Ljetni kamp mladih matematičara 2021.

OGULIN, 15. - 29. 8. 2021.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI

Marin Getaldić

Sadržaj

1 Predgovor **6**

2 Uvod **7**
2.1 O udruzi . . . 7
2.2 Povijest kampova . . . 8
2.3 Ovaj kamp . . . 8
2.4 Aktivnosti na kampu . . . 9
2.5 Popis mentora . . . 9
2.6 O predavanjima . . . 9

I Zadaci s predavanja na prvom terminu **10**

3 Zadaci za prvu grupu **11**
3.1 A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić . . . 11
3.2 C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić . . . 14
3.3 C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić . . . 16
3.4 G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač . . . 20
3.5 N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić . . . 22

4 Zadaci za drugu grupu **24**
4.1 A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić . . . 24
4.2 C12: Indukcija - Ema Borevković . . . 28
4.3 C15: Invarijante - Maja Drmač . . . 29
4.4 G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić . . . 31
4.5 N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić . . . 33

5 Zadaci za treću grupu **35**
5.1 A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić . . . 35
5.2 C13: Teorija grafova - Nika Utrobičić . . . 37
5.3 C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović . . . 39
5.4 G13: Simedijane - Krešimir Nežmah . . . 41
5.5 N13: Orderi - Paula Vidas . . . 43

6 Zadaci za olimpijsku grupu **45**
6.1 M1: Ciklusi + optimizacija - Ivan Novak . . . 45
6.2 M3: Vjerovanje u više noma - Ivan Sinčić . . . 46
6.3 M4: Ekstremističke ideje - Ivan Novak . . . 48
6.4 M5: Individualna simulacija - MEMO mentori . . . 49
6.5 M7: Ekipna simulacija - MEMO mentori . . . 50
6.6 M8: Konstrukcije - Ivan Novak . . . 51
6.7 M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 53
6.8 M10: Grafovi - Krešimir Nežmah . . . 54
6.9 M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić . . . 56

II Zadaci s predavanja na drugom terminu **57**

7 Zadaci za prvu grupu **58**
7.1 A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek . . . 58

7.2 C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat . . . 61
7.3 C25: Logika i dokazi - Matko Šimić . . . 63
7.4 G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić . . . 67
7.5 N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić . . . 69

8 Zadaci za drugu grupu **70**
8.1 A22: Nejednakosti - Paula Horvat . . . 70
8.2 C22: Indukcija - Laura Horvat . . . 73
8.3 C26: Invarijante - David Mikulćić . . . 75
8.4 G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić . . . 77
8.5 N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek . . . 79

9 Zadaci za treću grupu **81**
9.1 A23: Funkcijske - Mateo Dujić . . . 81
9.2 C23: Teorija grafova - Mateo Dujić . . . 83
9.3 C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj . . . 85
9.4 G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad . . . 87
9.5 N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat . . . 88

10 Zadaci za četvrtu grupu **91**
10.1 A24: Nestandardna algebra - David Mikulčić . . . 91
10.2 C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj . . . 93
10.3 C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković . . . 95
10.4 N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad . . . 98

III Hintovi s predavanja na prvom terminu **100**

11 Hintovi za prvu grupu **101**
11.1 A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić . . . 101
11.2 C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić . . . 102
11.3 C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić . . . 103
11.4 G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač . . . 104
11.5 N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić . . . 105

12 Hintovi za drugu grupu **106**
12.1 A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić . . . 106
12.2 C12: Indukcija - Ema Borevković . . . 108
12.3 C15: Invarijante - Maja Drmač . . . 109
12.4 G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić . . . 110
12.5 N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić . . . 111

13 Hintovi za treću grupu **112**
13.1 A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić . . . 112
13.2 C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović . . . 113
13.3 G13: Simedijane - Krešimir Nežmah . . . 114
13.4 N13: Orderi - Paula Vidas . . . 115

14 Hintovi za olimpijsku grupu **116**
14.1 M8: Konstrukcije - Ivan Novak . . . 116
14.2 M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 117
14.3 M10: Grafovi - Krešimir Nežmah . . . 118
14.4 M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić . . . 119

IV Hintovi s predavanja na drugom terminu **120**

15 Hintovi za prvu grupu **121**
15.1 A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek . . . 121
15.2 C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat . . . 123
15.3 C25: Logika i dokazi - Matko Šimić . . . 124
15.4 G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić . . . 125

15.5 N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić . . . 126

16 Hintovi za drugu grupu **127**
16.1 A22: Nejednakosti - Paula Horvat . . . 127
16.2 C22: Indukcija - Laura Horvat . . . 128
16.3 C26: Invarijante - David Mikulčić . . . 129
16.4 G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić . . . 130
16.5 N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek . . . 131

17 Hintovi za treću grupu **132**
17.1 A23: Funkcijske - Mateo Dujić . . . 132
17.2 C23: Teorija grafova - Mateo Dujić . . . 133
17.3 C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj . . . 134
17.4 G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad . . . 135
17.5 N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat . . . 136

18 Hintovi za četvrtu grupu **137**
18.1 C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj . . . 137
18.2 C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković . . . 138
18.3 N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad . . . 139

V Rješenja s predavanja na prvom terminu **140**

19 Rješenja za prvu grupu **141**
19.1 A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić . . . 141
19.2 C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić . . . 143
19.3 C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić . . . 145
19.4 G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač . . . 147
19.5 N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić . . . 149

20 Rješenja za drugu grupu **152**
20.1 A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić . . . 152
20.2 C12: Indukcija - Ema Borevković . . . 159
20.3 C15: Invarijante - Maja Drmač . . . 160
20.4 G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić . . . 162
20.5 N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić . . . 164

21 Rješenja za treću grupu **167**
21.1 A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić . . . 167
21.2 C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović . . . 169
21.3 G13: Simedijane - Krešimir Nežmah . . . 172
21.4 N13: Orderi - Paula Vidas . . . 173

22 Rješenja za olimpijsku grupu **174**
22.1 M3: Vjerovanje u više noma - Ivan Sinčić . . . 174
22.2 M8: Konstrukcije - Ivan Novak . . . 175
22.3 M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 176
22.4 M10: Grafovi - Krešimir Nežmah . . . 177
22.5 M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić . . . 180

VI Rješenja s predavanja na drugom terminu **181**

23 Rješenja za prvu grupu **182**
23.1 A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek . . . 182
23.2 C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat . . . 185
23.3 C25: Logika i dokazi - Matko Šimić . . . 186
23.4 G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić . . . 188
23.5 N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić . . . 190

24 Rješenja za drugu grupu **194**

24.1 A22: Nejednakosti - Paula Horvat . . . 194
24.2 C22: Indukcija - Laura Horvat . . . 197
24.3 C26: Invarijante - David Mikulćić . . . 198
24.4 G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić . . . 200
24.5 N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek . . . 202

25 Rješenja za treću grupu **205**
25.1 A23: Funkcijske - Mateo Dujić . . . 205
25.2 C23: Teorija grafova - Mateo Dujić . . . 206
25.3 C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj . . . 207
25.4 G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad . . . 208
25.5 N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat . . . 209

26 Rješenja za četvrtu grupu **210**
26.1 C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj . . . 210
26.2 C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković . . . 211
26.3 N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad . . . 213

VII Projekti na Ljetnom kampu **215**

27 Projekti **216**
27.1 O projektima . . . 216
27.2 Popis projekata . . . 216
27.2.1 Brojenje . . . 216
27.2.2 Brojanja i prebrojavanja . . . 216
27.2.3 Rangiranje internetskih stranica . . . 217
27.2.4 Teorija grafova . . . 217
27.2.5 Vjerojatnosna metoda . . . 218
27.2.6 Transformacije ravnine . . . 218
27.2.7 Primjene modularne aritmetike . . . 219
27.2.8 Neuronske mreže . . . 219
27.2.9 Matematika i glazba . . . 219
27.2.10 Voting theory . . . 220

VIII Završne riječi **222**

28 Završno **223**
28.1 Zahvale . . . 223
28.2 Kontakt . . . 224

1. Poglavlje

Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći gotovo sva predavanja koja su se održala na Ljetnom kampu mladih nadarenih matematičara 2021. godine, zajedno s većinom hintovima i rješenjima.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi. Trenutno je ovo jedan od najvećih natjecateljskih materijala na hrvatskom jeziku, pa se nadamo da će učenicima pružiti dovoljno zanimljivih tema na odabir.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bi zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na sljedeću e-mail adresu: mnm@mnm.hr

Autori,

13. studenog 2021.

2. Poglavlje

Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.

Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tijekom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkom PMF-u, gostovanjima udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp je najveća i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarama koje nastoje ostvariti sve njihove matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te se udruga može pohvaliti time da je ovo izdanje kampa, iako nešto drugačije s obzirom na okolnosti, dovedeno na visoku razinu. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Jedan od ciljeva kampa jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampu možemo sresti i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

Slika 2.2: Ljetni kamp 2015.

Slika 2.3: Ljetni kamp 2017.

2.3. Ovaj kamp

Ovo je bio 13. ljetni kamp, a zbog sigurnosti svih polaznika, održan je u dva termina, 15.-22. i 22.-29. kolovoza. Oba su održana u Ogulinu. Učenici i mentori bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin u kojem su se odvijali i projekti, a predavanja su se održavala u Pučkom otvorenom učilištu Ogulin.

Slika 2.4: Učenički dom Ogulin [1]

[1] Izvor fotografije: OG portal

2.4. Aktivnosti na kampu

Glavne su aktivnosti na kampu jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata, te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici slušaju detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici se uz ručak imaju priliku odmoriti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analize određenih tema vezanih uz natjecateljsku, primjenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik kampa na početku kampa odabire jedan od ponuđenih projekata iz raznovrsnih područja matematike te radi na njemu do kraja kampa učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije iz odabrane teme.

Jedno popodne, umjesto projekata, učenici su se okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", dok su ozbiljnijim natjecateljima koji su se pripremali za MEMO pripremljene simulacije.

Nakon projekata slijedi kratak odmor, zatim večera nakon koje se odvijaju raznovrsne aktivnosti, kao što su kviz i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Nakon organiziranih i zajedničkih aktivnosti polaznici imaju slobodno vrijeme tijekom kojeg se mogu družiti igrajući razne društvene igre kao što su misije, Blotto, mafija, bela, pantomima, alias i kockice.

2.5. Popis mentora

Luka Banović
Ema Borevković
Mislav Brnetić
Luka Bulić Bračulj
Vedran Cifrek
Patricija Dovijanić
Maja Drmač
Mateo Dujić
Laura Horvat
Paula Horvat
Luka Kraljević
Matej Ljubičić
David Mikulčić
Krešimir Nežmah
Ivan Novak
Lucija Relić
Ivan Sinčić
Borna Šimić
Matko Šimić
Andrija Tomorad
Nika Utrobičić
Marin Varivoda
Paula Vidas

2.6. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u tri do četiri skupine ovisno o njihovoj starosti te dosadašnjim postignućima.

Među grupama posebno se ističu grupe kojima pripadaju sudionici međunarodnih natjecanja. Predavanja za te grupe namijenjena su članovima hrvatske MEMO i ekipe kojima je kamp bila zadnja priprema za natjecanje koje se održavalo tijekom drugog temrina Kampa pa zbog toga imaju predavanja i prijepodne i poslijepodne, a osim predavanja imaju i simulacije. Svi ostali polaznici kampa imaju predavanja isključivo prijepodne.

Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Dio I

Zadaci s predavanja na prvom terminu

3. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

3.1. A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Monom je algebarski izraz, umnožak nekog broja varijabli koje predstavljaju brojeve ili druge algebarske izraze, npr. x, y^2, $2c^3$, $5ab^3c^2$.
Polinomi su algebarski izrazi koji se dobivaju zbrajanjem više monoma.
Stupanj monoma je zbroj eksponenata svih varijabli koje sadrži, a **stupanj polinoma** je stupanj monoma s najvećim stupnjem.
Faktorizirati polinom znači napisati ga u obliku umnoška polinoma manjih stupnjeva i nužno je za rješavanje brojnih zadataka iz algebre i teorije brojeva.

Polinom se faktorizira grupiranjem članova tako da se iz njih može izlučiti zajednički faktor ili da se na njih može primijeniti neka od poznatih formula. Cilj svakog koraka faktorizacije je grupirati članove polinoma, tako da kada se svaka skupina faktorizira posebno, sve sadrže neki polinom kao zajednički faktor koji se tada izluči iz svih skupina. U sljedećem koraku treba faktorizirati jedan od polinoma manjih stupnjeva čiji je umnožak početni polinom.
Primjer: $a^3 + 2b^3 + a^2b + 2ab^2 = a^3 + a^2b + 2ab^2 + 2b^3 = a^2 \cdot (a + b) + 2b^2 \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (a^2 + 2b^2)$.

