popraviti bojanje?
11. Neka je baza $n=1, n=2$, a indukciju radimo s korakom 2, odnosno, pretpostavljamo da vrijedi za neki k i onda dokazujemo za $k+2$. Ako među domorocima nema neprijatelja, gootvi smo, a ako postoje neka dva prijatelja, uzmite da su upravo oni tih "+2".
12. Opet, ideja je indukcija, odnosno, rješavamo zadatak za generalan n. Recimo da imamo $m \geqslant n$ staklenki pri čemu nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{n}$ ukupne količine i svaki dan biramo n staklenki iz koje jedemo istu količinu pekmeza. Radimo indukciju na n i promatramo staklenku u kojoj se nalazi najviše pekmeza. Razlikujemo dva slučaja, kada ta staklenka ima manje od $\frac{1}{n+1}$ ukupne količine pekmeza u sebi i kada ima upravo toliko pekmeza u sebi. Sada je potrebno dovršiti.

8. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

8.1. A2: KAGH i CSB - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uočimo da je nejednakost ekvivalentna s

$$\frac{a^8 + a^6 + a^2 + 1}{4} \geqslant a^4$$

   Podsjeća li vas to na neki od teorema?

2. Uočimo da je

$$\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a} = b^2$$
$$\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b} = c^2$$
$$\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c} = a^2.$$

   Možemo li to nekako iskoristiti?

3. Nejednakost je ekvivalentna s

$$\left(p + 1 + \frac{1}{p}\right)\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) \geqslant 9.$$

   Možemo li nekako pokazati da vrijedi $\left(p + 1 + \frac{1}{p}\right) \geqslant 3$ te $\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) \geqslant 3$?

4. Primijetimo da je nejednakost slična s već poznatom $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Možemo li nekako korištenjem ove nejednakosti koju znamo dobiti traženu?

5. Probajte razmnožiti izraz i prisjetite se nekih ranijih nejednakosti vezanih uz $(x + y)$ i xy.

6. Napišimo $1 + \frac{1}{x}$ kao

$$1 + \frac{x + y + z}{x} = 1 + 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

   i pokušajmo onda riješiti zadatak.

7. Uočimo da je zbog uvjeta

$$x - 1 = x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

   te to uvrstimo u nejednakost i probajmo riješiti.

8. Dodajmo svakom od brojeva s lijeve strane jedinicu, odnosno, dodajmo na obe strane broj 3 pa pogledajmo možemo li to nekako dodatno srediti.

9. Probajte primijeniti neke već poznate nejednakosti, uočite da je zadatak sličan zadatku 1.4.

10. Raspišite kvadrat binoma na lijevoj strani i probajte povezati s nekim od prethodnih zadataka.

11. Posmatrajmo zbrojeve brojeva

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}=\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(b+c)(d+a)}$$
$$\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}=\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(a+b)(c+d)}$$

Možemo li nekako ograničiti nazivnike

$$(b+c)(d+a)\leqslant M$$
$$(a+b)(c+d)\leqslant M$$

tako da imamo

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+ad}{M}\geqslant 2?$$

12. Uvedite supstituciju $d_i=(x_{i-1}-x_i)$. Što uvjet zadatka tvrdi o tim brojevima?
13. Engel forma direktno na izraz.
14. Proširite i-ti razlomak s lijeve strane s a_i.
15. Engel forma.

8.2. C2: Igre i invarijante - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pronađi invarijantu.
2. Koji je najmanji broj koji igrač ne može oduzeti broju na ploči i zašto je on bitan za rješenje?
3. Što se događa kada na ploču dodamo crno polje?
4. Napravi tablicu pobjedničkih/gubitničkih pozicija.
5. Pronađi nešto što se smanjuje. Kako ljepše protumačiti uvjet da su a, b i c stranice trokuta?
6. Poanta je da drugi igrač ima više mogućih poteza nego što prvi igrač ima u tom trenutku karti.
7. Indukcija po broju prostih faktora umnoška svih brojeva. Kako smanjiti broj tih prostih faktora?
8. Mali Fermat.

8.3. G2: Potencija točke - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Gdje se nalazi M. Što iz toga slijedi?
2. Uredi oba umnoška na sličan način tako da sadrže nešto što možeš nazvati potencijom točke. Ne zaboravi na Pitagoru.
3. Dokaži da se te točke nalaze na nekoj radikalnoj osi.
4. Prisjeti se kako dokazati npr. da se u trokutu sve simetrale kutova ili stranica sijeku u istoj točki. Ništa pametnije od primjene definicije i tranzitivnosti jednakosti.
5. Pretpostavi da su tu različite kružnice i primjeni potenciju točke.
6. U kojem su odnosu potencije točke A na zadane kružnice ako je A lijevo od XY?
7. Ljepše zapiši tvrdnju, uoči da je konjunkcija dviju jednostavnih i dokaži svaku posebno
8. Izvedi zaključak iz zadane jednakosti kutova, nakon toga 5. zadatak je hint.
9. Što vrijedi za polumjere do sjecišta tih kružnica?
10. Radikalno središte.
11. Radikalna os.
12. Zaboravi sve točke označene u zadatku i promotri trokut čiji su vrhovi središta triju kružnica. Ne zaboravi na radikalne osi.
13. Ključno je primjetiti da se EF i BQ sijeku u B, to bi trebalo pokazati elementarnom geometrijom. Iskoristi za to svaki uvjet zadatka (kako mogu biti povezani s angle-chasingom?). Tek nakon toga razmisli o radikalnoj osi.
14. Promatraj prvo radikalne osi tih kružnica (svaku posebno). Što želiš pokazati? Što je ekvivalentno s tim da je $A_1A_2B_2B_1$ tetivan, a da ima veze s potencijom točke?

8.4. N2: Diofantske jednadžbe - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pomnožite s xy i faktorizirajte.
2. Koje ostatke pri dijeljenju s 13 može dati $4x^2$?
3. Izrazite x pomoću y i zaključite zašto taj izraz nikad nije cijel.
4. Faktorizirajte izraz.
5. Razlika kvadrata.
6. Kako faktorizirati izraz?
7. Pokušajte ograditi izraz.
8. Koji je najbliži kvadrat navedenom izrazu pod korijenom?
9. Faktorizacija. Promatrajte proste djelitelje izraza.
10. Ostatci.
11. Provjerite male slučajeve.
12. Pokušajte faktorizirati.
13. Pokušajte faktorizirtati izraz.
14. Promotrite ostatke pri dijeljenju s 3.

8.5. X2: Uvod u funkcijske jednadžbe - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uvrstite $x = 0$.
2. Uvrstite $y = 0$.
3. Uvrstite $y = 0$.
4. Neka je $f(0) = k$. Stavite $y = 0$ i $x - k \mapsto x$.
5. Uočite da vrijedi $(1 - (1 - x) = x$. Uvrštavanje $1 - x \mapsto x$ može pomoći.
6. $f(f(x)) = 0 \implies x + f(x) = 0 \implies f(x) = -x$. Dalje odredite skup brojeva za koje može vrijediti $f(f(X)) = 0$.
7. Uvrstite $(0, 0) \mapsto (x, y)$ da dobijete $(f(f(0)) = f(0)$ sada iskoristite injektivnost.
8. Indukcija po n.
9. Pretpostavimo $x \neq y$ i $f(x) + g(y) = 2$. Što zaključujemo? Što sada znamo o $f(x_0)$ i $g(x_0)$.
10. Uvrstite $x = 0$. Funkcija je antisimetrična.

8.6. Y2: Uvod u grafove - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. S koliko je drugih vrhova spojen svaki vrh?
2. Promotri kako bridovi utječu na zbroj svih stupnjeva.
3. Koje su sve mogućnosti za broj prijateljstava neke osobe?
4. Iskoristi $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$.
5. Modeliraj situaciju kao graf i iskoristi Lemu o rukovanju.
6. Kako se mijenjaju boje polja na kojima je žeton opisanim kretanjem po šahovskoj ploči?
7. Pretpostavi suprotno i promatraj stupnjeve vrhova.
8. Pretpostavi da je graf bipartitan i postoji neparan ciklus. Obratno, ako graf nema neparnih ciklusa, pokušaj konstruirati traženu particiju vrhova.
9. Iskoristi Dirichletov princip.
10. Pretpostavi da takav graf nije povezan.
11. Prvo pokaži da je graf stablo ako i samo ako je povezan i ima $n-1$ bridova (za broj vrhova n). U dokazivanju dalje pokušaj iskoristiti dokazano.
12. Ispitaj slučajeve po stupnjevima vrhova.
13. Promatraj situaciju koja nastane ako ukloniš glavni grad i linije iz njega. Promatraj stupnjeve vrhova, ako vrhovi predstavljaju gradove, a bridovi linije između njih.
14. Dirichletov princip i rastavljanje na slučajeve.
15. Promatraj najduži put u grafu i vrh na početku tog puta.
16. Matematička indukcija po broju vrhova.

9. Poglavlje

Hintovi za treću grupu

9.1. A3: Polinomi - Vieteove formule - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Znamo da za svaka dva polinoma p i q, $\deg p > \deg q$ postoje polinomi s i r takvi da je $p = qs + r$, gdje je $\deg r < \deg q$. Što se dogodi ako uvrstimo nultočke od q u jednakost?
2. Raspišite Vieteove formule i algebarskim manipulacijama dođite do danih izraza.
3. Pokušajte dobiti $ab + bc + ca$ i abc te onda znate da su a, b i c nultočke nekog polinoma čije koeficijente znate. Kada znate koeficijente polinoma, lagano možete naći nultočke.
4. Raspišite Vieteove formule i pogledajte što dobijete.
5. Opet, pokušajte dobiti $xy + yz + zx$ i xyz i postupite isto kao u trećem zadatku.
6. Definirajte $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Znamo da je $\deg Q = n + 1$. Pokušajte odrediti nultočke polinoma Q. Kada znate nultočke, kako onda možete zapisati polinom Q?
7. Iskoristite Vieteove formule kako bi dobili neki izraz za a i onda ga probajte ograničiti nejednakostima.
8. Pokušajte se igrati s nekim uvrštavanjima koja će dati nešto korisno. Htjeli bi dobiti neke identitete za P koji će nam omogućiti da jednostavno usporedimo koeficijente i dovršimo.
9. Ako je $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ i sve nultočke su mu realne, onda vrijedi ${a_{m-1}}^2 - 2a_m a_{m-2} \geqslant 0$. Probajte ovo dokazati Vieteovim formulama i onda primijeniti na zadatak.

9.2. C3: Kombinatorika na ploči - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koliko ima takvih pravaca, a koliko domina? Pretpostavi suprotno.
2. Mali primjeri i rekurzije.
3. Pronađi invarijantu.
4. Kako bi glasila općenita varijanta zadatka? Pokušaj s malim primjerima i pretpostavi odgovor.
5. Ako je odgovor ne, znaš da trebaju invarijante. Ako je odgovor da, onda očito treba svesti na rekurziju s manjim pločama ili indukciju (512 je potencija broja 2...)
6. Što ako postoje barem četiri retka i barem četiri stupca s barem 2 plava polja ?
7. Što možeš reći o poljima koja sudjeluju u potezu. Daje li ti to uputu za bojanje.
8. Ako misliš da to jest moguće, izađi van i rješavaj zadatke iz TB-a. Uklanjaju se točno dva polja zato da bude broj polja djeliv s 5. Ključno je to što su u istom stupcu. Učini nešto slično bojanju, a da sva polja u istom stupcu budu "ista".
9. Ovo je zadatak u kojem pretpostavljamo da netko ima pobjedničku strategiju da dobimo dodatni uvjet. Pretpostavimo prvo da Jimmy pobjeđuje jer, ako je to tako, možemo se izvući sa strategijom simetrije tj. pronalaskom odgovora na svaki potez suparnika. AKo je i dalje preteško, pokušaj riješiti isti zadatak s nekom drugom šahovskom figurom.
10. Šahovsko bojanje.
11. Što možeš reći o broju potrebnih stepenica s obzirom na ukupan broj polja? Bit će potrebno obojati ploču. Smjernice za bojanje su sljedeće: želiš da odrezana polja budu iste boje i želiš da svaka stepenica uvijek pokriva neparan broj crnih i neparan broj bijelih polja (kako bi dobio kontradikciju).
12. Ovo nije intuitivan zadatak. Pokušaj naći neko bojanje (osim šahovskog) koje ti daje slično ograničenje.
13. Problem je ovdje što su i pokušaj konstrukcije i postavljanja ograde naizgled nepouzdani. Treba ih natezati dok se ne poklope. Uočimo da se u prvi i zadnji redak (ili stupac) ne treba staviti ništa kod konstrukcije.
14. Promatraj kako primjena poteza utječe na neki par redaka.
15. Prvi dio zadatka je prepoznavanje ekstremnih (početnih) slučajeva koji nam rješavaju ostale slučajeve (uočiti odgovor nije teško). Zatim treba sastaviti algoritam koji dave Hefestu pobjedničku strategiju za sve odgovarajuće brojeve. Hefest želi doći u poziciju u kojoj dio opsega koji želi opločiti raste sporije nego $n\alpha$. Za drugi dio zadatka pronađi ekstrem koristeći obrate po kontrapoziciji tvrdnji oblika "Ako Hefest može ono, onda može i ovo.

9.3. G3: Inverzija - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Inverzija koja fiksira prve dvije kružnice iz polovišta treće
2. Inverzija 1.
3. Inverzija 2.
4. Inverzija 2.
5. Inverzija 1.
6. Inverzija 3. (IMO 2010)
7. Inverzija 4. (IMO SL 2005)

9.4. N3: TB funkcijske i polinomi - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

Zadaci

1. Iskoristi činjenicu da $x - y$ dijeli $P(x) - P(y)$.
2. Uvrsti n takav da je desna strana prosta, tako ćeš dobiti beskonačno točaka u kojima znaš čemu je f jednaka.
3. Dokaži da je dovoljno dokazati da je funkcija neograničena.
4. Ponovno $x - y \mid P(x) - P(y)$, iteriraj tu djeljivost.
5. Wilsonov teorem.
6. Namjesti desnu stranu da bude kvadrat prostog broja.
7. Primijeni Euklidov algoritam, nakon toga ćeš moći namjestiti desnu stranu na nešto skoro prosto.
8. Opet $x - y$ dijeli $P(x) - P(y)$.

9.5. X3: Pripisana kružnica - Krunoslav Ivanović

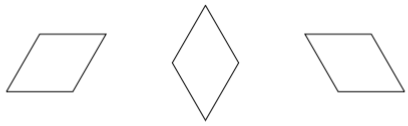
Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Podsjeća li vas ova konfiguracija ne nešto što ste već vidjeli u lemmama?
2. Probajte definirati točke P' i Q' kao presjeke simetrala vanjskih kuteva pri vrhovima B i C s pravcem LM te onda pokazati da su kutevi BPC i BQC pravi.
3. Jednakokračni trapezi imaju os simetrije. Prisjetite se lemma i iskoristite to nekako.
4. Probajte pronaći neke tetivne četverokute.
5. Pokušajte prepoznati konfiguraciju. Što su točke A, B i C trokutu DEF?
6. Pokažite da točka P mora ležati na kružnici (BIC).
7. Uvedite točku P koja je polovište dužine DI. $PA = PB$ (zašto?) pa je dovoljno pokazati da je četverokut $(PASB)$ tetivan.
8. Znate dosta udaljenosti u zadatku. Probajte iskoristiti Menelajev teorem.

9.6. Y3: Komba - metode bijekcije/injekcije - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Iskoristimo činjenicu da je f bijekcija. Pretpostavimo da je $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$. Zašto f ne može biti injekcija? Pretpostavimo da je $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$. Zašto f ne može biti surjekcija?
2. Probajte reprezentirati particiju kao kuglice u ravnini, tj. ako imamo particiju $6 = 3 + 2 + 1$, probajte to shvatiti kao da imate 6 kuglica, od kojih su 3 u jednom retku, 2 u drugom, a jedna u trećem. Probajte nacrtati više takvih particija i uočite nešto.
3. Svaki od "različitih dijelova" u particiji od n se može zapisati u obliku $a \cdot 2^b$ gdje je a neparan. Postoji li neki jednostavan način da iz particije u različite dijelove dobijete particiju u neparne dijelove?
4. Postoje tri vrste paralelograma, dvama su stranice paralelne s "bazom" trokuta, a treći je "okomit".

   Zbog simetrije, paralelograma svake vrste ima jednako. Promatrajmo samo paralelograme "treće vrste". Ako produžimo njihove stranice, možete li uočiti s čime su određeni?
5. Idemo redom po nizu zagrada. Označimo s x broj otvorenih zagrada, a s y broj zatvorenih zagrada. Uvjet da je izraz s zagradama "dobar" je da je $x \geqslant y$ u svakom trenutku. Podsjeća li vas to na nešto?
6. Zamislimo broj n kao n kuglica u ravnini. Kako možemo "podijeliti" te kuglice na m različitih "posuda"?

10. Poglavlje

Hintovi za četvrtu grupu

10.1. A4: Mixing variables - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uzmimo $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geqslant b \geqslant c$. Ako kao t definiramo $t = \frac{a+b}{2}$ imamo $f(a,b,c) - f(t,t,c) \geqslant 0$ (zašto?). Koristeći spomenute teoreme, kako možemo dovršiti?

2. Uočimo da je dovoljno provjeriti slučaj kada je $a \geqslant b \geqslant 1 \geqslant c \geqslant d$ (zašto?). Definirajmo
$$f(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 - 2(a-1)(b-1)(c-1)(d-1).$$
Pokažite da vrijedi $f(a,b,c,d) \leqslant f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, \sqrt{cd}, \sqrt{cd}) = f(x,x,y,y)$ za $x = \sqrt{ab}$ i $y = \sqrt{cd}$. Koristeći spomenute teoreme, kako možemo dovršiti?

3. BSO, pretpostavimo da je $b = \max\{a,b,c\}$. Uzmimo $f(a,b,c) = ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)$. Dokažite da vrijedi $f(a,b,c) - f(a+c,b,0) \leqslant 0$. Koristeći spomenute teoreme, kako možemo dovršiti?

4. BSO, pretposavimo da je $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Definirajmo
$$f(a,b,c,d) = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2).$$
Pokažite da je $f(a,b,c,d) \leqslant f(a+\frac{c+d}{2}, b+\frac{c+d}{2}, 0, 0)$. Koristeći spomenute teoreme, kako možemo dovršiti?

5. BSO, pretpostavimo da je $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ i stavimo da je
$$f(a,b,c,d) = ac(b+d) + bd(a+c-\frac{176}{27}ac).$$
Pokažite da je
$$f(a,b,c,d) \leqslant f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right).$$
Koristeći spomenute teoreme, kako možemo dovršiti?

10.2. C4: Teorija grafova - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Iskoristite lemmu 2.
2. Uočimo da ne možemo iskoristiti lemmu 2, no, bipartitan graf nema ciklusa neparne duljine. Što to znači?
3. Iskoristite lemmu 3.
4. Indukcija.
5. Hallov teorem.
6. Interpretirajte tablicu kao bipartitan graf, to jest, neka jedan skup vrhova predstavlja retke, a drugi stupce, a brid između dva vrha postoji ako je u polje u njihovom presjeku nenegativan broj. Što sada možete zaključiti?

10.3. N4: TB funkcijske - Marin Varivoda

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uzmimo neki $p \nmid P(0)$ i promatrajmo $P(0), P(P(0)), P(P(P(0))), \dots$ modulo p. Što možemo zaključiti?
2. Želimo dokazati da za svaki prost p, $x \equiv y \pmod{p} \iff f(x) \equiv f(y) \pmod{p}$. Uzmite minimalan d takav da $p \mid f(d)$ za neki fiksan prost broj p te probajte nešto izvući iz toga.
3. Dokažite da vrijedi $g(n) \equiv g(m) \pmod{p} \implies n \equiv m \pmod{p}$ za svaki prost broj p.
4. Iskoristite indukciju.
5. Dokažite da za k koji nisu djeljivi s 3, vrijedi $x^2 + x + 1 \mid x^{2k} + x^k + 1$ te onda dovršite.
6. Svaki prost djeljitelj p izraza $a_1 a_2 \cdots a_n$ promatrajte zasebno. Što vam govori činjenica da se m nalazi u eksponentu?
7. Uzmimo minimalan neparan r za koji $pr + 1 \mid p^p - 1$ te probajte dokazati da onda postoji neparan $m < r$ za koji $pm + 1 \mid p^p - 1$.
8. Definirajte $f(x) = (1+x)^{3k}$. Probajte izvući neke kongruencije suma koeficijenata.
9. Znamo da je $\gcd(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\gcd(m,n)} - 1$, tj. ako su m i n relativno prosti, imali bi $\gcd(5^m - 1, 5^n - 1) = 4$. Probajte sada raspisati $5^m - 1$ i $5^n - 1$ u kanonskoj formi te izvedite zaključke.
10. Definirajte niz (x_n) takav da je $P(x_i) = 2^i$. Pokušajte na dva različita načina odrediti brzinu rasta od $x_{n+1} - x_n$.
11. Pokažite da N ima maksimalno četiri djeljitelja.

10.4. G4: Pisane kružnice - Krunoslav Ivanović

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Jasno je da ne možemo baš direktno dokazati pa bi htjeli uvesti neku točku koja će povezati elemente zadatka. Definirajmo $G = AI \cap D'F'$ i pokušajmo naći neka svojstva te točke (kolinearnosti, tetivnosti...)
2. U kojim točkama te kružnice sijeku visinu AK?
3. Koje su točke kandidati za središte opisane kružnice?
4. Označimo s X i Y dirališta pripisanih kružnica sa stranicom $\overline{BC}$. Trivijalno imamo da je polovište dužine $\overline{XY}$ na radikalnoj osi, a ako malo razmislimo, možemo dobiti i da je polovište luka BC (koji ne sadrži A) također na radikalnoj osi. Možemo li sada nekako izraziti zadatak u kontekstu trokuta $\triangle BIC$?
5. Što se dogodi nakon inverzije s obzirom na upisanu kružnicu?

10.5. X4: Kombinatorna geometrija - Marin Varivoda

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pokušajte zadatak analitički interpretirati.
2. Promotrite konveksnu ljusku danih točaka.
3. Uzmite najveći mogući podskup B. Što sada možete zaključiti o točkama iz $B \setminus A$?
4. Pokušajte pronaći neku invarijantu.
5. Probajte indukciju.

10.6. Y4: Funkcijske jednaždbe $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi

1. Promotri minimum slike, indukcija.
2. Promotri graf u kojem su vrhovi prirodni brojevi, a usmjereni bridovi su $(x, f(x))$ za $x \in \mathbb{N}$. Kako bismo iz grafa za f konstruirali g?
3. $a^2 + 2(a+4)^2 = (a+3)^2 + 2(a+1)^2$.
4. Pokušaj dokazati da je slika od f jednaka slici od g.
5. Dokaži injektivnost, nakon toga promatraj sliku funkcije.

Dio III

Rješenja predavanja

11. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

11.1. A1: Sustavi jednadžbi - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Županijsko natjecanje iz matematike 2017 SŠ1 A 2
2. Županijsko natjecanje 1997 SŠ1 2
3. vidi hint, rješenja su $(2a, a)$ i $(a, 2a)$
4. 6.
5. Rješenje: U svakoj jednadžbi dodamo 1 s obje strane, motivacija za to je što onda možemo faktorizirati izraze desno od znaka jednakosti

$$\begin{aligned} xy + x + y + 1 &= 32 \\ xz + x + z + 1 &= -4 \\ yz + y + z + 1 &= -8 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1) &= 32 \\ (x+1)(z+1) &= -4 \\ (y+1)(z+1) &= -8 \end{aligned}$$

Pomnožimo te tri jednadžbe (motivacija – često je dobra ideja pomnožiti ili pozbrojiti sve jednadžbe ako imamo nešta cikličko, cikličko znači da imamo f(a, b, c), f(c, a, b) i f(b, c, a), i slično za više varijabli). Dobijemo

$$((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 2^{10}$$

Sada imamo dva slučaja: $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$ ili $(x+1)(y+1)(z+1) = -32$

1. slučaj: podijelimo jednadžbu $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$ s jednadžbom $(x+1)(y+1) = 32$.

Dobijemo $z+1 = 1$, odnosno $z = 0$. Uvrštavanjem toga u 2. i 3. jednadžbu dobijemo vrijednosti za x i y.

2. slučaj: podijelimo jednadžbu $(x+1)(y+1)(z+1) = -32$ s jednadžbom $(x+1)(y+1) = 32$.

Dobijemo $z+1 = -1$, odnosno $z = -2$. Uvrštavanjem toga u 2. i 3. jednadžbu dobijemo vrijednosti za x i y.

Konačno, rješenja su: $(x, y, z) = (3, 7, -2), (-5, -9, 0)$.

6. Državno 2013 SŠ1 A
7. Državno 2010 SŠ2 A
8. Državno 2016 SŠ2 A
9. IMO Shortlist 1967 problem 5
10. Županijsko natjecanje 2006 SŠ4 4
11. Državno natjecanje iz matematike 2018, SŠ1 A 1

11.2. C1: Dirichletov princip - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Razmatramo koliko je najviše moglo biti točnih rješenja. Osam nagrađenih učenika je riješilo maksimalno 5 zadataka, a ostalih 24 maksimalno jedan zadatak (da su riješili više, bili bi nagrađeni), odnosno, ukupan broj točnih rješenja je manji ili jednak $8 \cdot 5 + 24 \cdot 1 = 64$. U drugu ruku, kada bi svaki zadatak riješilo barem 13 učenika, ukupan broj točnih rješenja bi bio barem $5 \cdot 13 = 65$, no, $65 > 64$ pa je to nemoguće.

2. Uočimo da je nemoguće da postoji osoba koja se nije ni s kim rukovala i osoba koja se sa svima rukovala (osoba koja se sa svima rukovala bi se onda morala rukovati i s onom osobom koja nije ni s kime, što nema smisla). Dakle, ljude možemo podijeliti u skupine kakve smo opisali u hintu. Ako postoji osoba koja se nije ni s kime rukovala, onda su te skupine:

   - Osobe koje su se rukovale s nula drugih.
   - Osobe koje su se rukovale s jednom drugom osobom.

     $\vdots$
   - Osobe koje su se rukovale s $n-2$ drugih osoba.

   U ovom slučaju postoji $n-1$ skupina i n ljudi, dakle, dvije osobe su u istoj skupini. Isto se pokaže i ako postoji osoba koja se sa svima rukovala (samo što su skupine "rukovala se sa jednom osobom", $\ldots$, "rukovala se sa $n-1$ drugom osobom").

3. U biti, kada znamo da se neke dvije točke nalaze unutar istog manjeg kvadrata, gotovi smo. Najudaljenije točke unutar manjeg kvadrata su dijagonalni suprotni vrhovi, koji su međusobno udaljeni upravo za $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kako je barem jedna točka različita od vrha manjeg kvadrata(jer se tri od četiri vrha nalaze na stranicama većeg), znamo da je udaljenost manja od dane.

4. Trokut podijelite na 16 manjih jednakostraničnih (stranice podijelimo na četiri jednaka dijela i povlačimo paralele), a argumentacija je ista kao i u prethodnom zadatku.

5. Promatramo brojeve opisanog oblika, odnosno, one koje dobivamo na opisani način. Uzmimo prvih 2020 takvih brojeva. Kako je mogućih ostataka pri dijeljenju s 2019 upravo 2019, znamo da neka dva među tih 2020 brojeva daju isti ostatak. Ako promotrimo njihovu razliku, ona je oblika

$$1297365412807 \cdots 12973654128070000 \cdots 000$$

   i djeljiva je s 2019, odnosno, imamo broj koji počinje s 1297365412807 i djeljiv je s 2019.

6. U biti, možemo napraviti potpuno istu stvar kao u prethodnom zadatku, samo što promatramo brojeve $5, 55, 555, \ldots, 555 \cdots 555$ i onda pogledamo razliku koja je oblika $555 \cdots 555000 \cdots 000$, odnosno, sastoji se od nula i petica.

7. Opet, ponavljamo ideju iz prethodna dva zadatka, samo što ovaj put umjesto petica koristimo jedinice. Za argument da ih postoji beskonačno mnogo, samo svaki put u danom postupku biramo dovoljno veliku početnu točku.

8. Biramo jednu osobu. Ona ima 16 susjeda s kojima priča o jednoj od tri teme pa znamo da je postoji tema o kojoj priča s 6 drugih susjeda. Ako bilo koja dva od tih njegovih 6 susjeda pričaju međusobno o toj istoj temi, gotovi smo. U suprotnome, imamo 6 osoba koji međusobno pričaju o samo dvije teme. Opet, uzmimo jednu osobu od tih 6. Ona ima 5 susjeda pa znamo da postoji tema o kojoj priča s barem tri osobe. Ako bilo koje dvije među tih tri osobe priča o toj istoj temi, gotovi smo. U suprotnome, te tri osobe pričaju u preostaloj temi, no kako je samo jedna tema preostala, te tri osobe čine traženu trojku.

9. Radimo postupak opisan u hintu. Za početak, uočimo da ima 8 načina za obojati tri točke u dvije boje. U opisanom postupku, dobili smo ukupno 9 trojki, dakle, postoje neke dvije koje se poklapaju u bojanju. Također, u tome bojanju, kako postoje tri točke, postoje neke dvije iste boje. Uzmemo upravo te točke i dobili smo traženi pravokutnik. Link na rješenje.

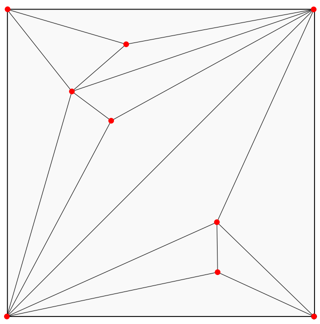
10. Uočimo da možemo izabrati 50 brojeva takvih da uvjet nije narušen, naime $51, \ldots, 99, 100$ su takvi da ne postoje dva takvi da je jedan višekratnik drugog. U drugu ruku, tvrdimo da ako imamo 51 broj, da nužno postoje dva takvi da je jedan višekratnik drugog. Naime, podijelimo brojeve u skupine

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, 2, 4, 8, \ldots\} \\ S_2 &= \{3, 6, 12, 24, \ldots\} \\ S_3 &= \{5, 10, 20, \ldots\} \\ &\vdots \\ S_{50} &= \{99\}, \end{aligned}$$

odnosno, uzimamo redom neparne brojeve x i njima pridružujemo sve brojeve oblika $2^a \cdot x$. Jasno, za bilo koja dva broja u takvom skupu, jedan je višekratnik drugog. U drugu ruku, ovakvih skupova je 50, odnosno, kada bi uzeli 51 broj, sigurno bi uzeli neka dva broja iz istog skupa pa bi imali neka dva takva da je jedan višekratnik drugog.