Ponekad polinom nije moguće faktorizirati samo pomoću članova koji su već napisati nego trebati pametno odabrati novi član koji ćemo dodati i oduzeti na polinom tako da se ne promijeni vrijednost polinoma. To nam omogućuje da dodani član grupiramo s postojećima i tako faktoriziramo izraz.
Primjer: $a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a \cdot (a + b) - b \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (a - b)$.

Također, u nekim zadacima su zadani posebni uvjeti koji vrijede za brojeve u polinomu te se oni mogu koristiti u faktorizaciji izraza tako da se dio uvjeta izjednači s ostatkom i onda se neki članovi polinoma grupiraju tako da se kod izlučivanja u zagradi dobije dio uvjeta i onda se on može zamijeniti s ostatkom uvjeta.

Npr. ako je uvjet $a + b + c = 0$, u faktorizaciji polinoma se može grupiranjem dobiti $a + b + c$ i zamijeniti s 0, a i zamijeniti s $-b - c$ ili $b + c$ zamijeniti s $-a$.

Popis korisnih formula i tvrdnji:

- Razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$
- Kvadrat zbroja: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Kvadrat razlike: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Razlika kubova: $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
- Zbroj kubova: $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
- Kub zbroja$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- Kub razlike $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Kvadratni polinom oblika $ax^2 + bx + c$ gdje su a, b i c realni brojevi može se faktorizirati u obliku $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ gdje je
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
i
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- Kvadrat trinoma $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Kub trinoma $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
- $a^n - b^n$ gdje je n prirodan broj se može faktonizirati kao $(a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^n + b^n$ gdje je n neparan prirodan broj se može faktonizirati kao $(a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Lakši zadaci

1. Faktoriziraj $a^3 + a^2 + a + 1$
2. Faktoriziraj $ac + bd + ad + bc$
3. Faktoriziraj $a^2 + 10ab - 70b - 49$
4. Faktoriziraj $a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$
5. Faktoriziraj $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd$
6. Faktoriziraj $x^2 + 3x + 2$
7. Faktoriziraj $a^2 + 5a + 6$
8. Faktoriziraj $6a^2 + 7a + 2$
9. Faktoriziraj $2x^4 - 17x^2 - 9$
10. Faktorziraj $(x^2 - 2x - 1)^2 - 4$
11. Faktoriziraj $a^5 + 2a^3 - 8a^2 - 16$
12. Faktoriziraj $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$
13. Faktoriziraj $8a^3b^3 + 36a^2b^2c + 54abc^2 + 27c^3$
14. Zapiši kao cijeli broj $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$
15. Faktoriziraj $a^4 + a^2 + 1$

Umjereni zadaci

16. Dokaži da iz $(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2 = (a+b-2c)^2 + (a-2b+c)^2 + (b+c-2a)^2$ slijedi $a = b = c$.
17. Dokaži da je $a^4 + 4b^4$ složen broj ako su $a,\ b \in \mathbb{N}$ i $a,\ b \geqslant 2$.
18. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su
$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2-1) - y(y^2-1)}{x - y}$$
Odredi koji je broj veći, A ili B.
19. Dokaži ako za realne brojeve $a,\ b,\ c \neq 0$ takve da $a + b + c \neq 0$ vrijedi
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$
onda je zbroj neka dva od njih jednak nuli.
20. Dokaži da ako za $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ takve da $a + b + c = 0$ vrijedi $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
21. Pojednostavi $\dfrac{a^3}{(a-b)\cdot(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-c)\cdot(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-a)\cdot(c-b)}$.

22. Dokaži da za $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ takve da $a+b+c=0$ vrijedi $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.

23. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24$, pri čemu su $a,\ b,\ c$ realni brojevi, te odredi vrijednosti za koje se postiže.

24. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2a^2-2ab+b^2 &= a \\ 4a^2-5ab+2b^2 &= b \end{aligned}$$

u skupu realnih brojeva.

Teži zadaci

25. Dokaži da za $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ takve da $a+b+c=0$ vrijedi

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

26. Brojevi $a,\ b,\ c,\ d$ zadovoljavaju relaciju $a+b+c+d=0$. Neka je $S_1=ab+bc+cd$ i $S_2=ac+ad+bd$. Pokažite da je $5S_1+8S_2 \leqslant 0$.

27. Odredite sva pozitivna realna rješenja sustava

$$x^3+2y^2+\frac{1}{4z} = y^3+2z^2+\frac{1}{4x} = z^3+2x^2+\frac{1}{4y} = 1$$

28. Nađite sve realne brojeve C takve da postoje međusobno različiti realni brojevi x, y, z za koje je ispunjeno

$$x+\frac{y}{z}+\frac{z}{y} = y+\frac{x}{z}+\frac{z}{x} = z+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = C$$

3.2. C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Princip matematičke indukcije moćan je i elegantan alat za dokazivanje tvrdnji T_n koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj k pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $k+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi). Ako tvrdnju pokazujemo za sve prirodne brojeve, tada moramo provjeriti tvrdnju za $n = 1$, a onda pokazati da ako vrijedi za neki k, mora vrijediti i za $k+1$. Budući da smo na početku pokazali da tvrdnja vrijedi za 1, zbog indukcije vrijedi i za $1+1 = 2$ pa za $2+1 = 3$, $3+1 = 4$, itd. dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.

Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama, zamislimo da smo ih složili u red i cilj nam je sve ih srušiti jednim potezom. Za početak provjerimo možemo li direktno srušiti prvu pločicu (baza indukcije). Zatim pretpostavimo da se neka domina uspjela srušiti (pretpostavka) i provjerimo izaziva li to rušenje i sljedeće domine u redu (korak indukcije). Ako rušenje proizvoljne domine znači rušenje i sljedeće, po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da će se tada srušiti sve domine. Naime, uspješno smo srušili prvu dominu, a budući da rušenje neke domine izaziva rušenje i sljedeće znamo da će se srušiti i druga. Međutim, tada znamo da će se srušiti i treća i tako dalje.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije. Ponekad nam je potrebno više informacija (pretpostavki) da bismo pokazali korak indukcije pa u drugom koraku indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za sve $n \leqslant k$ za neki proizvoljan k prirodan broj.

Ilustrirajmo princip matematičke indukcije na primjeru koji nam je svima očit. Uočite gdje koristimo pretpostavku indukcije. Možete li dati još neke primjere tvrdnji koje vrijede za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$? Znate li ih dokazati?

Primjer 3.2.1. *Dokažite da za sve priprodne brojeve n vrijedi $n+1 > n$.*

Rješenje. Tvrdnju ćemo pokazati koristeći matematičku indukciju.

baza Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Očito je $n+1 = 1+1 = 2 > 1$ pa smo pokazali bazu indukcije.

pretp. Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $k+1 > k$.

korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $(k+1)+1 > k+1$, odnosno da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Iz pretpostavke direktno imamo:

$$\begin{aligned} n+1 &> n && /+1 \\ n+2 &> n+1 \\ (n+1)+1 &> n+1 \end{aligned}$$

Time smo pokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. □

Zagrijavanje

1. Dokažite da je n-ti neparan broj jednak $2n-1$ za svaki prirodan broj n.

2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n broj $n(n+1)$ paran.
3. Dokažite da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.
4. Dokažite da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. Dokažite da je $n! > 2^n$ za $n \geqslant 4$.
6. Koliko je
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}?$$

Zadaci

7. Dokažite indukcijom da je broj dijagonala konveksnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.
8. U ravnini je dano n pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Dokažite da se ti pravci sijeku u ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
9. U ravnini je nacrtano n kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da se svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.
10. Dokažite da je broj nepraznih podskupova n-članog skupa jednak $2^n - 1$, za svaki prirodan broj n.
11. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn ili više.
12. Dokažite da se, za proizvoljan prirodni broj n, bilo koja $2^n \times 2^n$ šahovska ploča s uklonjenim jednim poljem može popločati koristeći samo tromine oblika slova L s jednakim krakovima (dakle kao 2×2 kvadrat, samo bez jednog vrha).
13. Koji je najveći broj područja na koje se ravnina može razdijeliti pomoću n pravaca?
14. Dokažite da se za svaki $n \geqslant 6$ kvadrat može razrezati na n manjih kvadrata.
15. *Hanojski tornjevi* se sastoje od tri tornja, gdje se na prvom nalazi n diskova naslaganih jedan na drugi po veličini tako da je na dnu najveći, a na vrhu najmanji disk. Cilj je prebaciti diskove s prvog na treći toranj tako da u svakom potezu pomičemo *samo jedan* disk te da ni u jednom trenutku ne smijemo staviti veći disk na manji (dakle, na kraju završavamo s identičnim poretkom diskova kao na početku). Dokaži da se to može ostvariti u $2^n - 1$ poteza.
16. Promotrimo 3^n novčića identičnog izgleda, pri čemu je n prirodan broj. Znamo da je jedan od tih novčića teži od ostalih, a ostali su jednake težine. Na raspolaganju imamo balansirajuću vagu pomoću koje možemo uspoređivati težine dvije hrpe novčića (vaga nam samo daje informaciju koja hrpa je teža). Dokažite da je moguće otkriti teži novčić pomoću n vaganja.
17. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n+1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.
18. Je li moguće poredati brojeve $1, 2, \ldots, 2020^{2020}$ u niz tako da se prosjek bilo koja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih?

3.3. C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćete se s osnovama matematičke logike i raznim načinima dokazivanja. Za razliku od predavanja koje ste do sada slušali, bit će nam bitnije kako i na koji način nešto dokazati nego ono što zapravo dokazujemo. Svrha predavanja je da usvojite kako pristupiti zadacima prikladnim načinima dokazivanja te da te dokaze provede pravilno, tj. da znate kada ste nešto zaista dokazali.

Započet ćemo s nekoliko uvodnih zadataka. Svaki ćemo dokazati na različit način. Pokušajte uočiti razlike među dokazima i razmisliti s kojima ste se već susreli. Sve načine dokazivanja uskoro ćemo detaljnije obraditi zajedno s nekim logičkim pojmovima.

1. Dokažite da je zbroj parnog i neparnog broja neparan broj.

   Rješenje. Zapišemo li parni broj u obliku $2k$, a neparni u obliku $2l+1$ za neke prirodne brojeve k i l, tvrdnja slijedi direktno jer je $2k+2l+1 = 2(k+l)+1$, što je neparan broj.

2. Dokažite da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1.

   Rješenje. Podijelimo zadatak slučajeve ovisno o parnosti. Ako je početni prirodni broj n paran, možemo ga zapisati u obliku $2k$ za neki prirodan broj k. Sada zbog $(2k)^2 = 4k^2$, pa je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0. Slično, ako je početni broj neparan, možemo ga zapisati u obliku $2k+1$ za neki k, pa zbog $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$, pa pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1.

3. Dokažite da ne vrijedi $x-y = y-x$, za cijele brojeve x i y.

   Rješenje. Dovoljno je pronaći neke x i y za koje tvrdnja ne vrijedi, npr. 2 i 7.

4. Ivica je na izlet ponio izvjesnu svotu novaca. Za ulazak u muzej potrošio je $\frac{3}{7}$ukupne svote, za sok je dao $\frac{3}{5}$ ostatka, a zatim je za kupnju suvenira potrošio $\frac{3}{8}$ ostatka novca koji mu je preostao nakon kupnje muzejske ulaznice i soka. Koliko je kuna Ivica imao na početku izleta, ako mu je ostalo 8 kuna?

   Rješenje. Rješavanjem unatrag kao u zadacima iz nižih razreda dobijemo da je imao 56kn.

5. Dokažite Dirichletovo pravilo: ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

   Rješenje. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga.

6. Dokažite da vrijedi tvrdnja: ako je a^2 paran, onda je i a paran.

   Rješenje. Dokazat ćemo nešto drugačiju tvrdnju: ako je a neparan, tada je i a^2 neparan. Naime, ako je n neparan, vrijedi $a = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ za neki n, što je neparno. Ukoliko vrijedi ova tvrdnja, vrijedi i tvrdnja zadatka. Za sada razmislite zašto, a kasnije ćemo to detaljno objasniti.

Nakon uvodnih zadataka vidimo da se nekih metoda dokazivanja nije lako odmah sjetiti ili nije sasvim jasno zašto takvi dokazi vrijede. U tome će nam pomoći malo znanja iz logike. Nemojte da vas zabrine količina novih pojmova - njihova jedina svrha je da nam pomognu u razumijevanju nekih vrsta dokaza. Uostalom, s mnogima ste se već prije sreli iako možda niste bili toga svjesni. Nakon svakih nekoliko pojmova nalazi se izbor zadataka na kojima ćemo ih izvježbati.

Tvrdnja i negacija

Tvrdnja je neka izjava, rečenica, sud koja je ili istinita ili neistinita, npr. "Danas je subota", "Tri je paran broj", "Sunce sija i vjetar puše", "Svaki broj djeljiv s 10 završava nulom", "Dva je paran broj ili je prost", itd. Navedite još primjera!