11. Link na rješenje.

12. Raditi ćemo postupak opisan u hintu, odnosno, pokušat ćemo kvadrat pokazati kao disjunktnu uniju trokuta čiji su vrhovi obojani. Zamislimo da redom dodajemo točke u kvadrat. Prije svega, dok u kvadratu ima nula točaka, podijeljen je na dva trokuta, jednom od glavnih dijagonala. Nakon toga, dodajemo jednu točku i ona “upada" u jedan od tih dvaju trokuta i spajamo tu točku s vrhovima trokuta unutar kojeg se nalazi. Onda opet dodajemo točku koja se mora nalazi unutar jednog od trokuta (jer nikoje tri točke nisu na istome pravcu) i opet, spajamo je s vrhovima trokuta u kojem se nalazi. Uočimo da danim procesom u svakom koraku dodajemo dva nova trokuta te je nakon svakog koraka kvadrat prikazan kao disjunktna unija trokuta.



Primjer za 5 točaka unutar kvadrata

Kada završimo sa dodavanjem svih točaka, imati ćemo ukupno 200 različitih trokuta čiji su vrhovi obojane točke. Kada bi površina svakog od njih bila veća od jedan, ukupna površina bila bi veća od 200, no, kako je stranica kvadrata duljine $10\sqrt{2}$, površina kvadrata je upravo 200. Kako som ušli u kontradikciju, mora postojati trokut površine manje ili jednake jedan, a to je upravo ono što smo tražili.

11.3. G1: Sukladnost i sličnost, angle chasing - Tea Arvaj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Izvor.
2. Izvor.
3. Rješenje: nacrtaj dvije takve kružnice i dokaži da su $\triangle MPQ$ i $\triangle MP_1Q_1$ slični.
4. Izvor.
5. Izvor.
6. Rješenje: $\triangle ABC \cong \triangle CGH$, $|BF| = |BC|$ i duljina visine na BF u trokutu BEF jednaka je AC, slično za $\triangle AKD$
7. Izvor.
8. Izvor.
9. Jedno rješenje: uvesti točku E na polupravcu DB t.d. je $|DE| = 2|AB|$. $\sphericalangle MBE = \sphericalangle CBA$ jer su $\sphericalangle MBC$ i $\sphericalangle EBA$ pravi, $\triangle ABC \cong \triangle EBM$ po SKS $\Longrightarrow |AC| = |EM|$ i $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BAC$.
$\triangle ABP \sim \triangle EDM$ po SKS ($|DE| = 2|AB|, |EM| = 2|AP|$ i kutevi između njih) $\Longrightarrow |DM| = 2|BP|$.
10. Planimatrija, zbirka riješenih zadataka, Anđelko Marić, 1.23.
11. 2016. županijsko Hrvatska 2. A 4. zadatak
12. Rješenje: $CDGF$ je tetivan, slijedi $\sphericalangle FGC = \sphericalangle FDC = \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle CGD = 90°$
$\sphericalangle FGD = 90° + \sphericalangle FGC = 90° + \sphericalangle BDC$
$\sphericalangle DFG = 180° - 90° - \sphericalangle BDC - \sphericalangle ADB = 90° - \sphericalangle CBA$
$AECG$ je tetivan jer $\sphericalangle AGC = \sphericalangle CEA = 90°$, slijedi $\sphericalangle GEA = \sphericalangle GCA = 90° - \sphericalangle CAG = 90° - \sphericalangle ACB$
H je polovište dužine AC, $\sphericalangle CEA$ je pravi, slijedi $\sphericalangle HEA = \sphericalangle EAH = \sphericalangle BAC$
$\sphericalangle HEG = \sphericalangle HEA - \sphericalangle GEA = \sphericalangle BAC - 90° + \sphericalangle ACB = 90° - \sphericalangle CBA = \sphericalangle DFG = 180° - \sphericalangle GFH$, slijedi $EHFG$ je tetivan
13. 2019. okružno Srbija 1. A 2. zadatak
Prvo rješenje: Kako je IH srednjica u AED, slijedi $IH \parallel AD$, Slično, $FG \parallel BD$. Dakle, $\sphericalangle IJF = \sphericalangle ADB$. Kako je peterokut $ABCDE$ tetivan, slijedi $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.
Sveukupno imamo $\sphericalangle KJF = \sphericalangle IJF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle KCF$. Dakle, četverokut $KFCJ$ je tetivan, tj. točka K se nalazi na kružnici opisanoj trokutu FCJ.
Drugo rješenje $\sphericalangle DAE =$(HI srednjica u ADE) $\sphericalangle HIE =$(vršni) $\sphericalangle KIA$ $\sphericalangle CFJ = \sphericalangle CFG =$ (FG srednjica u CBD) $\sphericalangle CBD =$(tetivnost)$\sphericalangle CAD$
$\sphericalangle IAK = 180° - \sphericalangle KIA - \sphericalangle AKI = 180° - \sphericalangle CAD - \sphericalangle DAE$
$\longrightarrow \sphericalangle AKI = \sphericalangle CAD$, tj. $\sphericalangle CKJ = \sphericalangle AKI = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CFG = \sphericalangle CFJ$, tj. $CJKF$ je tetivan
14. 2018. okružno Srbija 1. A 3. zadatak
Rješenje Neka je I centar upisane kružnice. Imamo $KEF \sim ABC$,
pa dobijamo $\sphericalangle EKF = \sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle EIF$, što znači da je četverokut $EIFK$ tetivan.
Slijedi $\sphericalangle KIF = \sphericalangle KEF = \sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle DIF$, pa su točke K,I,D kolinearne, odakle slijedi tvrdnja.
15. 2010. državno Hrvatska 2. A 4. zadatak
16. IGO 2017. Intermediate 2.
Rješenje: $\sphericalangle BFD = \sphericalangle DBF = 180° - \sphericalangle PBC = \sphericalangle CEP \longrightarrow \sphericalangle CEB + \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ + \sphericalangle QFD$
$\sphericalangle CEB = \sphericalangle EBC = \sphericalangle QBD = \sphericalangle QFD \longrightarrow \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ \longrightarrow \sphericalangle BAP = \sphericalangle BEP = \sphericalangle BFQ = \sphericalangle BAQ$
Dakle, A, P i Q su kolinearne.
17. MEMO 2015. I-3
18. IGO 2015. Medium 2.
Rješenje: O je središte opisane kružnice trokuta ABC. $DH = DA$ jer je BA hipotenuza trokuta BHA. $M := BH$ presjek ED. FMD sukladan HMD. $\sphericalangle MFD = \sphericalangle DHM = 90° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle HBA = \sphericalangle MBD$, $MDBF$ je tetivan. $\sphericalangle FBM = \sphericalangle FDM = \sphericalangle MDH = \sphericalangle EDH = \sphericalangle EDA - \sphericalangle HDA =$
$\sphericalangle CBA - (180° - 2\sphericalangle BAC) = \sphericalangle CBA + 2\sphericalangle BAC - 180°$
$\sphericalangle FBA = \sphericalangle FBD = \sphericalangle FBM + \sphericalangle MBD = \sphericalangle CBA + 2\sphericalangle BAC - 180° + 90° - \sphericalangle BAC =$
$\sphericalangle CBA + 2\sphericalangle BAC - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB - \sphericalangle CBA + 90° - \sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle OBA$

19. 2016. državno Hrvatska 2. A 3. zadatak

11.4. N1: Djeljivost i kongruencije - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. mnm online predavanje Djeljivosti
2. žup 2001 SŠ1A
3. žup 2008 SŠ1A
4. žup 2014 SŠ2A
5. Nađite ostatak pri dijeljenju broja $3^{100} + 5^{100}$ brojem 7.

   Prvo računamo $3^{100} \pmod 7$:
   $3^3 \equiv -1 \pmod 7 \implies 3^6 \equiv 1 \pmod 7$
   $3^{96} \equiv (3^6)^{16} \equiv 1 \pmod 7$
   Iz toga dobivamo $3^{100} \equiv 3^{96} \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 81 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$.

   Na sličan način računamo $5^{100} \pmod 7$:
   $5^3 \equiv -1 \pmod 7 \implies 5^6 \equiv 1 \pmod 7$
   $5^{96} \equiv (5^6)^{16} \equiv 1 \pmod 7$
   Dakle, $5^{100} \equiv 5^{96} \cdot 5^4 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7$.

   Zaključujemo, $3^{100} + 5^{100} \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod 7$.

6. $2x + 3 \equiv 4 \pmod 7 \implies 2x \equiv 1 \equiv 8 \pmod 7 \implies x \equiv 4 \pmod 7$, a zadnji korak smijemo napraviti jer su 2 i 7 relativno prosti
7. žup 2012 SŠ1A
8. žup 2016 SŠ1A
9. žup 2017 SŠ1A
10. $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \ldots + a_0 \pmod{11}$, što je upravo ono što smo htjeli dokazati.
11. Želimo odrediti $(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 \pmod 9$.

$$\begin{aligned}(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3 &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= 3k(k^2+2)\end{aligned}$$

   Vidimo da je željeni izraz djeljiv s 3, dakle ostaje provjeriti $k(k^2+2) \pmod 3$.
   To provjeravamo za sve tri mogućnosti:

$$\begin{aligned} k \equiv 0 \pmod 3 &\implies k(k^2+2) \equiv 0 \pmod 3 \\ k \equiv 1 \pmod 3 &\implies k(k^2+2) \equiv 1 \cdot (1+2) \equiv 0 \pmod 3 \\ k \equiv 2 \pmod 3 &\implies k(k^2+2) \equiv 2 \cdot (2+2) \equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

12.

$$a_n = \begin{cases} 4^n + 3 & \text{za } n \equiv 0 \pmod 2; \\ 4^n + 2 & \text{za } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

   Budući da su jedini kvadratni ostaci modulo 4 jednaki 1 ili 0, zaključujemo da se u nizu ne nalazi niti jedan potpun kvadrat.

11.5. X1: Logika i dokazi - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

Uvodni zadatci

1. Izvor.
2. Svedemo na oblik $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. U (a) dijelu odgovor je 3, no potrebno je dokazati da nije $k>3$. Kontradikciju dobijemo ako uvrstimo npr. $a=b=c=1$ i pretpostavimo $k>3$
3. U (a) dijelu pretp. da je konačan pa promatramo sljedbenik umnoška "svih" prostih brojeva. Slijedi da on nije djeljiv niti jednim prostim brojem što je nemoguće. (b) dio dokažemo obratom po kontrapoziciji koji glasi: a je paran, dakle a^2 je paran.
4. $P(1)$ - tzv. baza i $P(n) \implies P(n+1)$ - tzv. korak.

1. Dokazujemo svođenjem na kontradikciju. Pretp. da je racionalan, tada postoje relativno prosti prirodni brojevi m,n takvi da je $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, to je ekvivalentno s $2n^2=m^2$ iz čeg slijedi $2 \mid m$ tj. $m=2k$ jer 2 dijeli lijevu stranu jednakosti. Tada je $n^2=2k^2$, dakle n je paran. To nam daje kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.
2. Odgovor je 502. Za skup $S=\{1,2,3...,499,500,1000\}$ ne postoji traženi par (501 element u S . Promatramo troznamenkaste završetke brojeva, možemo pretpostaviti da su svi različiti jer, ako su neka dva ista, razlika tih brojeva je djeljiva s 1000). Uočimo da parovi sljedeći parovi zadnjih triju znamenaka $(001,999)$, $(002,998)$, ..., $(499,501)$ te $(000,000)$ i $(500,500)$ zbrojeni daju broj djeljiv s 1000. Ima 501 parova pa među 502 broja po Dirichletovom principu postoje dva koja zbrojena daju broj djeljiv s 1000.
3. U (b) dijelu dokazujemo sukladnost trokuta $\triangle ADC$ i $\triangle ADB$ pri čemu je A vrh nasuprot osnovici, B i C ostali vrhovi, a D nožište visine/polovište osnovice. U prvom dijelu poučak je SSK, a u obratu SSS. U (a) dijelu docrtamo visine iz dvaju vrhova i SSK poučkom dokažemo sukladnost dvaju trokuta koje dobijemo, to nam daje da su kutovi uz osnovicu jednaki. Tu jednakost kutova iskoristimo u SKS sukladnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ iz čega direktno slijedi $|AC|=|BD|$.
4. Kvadriramo nejednakost i iskoristimo pitagoru te formulu za površinu. Ostaje nam $v^2>0$ što sigurno vrijedi.
5. Ostatci pri djeljenju s 5 se periodično ponavljaju uzorkom$1,4,4,1,0$, a ostatci s 3 se ponavljaju $1,1,0$. Treba malo raspisati i pokazati da je $k=5$ najmanji broj da suma bude djeljva 5 iz čeg slijedi da će suma biti djeljiva s 5 ako je k višekratnik od 5 (tada imamo sumu nekoliko suma od 5 uzastopnih što je opet, a inače isto to samo što zadnja suma ima manje od 5 kvadrata, tj. ostatak kad k podijelimo s 5). Analogno možemo doći do toga da je tražena suma uvijek djeljiva s 3 ako je k djeljiv s 9, dakle uvijek je djeljiva s 15 kad je k djeljiv s 45. 45 je najmanji takav k.
6. Izvor.
7. Izvor.
8. Izvor.
9. Izvor.

11.6. Y1: Indukcija - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja zadataka 1. − −10. možete naći u ovdje ili ovdje, odnosno, možda nisu eksplicitno isti zadaci, no primjenjuju se isti principi rješavanja.

11. Državno, 2002. 3. razred

12. Turnir gradova 2005.

12. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

12.1. A2: KAGH i CSB - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Uočimo da je dana nejednakost ekvivalentna s

$$a^8 + a^6 + a^2 + 1 \geqslant 4a^4$$

pa kada primijenimo $A - G$ nejednakost na lijevu stranu imamo

$$\frac{a^8 + a^6 + a^2 + 1}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^8 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot 1} = a^4$$

što smo trebali i pokazati.

2. Uočimo da prema $A - G$ nejednakosti vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} &\geqslant 2a \\ \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &\geqslant 2c \\ \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geqslant 2b. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti i dijeljenjem s dva dobivamo traženu.

3. Uočimo da je

$$p + \frac{1}{p} \overset{A-G}{\geqslant} 2 \implies p + 1 + \frac{1}{p} \geqslant 3,$$

a isto vrijedi i za q pa imamo

$$\left(p + 1 + \frac{1}{p}\right)\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) \geqslant 9$$

što je ekvivalentno s zadatkom.

4. Primijenimo li $A - G$ nejednakost na sljedeći način, dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geqslant 2ab \\ b^2 + c^2 &\geqslant 2bc \\ c^2 + a^2 &\geqslant 2ca. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo početnu.

5. Nakon kraćeg algebarskog sređivanja, imamo da je dana nejednakost ekvivalentna s

$$1 \geqslant 4xy.$$

Generalno vrijedi

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{A-G}{\geqslant} 4xy,$$

a kako je $x + y = 1$, tražena tvrdnja očito vrijedi.

6. Uočimo da vrijedi
$$1+\frac{1}{x}=1+\frac{x+y+z}{x}=1+1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\overset{A-G}{\geqslant}4\frac{\sqrt[4]{yz}}{\sqrt{x}}.$$
Isto vrijedi i za $1+\frac{1}{y}$ i $1+\frac{1}{z}$, množenjem dobivenih nejednakosti dobivamo traženu.

7. Uočimo da vrijedi
$$x-1=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
pa je
$$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$
Iz $A-G$ nejednakosti imamo
$$\begin{aligned}x+y&\geqslant 2\sqrt{xy}\\ y+z&\geqslant 2\sqrt{yz}\\ z+x&\geqslant 2\sqrt{zx},\end{aligned}$$
a množenjem ovih nejednakosti i dijeljenjem s xyz dobivamo traženu.

8. Dodavanjem 3 na obje strane nejednakosti imamo
$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2},$$
odnosno, nakon dodatnog sređivanja imamo
$$((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9,$$
no ovo nije ništa drugo nego $A-H$ nejednakost primijenjena na $a+b, b+c$ i $a+c$.

9. Iz zadatka 1.4. znamo da je $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$. Prema tome, znamo da je
$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c),$$
gdje prva nejednakost slijedi iz zadatka 1.4. za $x=a^2, y=b^2, z=c^2$, a druga nejednakost slijedi iz $x=ab, y=bc, z=ca$.

10. Ako raspišemo uvjet, dobivamo da trebamo dokazati da je
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2\geqslant 3abc(a+b+c)$$
te je sada tvrdnja očita iz prethodnog zadatka.

11. Uočimo da je
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}&=\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(b+c)(d+a)}\geqslant 4\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(a+b+c+d)^2}\\ \frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}&=\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(a+b)(c+d)}\geqslant 4\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(a+b+c+d)^2}.\end{aligned}$$
Zbrajanjem ovih nejednakosti imamo
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}&\geqslant 4\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da}{(a+b+c+d)^2}=\\ &=2\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geqslant 2.\end{aligned}$$

Rješenja zadataka 12. – 18. **izostavljena su iz pedagoških razloga.**

19. Učinimo supstituciju $d_i = x_{i-1} - x_i$. Vidimo da je, radi tvrdnje zadatka $d_i > 0, \forall i$. Također, vrijedi

$$x_0 - x_n = x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - x_3 \cdots + x_{n-1} - x_n = d_1 + d_2 + \dots d_n$$

Sada tvrdnja zadatka postaje:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \sum_{i=1}^{n} d_i + \frac{1}{d_i}$$

Primjernom A-G nejednakosti n puta dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i + \frac{1}{d_i} \geqslant 2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2n$$

što je tvrdnja zadatka.

20. Direktnom primjenom Engel forme na lijevu stranu nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+bc+1+ac} = \frac{9}{3+ab+bc+ac}$$

Dovoljno je pokazati da je

$$\frac{9}{3+ab+bc+ac} \geqslant \frac{3}{2}$$

Uvrstimo li u brojnik i nazvinik lijeve strane $3 = a^2 + b^2 + c^2$ i izmnožimo, dobit ćemo

$$\iff 6(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^2+b^2+c^2) + 3(ab+bc+ac)$$

$$\iff 3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(ab+bc+ac)$$

Sada se pozivamo na 4. zadatak i dobivamo tvrdnju zadatka.

21. Proširvanjem i-tog razlomka s a_i dobivamo da je tvrdnja zadatka ekvivalentna s

$$\frac{a_1^2}{sa_1 - a_1^2} + \frac{a_2^2}{sa_2 - a_2^2} \cdots \frac{a_n^2}{sa_n - a_n^2} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

Sada primjenom Engel forme dobivamo

$$\frac{a_1^2}{sa_1 - a_1^2} + \frac{a_2^2}{sa_2 - a_2^2} \cdots \frac{a_n^2}{sa_n - a_n^2} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1 s + a_2 s + \dots a_n s - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - \dots - a_n^2}$$
$$= \frac{s^2}{(s^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2))}$$

Dovoljno je, dakle pokazati da je

$$\frac{s^2}{(s^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2))} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

$$\iff (n-1)s^2 \geqslant ns^2 - n(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{s^2}{n}$$

$$\iff \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} \geqslant \frac{s^2}{n^2}$$

$$\iff \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \geqslant \sqrt{\frac{s^2}{n^2}} = \frac{s}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}$$

Posljednja nejednakost vrijedi po K-A.

22. Direktnom primjenom Engel forme dobivamo:

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \dots x_n)^2}{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \frac{1^2}{2 \cdot 1}$$

Zadnju jednakost dobivamo uvrštavanjem uvjeta zadatka.

12.2. C2: Igre i invarijante - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Zbroj kvadrata brojeva na ploči ostaje isti, a kako je $3^2 + 4^2 + 12^2 \neq 202^2 + 8^2 + 310^2$, odgovor je ne.
2. Na početku, ostatak koji broj na ploči daje s umnoškom najmanjih 21 prostih brojeva (nazovimo taj broj P) je 0. Emanuelova strategija je, ako Stella odigra broj $aP + r$, tada Emanuel odigra $P - r$. Tada je nakon svakog Emanuelovog poteza broj na ploči djeljiv s P, a nakon svakog Stellinog nije. Dakle, mora postati jednak 0 nakon Emanuelovog poteza, pa Emanuel ima pobjedničku strategiju.
3. Zamislimo da smo nekim redoslijedom dodavali crna polja na ploču. Promotrimo razliku u zbroju ploče prije i nakon dodavanja. Neka je polje koje smo zacrnili prije bojanja imalo k bijelih susjeda i $4 - k$ crnih. Tada se brojevi u tih $4 - k$ crnih polja smanje za 1, brojevi u bijelih k polja povećaju za 1, a broj u novoobojanom polju više nije jednak $4 - k$ nego k, odnosno razlika između starog zbroja i novog je $-(4 - k) + k - (4 - k) + k = -8 + 4k$, što je djeljivo s 4. Kako je na početku zbroj bio djeljiv s 4, vidimo da će i ostati djeljiv s 4 nakon što dodamo konačno mnogo crnih polja.
4. EMC 2016 S2
5. Napravimo takozvanu Ravijevu supstituciju: $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ za neke prirodne brojeve x, y i z koji nisu svi međusobno jednaki. Tada je transformacija $(x+y, y+z, z+x) \to (2z, 2x, 2y)$. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo $(x+y)(y+z)(z+x) > 8xyz$, tj. umnožak brojeva na ploči se smanjuje(jednakost ne može vrijediti jer bi moralo vrijediti $x = y = z$, ali trokuti su nejednakostranični). Dakle, nemoguće je ponoviti potez beskonačno puta.
6. Dokazat ćemo da nakon svakog Matejevog poteza, Bruno Roko može ili završiti igru ili postići da Matej ne može završiti igru u sljedećem potezu. Pretpostavimo da je Mateju u nekom trenutku ostalo $k - 1$ karata, a Bruni Roku k karata, te neka je zbroj karata na stolu kongruentan s j modulo $2n$. Ako Bruno Roko ima $2n - j$ među svojim kartama, može to odigrati i pobijediti. Ako nema tu kartu, onda ima jednu kartu više od Mateja. Za svaku Matejevu kartu K, najviše jedna karta od Brune Roka je takva da će Matej nakon njegovog poteza pobijediti bacanjem karte K. To znači da Bruno Roko ima barem jednu kartu koju može odigrati a da Matej neće pobijediti u potezu nakon, a kako svi znaju koje su karte preostale i koje su bačene, Bruno Roko zna koju kartu treba baciti. Dakle, Bruno Roko ima pobjedničku strategiju.
7. Primijetimo prvo da tijekom izvođenja operacije (konačan) skup S prostih brojeva koji dijele umnožak svih brojeva na ploči ostaje isti ili izgubi neke elemente, tj. ne dobiva nove članove. Fiksirajmo neki takav prost broj p, i uzmimo a s ploče koji je djeljiv s istom potencijom broja p kao i L. Tada L/a nije djeljiv s p, tj. smanjili smo broj brojeva na ploči djeljivih s p. To radimo dok na ploči ne ostane 0 brojeva djeljivih s p. Time smo smanjili veličinu od S za 1. Ponavljamo ovaj postupak dok god S nije prazan.
8. Ako je Kristijan izabrao $a + i$, tada Borna izabere $b + 2017 - i$. Na kraju, umnožak će pri dijeljenju s 2017 davati ostatak $(a + b + 2017)^2 017$, što po malom Fermatovom teoremu daje ostatak $a + b + 2017$, odnosno $a + b$. Dakle, Borna ima pobjedničku strategiju.

12.3. G2: Potencija točke - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Izvor.
2. Izvor.
3. Izvor.
4. Izvor.
5. Izvor.
6. Izvor.
7. Izvor.
8. Izvor.
9. Izvor.
10. Izvor.
11. Izvor.

12.4. N2: Diofantske jednadžbe - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja zadataka prepuštena su čitatelju za vježbu.

12.5. X2: Uvod u funkcijske jednadžbe - Daniel Širola

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja zadataka prepuštena su za vježbu čitatelju.

12.6. Y2: Uvod u grafove - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Svaki od n vrhova povezan je sa svakim od preostalih $n-1$ vrhova, a budući da tako svaki brid prebrojavamo točno 2 puta, ukupni broj bridova je $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

2. Svaki brid pridonosi zbroju stupnjeva svih vrhova sa 2 budući da spaja 2 vrha pa svakome od njih povećava stupanj za 1. Zbog toga je $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$, odnosno paran broj.

3. Svaku osobu možemo zamisliti kao vrh grafa, a prijateljstva kao bridove među njima. Zadatak je pokazati da postoje barem 2 vrha istog stupnja.
Budući da imamo 50 vrhova, svaki od njih može biti stupnja najmanje 0 i najviše 49 (ukupno 50 mogućnosti). Međutim ne možemo istovremeno imati vrh koji je povezan sa svima ostalima (stupnja 49) i vrh koji nije povezan ni sa kojim drugim (stupnja 0) pa vidimo da imamo najviše 49 različitih mogućnosti za stupnjeve svakog vrha. Po Dirichletovom principu sigurno postoje barem 2 vrha istog stupnja.
Tvrdnja se analogno može pokazati za proizvoljan broj vrhova n.

4. Iz $3 \cdot (\text{broj vrhova}) \leqslant \sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot (\text{broj bridova})$ dobivamo ocjenu $(\text{broj vrhova}) \leqslant 12$, a vidimo i da je jednakost moguće postići konstruiranjem takvog grafa.

5. Zamislimo to kao graf pri čemu su računala vrhovi grafa, a njihova povezanost bridovi. Kada bi traženi graf postojao, svaki od 77 vrhova morao bi biti stupnja točno 15 pa bi zbroj stupnjeva svih vrhova bio $77 \cdot 15$ što nije paran broj. Zato zaključujemo da to nije moguće.

6. Pretpostavimo da je gornji lijevi ugao ploče crne boje. U svakom potezu žeton alternira između crnih i bijelih polja, odnosno u svakom neparnom trenutku (ako je početni trenutak 1) nalazit će se na crnom polju, a u svakom parnom trenutku na bijelom polju. Šahovska 8×8 ploča ima 64 polja, pa ako želimo obići sva polja točno jednom u donjem desnom uglu žeton se mora nalaziti u trenutku 64. Međutim, to nije moguće jer je to polje crno, a trenutak paran (tada je žeton na bijelom polju).
Zadatak se može modelirati i bipartitnim grafom. Svako polje predstavlja jedan vrh, a dozvoljeni potezi bridove. Tako dobivamo crno-bijelo bojanje vrhova iz čega zaključujemo da je graf bipartitan.

7. Pretpostavimo suprotno, da postoji stablo sa n vrhova koje sadrži vrh v stupnja d i ima manje od d listova. Znamo da je broj bridova $b = n-1$ te $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot b = 2n-2$. Budući da stablo nema više od $n-1$ listova vrijedi ocjena:
$$2n-2 = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \underbrace{d}_{1} + \underbrace{(d-1) \cdot 1}_{2} + \underbrace{(n-d) \cdot 2}_{3} = 2n-1$$
što je kontradikcija.
(1) vrh v
(2) listovi
(3) preostali vrhovi za koje pretpostavljamo da niti jedan nije list, dakle svi su stupnja barem 2 i ima ih $n-d$

8. Neka su A i B skupovi u koje particioniramo bipartitan graf.
Pretpostavimo prvo da je graf bipartitan, odnosno takvi skupovi postoje. Pretpostavimo da postoji neparan ciklus $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, k neparan, i bez smanjenja općenitosti neka je $v_0 \in A$. Sada je $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, ..., $v_k \in B$, no $v_0 = v_k$ jer je to ciklus. Time je dobivena kontradikcija.
Obratno, neka graf nema neparnih ciklusa. Možemo pretpostaviti da je graf povezan, inače se dokaz provodi za svaku komponentu povezanosti zasebno. Konstruiramo skupove A i B: odaberemo neki vrh v i sve dok nismo "pokupili" sve vrhove, v stavimo u A, prve susjede svih vrhova iz A stavljamo u B, a prve susjede svih vrhova iz B stavljamo u A. Taj algoritam mora stati jer je graf konačan i povezan. Pretpostavimo da je neki vrh w u oba skupa A i B. To znači da imamo šetnju neparne duljine koja počinje i završava u w, ondnosno iz v u w smo na jedan način mogli doći u parno mnogo koraka, a na drugi način u neparno mnogo koraka (jer je $w \in A$ i $w \in B$). Ali time dobivamo kontradikciju jer smo pretpostavili da graf nema neparnih ciklusa.

9. državno 1995 SŠ3

10. Pretpostavimo suprotno, graf nije povezan. Tada postoje 2 vrha koja nisu povezana te svaki od njih ima barem $\frac{n-1}{2}$ susjednih vrhova i oni su različiti jer bi inače postojao put između ta dva vrha za koje smo pretpostavili da nisu povezani. Tada imamo ukupno barem $2 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n + 1$ vrhova, što je kontradikcija.

11. skripta Diskretna matematika, str. 65

12. državno 2011 SŠ1A

13. Turnir gradova 1982.
Skica rješenja:
Neka vrhovi grafa označavaju gradove, a bridovi zrakoplovne linije. Neka je A glavni grad, $B_1, \dots, B_{100}$ gradove direktno povezane sa glavnim gradom i $C_1, \dots$ ostali gradovi u toj državi. Sada su svi vrhovi stupnja 10, osim A koji je stupnja 100. Uklonimo li vrh A i njemu incidentne bridove, ostaju nam vrhovi $B_1, \dots, B_{100}$ stupnja 9 i $C_1, \dots$ stupnja 10. Svaki vrh B_i povezan je s barem još jednim vrhom istog stupnja, inače bismo dobili graf sa samo jednim vrhom neparnog stupnja. Zato možemo svakom takvom vrhu stupnja 9 koji je povezan s barem još jednim takvim dodati brid koji ga povezuje s A, a ostalima iz komponente povezanosti ne dodajemo brid koji ga povezuje s A jer su sa A povezani preko vrha kojemu smo dodali brid. Dodavanja bridova bit će najviše 50 jer je svaki vrh stupnja 9 povezan s barem još jednim vrhom stupnja 9 kojemu nećemo dodati brid. To znači da barem 50 od 100 zrakoplovnih linija iz glavnog grada možemo ukinuti, a da se sačuva svojstvo povezanosti.