Negacija tvrdnje je tvrdnja suprotna polaznoj - govore nam istu informaciju, ali jedna drugoj su značenjem suprotne jer istinita tvrdnja negacijom postaje neistinita, i obratno. Pokušajte negirati tj. zanijekati tvrdnje koje ste naveli kao primjere, npr. "Danas nije subota."

Pazite pritom što se događa s veznicima poput "i" i "ili" jer nije sasvim očito. Naime, negacija će "pretvoriti" ta dva veznika (ili bilo koje veznike koje nose isto značenje kao oni: npr. veznici "a" i "ali" i još neki veznici u jeziku logike imaju isto značenje kao veznik "i") u onaj suprotni, i negirati tvrdnje koje su bile povezane tim veznikom.

Negacije preostalih gornjih tvrdnji bile bi "Tri nije paran broj", "Sunce ne sija ili vjetar ne puše", "Dva nije paran ni prost". Zašto to ima smisla?

Dobra provjera jeste li nešto dobro negirali je da je točno jedna tvrdnja od polazne tvrdnje i njene negacije istinita te da polazna tvrdnja i negacija zajedno obuhvaćaju sve mogućnosti.

1. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite i negirajte ih: "Pravokutni trokuti su jednakostranični i dva je prost broj", "Ne pijem, ne pušim, ne psujem", "Ili sam preumoran, ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije ni prost ni složen."

Kontraprimjer

Pazite pri negiranju tvrdnji koje sadržavaju riječi "svaki" ili "postoji". To smo koristili u 3. zadatku. Npr. negacija tvrdnje "Svi brojevi su parni" nije "Svi brojevi su neparni" - dovoljno je da je samo jedan broj neparan da polazna tvrdnja ne bi vrijedila i jednom kad nađemo takav primjer polazna tvrdnja ne vrijedi. Takav primjer zovemo "kontraprimjer", a točna negacija je "Postoji neparan broj." Tako smo kontraprimjerom dokazali 3. zadatak iz uvoda.

Slično je i kada se "svaki" i "postoji" zamijene: negacija tvrdnje "Postoji paran prost broj" je "Svi prosti brojevi su parni". Razmislite zašto "Postoji neparan prost broj" nije ispravna negacija.

2. Dokažite da za cijele brojeve x i y općenito ne vrijedi $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ tako da nađete kontraprimjer.
3. Dokažite da nije istina da su svi složeni brojevi djeljivi svim prostim brojevima koji su manji od njih.

Direktan dokaz

Implikacija je tvrdnja koja je sastavljena od uzroka i posljedice, npr. "Ako pada kiša, onda trava raste", "Ako je geometrijski lik kvadrat, onda je taj lik i pravokutnik", "Ako je broj prirodan, onda je i cijeli", itd. U matematici ćemo uzrok često nazivati pretpostavkom, a posljedicu tvrdnjom. Navedite još primjera implikacija! Oznaka za implikaciju je $\Rightarrow$.

Dokaz iz 1. uvodnog zadatka zapravo je samo niz implikacija koje se nadovezuju jedna na drugu. Kada dokaz slijedi direktno kao posljedica nekih istinitih tvrdnji, kažemo da se radi o direktnom dokazu.

Dokaz podjelom na slučajeve

Drugi zadatak dokazan je na sličan način kao prvi, samo je prvo bila potrebna podjela na slučajeve. To je korisno imati na umu ako ne znate pristupiti zadatku: podijelite ga na više slučajeva, a ako niste sigurni kako napraviti podjelu, pokušajte uočiti neke pravilnosti na nekoliko primjera da lakše dobijete ideju za moguće slučajeve. Pazite da obuhvatite sve moguće slučajeve svojom podjelom!

4. Dokažite da je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$.
5. Dokažite da je umnožak parnog i neparnog broja paran broj.
6. Dokažite da je peteroznamenkast broj djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4.

7. Dokažite da kub prirodnog broja pri dijeljenju s 9 daje ostatak 0, 1 ili 8.

Dokaz kontradikcijom

Kako negiramo implikaciju? Razmislite što bi imalo smisla! Točne negacije gornjih tvrdnji su "Kiša pada i trava ne raste", "Geometrijski lik je kvadrat, ali nije pravokutnik", "Broj je cijeli i nije prirodan". Dakle, negacija implikacije je tvrdnja u kojoj je istovremeno pretpostavka ostala ista, a posljedica je negirana. Važno je i da "ako... onda" zamijenimo veznikom poput "i", "a", "ali".

Dokaz kontradikcijom vrsta je indirektnog dokaza jer tvrdnju ne dokazujemo izravno već tako da dobijemo kontradikciju, tj. proturječnost, nešto besmisleno. Kada to koristimo?

Ako nismo sigurni kako dokazati da neka implikacija vrijedi, možda je lakše pokušati dokazati da njena negacija ne vrijedi. Sjetimo se: to znači da istovremeno vrijedi uzrok (pretpostavka), a ne vrijedi posljedica (tvrdnja). To napravimo tako da pretpostavimo da vrijedi negacija tvrdnje i dođemo do neke tvrdnje koja nema smisla, tj. do kontradikcije.

Peti uvodni zadatak dokazali smo svođenjem na kontradikciju: pretpostavili smo da vrijedi uzrok i posljedica ne vrijedi, ali polazeći od toga dobili nešto što nema smisla, dakle naša pretpostavka nije bila istinita, što znači da je njena negacija (tj. početna tvrdnja) istinita, što smo i htjeli dokazati.

8. Tri dječaka došla su na igralište s loptama A, B, C različitih boja. Jedna lopta je siva, druga bijela, a treća plava. Koje su boje lopte ako je samo jedna od tri izjave istinita: A je plava, B nije plava, C nije siva?

9. Tri osumnjičenika dali su sljedeće iskaze:
   A: Iskaz osobe B je neistinit.
   B: Iskaz osobe C je neistinit.
   C: Lagale su i osoba A i osoba B.
   Tko govori istinu?

10. U seocu Istinolažje žive Istinići koji uvijek govore istinu i Lažići koji uvijek lažu. Susreli ste četiri stanovnika A, B, C, D i rekli su vam sljedeće:
    A: Mi smo sva četvorica Lažići.
    B: Ne, samo je jedan od nas Lažić.
    C: Među nama su točno dva Lažića.
    D: Ja sam Istinić.
    Je li stanovnik D uistinu Istinić?

11. Neka su a, b i c međusobno različite znamenke različite od nule. Može li zbroj troznamenkastih brojeva nastalih od tih znamenaka (bez ponavljanja) biti jednak kvadratu nekog prirodnog broja?

12. Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

13. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Još malo o implikaciji

Još jedan važan pojam vezan uz implikaciju je **obrat**: tvrdnja koju dobijemo kada "obrnemo" uzrok i posljedicu, npr. "Ako trava raste, onda kiša pada", "Ako je geometrijski lik pravokutnik, onda je kvadrat", itd. Uočite da čak i ako je tvrdnja istinita, njen obrat uopće ne mora biti istinit, kao što je slučaj u ovim primjerima.

14. Smislite tri istinite implikacije o matematičkim pojmovima i negirajte ih!

15. Napišite njihov obrat i odredite je li istinit ili ne.

16. Napišite obrat Talesovog teorema: Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.

17. Dokažite da ne vrijedi obrat sljedeće tvrdnje: Umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv je nekim prirodnim brojem c kada je barem jedan od faktora umnoška djeljiv brojem c.

18. Dokažite sljedeću tvrdnju i provjerite vrijedi li obrat: Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je s 8.

19. Provjerite vrijedi li obrat ove tvrdnje: Ako je prirodan broj djeljiv s 12, onda je djeljiv s 3 i 4.

Dokazivanje unatrag

Primjer implikacije kojoj su oba smjera istinita je npr. Talesov ili Pitagorin poučak, i tu vrstu implikacije zovemo **ekvivalencija**. Ona je zapravo sastavljena od dvije implikacije jer obuhvaća oba smjera. U vašoj srednjoškolskoj matematičkoj karijeri susrest ćete se s dokazivanjem ekvivalencija i bit će jako važno da uvijek dokažete obje implikacije, tj. oba smjera.

U tom slučaju također ne koristimo riječi "ako" i "onda", već izraz "ako i samo ako": "Trokut je pravokutan ako i samo ako je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze." Oznaka za ekvivalenciju je $\Leftrightarrow$.

Na temelju ekvivalencije možemo dokazivati neke vrste zadataka "unatraške", jer oba smjera rješavanja vrijede. To smo napravili u 4. zadatku iz uvoda. Danas se nećemo previše baviti takvim zadacima, ali imajte na umu ovu metodu rješavanja i zašto je povezana s ekvivalencijom.

Dokaz po kontrapoziciji

Iako obrat ne mora uvijek biti istinit, postoji vrsta obrata koja je uvijek istinita ako je polazna tvrdnja istinita, a zove se obrat po kontrapoziciji. Obrati po kontrapoziciji gornjih tvrdnji bili bi "Ako trava ne raste, onda kiša ne pada", "Ako geometrijski lik nije pravokutnik, onda nije ni kvadrat", "Ako broj nije cijeli, nije ni prirodan".

Ono što se dogodi je da napravimo "običan" obrat, te zatim obe tvrdnje u implikaciji negiramo. To je ono što smo koristili u 6. zadatku u uvodu. Takav dokaz je indirektan jer nismo dokazali polaznu tvrdnju već njen obrat po kontrapoziciji, odakle je tek slijedila polazna tvrdnja.

20. Smislite tri implikacije o matematičkim pojmovima i napišite kako glasi njihov obrat po kontrapoziciji. Uvjerite se da su istinitosne vrijednosti implikacije i njenog obrata po kontrapoziciji jednake.
21. Zadana je tvrdnja: "Ako je n prirodan broj, onda je i cijeli broj". Napišite ovoj tvrdnji negaciju, obrat, obrat po kontrapoziciji, te za svaku tvrdnju dokažite je li istinita ili ne.
22. Dokažite koristeći obrat po kontrapoziciji: ako je kvadrat nekog broja višekratnik broja 5, onda je i on sam višekratnik broja 5.
23. Dokažite obratom po kontrapoziciji da ako je $x^2 - 6x + 5$ paran broj, onda je x neparan broj.
24. Dokažite direktno, metodom dokazivanja unatrag, pomoću kontradikcije i pomoću obrata po kontrapoziciji da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

3.4. G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Poučci o sukladnosti trokuta. Dva trokuta su sukladna ako se poklapaju u

- svima trima stranicama (SSS poučak)
- dvjema stranicama i kutom između njih (SKS poučak)
- jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (KSK poučak)
- dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj (SSK poučak)

Sukladnost dva trokuta označavamo simbolom $\cong$ (npr. $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$).

Poučci o sličnosti trokuta. Dva trokuta su slična ako

- im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (SKS poučak)
- su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (KK poučak)
- su im odgovarajuće stranice proporcionalne (SSS poučak)
- su im jednaki omjeri dviju stranica i kut nasuprot veće od njih (SSK poučak)

Sličnost dva trokuta označavamo simbolom $\sim$ (npr. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$). Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest *stalan* (za te trokute) i naziva se koeficijentom sličnosti k.

Na natjecanjima, sukladnost i sličnost su često korisni alati u raznim geometrijskim situacijama te ih dokazujemo/pronalazimo koristeći neke već poznate teoreme, tvrdnje ili metode kojih ćemo se ukratko prisjetiti.

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je $180°$), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni
- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni
- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta
- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta
- spojnica polovišta dvije stranice trokuta naziva se srednjicom i ona je paralelna s trećom stranicom i jednaka polovici njene duljine
- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)
- u pravokutnom trokutu je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze (Pitagorin poučak)
- svaka je točka na simetrali kuta manjega od $180°$ jednako udaljena od krakova tog kuta (pod udaljenosti točke i pravca podrazumijevamo udaljenost točke i nožišta okomice iz točke na taj pravac)
- svaka je točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine
- zbroj unutarnjih kutova u općenitom mnogokutu s n stranica je $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$), zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je $360°$

Lakši zadaci

1. Nad katetom $\overline{AC}$ i hipotenuzom $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su kvadrati $ACFG$ i $ADEB$. Dokaži da je $|CD| = |BG|$.
2. Neka je točka T unutar kružnice k i neka se tetive kružnice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku u T. Dokaži da je $|AT|\cdot|TC| = |BT|\cdot|TD|$ (umnošci s lijeve i desne strane jednakosti se nazivaju *potencijom točke* T u odnosu na k).

3. U trokutu ABC je $|AB| = 30$mm i $|AC| = 60$mm. Iz točke D na stranici $\overline{AC}$ nacrtan je pravac koji stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki E tako da je $|\angle ADE| = |\angle CBA|$. Odredi $|AD|$ i $|AE|$ ako je $|AE|$ dulja od $|AD|$ za 6mm.

4. Dan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka K tako da je $|AK| : |AB| = 5 : 7$, a na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka N tako da je $|DN| : |NC| = 2 : 3$. U kojem omjeru dužina $\overline{KN}$ dijeli dijagonalu $\overline{BD}$, računajući od točke D?

5. Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AC}$ zadana je točka N tako da je $|AN| = 28$cm i $|NC| = 12$cm. Na stranici $\overline{BC}$ zadana je točka M tako da je $|BM| = 14$cm i $|MC| = 16$cm. Površina četverokuta $ABMN$ iznosi 252cm^2. Izračunaj površinu trokuta MNC.

Umjereni zadaci

6. Neka su točke A i B sjecišta kružnica k_1 i k_2. Neka su pravci a i b kroz točku A takvi da a siječe k_1 i u točki C, a k_2 i u točki D i b siječe k_1 i u točki E, a k_2 i u točki F, pri čemu točke C, D, E, F pripadaju istoj poluravnini u odnosu na pravac AB i točka E se nalazi unutar kuta $\angle BAC$. Dokaži da je $\triangle BEC \sim \triangle BFD$.

7. Visina i težišnica trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A dijeli kut $\angle BAC$ na tri jednaka dijela. Odredi sve kuteve trokuta.

8. a) Ako u $\triangle ABC$ simetrala $\angle BAC$ siječe $\overline{BC}$ u K, dokaži da je $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.

   b) Osnovica jednakokračnog trokuta ima duljinu a, a krak duljinu b. Simetrale kutova na osnovici sijeku krakove u točkama P i Q. Dokaži da vrijedi $|PQ| = \frac{ab}{a+b}$.

9. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABLK$ i $ACMN$. Dokaži da vrijedi $|KN| = 2|AP|$, gdje je P polovište dužine $\overline{BC}$.

10. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku,polumjera r_1 i r_2. Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.

    Unutarnja tangenta (je ona zajednička tangenta koja) siječe dužinu koja spaja središta kružnica.

Teži zadaci

11. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C i D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne ovise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

12. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{CD}$ dana je točka E, a na stranici $\overline{BC}$ dana je točka F takva da $\angle BAF = \angle FAE$. Dokaži da je $|BF| + |DE| = |AE|$.

13. Unutar trokuta ABC uzeta je točka P tako da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CBP$. Nožišta okomica povučenih iz točke P na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su točke M i N. Dokažite da je $|DM| = |DN|$, gdje je D polovište stranice $\overline{AB}$.

14. Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u točkama D, E, F redom. Neka je točka K simetrična točki D s obzirom na središte upisane kružnice i neka se pravci DE i FK sijeku u S. Dokaži da je pravac AS paralelan pravcu BC.

3.5. N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Korisne ideje koje primjenjujemo pri rješavanju Diofantskih jednadžbi

- faktoriziranje u oblik
$$(m - \text{neki broj})(n - \text{neki broj}) = \text{konstanta}$$
- Prepoznavanje sljede´cih izraza:
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
- promatranje svih ostataka koje određeni algebarski izraz može poprimiti modulo neki broj
- uspoređivanje algebarskih izraza
- provjeravanje tvrdnje za male brojeve kako bi se otkrilo pravilo za sve
- promatranje najvećeg zajedničkog djelitelja

Zadaci

1. Riješite jednadžbu s Diofantovog nadgrobnog spomenika:

   Putniče, ovdje leži Diofant iz Aleksandrije.
   Umjetnost aritmetike može nam, o čuda li, kazati kakav bješe njegov životni vijek.
   Šestinu je života trajalo njegovo djetinjstvo. ˇ
   Još je dvanaestina života njegova prošla dok mu nije brada počela rasti.
   Od tada je sedminu života Diofant oženjen bez djece bio.
   Nakon još 5 godina bogovi su mu podarili prekrasna sina.
   Nakon što je poživio samo polovinu očeva života,
   Diofantova prvijenca sudbina je odvojila od ovozemaljskog života.
   Nakon još četiri godine žalosti, i Diofant je pošao na Elizejske poljane.

2. Riješite u skupu cijelih brojeva $5x + 2y^2 = 2001$
3. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1999}$$
4. Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$$
5. Odredi sve parove (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi $mn + 5m + 2n = 121$.
6. Za koje $n \in \mathbb{N}$ je broj $n^2 + 3n + 5$ kvadrat nekog prirodnog broja?
7. Nađite sve $x, y \in \mathbb{Z}$ za koje vrijedi
$$xy + 3y = x^2 + 6x + 12$$
8. Dokažite da za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ jednadžba
$$(n^2 + n + 2)x + 2y = 1$$
   nema cjelobrojna rješenja.
9. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$x^2 + 11^2 = y^2$$

10. Odredite sve proste brojeve p i sve cijele brojeve x takve da vrijedi $13p + 4x^2 - 1470 = 0$
11. Nađi sve cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju

$$x^2 + 5y = 123$$

12. Riješi u prirodnim brojevima:

$$2^x + 1 = y^2$$

13. Riješi u prirodnim brojevima:

$$2^x - 1 = y^2$$

14. Nađi sve prirodne brojeve m, n koji zadovoljavaju jednadžbu $4^m - 9n = 5$.
15. Nadite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$10(m + n) = mn$$

Teži zadaci

16. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je

$$4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$$

17. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

4. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

4.1. A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

KAGH nejednakost

KAGH nejednakosti (nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom) su jedne od temeljnih nejednakosti. Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu (za n brojeva označenih $x_1, x_2, ..., x_n$):

- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost **za pozitivne realne brojeve**:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Općenito, za nejednakosti vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Osim za pozitivne realne brojeve, KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Jednakost (za sve KAGH nejednakosti) vrijedi (samo) za:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Dokaz.

Prvo dokazujemo AG nejednakost.

Dokažimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ \iff &(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2 \\ \iff &x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0 \\ \iff &(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

što vrijedi.

Lako se dokaže kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz za $n > 2$ ostavljam za vježbu čitatelju (hint: pokušajte primijeniti ovaj dokaz na $n = 4$)

CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski) nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i te y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $k > 0$ takav da je $y_i = kx_i,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$).

Dokaz.

Promotrimo kvadratnu funkciju:

$$f(t) = (x_1t + y_1)^2 + (x_2t + y_2)^2 + \ldots (x_nt + y_n)^2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)t^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)t + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Budući da je nenegativna, ima najviše jednu realnu nultočku pa je njena diskriminanta manja ili jednaka od nule, odnosno

$$4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leqslant 0$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. Slučaj jednakosti se postiže samo ako $f(t)$ postiže vrijednost 0.

Lakši zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z za koje je $x + y + z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1 + a^x)(1 + a^y)(1 + a^z) \geq 8$$

   Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

Kada vrijedi jednakost?

5. *(CSB - Engel forma)* Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi, a $b_1, b_2, ..., b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Umjereni zadaci

6. Dokažite KA i GH nejednakost.
7. Za pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$$

8. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

9. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Neka su $a, b, c, d > 0$ takvi da je $a+b+c+d = 1$. Odredi minimalnu vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.
11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$$

12. Ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $x^2+y^2+z^2 = 1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza $x+2y+3z$.
13. Dokaži da za sve $a, b, c, d > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geqslant a+b+c+d$.
14. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b i prirodan broj n vrijedi nejednakost:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2} + \frac{1+9b^2}{1+2a^2+2b+2c^2} + \frac{1+9c^2}{1+2a^2+2b^2+2c} < 4$$

16. Dokaži da za sve $x, y, z \geqslant 0$ vrijedi

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} + \sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geqslant 2(x+y+z)$$

Teži zadaci

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c = 3$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2a-1} + \frac{b^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2b-1} + \frac{c^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2c-1} \leq 3$$

18. Dokaži da za sve $a, b, c \geqslant 1$ vrijedi $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}$.

19. Dani su realni brojevi $x_0, x_1, ..., x_n$ takvi da vrijedi $x_0 > x_1 > ... > x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n$$

20. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4$$

21. Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\dfrac{a}{2a+b} + \dfrac{b}{2b+c} + \dfrac{c}{2c+a} \leqslant 1$.

22. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složimo kutiju bez poklopca. Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.

4.2. C12: Indukcija - Ema Borevković

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Neka je n prirodan broj. Dokaži da je $2^n \times 2^n$ ploču s jednim uklonjenim poljem moguće popločati trominama u obliku slova L.
2. U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, \ldots, n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko se načina kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?
3. Konačno mnogo kartica podijeljeno je u dva deka tako da je više kartica u lijevom deku. Na svakoj kartici su napisana neka različita imena te je na svakoj kartici barem jedno ime. Isto ime se može pojavljivati na više kartica. Za svako ime definiramo *miješanje* kao premještanje svih kartica s tim imenom u nasuprotan dek. Dokaži da postoji konačan niz miješanja nakon kojeg će biti više kartica u desnom deku.
4. Na stolu se nalazi 2001 novčića. Za svaki $i = 1, 2, \ldots, 2001$ Paula treba okrenuti točno i novčića. Dokaži da postoji niz okretaja nakon kojeg će svi novčići biti okrenuti na istu stranu (ili svi na pismo ili svi na glavu), ali da nije moguće da postoji i niz okretaja nakon kojeg će svi biti okrenuti na glavu i niz okretaja nakon kojeg će svi biti okrenuti na pismo.
5. Je li moguće poredati brojeve od 1 do 1000 tako da se prosječna vrijednost neka dva različita broja ne nalazi između ta dva broja u nizu?
6. Šezdeset četiri loptice raspoređene su u nekoliko hrpica. U svakom koraku moguće je izabrati dvije hrpe, recimo hrpu A s p loptica i hrpu B s q loptica, te ukoliko vrijedi $p \geqslant q$ premjestiti q loptica iz hrpe A u hrpu B. Dokaži da je moguće postići da sve loptice budu u istoj hrpi.
7. Postoji barem 4 čokoladice u n ($n \geqslant 4$) kutija. Paula može izabrati dvije kutije te premjestiti točno jednu čokolodicu iz jedne i točno jednu iz druge u neku treću kutiju. Može li Paula premjestiti sve čokoladice u istu kutiju?
8. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput (u terminima teorije grafova: dokaži da svaki turnir (potpun usmjeren graf) ima Hamiltonov put).
9. Na konačnom neusmjerenom grafu G dozvoljeno je provoditi sljedeće operacije:

   (i) Ako je neki čvor povezan s neparno mnogo drugih čvorova moguće je izbrisati njega zajedno sa svim bridovima koji izlaze iz njega.

   (ii) Moguće je duplicirati graf G u graf G' tako da svaki čvor I' iz G' bude povezan sa čvorom I iz G te da čvorovi I' i J' iz G' budu povezani ako i samo ako su čvorovi I i J iz G povezani.

   Dokažite da je nekim konačnim nizom poteza moguće napraviti da svi preostali čvorovi budu nepovezani.

4.3. C15: Invarijante - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Invarijanta je veličina u sustavu koja se ne mijenja tijekom nekog procesa. Često kad se u zadatku odvija proces kojim se treba doći do određenog rezultata ili konfiguracije je korisno naći invarijantu. Ukoliko rezultat do kojeg trebamo doći ne očuva vrijednost invarijante početnog stanja, time smo pokazali da taj rezultat ne možemo postići.

Bitna napomena: nalaženje invarijante je korisno za isključivanje slučajeva, ali ne možemo koristiti invarijantu kao dokaz da za ostale slučajeve možemo postići cilj, već trebamo pokazati to konstrukcijom.

Primjer. Na ploči se nalaze brojevi 5, 7, 12, 25, 6. Marija u svakom potezu bira par brojeva (x, y), briše ih s ploče i umjesto njih napiše par $(2y - x, 2x - y)$. Može li tako nizom poteza postići da na ploči piše pet desetki?

Rješenje. Vidimo da je suma odabranog para (x, y) nakon poteza jednaka $2y - x + 2x - y = x + y$, odnosno ostaje ista. To znači da je *suma brojeva na ploči invarijanta.* Početna suma je jednaka $5 + 7 + 12 + 25 + 6 = 55$, a kako trebamo na kraju dobiti sumu $5 \cdot 10 = 50$, nije moguće postići traženu konfiguraciju. Međutim, naivno možemo povući zaključak da Marija nekim nizom poteza može doći do svake konfiguracije pet brojeva kojima je zbroj 55, što nije točno (*vidi 3. zadatak*).

Traženje invarijanti u zadacima je obično puno manje očito od ovog primjera. Neki najčešći primjeri invarijanti su ostatak koji suma daje pri dijeljenju s nekim prirodnim n, težinska suma brojeva, umnožak, broj/parnost nekih ekstremnih vrijednosti. Slično invarijantama, postoje i **monovarijante**: varijable čija se vrijednost kroz proces konstantno (ne) povećava ili (ne) smanjuje.