14. državno 2006 SŠ3A

15. aops

16. HMO 2011., 1. dan, 2. zadatak

13. Poglavlje

Rješenja za treću grupu

13.1. A3: Polinomi - Vieteove formule - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Provedite postupak opisan u hintu, dobije se da je ostatak linearan (oblika $ax+b$) i trebate uvrstiti $x=1$ i $x=-2$.

2. Opet, provedite postupak opisan u hintu, znate $x_1+x_2=-p$ i $x_1 \cdot x_2 = q$ i želite preko toga izraziti x_1-x_2 i ${x_1}^3+{x_2}^3$ kako bi dobili jednadžbe za p i q koje treba riješiti.

3. Link na rješenje.

4. Ako su a i b nultočke, imamo $a+b=\frac{-m}{2}$ i $ab=\frac{n-2}{2}$, odnosno,

$$\frac{m^2}{4}=(a+b)^2; \quad \frac{n^2}{4}=(ab+1)^2.$$

   Kada ovo razmnožimo i zbrojimo dobijemo izraz za $\frac{m^2+n^2}{4}$ i pokaže se da to mora biti paran broj.

5. Treći zadatak.

6. USAMO 1975.

7. Ovo je u biti lemma opisana u hintu u 9. zadatku, samo za slučaj $m=4$. Dokaz je preuzet s ovog linka. Ako sa p,q,r,s označimo nultočke polinoma, imamo $p+q+r+s=a$, $pq+pr+ps+qr+qs+rs=1$. Sada vrijedi

$$0 \leqslant p^2+\cdots+s^2=(p+q+r+s)^2-2(pq+pq+\cdots+rs) \qquad = a^2-2$$

   iz čega dobivamo $a^2 \geqslant 2$, odnosno, $|a| \geqslant 2$, pri čemu jednakost vrijedi ako su sve nultočke jednake nuli, no, to je jasno nemoguće, dakle $|a|>2$.

8. Uvrstite $a=6x, b=3x, c=-2x$ i usporedite vodeće članove. — link na rješenje IMO 2004.

9. IMC 2017.

13.2. C3: Kombinatorika na ploči - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Svaki pravac dijeli ploču na dva dijela s parnim brojem polja. Svaki domino koji stavimo čuva parnost polja na svakom od 2 dijela osim ako ga pravac siječe => svaki pravac siječe paran broj domina. Ima 18 domina (9 parova) i 10 pravaca iz čeg očito slijedi da neki pravac ne siječe nijedan domino.

2. Ako su m i n parni, ploču podijelimo na 2x2 kvadrate i svakog obojimo jednom bojom. Pretp. da je m neparan. Tada mora postojati niz od neparno mnogo uzatopnih polja iste boje A u prvom retku. Jednostavno zaključimo da su polje ispod najljevijeg (X) i polje ispod najdesnijeg u nizu (Y) također boje A, zatim promatramo ona polja između X i Y te za njih učinimo isto što i za gornji red. Doći će se ili do niza od jednog polja što nam daje kontradikciju ili do zadnjeg retka (i tu ćemo dobiti kontradikciju).

3. Analiziramo sve moguće uvjete širenja korova i zaključimo da se opseg svih polja u korovu ne može povećati što nam daje da je nemoguće n<8, a za n=8 primjer je (1, 6), (1, 8), (1, 10) i svih pet (i, i) polja.

4. Roger na početku postavi kraljeve u sva bijela polja istog retka. Svaki kralj je u jednom od pedeset 2 x 100 pravokutnika. U svakom potezu Roger postigne sljedeće: pomakne onog topa koji se nađe u istom pravokutniku kao top tako da stavi kralja u isti stupac i onemogući topu prelazak preko reda u kojem je kralj (ako već nije u istom stupcu) pomakne barem 1 kralja u sljedeći red, a niti jednog natrag, te drži sve kraljeve u istom ili dva susjedna retka.

5. 6 nije savršen (invarijanta je ostatak sume pri djeljenju s 3), a 512 jest. Dokažemo indukcijom po eksponentu da se ploča može bez jednog polja opločiti L-trominima (pomoćna tvrdnja) zatim primjetimo da je odabir svih tromina koje pokrivaju sve osim jednog polja ekvivalentan smanjivanju broja tog polja za 1 što nam je dovoljno da zaključimo da je 2^n savršen za svaki n Dokaz pomoćne tvrdnje: Baza je očita, a korak dokažemo tako da prvo podijelimo ploču stranice $2^(n + 1)$ na četiri ploče stranice 2^n koje prema pretpostavci indukcije možemo opločiti bez onog polja najbližeg sredini. Učinimo to za 3 ploče i stavimo jedan tromino koji nam upravo prekriva ta 3 polja koja ostanu prazna. Osim toga, ostane nam još jedan kvadrat koji po pretpostavci možemo opločiti bez bilo kojeg polja. Rotiramo ploču i uočimo da i nju tada možemo opločiti bez bilo kojeg polja.

6. Dokažemo da u 3 reda možemo prekriti 6 plavih polja (očito je ako neki redak ima 3 plava polja, a i ako nema takvog retka jer tada barem 3 imaju 2 plava polja) i to je dovoljno da pokažemo da je uvijek moguće za 9 plavih polja. Za 10 kontraprimjer je (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1) te dijagonala (i, i).

7. Obojimo ploču u 3 boje tako da svaka 3 uzastopna u istom retku/stupcu budu različitih boja. U svakom potezu će se dvjema bojama broj žetona smanjiti za 1, a trećoj povećati za 1 => ako su na početku iste parnosti, onda tako i ostaju te je nemoguće postići (1, 0, 0). To se dogodi ako je polje u kutu ili u sredini. Ako je na rubu, ali ne u kutu, onda je moguće postići da jedan žeton ostane na ploči.

8. Izvor.

9. Obojimo ploču u 32 boje tako da je iz svakog polja moguće skočiti u polje druge boje (to je moguće za 2x4 ploču, uzorak se ponavlja). Tako će Jimmy poslije svakog Rbertovog poteza pomaknuti skakača u drugo polje odgovarajuće boje i sigurno neće ostati bez poteza. Budući da ima paran broj polja, nakon 32. Jimmyjevog poteza (ili) prije Robert gubi.

10. Šahovski obojimo ploču tako da su kutovi crni. Nije teško dokazati da je pločica koja odgovara opisu upravo ona koja u kutovima ima sva crna polja. Jedino takve ploče imaju više crnih nego bijelih polja što znači da mora postojati jedna takva (jer i početna ploča ima više crnih nego bijelih polja).

11. Promatrajući broj polja ploče (mod 4) dobijemo da broj pločica koje koristimo mora biti neparan. Obojimo ploču tako da su redci indeksa 1 mod 4 i 2 mod 4 crni, a ostali bijeli. Ploča ima paran broj crnih i paran broj bijelih polja, a svaka stepenica pokriva neparan broj crnih i neparan broj bijelih polja, stoga je broj potrebnih stepenica paran => kontradikcija.

12. Obojimo ploču prvo šahovski, zatim označimo polja prvog i zadnjeg retka s A, a ostala polja s B. Iz A moramo skočiti u B, budući da trebamo posjetiti onoliko A polja koliko i B polja, iz B bi trebali uvijek skočiti u A. Ali ako uvijek skačemo iz A u B i iz B u A, a nikad iz B u B, nikad nećemo moći skočiti na crno A ili bijelo B ako smo počeli na bijelom A (ili obrnuto). Nemoguće je.

13. Izvor. Zadatak 4.5.

14. Odaberemo par redaka, pretpostavimo da možemo opisanom transformacijom postići što želimo te uočimo sljedeću invarijantu: svaka dva retka moraju biti ili ista ili suprotna (nije teško za raspisati). Ako su svi retci na početku isti, lako se dobije da je minimalno 2n-2 (2n ukupno) crnih. Ako postoje neka dva suprotna, onda ta dva zajedno imaju n crnih polja, a ostali su ili svi isti s min jednim crnim poljem ili opet postoje dva suprotna, pa ukupno ima barem 2n crnih (2n-2) dodanih polja. Slučaj s najmanje crnih polja je onaj u kojem jedan redak (npr. najdonji) ima n-1 crnih polja, a ostali imaju jedno crno (npr. najljevije).

15. Izvor.

13.3. G3: Inverzija - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Poznata nam je činjenica da ako imamo Γ i ω kružnice takve da ω dira Γ iznutra u točki T i ako je AB tetiva kružnice Γ koja dira ω u točki P, onda pravac TP raspolavlja luk AB kružnice Γ (onaj koji ne sadrži ω).

   Ako primijenimo tu lemmu na ovaj zadatak, možemo dobiti dva "pravca TP" koji se sijeku u polovištu luka i onda bi htjeli pokazati da pravac PQ također raspolavlja luk. Inverzija iz polovišta luka koja fiksira kružnice ujedno i zamijeni točke P i Q, odnonosno, pravac PQ ostane fiksan pod tom inverzijom pa i on sam mora prolaziti kroz polovište luka.

2. Državno 2018. 4. razred

3. HMO 2017. prvi dan

4. HMO 2018. drugi dan

5. Pod inverzijom opisanom u hintu, točke P i Q ostaju fiksne, a H se šalje u nožište visine (označimo s D). Htjeli bi pokazati kako su točke P, Q, D i A konciklične jer bi to značilo da su P, Q i H kolinearne.

   Uočimo da ako je M polovište stranice BC, imamo $\angle MDA = \angle MPA = \angle MQA = 90°$ (zbog tangentnosti) pa imamo da su točke M, D, P, A i Q konciklične čime smo gotovi.

6. IMO 2010. 2.

7. IMO SL 2005. G5

13.4. N3: TB funkcijske i polinomi - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

Zadaci

1. Pretpostavimo da takav polinmom postoji. Tada imamo $|a-b| \mid |b-c| \mid |c-a| \mid |a-b|$, odnosno $|a-b| = |b-c| = |c-a|$. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \geqslant b$, $a \geqslant c$. Međutim, tada je $b = c$. Dakle, kontradikcija.
2. IMO SL 2013, N1
3. BMO SL 2017
4. IMO 2006 P5
5. BMO SL 2018
6. IMO SL 2004
7. IMO SL 2016, N6
8. USA TSTST 2018

13.5. X3: Pripisana kružnica - Krunoslav Ivanović

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Zadatak je direktna posljedica Lemme 4 iz prvog dijela i Lemme 2 iz drugog dijela (točka J je zapravo centar pripisane, središte pripisane, polovište visine i dialište upisane su kolinearni pa su onda i središte pripisane, nožište visine i preslika centra upisane preko dirališta).
2. Državno 2017. 2. razred
3. USAMO 1999.
4. IMO Shortlist 2012. G1
5. USA TST 2011.
6. IMO 2006. 1.
7. HMO 2011. IMO test
8. USAMO 2001.

13.6. Y3: Komba - metode bijekcije/injekcije - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na hintove.

Više o bijekcijama, rješenja ovih i više drugih zadataka možete naći na sljedećem linku.

14. Poglavlje

Rješenja za četvrtu grupu

14.1. A4: Mixing variables - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja zadataka i više detalja o teoremima možete naći na sljedećem linku.

14.2. C4: Teorija grafova - Petar Orlić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. K_5 ima 5 vrhova i 10 bridova pa po lemmi 2 ne može biti planaran ($10 \nleqslant 9$).
2. Bipartitan graf nema ciklusa neparne duljine, pa tako ni ciklusa duljine tri pa možemo primijeniti lemmu 3 uz $g = 4$, odnosno, imamo
$$e \leqslant 2v - 4.$$
Kako $K_{3,3}$ ima 6 vrhova i 9 bridova te $9 \nleqslant 8$, $K_{3,3}$ nije planaran.
3. Kao i u prethodnom zadatku, imamo da je $e \leqslant 2v - 4$, a prema lemmi o rukovanju, kada bi svaki vrh imao stupanj barem 4, vrijedilo bi $2e \geqslant 4v$ te dobivamo kontradikiju.
4. Iz lemme 2 se lagano pokaže da u planarnom grafu, postoji vrh stupnja 5 ili manje. Dokaz provodimo indukcijom, “maknemo" taj vrh, prema pretpostavci možemo obojati preostali graf, a kako je vrh povezan samo s pet drugih, postoji boja kojom nije obojan niti jedan njegov susjed te ga u tu boju i obojimo.
5. Htjeli bi pokazati da za svaki $W \subseteq X$, vrijedi $|W| \leqslant |N(W)|$. Uzmimo neki proizvoljan $W \subseteq X$. Broj edgeva između W i Y jednak je $|W| \cdot k$. U drugu ruku, neka su $v_1, v_2, \ldots, v_{|N(W)|}$ vrhovi iz Y koji su u $N(W)$. Onda je broj edgeva jednak
$$|W| \cdot k = E = d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{|N(W)|}) \leqslant k \cdot |N(W)| \implies |W| \leqslant |N(W)|$$
te smo prema Hallovom teoremu gotovi.
6. Kanada 2006.

14.3. N4: TB funkcijske - Marin Varivoda

Link na zadatke. Link na hintove.

1. EMC Seniori 2017.
2. IMO SL 2007.
3. IMO 2010.
4. USA TSTST 2013.
5. Link na rješenje.
6. Poljska 2017.
7. Link na rješenje.
8. USA TST 2010.
9. Link na rješenje.
10. Bugarska 2003.
11. MEMO 2019.

14.4. G4: Pisane kružnice - Krunoslav Ivanović

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Nakon što uvedemo točku G, uočavamo da je $KGEA$ tetivni četverokut te da se presjek te kružnice s upisanom kružnicom nalazi na pravcu AD' (označimo tu točku s H). Također, uočavamo da su F, D i G kolinearne. Isto tako, vidimo da su točke D, G, D', H konciklične. Također, ako je J nožište visine iz A na $\overline{BC}$, imamo da su $AJDH$ i $JKGD$ tetivni četverokuti. Sve ove činjenice se lako pokazuju angle chasingom, potencijom točke i iskorištavanjem činjenica o konfiguraciji s upisanom kružnicom, a kada imamo sve navedeno, lako se pokaže da su A, J i K kolinearne.

2. Prije svega, uočimo da prethodni zadatak analogno vrijedi i ako promatramo $D'E' \cap DF$. Tvrdimo da su ta točka i točka iz prethodnog zadatka upravo točke presjeka danih kružnica s visinom. Naravno, to se lagano pokaže. Recimo da je $G = DE \cap AK$. Imamo $\angle GEC = \angle DEC = 90° - \frac{\gamma}{2}$, a također, imamo $\angle GC_0C = 90° - \frac{\gamma}{2}$ iz čega jasno imamo tetivnost točaka C, E, C_0 i G. Analogno se pokaže i za drugu kružnicu. Kada to imamo, raspišemo potenciju točke K_0 na dane kružnice, i iskoristimo Talesov teorem (s paralelama) uz činjenicu da G i G' $(D'E' \cap DF)$ leže na pravcima $D'F'$ i $D'E'$ koji su paralelni s BI i CI. Dobivamo da K_0 ima jednaku potenciju na obe kružnice, dakle, leži na radikalnoj osi.