Lakši zadaci

1. Na Ljetnom kampu se igra šahovski turnir. Pravila prvog kruga su sljedeća: svaki igrač igra sa svakim, pobjednik okršaja dobiva 3 boda, gubitnik -1 bod, a ako završi izjednačeno svaki igrač dobiva po bod. Ako u turniru sudjeluje 11 učenika, koliki je zbroj bodova svih igrača na kraju prvog kruga?
2. Ploča 8 x 8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?
3. Vratimo se na zadatak iz primjera: pokaži da Marija potezima opisanima u zadatku ne može postići da na ploči pišu brojevi $7, 9, 11, 13, 15$.
4. U krugu piše 2020 nula i 2 jedinice. Jana u svakom potezu bira tri uzastopna broja i dodaje svakom 1. Može li postići da na kraju svi brojevi budu jednaki?
5. Mirko pred sobom ima papirnati mnogokut, škare i ljepilo. Dopuštena mu je sljedeća operacija: može odrezati dio mnogokuta, zrcaliti ga s obzirom na simetralu dužine stranice po kojoj je rezao i zaljepiti nazad po istoj stranici na kojoj je odrezao dio. Može li Mirko doći do kvadrata ako je krenuo s jednakostraničnim trokutom?

Umjereni zadaci

6. Žaba stoji u točki $(2, 3)$ koordinatnog sustava. U svakom potezu može skočiti s trenutnog polja (x, y) na polje $(0.8x - 0.6y, 0.6x + 0.8y)$ ili $(0.8x + 0.6y, 0.6x - 0.8y)$. Može li žaba nekim nizom poteza doći do polja $(1, 1)$?
7. Anja i Boris igraju igru s pločom čokolade dimenzija 100×100 (kockica). Naizmjence svako od njih ili prelomi jedan od komada čokolade na dva dijela *po crti* ili pojede jedan komad, pri čemu se komadić čokolade dimenzije 1×1 ne može prelomiti. Gubitnik je onaj koji pojede zadnji komad čokolade. Ako Anja kreće prva, tko ima pobjedničku strategiju?
8. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi 1, 2, 3, 4, ... 2011, 2012, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi 2, 4, 6, 8, ... 4022, 4024 ?

9. Na ploči su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 20212021. U svakom potezu biramo broj, brišemo ga i umjesto njega zapisujemo zbroj njegovih znamenki. To ponavljamo dok ne ostanemo samo s jednoznamenkastim brojevima. Hoće li na ploči biti više jedinica ili dvojki?

10. Anja i Boris igraju novu igru. Anja napiše nekoliko prirodnih brojeva na ploču, a Boris zatim pokušava postići da su svi brojevi na ploči isti tako da u svom potezu obriše dva broja (a, b) i umjesto njih napiše dva puta njihov zbroj, dakle $(a + b, a + b)$. Hoće li Boris uspjeti u svom naumu ako Anja na ploču napiše

    a) jednu peticu i četiri jedinice,
    b) dvije petice i 2019 jedinica?

11. Matej i Vedran igraju igru. Matej prvo zadaje par cijelih brojeva (x, y), a Vedran nakon njega par cijelih brojeva (z, w). Matejev cilj je od para (x, y) doći do (z, w) nizom transformacija, gdje za svaku transformaciju ima mogućnost trenutni par (a, b) pretvoriti u (b, a), $(a + b, b)$ ili $(a - b, b)$. Kakav par (z, w) mora Vedran odabrati u odnosu na odabrane Matejeve brojeve (x, y) da osigura da Matej ne može nikakvim odabirom transformacija dobiti tražene brojeve?

Teži zadaci

12. Brojevi 1 i -1 su upisani u vrhovima pravilnog dvanaesterokuta tako da -1 piše u samo jednom vrhu, a u ostalima piše 1. U svakom koraku Luka smije zamijeniti predznake brojeva u 4 uzastopna vrha. Može li Luka ponavljanjem postupka postići da se broj u kojem je pisalo -1 pomakne na susjedni vrh, a da u svim ostalim vrhovima piše 1?

13. Ukrug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

    - svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja
    - odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

    Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane

    a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?
    b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

14. Na ploči je zapisano $n \geqslant 3$ prirodnih brojeva. Potez se sasatoji od biranja tri broja a, b i c s ploče tako da čine stranice nedegeneriranog, nejednakostraničnog trokuta i zamjene s $a + b - c$, $b + c - a$, i $c + a - b$. Dokaži da je broj poteza konačan.

15. Prvih 100 prirodnih brojeva je napisano na ploču, i to svaki točno jednom. Petar u svakom koraku bira dva broja a i b s ploče, briše ih i umjesto njih na ploču napiše najveći zajednički djelitelj brojeva $a^2 + b^2 + 2$ i $a^2b^2 + 3$. Naposljetku na ploči ostane jedan broj. Dokažite da taj broj ne može biti potpun kvadrat.

4.4. G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Teorem 4.4.1 (Teorem o obodnom i središnjem kutu)**.** *Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.*

Teorem 4.4.2 (Talesov teorem)**.** *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Teorem 4.4.3 (Teorem o kutu između tangente i tetive)**.** *Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Definicija 4.4.4. Tetivni četverokut *je četverokut kojemu se može opisati kružnica.*

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je $180°$
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
  - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$
- **(Ptolomejev poučak)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Zagrijavanje

1. Dokažite Teorem 3.
2. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.
3. Dokažite da ako simetrale unutarnjih kuteva četverokuta tvore četverokut onda je taj (drugi) četverokut tetivan.
4. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

Lakši zadaci

5. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.
6. Dokaži da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
7. U šiljastokutnom trokutu ΔABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ΔABC leži na visini $\overline{BN}$.
8. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.
9. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.
10. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

Teži zadaci

11. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište pravaca paralelnih sa AC i BD koji prolaze kroz B i A, redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB u F i G, redom. Dokažite da točke C, D, F i G leže na istoj kružnici.

12. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Pravci l_1 i l_2 su okomiti na AB i redom prolaze točkama A i B. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Okomice iz M na AC i BC sijeku pravce l_1 i l_2 redom u točkama E i F. Ako je D sjecište EF i MC, dokaži da je $\angle ADB = \angle EMF$.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut i neka su D i E redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je F točka takva da je D polovište dužine $\overline{EF}$. Točka G je na segmentu $\overline{CD}$ tako da polovište od $\overline{BG}$ leži na kružnici Γ opisanoj trokutu FDB. Označimo sa H drugo sjecište kružnice Γ i FC. Pokaži da je četverokut $BHGC$ tetivan.

14. Neka je ω kružnica sa središtem O i A točka izvan nje. Tangente iz točke A diraju ω u točkama B i C. Neka je D presjek pravca AO i ω takav da je $|AO| < |AD|$. Neka je X nožište okomice iz B na pravac CD. Neka je Y polovište dužine $\overline{XB}$. Neka je Z drugo sjecište pravca DY i ω. Dokaži da su pravci AZ i ZC okomiti.

15. U šiljastokutnom trokutu ABC, visina iz vrha A siječe pravac BC u točki D, a M je polovište stranice $\overline{AC}$. Neka je X točka takva da je $\measuredangle AXB = \measuredangle DXM = 90^\circ$ (pretpostavljamo da X i C leže na suprotnim stranama pravca BM). Dokaži da vrijedi $\measuredangle XMB = 2\measuredangle MBC$.

4.5. N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Kongruencije

Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, kažemo da je a **kongruentan** b modulo m i pišemo $a \equiv b \pmod{n}$.

Za kongruencije vrijede sljedeća svojstva kongruencija i modularne aritmetike (za $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$):

- $a \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, tada $b \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n}$, tada $a \equiv c \pmod{n}$
- ako $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ i $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, onda $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$, $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{n}$ i $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, tada $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ za svaki $m \in \mathbb{N}$
- ako $ac \equiv bc \pmod{n}$ i n i c su relativno prosti, onda $a \equiv b \pmod{n}$.

Potpun sustav ostataka

Skup S je potpuni sustav ostataka modulo n ako elementi S svi daju različite ostatke pri dijeljenju s n, i svi ostatci se pojavljuju.

Mali Fermatov teorem

Ako je p prost broj tada za svaki prirodan broj a vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$. Specijalno, ako je $\gcd(a, p) = 1$ vrijedi $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Eulerov teorem

Ako su a i m relativno prosti brojevi, vrijedi $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Pritom je $\phi(m)$ broj prirodnih brojeva relativno prostih s m koji su manji ili jednaki m (*Eulerova funkcija*).

Možete primijetiti kako je Mali Fermatov teorem zapravo poseban slučaj Eulerovog teorema pa zato njega nećemo dodatno dokazivati.

Uvodni zadaci

1. Koje sve ostatke može imati kvadrat prirodnog broja:
   (a) pri dijeljenju s 3
   (b) pri dijeljenju sa 4?
2. Za koje proste brojeve p je i $8p^2 + 1$ prost broj?
3. Dokaži da je svaki prost broj veći od 3 oblika $6k + 1$ ili $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.
4. Dokaži da kub cijelog broja daje ostatak $0, 1$ ili 6 pri dijeljenju sa 7.

Zadaci

5. Postoji li prirodni broj m takav da 7 dijeli $2^{m^2} - 4$?
6. Za prirodne brojeve a, b i prost broj p vrijedi $a^2 + p^2 = b^2$.

   Dokaži da je $2(b + p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

7. Odredi najmanji prirodni broj a takav da je vrijednost izraza

$$\frac{n^8+n^6+n^4+n^2+a}{n^2-1}$$

za $n = 2014$ cijeli broj djeljiv s 3.

8. Koja je posljednja znamenka broja 3^{333}?

9. Odredite posljednje dvije znamenke broja $7^{7^{100}}$.

10. Neka su a i b cijeli brojevi različite parnosti. Dokaži da postoji cijeli broj c takav da su brojevi $ab+c$, $a+c$ i $b+c$ kvadrati cijelih brojeva.

11. Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

Dokaži da je c kvadrat nekog prirodnog broja.

12. Dokaži da ne postoji prirodni broj k takav da su $k+4$ i k^2+5k+2 kubovi nekih prirodnih brojeva.

13. Neka su p i q različiti prosti brojevi. Dokažite da tada vrijedi

$$q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

Teži zadaci

14. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$2^m = 7n^2 + 1$$

15. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $m > n$. Označimo

$$x_k = \frac{m+k}{n+k}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Ako su svi brojevi $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ prirodni, dokaži da je broj

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$$

djeljiv nekim neparnim prostim brojem.

5. Poglavlje

Zadaci za treću grupu

5.1. A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Česte ideje:

- Uvrštavanja $y := -2, -1, 0, 1, 2, -x, x$ (analogno i uvrštavanja za x ako jednadžba nije simetrična u te dvije varijable)
- Dokazivanje injektivnosti $\big(f(x) = f(y) \implies x = y\big)$ i surjektivnosti $\big(\forall y\ \exists x$ takav da $f(x) = y\big)$
- Izjednačavanje izraza unutar funkcije $\big($npr. u jednadžbi $f(x) + f(x^2 + y) = f(2y - x^2)$ uvrštavanje y tako da vrijedi $x^2 + y = 2y - x^2\big)$
- Svođenje na Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu
- Supstituiranje funkcija za jenostavnije
- Korištenje simetričnosti jedne strane jednadžbe $\big($npr. u jednadžbi $f(x^2y) = -f(x)^2y$ uvrštavanjem $x := -x$ slijedi $f(x^2y) = -f(-x)^2y$ iz čega dobivamo$f(x)^2y = f(-x)^2y\big)$
- Primjena funkcije na jednadžbu $\big(\text{LHS} = \text{RHS} \implies f(\text{LHS}) = f(\text{RHS})\big)$
- $f(f(x)) = x$ implicira da je f bijekcija

Primjer 1 (**Cauchyjeva funkcijska jednadžba**). *Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ koje zadovoljavaju jednadžbu $f(x + y) = f(x) + f(y)$.*

Rješenje. *Imamo sljedeća uvrštavanja:*

- $y := 0 \implies f(x) = f(x) + f(0) \implies f(0) = 0$
- $y := 1 \implies f(x + 1) = f(x) + f(1)$
- $x := x + 1,\ y := 1 \implies f(x + 2) = f(x + 1) + f(1) = f(x) + 2f(1)$
  (korištenjem matematičke indukcije lako dobivamo $f(x + n) = f(x) + nf(1)$ za sve $n \in \mathbb{N}$)
  $\implies f(a) = af(1)\ \forall a \in \mathbb{Z}$
- $y := x \implies f(2x) = 2f(x)$
- $x := 2x,\ y := x \implies f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$
  (korištenjem matematičke indukcije lako dobivamo $f(nx) = nf(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$)
- $x := \frac{m}{n}$ *za* $m \in \mathbb{Z}$ *u* $f(nx) = nf(x) \implies f(m) = nf(\frac{m}{n}) \implies f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$

Provjerimo da za proizvoljni $c \in \mathbb{Q}$ funkcija $f(x) = xc$ zadovoljava početnu jednadžbu:

$$(x + y)c = xc + yc.$$

Zadaci

Neki zadaci su preuzeti iz web arhive školjka:
https://www.skoljka.org/folder/536/kamp-2013/funkcije-napredna/

1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava jednadžbu $x + f(x) = f(f(x))$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Odredi sva rješenja jednadžbe $f(f(x)) = 0$.
2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z).$$
3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$2f(1 - x) + 1 = xf(x).$$
4. Odredi sve funkcije $f : [0, 1] \to [0, 1]$ takve da je $f(0) = 0$ i koje za sve $x, y \in [0, 1]$ zadovoljavaju
$$|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|.$$
5. **(Državno 2011. 4. razred)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$
6. **(Županijsko 2002. 4. razred)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ koje za sve $x, y > 0$ zadovoljavaju
$$f(x)^{f(y)} = f(x^y).$$
7. **(IMO 2019.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ koje za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ zadovoljavaju
$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$
8. **(IMO SL 2002. A1)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$
9. **(EMC 2017.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{N}$ zadovoljavaju
$$f(x) + yf(f(x)) \leqslant x(1 + f(y)).$$
10. **(MEMO 2017.)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y).$$
11. **(IMO SL 2004. A3)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje za sve $m, n \in \mathbb{N}$ zadovoljavaju
$$f(m)^2 + f(n) \mid (m^2 + n)^2.$$
12. **(IMO SL 2001. A4)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju
$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y).$$
13. **(IMO SL 2010. A5)** Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ koje za sve $x, y \in \mathbb{Q}^+$ zadovoljavaju
$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

5.2. C13: Teorija grafova - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Pri rješavanju zadataka s grafovima često su nam korisne sljedeće metode i činjenice:

- promatranje malih slučajeva
- matematička indukcija: Dokazujemo tako što pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n pa dodamo vrh
- Dirichletov princip: primjerice, da zaključimo da iz vrha izlazi barem k bridova određene vrste
- Lema o rukovanju: Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu je paran.
- Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži ciklus neparne duljine.
  Sjetimo se: Graf je bipartitan ako mu vrhove možemo podijeliti u 2 skupa tako da nijedna 2 vrha u istom skupu nemaju zajednički brid.

Lakši zadaci

1. U jednoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna avionska linija. Dokaži da je moguće krenuti iz nekog grada i obići sve gradove tako da niti jedan grad ne posjetimo dvaput.
2. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

Umjereni zadaci

3. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \longleftrightarrow B, B \longleftrightarrow C, C \longleftrightarrow D, D \longleftrightarrow A$).
4. Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. Svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja n tako da vrijede sljedeći uvjeti:

   • Svaki natjecatelj poznaje najviše n ostalih natjecatelja.

   • Za svaki prirodni broj m takav da je $1 \leqslant m \leqslant n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno m ostalih natjecatelja.
5. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.
6. U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad).

   Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.
7. U Sjedinjenim Američkim Državama postoji 10 avionskih kompanija koje lete u 1025 gradova. Svaka 2 grada povezana su linijom neke od kompanija. Kružno putovanje je putovanje između više gradova avionom koje počinje i završava u istom gradu. Dokaži da postoji kružno putovanje istom kompanijom takvo da prolazi kroz neparno mnogo gradova.
8. U nekoj zemlji postoji barem 101 grad. Glavni grad te zemlje spojen je sa 100 gradova izravnim (dvosmjernim) zrakoplovnim linijama. Svaki grad osim glavnog grada spojen je s 10 drugih gradova. Poznato je da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji grad unutar te države. Dokažite da je moguće zatvoriti

polovicu zrakoplovnih linija glavnog grada tako da se sačuva svojstvo da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad.

9. Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

10. Grupa gusara se posvađala, i sad svaki od njih nišani neka 2 iz grupe. Sve se gusare proziva jednog po jednog nekim redosljedom. Ako je prozvani gusar još živ, on puca u gusare u koje nišani i oni, ako nisu već mrtvi, odmah umru. Nakon što su svi gusari prozvani, ispada da ih je ubijeno točno 28.

    Dokaži da u kojem god da su poretku gusari prozvani, svakako bi ih barem 10 umrlo.

Teži zadaci

11. U grupi od n učenika, neki su prijatelji (prijateljstvo je uzajamno). Neku su a, b minimalni prirodni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:
    (1) Možemo podijeliti učenike u a timova tako da su unutar svake grupe svi bilo koja dva učenika prijatelji.
    (2) Možemo podijeliti učenike u b timova tako da su unutar svake grupe svi bilo koja dva učenika nisu prijatelji.
    Odredite maksimalnu moguću vrijednost $N = a + b$, u ovisnosti o n.

12. Na konačnom neusmjerenom grafu G dozvoljeno je provoditi sljedeće operacije:

    (i) Ako je neki čvor povezan s neparno mnogo drugih čvorova moguće je izbrisati njega zajedno sa svim bridovima koji izlaze iz njega.

    (ii) Moguće je duplicirati graf G u graf G' tako da svaki čvor I' iz G' bude povezan sa čvorom I iz G te da čvorovi I' i J' iz G' budu povezani ako i samo ako su čvorovi I i J iz G povezani.

    Dokažite da je nekim konačnim nizom poteza moguće napraviti da svi preostali čvorovi budu nepovezani.

13. U gradu je $n \geqslant 3$ otoka. Na početku, prijevoznik nudi trajektne linije između nekih parova otoka tako da ih je nemoguće podijeliti u 2 grupe takve da nikoja 2 otoka u različitim grupama nisu povezana linijom.

    Svake godine, prijevoznik zatvara liniju između neka 2 otoka X i Y. U isto vrijeme, otvara novu liniju po sljedećem pravilu: za svaki otok koji je povezan s točno jednim od X i Y, dodaje se linija između tog otoka i onog od X i Y s kojim nije bio povezan.

    Pretpostavite da u svakom trenutku, ako bilo podijelimo otoke u 2 neprazna skupa, znamo da će prijevoznika sigurno nakon konačno mnogo vremena zatvoriti neku liniju koja povezuje 2 otoka iz ove 2 grupe.

    Dokažite da će nakon konačno mnogo godina postojati otok koji je trajektnom linijom povezan sa svim drugim otocima.

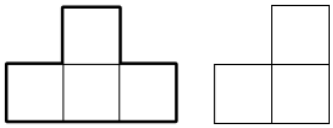
5.3. C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se zadatcima koji su vezani uz određene ploče. Iako se to može činti kao vrlo restriktivan kriterij, raspon tehnika koje se koriste u zadatcima s pločama je vrlo raznolik. Među zadatcima ima i onih standardnih logičko-kombinatornih koji ne koriste nikakve naprednije alate, međutim za rješavanje ostalih zadataka koristit će se nešto od navedenog:

- bojanja
- invarijante
- monovarijante
- matematička indukcija
- (dvostruka) prebrojavanja



Slika 5.1:

Lakši zadaci

1. Može li se šahovska ploča od koje je izrezano jedno kutno polje pokriti pravokutnim pločicama dimenzije 1×3?
2. Dana je ploča $2n \times 2n$ koja je na početku obojena šahovski. U svakom potezu možemo promijeniti boje svih polja u jednom retku, stupcu ili kvadratu 2×2. Za koje n možemo postići da na ploči ostane jedno crno polje?
3. Odredite najmanji mogući broj polja koji moramo ukloniti s ploče 4×4 tako da nikoja 4 od preostalih polja ne zatvaraju kvadrat (tj. četverokut čiji su vrhovi središta tih četiriju polja ne smije biti kvadrat).
4. Možemo li ploču 10×10 popločati pločicama lijevim pločicama sa slike 5.1?
5. U svako polje $n \times n$ ploče upisan je broj jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite zbroj svih upisanih brojeva.
6. Je li moguće u polja ploče koja je beskonačna u 2 susjedna smjera (drugim riječima, ploča je ograničena na dvije susjedne strane i neograničena na preostale dvije) upisati prirodne brojeve tako da se u svakom retku i stupcu svaki broj pojavljuje točno jednom?

Umjereni zadaci

7. Dokažite da ploču dimenzija $2^n \times 2^n$ bez jednog kvadratića možemo popločati desnim pločicama sa slike 5.1.
8. U svako polje beskonačne ploče (ploča je beskonačna u svim smjerovima) upisan je neki prirodni broj tako da je svaki broj jednak aritmetičkoj sredini svoja 4 susjeda. Dokažite da su svi napisani brojevi jednaki.
9. Može li se ploča 12×12 popločati desnim pločicama sa slike 5.1 tako da svaki redak i svaki stupac siječe isti broj pločica?
10. Na beskonačnoj ploči postavljeno je 9 žetona u polja kvadrata 3×3, po jedan u svako polje. U svakom polju možemo s jednim žetonom skočiti u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko jednog zauzetog polja na slobodno polje i pritom žeton koji je preskočen uklanjamo. Može li ova igra završiti sa samo jednim žetonom na ploči?

Teži zadaci

11. Dana je $n \times n$ ploča čija su polja obojena u n boja, pri čemu je svakom bojom obojeno n polja. Dokažite da postoji red ili stupac na ploči u kojem se nalazi barem $\sqrt{n}$ različitih boja.
12. Može li se pravokutna ploča dimenzija 5×7 prekriti s nekoliko slojeva desnih pločica sa slike 5.1 tako da svako polje velike ploče bude prekriveno jednakim brojem manjih ploča?
13. Dana je ploča $2n \times 2n$ ($n > 1$) u kojoj su sva polja bijela. U jednom potezu dozvoljeno je promijeniti boju 3 uzastopna polja (u istom retku ili stupcu; boja pojedinog polja je ili bijela ili crna). Odredite sve n za koje je moguće tim potezima doći do šahovskog bojanja.

14. Na ploči piše n cijelih brojeva. Anica u svakom potezu mijenja neke od tih brojeva na ploči po sljedećem principu: ako sa S označimo aritmetičku sredinu brojeva koji su trenutno na ploči, onda nekoliko brojeva manjih ili jednakih od $S-1$ Anica uveća za 1, a nekoliko brojeva većih ili jednakih od $S+1$ smanjuje za 1. Pritom u svakom potezu Anica mijenja najmanje 1 broj na ploči, no nije nužno da u svakom potezu neki broj bude uvećan, odnosno umanjen. Dokažite da Anica ne može izvesti beskonačno mnogo ovakvih poteza.

5.4. G13: Simedijane - Krešimir Nežmah

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ako je zadan neki kut $\angle BAC$ u ravnini i ako su P i Q točke takve da su pravci AP i AQ osnosimetrični s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$, onda te pravce nazivamo izogonalnim s obzirom na taj kut.
Simedijana trokuta (ima ih tri) je pravac izogonalan težišnici trokuta.

Pomoćni alati koji su nam potrebni:

- sinusov poučak: ako trokut označimo standardno s duljinama stranica a, b i c te mjerama kutova α, β i γ, i radijusom opisane kružnice R, onda je
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$
- izraz za omjer u kojem čevijan dijeli stranicu: zadan je $\triangle ABC$ i točka $D \in \overline{BC}$, vrijedi
$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|\sin\angle BAD}{|AC|\sin\angle CAD} = \frac{\sin\gamma\sin\angle BAD}{\sin\beta\sin\angle CAD}$$
- Čevin teorem: ako su zadane točke $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{AC}$ i $F \in \overline{AB}$, onda su AD, BE i CF konkurentni ako i samo ako je
$$\frac{|BD||CE||AF|}{|DC||EA||FB|} = 1,$$
ili ekivalentno ako je
$$\frac{\sin\angle BAD\sin\angle CBE\sin\angle ACF}{\sin\angle CAD\sin\angle ABE\sin\angle BCF} = 1$$

Zagrijavanje

1. Zadan je trokut $\triangle ABC$ i točka P unutar trokuta. Dokažite da postoji točka Q takva da su pravci AP i AQ, BP i BQ te CP i CQ izogonalni. Kažemo da su P i Q izogonalni konjugati.
2. (a) Neka su D i E točke na stranici $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ tako da su AD i AE izogonalni. Dokažite da je onda
$$\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$$
(b) Neka je AD simedijana trokuta $\triangle ABC$, gdje $D \in \overline{BC}$. Dokažite da je
$$\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$$
3. (**Konstrukcija simedijane**) Neka je X sjecište tangenti u B i C na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$. Tada je AX simedijana.
4. (**Svojstva simedijane**) Zadan je trokut $\triangle ABC$. Neka je M polovište od $\overline{BC}$, a X sjecište tangenti u B i C na opisanu kružnicu. Neka AX ponovno siječe tu kružnicu u K, a dužinu $\overline{BC}$ u D. AX je A-simedijana u trokutu $\triangle ABC$, no također imamo:
   - (a) KA je K-simedijana u $\triangle KBC$.
   - (b) Imamo sličnosti $\triangle ABK \sim \triangle AMC \sim \triangle CMK$, $\triangle AKC \sim \triangle ABM \sim \triangle BKM$.
   - (c) $|AB|\cdot|CK| = |AC|\cdot|BK|$.
   - (d) Opisana od $\triangle BCX$ prolazi kroz polovište od $\overline{AK}$.
   - (e) BC je B-simedijana u $\triangle BAK$ i C-simedijana u $\triangle CAK$.
   - (f) BC je unutarnja simetrala kuta $\angle AMK$, a MX vanjska.

- (g) Sve tri simedijane trokuta sijeku se u jednoj točki.