3. IMO 2013.

4. Dakle, koristimo oznake X i Y iz hintova, s O ćemo označiti presjek simetrale kuta iz A s opisanom kružnicom, odnosno, polovište luka. Poznata je lemma da ako produžimo OX i OY i presječemo s kružnicom u točkama Z i W, imamo da je $OX \cdot OZ = OY \cdot OW = OB^2$ (ako nije očito, probajte dokazati homotetijom, ili inverzijom iz O radijusa OB).

   Također, polovište dužine XY je očito na radikalnoj osi jer je XY zajednička tangenta na kružnice. Također, iz svojstava mixtillinearne kružnice, imamo da je $XI \perp CI$ i $YI \perp BI$.

   Sada bi htjeli preformulirati zadatak u kontekstu trokuta $\triangle BIC$. Imamo trokut BIC i središte njegove opisane kružnice, točku O. X i Y su točke na BC takve da je $XI \perp CI$ i $YI \perp BI$. Neka je M polovište dužine XY. Ako je K nožište visine iz I na BC, a K_0 polovište KI, trebamo pokazati da su K_0, M i O kolinearne. Ako produljimo pravce IX i IY do presjeka s kružnicom (u Z i W, redom), zbog okomitosti, imamo da su B, O i W te C, O i Z kolinearne. Ako sa M' označimo polovište dužine ZW, a sa V poloište dužine BC, promatrajući homotetiju iz M koja šalje trokut IKM u trokut IVM', zaključak trivijalno slijedi (polovište se slika u polovište, a O je polovište od VM' zbog simetrije).

5. IOM 2019.

14.5. X4: Kombinatorna geometrija - Marin Varivoda

Link na zadatke. Link na hintove.

1. SL 2003.
2. RMM 2008.
3. HMO 2016.
4. EGMO 2017.
5. SL 2008.

14.6. Y4: Funkcijske jednažbe $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. IMO 1977, P6
2. Ako je $|S|$ paran ili je S beskonačan, neka su $a_1 < a_2 < \ldots$ elementi S. Stavimo $g(a_{2k-1}) = a_{2k}$, $g(a_{2k}) = f(a_{2k-1})$, $g(f(a_{2k-1}) = a_{2k}, \ldots$.

   Općenito, stavimo $g(f^j(a_{2k-1})) = f^j(a_{2k})$ i $g(f^j(a_{2k})) = f^{j+1}(a_{2k-1})$. Lako se provjeri da je g dobro definirana i da je $g \circ g = f$.

   Ako je $|S|$ neparan, pretpostavimo da postoji g za koju je $g \circ g = f$. Tada je i g injekcija. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementi skupa $\mathbb{N} \setminus g(\mathbb{N})$. No tada je S upravo jednak $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_k)\}$, no tada S ima parno mnogo elemenata, što je kontradikcija.
3. BMO 2009 P4
4. IMO SL 2010, A6
5. IMO SL 2013, A5

Dio IV

Natjecanja

15. Poglavlje

Natjecanje ELMO

Na ovom kampu se održalo četvrto izdanje natjecanja ELMO (ekstra loša matematička olimpijada) koji su sastavili Ivan Novak i Borna Šimić. Svih pet zadataka su sami smislili, a natjecanje su pisali učenici srednjih škola.

15.1. Zadaci

1. Za konačan skup prirodnih brojeva S kažemo da je *konj* ako za svaka dva različita elementa iz S vrijedi da njihova razlika dijeli zbroj svih elemenata iz S. Za konačan skup prirodnih brojeva S kažemo da je *jednorog* ako ima barem 3 elementa i ako za svaka dva različita elementa iz S vrijedi da njihov zbroj dijeli zbroj svih elemenata iz S.

a) Dokaži da za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ postoji konj s n elemenata.

b) Dokaži da jednorozi ne postoje.

2. Neka je n prirodan broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1).$$

Dokaži da vrijedi

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant n(n-1)(n-2).$$

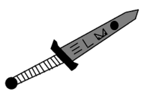
3. Neka je n prirodan broj. Odredi sve prirodne brojeve m takve da postoji permutacija $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ niza $(1, 2, \ldots, n)$ takva da

$$m \mid k + p_k$$

za sve $k \in \{1, 2, \ldots n\}$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$, O središte njegove opisane kružnice te M polovište stranice $\overline{BC}$. Dokaži da se srednjica i simetrala vanjskog kuta pri vrhu A **ne** sijeku na opisanoj kružnici trokuta AOM.

5. Promotrimo 2019×2019 tablicu sastavljenu od 2019^2 jediničnih kvadratića. Neka od njenih polja su označena, i vrijedi da za svako označeno polje postoji točno jedno označeno polje različito od njega koje je u istom retku ili stupcu. Koji je najveći mogući broj označenih polja u tablici?



15.2. Rješenja

Zadatak 1. (Ivan Novak)
Za konačan skup prirodnih brojeva S kažemo da je *konj* ako razlika svaka dva različita elementa iz S dijeli zbroj svih elemenata iz S. Za konačan skup prirodnih brojeva s barem 3 elementa kažemo da je *jednorog* ako zbroj svaka dva različita elementa iz S dijeli zbroj svih elemenata iz S.

a) Dokaži da za svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ postoji konj s n elemenata.

b) Dokaži da jednorozi ne postoje.

Rješenje.

a) Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Promotrimo skup

$$\{((2019n)! - n) + 1, ((2019n)! - n) + 3, \ldots, ((2019n)! - n) + (2n - 1)\}.$$

Razlika svaka dva elementa je manja ili jednaka $2n$, a zbroj svih elemenata iznosi

$$n \cdot (2019n)! - n^2 + (1 + 3 + \ldots + 2n - 1) = n \cdot (2019n)! - n^2 + n^2 = n \cdot (2019n)!,$$

što je djeljivo sa svakim brojem manjim ili jednakim $2n$, pa je dani skup uistinu konj.

b) Promotrimo bilo koji konačan skup S s barem 3 elementa. Neka je X suma svih elemenata skupa i neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ svi elementi skupa (uz $n \geqslant 3$).

Tada vrijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$X > a_n + a_{n-1} > \ldots > a_n + a_2 > a_n + a_1 > a_n > \frac{X}{n}.$$

Iz toga slijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$n > \frac{X}{a_n + a_1} > \frac{X}{a_n + a_2} > \ldots > \frac{X}{a_n + a_{n-1}} > 1.$$

Strogo između 1 i n nalazi se $n - 2$ prirodnih brojeva, pa za neki $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ broj $\frac{X}{a_n + a_i}$ nije prirodan, dakle $a_n + a_i$ ne dijeli $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, dakle S nije jednorog.

Dakle, jednorozi ne postoje.

Zadatak 2. (Ivan Sinčić)

Neka je n prirodan broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1).$$

Dokaži da vrijedi

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant n(n-1)(n-2).$$

Prvo rješenje. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1)$$

Odredi najveću moguću vrijednost izraza:

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$$

Rješenje Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|x_1| \leqslant |x_2| \leqslant \ldots \leqslant |x_n|$. Vrijedi:

$$n(n-1) - x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \overset{\text{CSB}}{\geqslant} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^2}{n-1} = \frac{x_n^2}{n-1}$$

iz čega slijedi:

$$n(n-1) \geqslant \frac{n}{n-1} x_n^2 \quad \Rightarrow \quad n-1 \geqslant |x_n| \geqslant x_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Sada za svaki indeks i vrijedi:

$$(n-1-x_i)(x_i+1)^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \; (n-3)x_i^2 + (2n-3)x_i + n - 1 \geqslant x_i^3$$

te sumirajući po svim $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dobivamo:

$$n(n-1)(n-2) \geqslant x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$$

Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$

Drugo rješenje.

Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi i uz sljedeće slabije uvjete:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant n(n-1).$$

Uzmimo proizvoljan niz $(x_k)_{k \leqslant n}$ koji zadovoljava ove uvjete. Neka je k broj nenegativnih članova niza i bez smanjenja općenitosti neka je to prvih k članova, i označimo $y_j = -x_{k+j}$ za $j \in \{1, \ldots, n-k\}$. Tada su uvjeti sljedeći:

$$x_1 + \ldots + x_k \leqslant y_1 + \ldots + y_{n-k}$$
$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 + y_1^2 + \ldots + y_{n-k}^2 \leqslant n(n-1).$$

Želimo maksimizirati izraz

$$F(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}) = x_1^3 + \ldots + x_k^3 - (y_1^3 + \ldots + y_{n-k}^3)$$

uz dane uvjete. Dokažimo sada

$$F(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}) \leqslant F(\sqrt{x_1^2 + x_k^2}, x_2, x_3, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_{n-k})$$

i da se uvjeti čuvaju. Naime, vrijedi

$$(x_1 + x_k)^2 \geqslant x_1^2 + x_k^2 \implies \sqrt{x_1^2 + x_k^2} \leqslant x_1 + x_k,$$

pa se prvi uvjet čuva. S druge strane, drugi uvjet se čuva jer lijeva strana ostaje ista nakon transformacije. Sada još treba dokazati

$$x_1^3+x_k^3 \leqslant (x_1^2+x_k^2)^{3/2} \iff x_1^6+x_k^6+2x_1^3x_k^3 \leqslant x_1^6+x_k^6+3x_1^2x_k^4+3x_1^4x_k^2 \iff x_1^2x_k^2((x_1-x_k)^2+2(x_1^2+x_k^2) \geqslant 0,$$

što očito vrijedi. Ponavljanjem ove transformacije $k-1$ puta dokazali smo da se maksimum postiže kad je $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0$ i x_1 najveći mogući. Dokažimo sada

$$F(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{n-k}) \leqslant F\left(x_1,\ldots,x_k,\frac{y_1+\ldots+y_{n-k}}{n-k},\ldots,\frac{y_1+\ldots+y_{n-k}}{n-k}\right),$$

i da se uvjeti čuvaju. Prvi uvjet ostaje potpuno isti, a drugi se čuva zbog nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine. Sada još treba dokazati

$$(n-k)\left(\frac{y_1+\ldots+y_{n-k}}{n-k}\right)^3 \leqslant y_1^3+\ldots+y_{n-k}^3,$$

što slijedi iz nejednakosti između kubne i aritmetičke sredine. Dakle, maksimum se postiže za n-torku koja ima jedan pozitivan član x, $k-1$ članova jednakih 0 i $n-k$ jednakih članova y koji zadovoljavaju $x \leqslant (n-k)y$ i $x^2+(n-k)y^2 \leqslant n(n-1)$. Sada treba maksimizirati izraz

$$x^3-(n-k)y^3$$

uz dane uvjete. Promotrimo par (x,y) koji zadovoljava uvjete. Primijetimo da tada i $(x,\frac{x}{n-k})$ zadovoljava uvjete i da je za taj par izraz koji želimo maksimizirati veći ili jednak izrazu za (x,y). Izraz je tada jednak

$$x^3\left(1-\frac{1}{(n-k)^2}\right)=x^3\frac{(n-k-1)(n-k+1)}{(n-k)^2},$$

uz uvjet $x^2(\frac{n-k+1}{n-k}) \leqslant n(n-1)$. Maksimum se postiže kad je x maksimalan, odnosno za $x=\sqrt{\frac{(n-k)n(n-1)}{(n-k+1)}}$, i iznosi

$$\frac{(n-k-1)n^{3/2}(n-1)^{3/2}}{(n-k+1)^{1/2}(n-k)^{1/2}} \leqslant n(n-1)(n-2).$$

Dakle, dokazali smo početnu nejednakost.

Zadatak 3. (Borna Šimić)

Neka je n prirodan broj. Odredi sve prirodne brojeve m takve da postoji permutacija $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ niza $(1, 2, \ldots, n)$ takva da

$$m \mid k + p_k$$

za sve $k \in \{1, 2, \ldots n\}$.

Rješenje.

Pokažimo da svi m koji dijele m ili dijele $m + 1$ zadovoljavaju uvjete zadatka. To vrijedi jer možemo uzeti $p_k = n - k$ za $k < n$ i $p_n = n$ u prvom slučaju, a $p_k = n - k + 1$ za sve k u drugom slučaju.
Pokažimo da su ovo ujedno i jedina rješenja. Pretpostavimo suprotno, da $n \not\equiv 0, -1 \pmod{m}$.
Vrijedi $p_k \equiv -k \pmod{m}$, pa ako označimo sa S_k skup brojeva manjih ili jednakih n koji pri dijeljenju sa m daju ostatak k, zbog uvjeta mora vrijediti $|S_k| = |S_{m-k}|$.
Međutim, vrijedi

$$|S_1| = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1 > \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = |S_{m-1}|$$

što je kontradikcija.

Zadatak 4. (Borna Šimić)

Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$, O središte njegove opisane kružnice te M polovište stranice $\overline{BC}$. Dokaži da se srednjica i vanjska simetrala kuta pri vrhu A **ne** sijeku na kružnici opisanoj trokutu AOM.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da se T, sjecište srednjice i vanjske simetrale, nalazi na kružnici opisanoj AOM.
Neka je K sjecište spomenute srednjice sa stranicom $\overline{AB}$, a L sjecište unutarnje simetrale kuta pri vrhu A i stranice $\overline{BC}$.
Vrijedi:

$$|\angle ATK| = 90^\circ - |\angle ALB| = \beta + \frac{\alpha}{2} - 90^\circ$$

Također, imamo:

$$|\angle AOM| = |\angle AOB| + |\angle BOM| = 2\gamma + \alpha = 360^\circ - 2\beta - \alpha$$

Prema tome, vrijedi $|\angle ATK| = (180^\circ - |\angle AOM|)/2$ pa je TK unutarnja simetrala $\angle ATM$ i mora sjeći (zbog $T \in AOM$) luk AM koji ne sadrži T u njegovom polovištu, a kako siječe dužinu $\overline{AM}$ u njenom, mora biti $TK \perp AM$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da $|AB| \neq |AC|$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, pretpostavimo suprotno i uvedimo točku T. Neka je T' sjecište BC i AT. T je očito polovište $\overline{AT'}$. Neka su E, F sjecišta OM i kružnice opisane trokutu ABC tako da su E, A sa iste strane BC. Tada je E na vanjskoj, a F na unutarnjoj simetrali pri vrhu A. O je polovište $\overline{EF}$, AF je okomito na TE a TM je okomito EF pa je kružnica opisana trokutu AOM Feuerbachova kružnica trokuta $T'EF$. Posebno, T je polovište $\overline{T'E}$ pa vrijedi $A = E$, što je kontradikcija sa $|AB| \neq |AC|$.

Zadatak 5. (Ivan Novak)

Promotrimo 2019×2019 tablicu sastavljenu od 2019^2 jediničnih kvadratića. Neka od njenih polja su označena, i vrijedi da za svako označeno polje postoji točno jedno označeno polje koje je u istom retku ili stupcu. Koji je najveći mogući broj označenih polja?