5. Pokažite da ako je $ABCD$ tetivni četverokut, onda su sljedeći uvjeti ekvivalentni:
   - (a) $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.
   - (b) $\overline{AC}$ je A-simedijana u $\triangle ABD$.
   - (c) $\overline{AC}$ je C-simedijana u $\triangle BCD$.
   - (d) $\overline{BD}$ je B-simedijana u $\triangle ABC$.
   - (e) $\overline{BD}$ je D-simedijana u $\triangle ACD$.

   Takvi četverokuti nazivaju se **harmonijski četverokuti**.

Zadaci

6. Neka je $\triangle ABC$ jednakokračni trokut gdje $|AC| = |BC|$, a točka P unutar trokuta tako da $\angle PAB = \angle PBC$. Ako je M polovište od $\overline{AB}$, dokažite da je $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

7. Dana je kružnica k sa središtem O. Neka je $\overline{AB}$ tetiva te kružnice i M njeno polovište. Tangente na kružnicu k u točkama A i B sijeku se u T. Pravac l prolazi točkom T, siječe kraći luk $\widehat{AB}$ u točki C, a dulji luk $\widehat{AB}$ u točki D i pritom je $|BC| = |BM|$. Dokažite da je središte kružnice opisane trokutu $\triangle ADM$ osnosimetrično točki O u odnosu na pravac AD.

8. Dane su tri različite fiksne točke A, B i C na pravcu u tom poretku. Neka je Γ kružnica koja prolazi kroz A i C i čije se središte ne nalazi na pravcu AC. Neka je P sjecište tangenti iz A i C na Γ. Označimo s Q sjecište dužine $\overline{BP}$ s Γ. Dokažite da simetrala kuta $\angle AQC$ siječe AC u točki koja ne ovisi o izboru kružnice Γ.

Teži zadaci

9. Dvije kružnice u ravnini sijeku se u točkama A i B, a jedna njihova zajednička tangenta dira ih u P i Q. Neka se tangente u P i Q na kružnicu opisanu trokutu $\triangle APQ$ sijeku u S, a neka je točka H osnosimetrična točki B s obzirom na pravac PQ. Dokažite da su točke S, H i A kolinearne.

10. Trokut $\triangle ABC$ upisan je u kružnicu ω. Tangente na ω u B i C sijeku se u T. Točka S leži na polupravcu BC tako da je $AS \perp AT$. Točke B_1 i C_1 leže na polupravcu ST (gdje je C_1 između B_1 i S) tako da $|B_1T| = |BT| = |C_1T|$. Dokažite sličnost $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$.

11. Dan je raznostraničan šiljastokutan trokut $\triangle ABC$. Točke M, N i P su redom polovišta od $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Simetrale dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ sijeku pravac AM redom u točkama D i E. Neka se pravci BD i CE sijeku u točki F unutar trokuta $\triangle ABC$. Dokažite da točke A, P, F, N leže na istoj kružnici.

5.5. N13: Orderi - Paula Vidas

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Definicija 5.5.1. ***Red*** *(engl. order) od a modulo m, gdje su a i m relativno prosti, je najmanji prirodan broj x takav da je $a^x \equiv 1 \pmod{m}$. Oznaka je $x = \operatorname{ord}_m a$.*

Pitanje 5.5.2. *U slučaju da a i m nisu relativno prosti, može li postojati x za koji je $a^x \equiv 1 \pmod{m}$?*

Primjer 5.5.3. *Red od 2 modulo 7 je 3 jer je $2^1 \equiv 2 \pmod{7}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$, $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Pišemo $\operatorname{ord}_7 2 = 3$.*

Prisjetimo se malog Fermatovog i Eulerovog teorema.

Teorem 5.5.4 (Mali Fermatov teorem)**.** *Neka je p prost broj koji ne dijeli a. Tada*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Teorem 5.5.5 (Euler)**.** *Za relativno proste a i m vrijedi*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

(Ovdje je $\varphi(m)$ Eulerova funkcija koja je jednaka broju prirodnih brojeva manjih ili jednakih m koji su relativno prosti s m.)

Iz Eulerovog teorema slijedi da red uvijek postoji te je $\operatorname{ord}_m a \leqslant \varphi(m)$.

Sljedeći teorem bit će ključan na ovom predavanju.

Teorem 5.5.6. *Za relativno proste a i m vrijedi*

$$a^n \equiv 1 \pmod{m} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ord}_m a \mid n.$$

Dokaz. Ako $\operatorname{ord}_m a \mid n$, onda je $n = \operatorname{ord}_m a \cdot q$ za neki q. Tada je

$$a^n \equiv \left(a^{\operatorname{ord}_m a}\right)^q \equiv 1^q \equiv 1 \pmod{m}.$$

Pretpostavimo sada da $\operatorname{ord}_m a \nmid n$. Tada je $n = \operatorname{ord}_m a \cdot q + r$ za neki $1 \leqslant r < \operatorname{ord}_m a$, pa imamo

$$\begin{aligned} a^{\operatorname{ord}_m a \cdot q + r} \equiv a^n &\equiv 1 \pmod{m} \\ a^{\operatorname{ord}_m a \cdot q} a^r &\equiv 1 \pmod{m} \\ a^r &\equiv 1 \pmod{m}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $r < \operatorname{ord}_m a$, to je u kontradikciji s minimalnošću reda. Dakle, mora biti $\operatorname{ord}_m a \mid n$. □

Korolar 5.5.7. *Za relativno proste a i m vrijedi*

$$\operatorname{ord}_m a \mid \varphi(m).$$

Dokaz. Slijedi iz prethodnog teorema za $n = \varphi(m)$ i Eulerovog teorema. □

Lakši zadaci

1. Neka su $a \geqslant 2$ i n prirodni brojevi. Dokažite da n dijeli $\varphi(a^n - 1)$.
2. Neka je p prost broj. Dokažite da je svaki prosti djelitelj od $2^p - 1$ veći od p.
3. Neka je p prost broj. Dokažite da $p^p - 1$ ima prost faktor oblika $kp + 1$.
4. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Dokažite da n ne dijeli $2^n - 1$.

Teži zadaci

5. Odredite sve uređene trojke (p, q, r) prostih brojeva za koje vrijedi
$$p \mid q^r + 1, \quad q \mid r^p + 1, \quad r \mid p^q + 1.$$
6. Odredite sve parove prostih brojeva (p, q) takve da
$$p + q \mid (2p^2 - 1)^q + 1 \qquad \text{i} \qquad p + q \mid (2q^2 - 1)^p + 1.$$
7. Odredite sve parove prostih brojeva (p, q) takve da
$$pq \mid 5^p + 5^q.$$
8. Odredite sve parove prostih brojeva (p, q) takve da
$$p^2 + 1 \mid 2003^q + 1 \qquad \text{i} \qquad q^2 + 1 \mid 2003^p + 1.$$
9. Odredite sve parove (p, n) gdje je p prost a n prirodan broj za koje vrijedi
$$p^n + 1 \mid n^p + 1.$$

6. Poglavlje

Zadaci za olimpijsku grupu

6.1. M1: Ciklusi + optimizacija - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Funkcija na konačnom skupu ima ciklus

Neka je S neki konačan skup i $f : S \to S$. Tada postoje $x \in S$ i $k \geqslant 1$ takvi da je $f^k(x) = x$.

1. Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ sa sljedećim svojstvom: za bilo koje cijele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čiji zbroj nije djeljiv s n, postoji indeks $1 \leqslant i \leqslant n$ takav da nikoji od brojeva
$$a_i, a_i + a_{i+1}, \ldots, a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$$
nije djeljiv s n. Indekse uzimamo modulo n, odnosno $a_i = a_{i-n}$ kad je $i > n$.

2. Ukrug je poredano 1985 točaka, i svaka je označena s 1 ili -1. Za točku kažemo da je dobra ako su sve parcijalne sume koje možemo dobiti na način da počnemo iz te točke i pribrajamo brojeve u bilo kojem od dva smjera po krugu pozitivne. Dokaži: ako je broj točaka označenih sa -1 manji od 662, tada postoji dobra točka na krugu.

3. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, i neka je m fiksan prirodan broj manji od n. Za indeks k takav da je $1 \leq k \leq n$ kažemo da je dobar ako postoji ℓ takav da je $1 \leq \ell \leq m$ i da vrijedi $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+\ell-1} \geq 0$, gdje su indeksi uzeti modulo n. Neka je T skup svih dobrih indekasa. Dokaži da vrijedi $\sum\limits_{k \in T} a_k \geq 0$.

Prebroji i optimiziraj

1. U kvadratnoj 999×999 tablici svaka ćelija je obojana u bijelo ili u crveno. Neka je T broj trojki ćelija (C_1, C_2, C_3), tako da su prve dvije u istom retku a zadnje dvije u istom stupcu, te su C_1, C_3 bijele a C_2 crvena. Odredi maksimalnu vrijednost koju može poprimiti T.

2. Neka je n prirodan broj. Na nekoj zabavi je n ljudi. Svaki par ljudi se ili poznaje ili ne. Koji je najveći mogući broj parova ljudi koji se ne poznaju ali imaju zajedničkog poznanika?

3. Neka je n prirodan broj. Za $n \times n$ ploču sastavljenu od n^2 ćelija, gdje je svaka obojana crno ili bijelo, kažemo da je *konveksna* ako za svaku crno obojanu ćeliju vrijedi da su ćelije direktno iznad i direktno ulijevo od nje također obojane crno. Neka je T broj parova ćelija (u, v) s konveksne ploče takvih da je u crno, v bijelo, te su u i v u istom retku ili stupcu. Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti T.

4. Na sastanku je bilo $12k$ ljudi, gdje je k prirodan broj. Svaka osoba se pozdravila s točno $3k + 6$ ostalih. Za svake dvije osobe, vrijedi da je broj ljudi koji su se pozdravili s oba isti. Dokaži da je $k = 3$.

5. Pretpostavimo da imamo 100 utega čija suma težina je $2S$. Za prirodan broj k kažemo da je megadobar ako je od tih 100 utega moguće izabrati k njih čija suma težina je S. Koliko najviše megadobrih brojeva može postojati?

6.2. M3: Vjerovanje u više noma - Ivan Sinčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Osnovni Teorem Algebre:

Polinom $P(x)$ stupnja n s kompleksnim koeficijentima ima n kompleksnih korijena. Može biti jedinstveno prikazan na sljedeći način

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Vieteove formule:
Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sa kompleksnim korijenima $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Tada:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Eisensteinov kriterij ireducibilnosti Ako je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima i postoji prost broj p takav da $p \nmid a_n$ i $p \mid a_k$ za svaki $k < n$ te $p^2 \nmid a_0$, tada se P ne može prikazati kao umnožak dva nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Bezout:
Polinom $P(x)$ je djeljiv sa $(x - a)$ akko $P(a) = 0$.

Najbitnija lema

Ukoliko $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, i a i b su cijeli brojevi, tada

$$a - b \mid P(a) - P(b)$$

Zadaci

1. Neka je p prost broj. Dokaži da je polinom $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \ldots + x + 1$ ireducibilan.
2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cijeli brojevi. Dokaži da je polinom $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ ireducibilan.
3. Postoji li polinom s realnim koeficijentima za kojeg vrijedi $P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?
4. Neka je $P(x) = x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ realan polinom s nenegativnim koeficijentima koji ima n realnih nultočaka. Dokažite:
   (a) $P(2) > 3^n$.
   (b) $P(x) \geqslant (x+1)^n \quad \forall x \geqslant 0$.
   (c) $a_k \geqslant \binom{n}{k}$ za $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
5. Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima t.d. $P(P(\ldots P(x)\ldots)) = x$ (n puta) za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $P(P(x)) = x$.
6. Nađi najmanji prirodan broj n za koji se polinom

   $$P(x) = x^{n-4} + 4n$$

   može prikazati kao produkt 4 nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

7. Neka je P polinom stupnja $n \geqslant 2$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da su mu nultočke različite i u intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Neka je a vodeći koeficijent polinoma P. Dokaži da je $|a| \geqslant 2^n + 1$.

8. Odredi sve parove $P(x), Q(x)$ normiranih kompleksnih polinoma takve da $P(x)$ dijeli $Q(x)^2 + 1$ i $Q(x)$ dijeli $P(x)^2 + 1$.

9. **(Poljska 2003.)** Pronađi sve polinome W s cjelobrojnim koeficijentima koji zadovoljavaju uvjet da je za svaki prirodan broj n, $2^n - 1$ djeljivo s $W(n)$.

10. **(Vojtech 2019.)** Trojka polinoma $u, v, w \in \mathbb{R}[x, y, z]$ je dobra ako postoje $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$ takvi da vrijedi jednakost
$$u^{2019}P + v^{2019}Q + w^{2019}R = 2019.$$
    (a) Je li trojka
    $$u = x + 2y + 3, \quad v = y + z + 2, \quad w = x + y + z$$
    dobra?

    (b) Je li trojka
    $$u = x + 2y + 3, \quad v = y + z + 2, \quad w = x + y - z$$
    dobra?