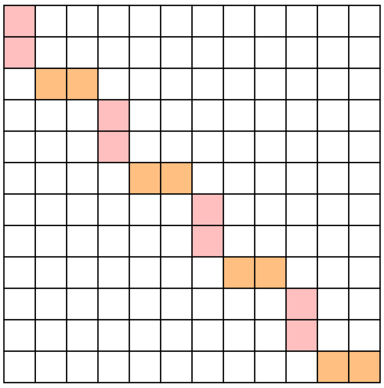
Rješenje.

Neka je A broj redaka s dva označena polja i B broj redaka s jednim označenim poljem. Tada je $2A + B$ broj označenih polja.

Za svako polje iz retka s jednim označenim poljem postoji jedinstveno polje iz nekog drugog retka s jednim označenim poljem koje je u istom stupcu s njim. Time smo podijelili polja iz retka s jednim označenim poljem u $B/2$ parova, i svakom paru pridružili jedinstveni stupac s dva označena polja. Dakle, broj stupaca s dva označena polja je $B/2$. Analogno, broj stupaca s jednim označenim poljem je $2A$.

Sada je još potrebno maksimizirati zbroj $2A + B$, uz uvjete $A + B \leqslant 2019$ i $2A + B/2 \leqslant 2019$. Zbrajanjem tih dvaju nejednakosti dobijemo $(2A + B) \cdot 3/2 \leqslant 4038 \implies 2A + B \leqslant \frac{2019 \cdot 4}{3} = 2692$.

Dokažimo još da se 2692 postiže. Promotrimo sljedeće označavanje (skica za 12×12 tablicu):



Označimo retke i stupce brojevima od 1 do 2019. Ako je oznaka retka $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki $k \geqslant 0$, tada u tom retku označimo polje u $3k + 1$-tom stupcu. Ako je oznaka retka $3k$ za neki $k > 0$, tada u tom retku označimo polja u stupcima $3k$ i $3k - 1$.

Lako se vidi da je konstrukcija valjana tj. da za svako označeno polje postoji jedinstveno drugo označeno polje u istom retku ili stupcu. Broj redaka s dva označena polja je $2019/3$, a broj redaka s jednim označenim poljem je $2 \cdot 2019/3$, pa je broj označenih polja upravo $4 \cdot 2019/3$.

16. Poglavlje

Natjecanje reli

Reli je natjecanje koje se već godinama tradicionalno održava na kampovima. U pravilu, natjecanje je timskog oblika i traje četiri sata. Učenici u timovima od četiri do pet osoba rješavaju zadatke iz različitih područja, poredane po težini.

Slika 16.1: Atmosfera s natjecanja

16.1. Zadaci

Algebra

A1. Daniel je otišao u Plodine. Jednu trećinu novaca potrošio je na gel za tuširanje. Od novaca koji su mu preostali, 30 kuna platio je pile. Od polovine preostalih novaca kupio je sok. Potom je Marinu kupio sladoled za 10 kuna i preostalih 7 kuna dao Kruni da završi reli umjesto njega. Koliko je kuna Daniel na početku imao?

A2. Dokaži da iz jednakosti

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$$

slijedi $abc = 0$.

A3. Definirajmo N kao

$$N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{99\ldots99}_{321 \text{ znamenka}}.$$

Nađi zbroj znamenaka broja N.

A4. Odredi najveći prirodan broj k takav da ako za neka 3 prirodna broja a, b, c vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca + 2019$, tada nužno vrijedi i

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \geqslant k.$$

A5. Neka su a, b i c različiti cijeli brojevi takvi da je $ab + bc + ca \geqslant 3k^2 - 1$ gdje je k prirodan broj. Dokaži da je

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3(abc + 3k).$$

A6. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je:

$$2f(1 - x) + 1 = xf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

A7. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a i b takve da je $ab \geqslant 1$ vrijedi

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

Kombinatorika

C1. Koliko ima peteroznamenkastih palindroma? (palindromi su brojevi koji se čitaju isto slijeva nadesno kao i zdesna nalijevo)

C2. Na šahovskom turniru je 127 osoba. Neke od tih osoba su međusobno igrale partije. Dokaži da je na kraju turnira paran broj ljudi koji su igrali neparan broj partija.

C3. S koliko nula završava broj (2020!)?

C4. Neka su $P_1, P_2, \ldots, P_{2019}$ različite točke u ravnini takve da nikoje tri ne leže na istom pravcu. Spojimo dužine P_1P_2, $P_2P_3, \ldots$, $P_{2018}P_{2019}, P_{2019}P_1$. Možemo li povući pravac takav da siječe svaku od navedenih dužina u njezinoj unutrašnjosti?

C5. Dana je ploča 10×10 i 25 pločica dimenzija 1×4. Manje pločice se smiju rotirati, ali ne smiju se kidati na manje pločice. Na koliko načina možemo prekriti veliku ploču manjim pločicama, tako da se nikoje dvije pločice ne preklapaju i da su sva polja velike ploče prekrivena točno jednom?

C6. Dokaži da za svaki deseteročlani skup dvoznamenkastih brojeva postoje dva disjunktna podskupa tog skupa (disjunktni skupovi nemaju presjek) takva da je suma elemenata u jednom od tih podskupova jednaka sumi elemenata u drugom podskupu.

C7. Na šahovskom turniru sa n igrača, svatko je igrao sa svakime točno jednom te pobjeda nosi 1 bod, izjednačen rezultat $1/2$ boda, a gubitak 0 bodova. Dokažite da ako je barem $3/4$ igara završilo neriješeno da onda postoje dva igrača koji imaju isti broj bodova.

Geometrija

G1. Dan je četverokut $ABCD$. Ako su P, Q, R i S polovišta stranica AB, BC, CD i DA redom, dokaži da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

G2. Radijusi dviju koncentričnih kružnica odnose se u omjeru $1:3$. $\overline{AC}$ je promjer velike kružnice, $\overline{BC}$ tetiva velike kružnice koja je ujedno tangenta male kružnice i $|AB| = 12$. Koliki je radijus velike kružnice

G3. Visina i težišnica iz vrha A trokuta ABC dijeli kut $\angle A$ na tri jednaka dijela. Odredite kuteve tog trokuta.

G4. Dan je jednakostraničan trokuta $\triangle ABC$. Neka je P proizvoljna točka na kraćem luku BC opisane kružnice $\triangle ABC$. Dokaži da je $PA = PB + PC$.

G5. Unutar trokuta ABC uzeta je točka P tako da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CBP$. Nožišta okomica povučenih iz točke P na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su točke M i N. Dokažite da je $|DM| = |DN|$, gdje je D polovište stranice $\overline{AB}$.

G6. Dan je trokut ABC. Neka su P i Q točke na stranicama AB i AC, redom, takve da je $AP = AQ$. Neka su S i R točke na stranici BC takve da je S između B i R te vrijedi $\angle BPS = \angle PRS$ i $\angle CQR = \angle QSR$. Dokaži da su točke P, Q, R i S konciklične (to jest, leže na jednoj kružnici)

G7. Točke A, B, C, D i E leže na kružnici ω , a točka P leži izvan kružnice. Za te točke vrijedi:

i) pravci PB i PD su tangente na ω;

ii) točke P, A i C su kolinearne;

iii) $DE \parallel AC$.

Dokaži da pravac BE raspolavlja AC.

Teorija brojeva

N1. Koliko znamenaka ima broj $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

N2. Nađi sve cijele brojeve m i n takve da je $mn = 13(m+n)$.

N3. Koliko rješenja u skupu $\mathbb{N}$ ima jednadžba $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

N4. Dokaži da niti za jedan prirodni broj n brojevi $n+3$ i n^2+3n+3 ne mogu istovremeno biti kubovi nekih prirodnih brojeva.

N5. Neka su x i y cijeli brojevi i p prost broj za koje

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$$

Nađi sve takve trojke (x, y, p).

N6. Definirajmo niz (a_n) rekurzivno s $a_1 = 2, a_2 = 5$ i

$$a_{n+1} = (2-n^2)a_n + (2+n^2)a_{n-1}, \text{ za } n \geqslant 2.$$

Postoje li indeksi p, q, r takvi da je $a_p \cdot a_q = a_r$?

N7. Dani su prirodni brojevi a i d. Dokaži da niz

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$$

sadrži beskonačno mnogo članova koji imaju isti skup prostih faktora.

16.2. Rješenja

Algebra - rješenja

A1. Označimo početni broj kuna sa x. Zadatak kaže da je

$$\frac{\frac{2x}{3} - 30}{2} - 17 = 0$$

što trivijalno riješimo i dobijemo $x = 96$.

A2. Za početak, uočimo da je

$$1 = 1^2 = (a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{=1} + 2ab + 2bc + 2ac$$

pa je jasno

$$ab + bc + ac = 0.$$

Sada iskoristimo "poznati identitet"

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

te uvrštavanjem poznatih vrijednosti dobivamo

$$1 - 3abc = 1 \implies abc = 0$$

što smo trebali i pokazati.

A3. Uočimo da je

$$N = 10^1 - 1 + 10^2 - 1 + \cdots + 10^{321} - 1 = \underbrace{11\cdots11}_{318\text{ zn.}}1110 - 321 = \underbrace{11\cdots11}_{318\text{ zn.}}0789$$

pa je suma znamenaka broja N jednaka $318 \cdot 1 + 0 + 7 + 8 + 9 = 342$.

A4. Za početak, uočimo da uvjet govori da je

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 4038.$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $a \geqslant b \geqslant c$. Tada znamo da postoje brojevi x i y, koji su ili prirodni, ili nula takvi da je

$$a = b + x,\ b = c + y \implies a = c + x + y$$

Sada dani uvjet izgleda ovako

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 > 4038 \implies x^2 + xy + y^2 > 2019.$$

Ako napravimo obrat po kontrapoziciji zadatka, sada bi trebalo pronaći maksimalni prirodni broj k takav da

$$2x + 2y < k \implies x^2 + xy + y^2 \leqslant 2019.$$

Ako je $k \leqslant 90$, imamo da je $2x + 2y < k \leqslant 90$ pa je $x + y \leqslant 44$. Ništa ne gubimo ako pretpostavimo da je $x + y$ baš jednak 44 jer izraz na desnoj strani samo može rasti za veće x i y. Ako je $x + y = 44$, imamo $y = 44 - x$ pa je desna strana implikacije jednaka

$$x^2 + x(44-x) + (44-x)^2 \leqslant 2019 \iff x^2 - 44x - 83 \leqslant 0 \iff x(x-44) - 83 \leqslant 0$$

što jasno vrijedi za sve cijele brojeve x takve da $0 \leqslant x \leqslant 44$.

Kada bi k bio veći, onda bi mogli uzeti $x = 45$ i $y = 0$ pa bi imali $2x+2y = 90 < k'$, no, $45^2 = 2025 > 2019$.

A5. Zadatak je ekvivalentan s

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 9k.$$

Koristimo poznatu faktorizaciju i imamo da trebamo dokazati

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant 9k.$$

Za početak, BSO imamo $a \geqslant b \geqslant c$, a kako su a, b i c različiti cijeli brojevi, imamo $a - b \geqslant 1, b - c \geqslant 1, a - c \geqslant 2$. Iz toga slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 3.$$

Da dovršimo, treba nam $a + b + c \geqslant 3k$, no

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab + bc + ca)\\ &\geqslant 3 + 3(3k^2 - 1) = 9k^2\end{aligned}$$

što dovršava dokaz.

A6. Označimo s $P(x)$ uvrštavanje vrijenodsti x u jednadžbu. Iz $P(1-x)$, imamo

$$2f(1-(1-x)) + 1 = (1-x)f(1-x) \implies 2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x).$$

Iz $P(x)$ vrlo jednostavno možemo dobiti da je

$$f(1-x) = \frac{xf(x) - 1}{2}$$

pa ako to ubacimo u ono što smo prvo dobili, imamo

$$2f(x) + 1 = (1-x)\frac{xf(x) - 1}{2}.$$

Sada riješimo ovo za $f(x)$ i dobijemo da je

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 + x + 4}$$

te sada lagano provjerimo da je to uistinu i rješenje.

A7. Uočimo da iz $A-G$ nejednakosti vrijedi

$$\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geqslant 2.$$

Također iz $A-G$a, imamo da je

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geqslant 2\frac{\sqrt{ab}}{2}\geqslant 1.$$

Kada to povežemo zajedno, imamo

$$a+2b+\frac{2}{a+1}\geqslant 2+\frac{a}{2}+2b-\frac{1}{2}\geqslant\frac{3b}{2}+\frac{5}{2}$$

te analogno vrijedi i za drugu zagradu. Naravno, trivijalnom primjenom $A-G$ nejednakosti imamo

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\geqslant 2$$

pa kada to sve zajedno spojimo imamo

$$\begin{aligned}\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)&\geqslant\\ \left(\frac{5}{2}+\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3b}{2}\right)&=\\ \frac{25}{2}+\frac{15}{4}(a+b)+\frac{9}{4}ab&\geqslant 16\end{aligned}$$

gdje zadnji red slijedi iz uvjeta i prethodno dokazane lemme.

Kombinatorika - rješenja

C1. Uvjet da bi peteroznamenkasti broj bio palindrom je da je oblika $\overline{abcba}$. Načina za odabrati znamenku a ima devet, a znamenke b i c deset pa je ukupan broj načina jednak $9\cdot 10\cdot 10=900$.

C2. Na početku je broj igrača neparan i nitko se nije rukovao ni s kime, dakle, parno je mnogo ljudi koji su igrali neparan broj partija. Kada se dogodi neka partija, imamo tri mogućnosti. Ako su oba igrača odigrala do tada neparan broj partija, nakon njihove partije, oba će odigrati paran broj partija pa se ukupan broj osoba koje tražimo smanjio za dva. Ako je jedan igrač odigrao paran broj partija, a drugi neparan, ukupan broj osoba koje tražimo se nije mijenjao. Naposljetku, ako su oba igrača do tada odigrala paran broj partija, ukupan broj osoba koje tražimo se povećao za dva.

Kao što vidimo, neovisno o kojem je slučaju riječ, ukupan broj traženih igrača se mijenja za 2 svakim korakom, odnosno, ne mijenja se početna parnost. Kako je na početku parno mnogo osoba, onda će i na kraju biti parno mnogo osoba.

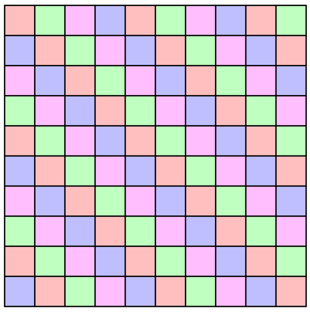
C3. Uočimo da između brojeva 1 i 2020 ima puno više brojeva djeljivih s 2 nego onih djeljivih s 5 pa je dovoljno pronaći koliko puta se pojavljuje broj 5 u rastavu broja 2020! na proste faktore. Označimo taj broj sa v_5. Taj broj možemo dobiti kao

$$v_5=\left\lfloor\frac{2020}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2020}{25}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2020}{125}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2020}{625}\right\rfloor=503$$

gdje $\lfloor\cdot\rfloor$ predstavlja funkciju najveće cijelo.

C4. Pretpostavimo suprotno, odnosno, da postoji neka konfiguracija 2019 točaka u ravnini pri čemu nikoje tri nisu na istome pravcu i vrijedi uvjet zadatka. Recimo da se točka P_1 nalazi s lijeve strane pravca. Zbog uvjeta, točka P_2 će se morati nalaziti s desne strane pravca, točka P_3 s lijeve strane pravca i tako dalje. Naposljetku, s lijeve strane će se nalaziti točke s neparnimi indeksom, a s desne strane točke s parnim indeksom. Kako su točke P_1 i P_{2019} obje s lijeve strane pravca, onda je i dužina $\overline{P_1P_{2019}}$ s lijeve strane pravca što znači da je nemoguće da je pravac siječe u njenoj unutrašnjosti, odnosno, dobili smo kontradikciju te traženi pravac ne postoji.

C5.



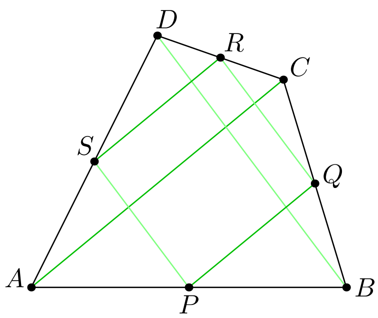
Obojimo ploču u četiri boje kao na slici. Uočimo da neovisno o tome gdje i kako stavimo 1×4 pločicu, pokriva četiri polja različitih boja. Kada bi se cijela ploča mogla pokriti sa 1×4 pločicama, onda svaka pokrivala točno jedno polje svake boje pa bi svake boja imala 25 polja, no ružičastih polja ima 24, dakle, kontradikcija.

C6. Podskupova desetoročlanog skupa, različitih od samog skupa i praznog skupa ima $2^{10} - 2 = 1022$. Potencijalne sume za podskupove su $10, 11, \cdots, 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 = 855$ što je jasno, manje od 1022, dakle, postoje dva podskupa s istom sumom elemenata. Ako su ta dva skupa disjunktna, gotovi smo. Ako nisu, iz oba skupa izbacimo njihov presjek te sada imamo dva disjunkntna skupa s istom sumom što smo i tražili.

C7. Neka igrač i ima a_i pobjeda, b_i izjednačenih, c_i izgubljenih partija. Uočimo da je score igrača i upravo $a_i + \frac{b_i}{2}$, no uočimo da ako definiramo novi sustav bodovanja gdje je pobjeda bod, gubitak -1 bod, izjednačeno ništa, igrači koji su prije imali isti score opet imaju isti score. E sad, ako imamo $n = 2k$ igrača, a scoreovi su cijeli brojevi, BSO možemo reći da imamo k pozitivnih scoreova, dakle, ostvareno je barem $1 + \cdots + k$ pobjeda i ukupno je $\binom{n}{2}$ utakmica i sad pogledamo omjer tih dvaju veličina i to je to. Ako je $n = 2k + 1$, radimo analognu stvar.

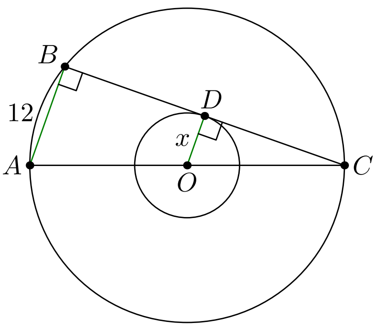
Geometrija - rješenja

G1.



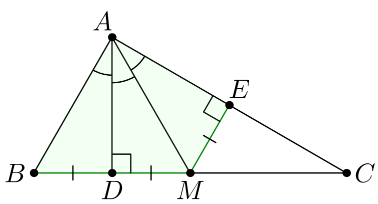
Kako su P, Q, R i S polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$, dužine $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ i $\overline{SP}$ su, jasno, srednjice u trokutima $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ i $\triangle DAB$ iz čega trivijalno slijedi zaključak.

G2.



Označimo radijus male kružnice s x. Prema uvjetu znamo da je radijus velike kružnice $3x$. Prema Talesovom poučku, znamo da je kut $\angle ABC$ pravi, a zbog toga što je $\overline{BC}$ tangenta na malu kružnicu, kut $\angle ODC$ je pravi. Kako je O polovište dužine $\overline{AC}$ i $OD \parallel AB$, imamo da je $\overline{OD}$ srednjica trokuta $\triangle ABC$ pa je $x = |OD| = |AB|/2 = 6$, dakle, radijus velike kružnice je 18.

G3.

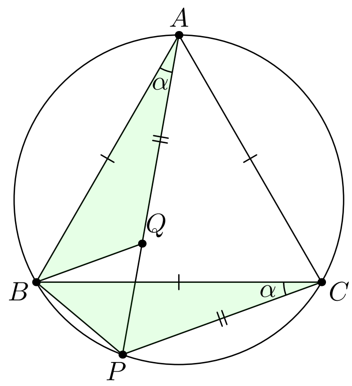


Neka je D nožište visine iz A, M polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz M na $\overline{AC}$. Iz uvjeta zadatka znamo da su kutevi $\angle BAD$, $\angle DAM$ i $\angle MAE$ jednaki što nam daje

$$\triangle ABD \cong \triangle ADM \cong \triangle MAE.$$

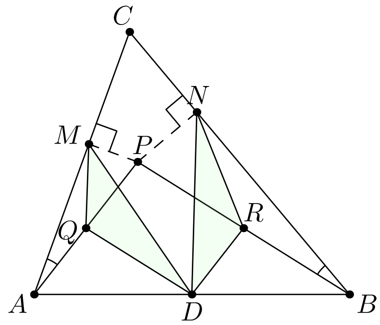
Sada znamo da je $MC = BM = 2ME$ iz čega promatranjem trokuta $\triangle MEC$ jednostavno slijedi da su kutevi trokuta $30°, 60°$ i $90°$.

G4.



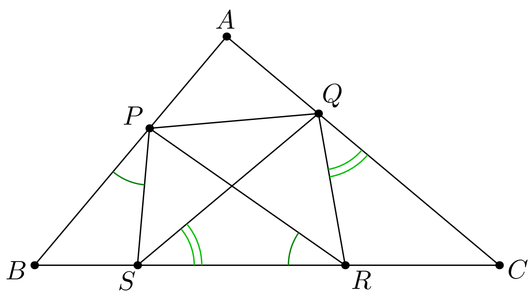
Neka je Q točka na AP takva da je $AQ = CP$. Zbog tetivnosti četverokuta $ABPC$ i definicije točaka, imamo $\triangle AQB \cong \triangle BPC$ pa je $BQ = BP$. Laganim angle chaseom dobijemo da je $\angle QBP = 60°$ pa je $PQ = PB$ te je onda $AP = AQ + QP = CP + BP$.

G5.



Neka je Q polovište dužine $\overline{AP}$ te R polovište dužine $\overline{PB}$. Vrijedi $\angle PQM = 2\angle PAM = 2\angle PAC = 2\angle CBP = 2\angle NBP = \angle NRP$, jer je Q središte kružnice opisane trokutu PAM i R središte opisane od NBP. Četverokut $PQDR$ je paralelogram, jer su $\overline{RD}$ i $\overline{QD}$ srednjice trokuta ABP. Zato je $\angle DQP = \angle PRD$, a zbog toga također $\angle DQM = \angle NRD$. Nadalje je $|QM| = |QP| = |DR|$ i $|RN| = |RP| = |DQ|$ pa su trokuti MQD i DRN sukladni te je $|DM| = |DN|$.

G6. Slijedimo skicu

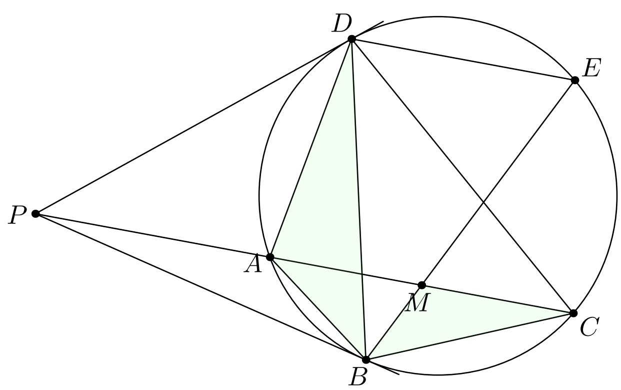


Prema obratu poučka o kutu između tetive i tangente vidimo da su pravci BP, odnosno CQ tangente na kružnicu (SPR) odnosno (SQR). Zbog toga su i AP i AQ tangente na te kružnice, pa iz činjenice da je $AP = AQ$, znamo da je

$$\text{Pow}(A, (SPR)) = \text{Pow}(A, (SQR)).$$

Kada bi (SPR) i (SQR) bile različite kružnice, njihova radikalna os bi bio pravac SR odnosno BC pa bi zbog toga točka A, jer ima jednaku potenciju na obje kružnice morala ležati na njihovoj radikalnoj osi, odnosno, na BC što je besmisleno, dakle, kružnice (SPR) i (SQR) su jedna te ista čime je pokazana tražena tetivnost.

G7. Slijedimo skicu.



Za početak, uočimo da je $\angle DBA = \angle CBE$ jer su to obodni kutevi nad lukovima određeni paralelnim tetivama (dakle, ti lukovi su jednake duljine). Nadalje, s obzirom da je $\angle PDA = \angle PCD$, trokuti $\triangle PDA$ i $\triangle PCD$ su slični pa je $AD/DC = PA/PD$. Analogno, $AB/BC = PA/PC$, a (PD = PC), tj. $DA \cdot BC = AB \cdot CD = BD \cdot AC/2$ gdje zadnja jednakost slijedi iz Ptolomejevog teorema.

Neka se BE i AC sijeku u M. Onda su trokuti $\triangle BDA$ i $\triangle BMC$ slični, dakle, $DA \cdot BC = BD \cdot CM$. Iz ovoga i prethodnih jednakosti možemo dobiti $CM = AC/2$.

Teorija brojeva - rješenja

N1. Uočimo da je ovo zapravo

$$2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

što ima 111 znamenaka.

N2. Uočimo da je ovo ekvivalentno s

$$(m-13)(n-13) = 169$$

što ima rješenja

$$(m,n) \in \{(-156,12),(0,0),(12,-156),(14,182),(26,26),(182,14)\}.$$

N3. Jasno je da i x i y moraju biti oblika 2^a3^b. Neka je $x = 2^a3^b$, a $y = 2^c3^d$. Onda je dana jednadžba zapravo

$$(2^a3^b)^2 \cdot (2^c3^d)^3 = 2^{12}3^{12} \implies 2^{2a+3c}3^{2b+3d} = 2^{12}3^{12}$$

Zanimaju nas rješenja za a,b,c,d iz skupa $\mathbb{N}_0$. Broj rješenja jednadžbe $2x+3y = 12$ u skupu $\mathbb{N}_0$ je 3 ($(6,0),(3,2),(0,4)$) pa je ukupan broj rješenja za a,b,c,d jednak 9 (rješenja za a i c možemo odabrati na 3 načina, a isto tako i za b i d, dakle, 9 načina ukupno).

N4. Ako je $n+3 = a^3$, a $n^2+3n+3 = b^3$, onda je

$$a^3b^3 = (n+3)(n^2+3n+3) = n^3+6n^2+12+9 = (n+2)^3+1,$$

a jasno je da ne postoje dva uzastopna kuba osim 0 i 1, dakle, ne postoji n takav da je uvjet zadovoljen.

N5. Za početak, uočimo da je desna strana jednadžbe djeljiva s 3 pa time i ljieva, odnosno,

$$3 \mid x^2 + p^2y^2.$$

Promatranjem ostataka koje kvadrati daju pri dijeljenju s 3 vidimo da su to 0 i 1 pa vidimo da je nužno da $3 \mid x^2$ i $3 \mid p^2y^2$ iz čega dobivamo da $3 \mid x$ i $3 \mid py$, odakle dobivamo da 9 dijeli lijevu stranu jednadžbe pa time i desnu, odnosno, $p = 3$. Sada kada imamo da je $p = 3$, preostaje još samo riješiti jednadžbu

$$x^2 - 3xy + 9y^2 - 36 = 0$$

što je rutinski posao te iz nje dobivamo rješenja:

$$(x,y) \in \{(-6,0),(-6,-2),(0,-2),(0,2),(6,0),(6,2)\}.$$

N6. Ključna opservacija u zadatku je da svaki član niza daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Naime, uočimo da to vrijedi za a_1 i a_2. Sada to induktivno pokazujemo. Imamo bazu za $n = 1$ i $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake nekom k. Onda je

$$a_{k+1} = 2a_k - k^2a_k + 2a_{k-1} + k^2a_{k-1} \equiv 4 - 2k^2 + 4 + 2k^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

Kada bi postojali p,q,r takvi da ona tvrdnja vrijedi, imali bi

$$2 \equiv a_r = a_pa_q \equiv 1 \pmod 3$$

što je kontradikcija, dakle, takvi p,q,r ne postoje.

N7. Možemo pretpostaviti da je $\gcd(a,d) = 1, d \geqslant 1, a > d$. Kako je $a^{\varphi(d)} \equiv 1 \pmod d$, slijedi da je $a^{k\varphi(d)} \equiv 1 \pmod d$ za sve cijele brojeve k. Dakle, za sve $k \geqslant 1$,

$$a^{k\varphi(d)} = 1 + m_kd,$$

za neki prirodni broj m_k. Ako uzmemo $n_k = am_k, k \geqslant 1$, onda

$$a + n_kd = a^{k\varphi(d)+1}$$

pa su prosti faktori broja $a + n_kd$ upravo oni broja a.

Dio V

Završne riječi

17. Poglavlje

Završno

17.1. Zahvale

Organizacija Zimske škole matematike je nešto što ne bi bilo moguće bez volje, truda i nesebičnosti svih onih koji su nam pomogli da je i ove godine uspješno održimo. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su nam pri tom pothvatu pomogli i izašli nam u susret.

Zahvaljujemo Učeničkom domu Ogulin i Osnovnoj školi Ivane Brlić-Mažuranić koji su vjerni domaćini Zimske škole već dugi niz godina. Također, zahvaljujemo našem sponzoru Krašu na slatkišima te Ministarstvu znanosti i obrazovanja što su prepoznali naš rad te nam omogućili ne samo održavanje Zimske škole, već i da bude sufinancirana mnogim nadarenim učenicima.

Zahvaljujemo, naravno, i svim mentorima čiji je volonterski rad omogućio mladim matematičarima da prodube svoja matematička znanja, bolje se pripreme za natjecanja, dobiju savjete od bivših natjecatelja i budu u društvu ostalih zainteresiranih učenika iz cijele države i šire.

Za kraj, zahvaljujemo svima ostalima koji su nam na bilo kakav način pomogli i bili dio ovog projekta, a posebno svim vrijednim učenicima koji su sudjelovali u Zimskoj školi i njihovim roditeljima koji su ih u tome podržali. Hvala vam na odazivu i nadamo se da smo vas potakli na daljnji rad i bavljenje matematikom, jer upravo to jedan je od naših glavnih ciljeva.

Nadamo se da ćemo surađivati i dogodine!

17.2. Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Možete nas kontaktirati i osobno:

Lucija Relić
Predsjednica Udruge
e-mail: lucijarelic7@gmail.com
mob: +385 95 845 2964

Josip Pupić
Dopredsjednik Udruge
e-mail: josip.pupic@mnm.hr
mob: +385 99 2710 996

Ivan Miošić
Tajnik Udruge
e-mail: ivan.miosic@hotmail.com
mob: +385 91 300 5829

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.