11. Odredi sve polinome $P(x)$ koji zadovoljavaju $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

12. Neka polinom $P(x)$ ima svojstvo da za svaki $y \in \mathbb{Q}$ postoji $x \in \mathbb{Q}$ takav da je $P(x) = y$. Dokaži da je P linearan polinom.

6.3. M4: Ekstremističke ideje - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b, c) takve da je $(a + 36b)(36a + b) = 2^c$.
2. Nek a je $N \geqslant 2$ prirodan broj, i neka su $a_0, a_1, ..., a_N$ realni brojevi takvi da je $a_0 = a_N = 0$ i
$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$
za $i = 1, 2, ..., N - 1$. Dokaži da vrijedi $a_i \leqslant 0$ za $i = 1, 2, ..., N - 1$.
3. Realni brojevi $x_1, \ldots, x_{2011}$ zadovoljavaju
$$x_1 + x_2 = 2x_1',\ x_2 + x_3 = 2x_2',\ \ldots,\ x_{2011} + x_1 = 2x_{2011}'$$
gdje je $x_1', x_2', \ldots, x_{2011}'$ permutacija od $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$. Dokaži da vrijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2011}$.
4. Učenici u razredu formiraju nekoliko grupa, tako da je svaka tročlana i svake dvije različite grupe imaju najviše jedan zajednički element. Dokaži da ako u razredu ima 46 učenika, onda postoji skup od 10 učenika tako da nijedna grupa nije njegov podskup.
5. U nekoj zemlji neki parovi gradova povezani su jednosmjernim letovima (nikad ne postoje dva leta između gradova). Kažemo da je grad B vidljiv iz grada A ako je moguće nizom letova doći od A do B (smatramo da je A vidljiv iz A). Pretpostavimo da za svaka dva grada P i Q postoji grad R takav da su P i Q vidljivi iz R. Dokaži da postoji grad iz kojeg je vidljiv svaki drugi grad.
6. U nekom parlamentu s $3n$ ljudi, svatko je ošamario jednu osobu. Dokaži da postoji skup od n ljudi tako da se nikoja dva među njima nisu ošamarili.
7. U nekom parlamentu, neki parovi zastupnika su neprijatelji. Svaki zastupnik ima manje od 4 neprijatelja. Dokaži da je moguće podijeliti zastupnike u dvije grupe tako da svaki zastupnik ima najviše jednog neprijatelja u svojoj grupi.
8. Neka je n prirodan broj. Neka su A, B i C skupovi s n elemenata koji čine particiju od $\{1, \ldots, 3n\}$. Dokaži da postoje tri elementa takva da je po jedan iz A, B i C, te da je zbroj dva od njih jednak trećem.
9. Neka su n i t prirodni brojevi. U nogometnoj ligi, svaka momčad ima najviše t različitih dresova. Svaki dres je obojan u točno jednu boju od n dostupnih, i za svaku od n boja postoji momčad koja ima dres te boje. Skup momčadi S je bojoidentificirajući ako svakoj momčadi iz S možemo pridružiti jedan njen dres, tako da ni jednoj momčadi iz S nije pridružen dres koji je jedan od dresova neke druge momčadi iz S.

   Odredi najveći prirodan broj $g(n, t)$ takav da u ligi sigurno postoji bojoidentificirajući skup veličine $g(n, t)$.

6.4. M5: Individualna simulacija - MEMO mentori

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Neka je n prirodan broj, i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi čiji zbroj je 0. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$, definirajmo $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$. Pretpostavimo da vrijedi $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geqslant 0$ za sve (i, j) takve da je $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Dokaži da vrijedi
$$\max_{1 \leqslant l \leqslant n} |a_l| \geqslant \max_{1 \leqslant m \leqslant n} |b_m|.$$

2. Neka je r prirodan broj, i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ prirodni brojevi veći od 1 takvi da je
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = 2020.$$
Dokaži da se skup $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ može particionirati u skupove $A_1, A_2, \ldots, A_r$ tako da za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, skup A_i ima a_i elemenata te je zbroj elemenata od A_i djeljiv s 2021.

3. U šiljastokutnom trokutu ABC, visina iz vrha A siječe pravac BC u točki D, a M je polovište stranice $\overline{AC}$. Neka je X točka takva da je $\measuredangle AXB = \measuredangle DXM = 90^\circ$ (pretpostavljamo da X i C leže na suprotnim stranama pravca BM). Dokaži da vrijedi $\measuredangle XMB = 2\measuredangle MBC$.

4. Neka je N prirodan broj. Na ploči je zapisano N cijelih brojeva, od kojih je jedan jednak 0. Svake minute dozvoljeno je na ploču dopisati jedan cijeli broj koji je nultočka nekog nenul polinoma čiji su svi koeficijenti u skupu brojeva do tad zapisanih na ploči. Pretpostavimo da je moguće postići da nakon nekoliko minuta na ploči pišu svi cijeli brojevi veći od -2021 i manji od 2021. Odredi najmanji N za koji je to moguće.

6.5. M7: Ekipna simulacija - MEMO mentori

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Neka je P polinom s realnim koeficijentima. Dokaži da postoje prirodan broj k i polinomi s realnim koeficijentima $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ takvi da je
$$P(x) = P_1(x)^{2021} + \ldots + P_k(x)^{2021}.$$

2. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi
$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2 f(y) - f(x)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Promotrimo 1000 loptica, od kojih je svaka jedne od 40 različitih boja i ima jednako mnogo loptica svake boje. Odredi najmanji n takav da ćemo, kako god poredamo 1000 loptica ukrug, moći pronaći n uzastopnih loptica među kojima se nalaze loptice obojane u barem 20 različitih boja.

4. Neka je $n > 2$ prirodan broj. Neka polja $n \times n$ tablice su crna, a ostala su bijela. U svako bijelo polje upisujemo broj crnih polja koja s njim dijele vrh. Odredi najveću moguću vrijednost koju suma svih upisanih brojeva može poprimiti.

5. Neka je ω kružnica sa središtem O, i A točka izvan nje. Tangente iz točke A diraju ω u točkama B i C. Neka je D presjek pravca AO i ω takav da je $|AO| < |AD|$. Neka je X nožište okomice iz B na pravac CD. Neka je Y polovište dužine $\overline{XB}$. Neka je Z drugo sjecište pravca DY i ω. Dokaži da su pravci AZ i ZC okomiti.

6. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka je ℓ pravac okomit na pravac BD, i pretpostavimo da ℓ siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama P i Q, te polupravce DA i DC redom u točkama R i S. Ako vrijedi $|PR| = |QS|$, dokaži da je polovište dužine $\overline{PQ}$ jednako udaljeno od točaka A i C.

7. Za svaki prirodan broj m, označimo s t_m najmanji prirodan broj koji ne dijeli m. Dokaži da postoji beskonačno prirodnih brojeva n takve da je $n \neq m + t_m$ za sve prirodne brojeve m.

8. Za tročlan skup prirodnih brojeva S kažemo da je *Pitagorin* ako je zbroj kvadrata neka dva broja iz S jednak kvadratu trećeg broja. Dokaži da za svaka dva Pitagorina skupa P i Q postoje prirodan broj m i Pitagorini skupovi $P_1, P_2, \ldots P_m$ takvi da je $P = P_1$ i $Q = P_m$, te skupovi P_i i P_{i+1} imaju neprazan presjek za svaki $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

6.6. M8: Konstrukcije - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

CRT

Ostatak koji neki broj daje pri dijeljenju s brojem a i ostatak koji daje pri dijeljenju s brojem b su potpuno nezavisni ako su a i b relativno prosti. Formalno, ako su $x_1, \ldots, x_n$ cijeli brojevi i ako su $a_1, \ldots, a_n$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi, postoji jedinstven $x \in \{1, 2, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_n\}$ za koji vrijedi

$$x \equiv x_i \pmod{a_i}, \text{ za svaki } i.$$

Eulerov teorem

Neka je n prirodan broj i neka je a cijeli broj relativno prost s n. Tada je $a^{\varphi(n)} - 1$ djeljivo s n.

LTE lema

Vrijede sljedeći rezultati:

(1) Za **neparan** prost broj p, prirodan broj n i cijele brojeve x i y takve da je $x - y$ djeljivo s p, a x i y **nisu** djeljivi s p vrijedi

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

(2a) Za **paran** prirodan broj n i neparne cijele brojeve x i y vrijedi

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1.$$

(2b) Za **neparan** prirodan broj n i neparne cijele brojeve x i y vrijedi

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y).$$

Dirichletov teorem

Neka su a i b relativno prosti cijeli brojevi. Tada niz $(an + b)_{n \in \mathbb{Z}}$ sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva.

Pellova jednadžba

Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Tada postoji beskonačno parova (x, y) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Ako je (x_1, y_1) takav par s najmanjom prvom koordinatom, onda n-ti po veličini par, (x_n, y_n), zadovoljava

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Ako je, nadalje, K neki cijeli broj i ako postoje prirodni brojevi (x, y) za koje je $x^2 - dy^2 = K$, onda postoji beskonačno takvih (x, y).

Schurova lema

Neka je P nekonstantan polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Tada postoji beskonačno prostih brojeva p za koje postoji cijeli broj x takav da p dijeli $P(x)$.

Primitivni korijen

Neka je p prost broj. Tada postoji prirodan broj g takav da brojevi $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ daju različite ostatke pri dijeljenju s p. Takav g zovemo generator ili primitivni korijen modulo p.

Zadaci

1. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n \mid 2^n + 1$.
2. Dokaži da skup $S = \{2^n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ima beskonačan podskup kojem su svi članovi u parovima relativno prosti.
3. Dokaži da postoji 2011 različitih prirodnih brojeva $a_1, \ldots, a_{2011}$ takvih da za svaki par različitih indekasa (i, j) vrijedi $\gcd(a_i, a_j) = |a_i - a_j|$.
4. Neka je $P(x) = x^{909} + 2x^{808} + 3x^7 + x^6 + 111$. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoje cijeli broj u i n u parovima relativno prostih brojeva $x_1, \ldots, x_n$ većih od 1 takvih da je $P(u) = x_1 x_2 \ldots x_n$.
5. Neka je p neparan prost broj. Dokaži da za svaki cijeli broj c postoji cijeli broj a takav da je
$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$
6. Postoji li beskonačno parova prirodnih brojeva (m, n) takvih da $m \mid n^2 + 1$ i $n \mid m^2 + 1$?
7. Neka je p neparan prost broj. Dokaži da postoji permutacija $(q_1, \ldots, q_{p-1})$ od $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ takva da je
$$1^{q_1} + \ldots + (p-1)^{q_{p-1}}$$
djeljivo s p.
8. Neka je P skup svih prostih brojeva i neka je M njegov neprazan podskup takav da za svaki konačan podskup N od M vrijedi da su svi prosti faktori broja za 1 većeg od umnoška svih elemenata skupa N također u skupu M. Dokaži da je $P = M$.

6.7. M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Nađi sve funkcije $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ takve da
$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$
za sve $x, y \in \langle 0,1\rangle$.
2. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da
$$f(n+1) > f(f(n))$$
za sve $n \in \mathbb{N}$.
3. Nađi sve parove funkcija $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da
$$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$
za sve $n \in \mathbb{N}$.
4. Dan je neparan prost broj p. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da:
$$a \equiv b \pmod p \implies f(a) = f(b)$$
$$f(ab) = f(a)f(b)$$
za sve $a, b \in \mathbb{Z}$.
5. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da
$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$.
6. Nađi sve parove funkcija $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da
$$f(x^2 + yg(x)) = xg(x) + f(xy)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
7. Nađi sve parovve funkcija $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da
$$g(f(x+y) = f(x) + (2x+y)g(y)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
8. Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da
$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

6.8. M10: Grafovi - Krešimir Nežmah

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Zadaci su većinom konstruktivni. Grafovi se podrazumjevaju da su jednostavni (nema dvostrukih bridova ili petlji).

Korisne stvari su indukcija i princip ekstrema.

Stabla definiramo kao jednostavne povezane grafove za koje vrijedi jedno od sljedećeg:

- nema ciklusa
- broj čvorova je n, a bridova $n-1$
- između svaka dva čvora postoji jedinstveni put
- micanje bilo kojeg brida učinit će da graf više nije povezan

Različite kombinacije ovih uvjeta su dovoljne za dokazati da je graf stablo. Korisno je imati na umu različite uvjete jer se, ovisno o zadatku, neki lakše dokazuju od drugih.
U svakom povezanom grafu moguće je odabrati podskup bridova koji tvori stablo, tzv. razapinjuće stablo.

Graf nazivamo bipartitnim ako je moguće čvorove pobojati u dvije boje tako da svaki brid povezuje dva čvora različite boje. Bojanje možemo promatrati kao podjelu na skupinu lijevih i skupinu desnih čvorova, gdje bridovi idu samo između lijeve i desne skupine.
Korisno je znati da je graf bipartitan ako i samo ako nema neparnih ciklusa.

Dvostruko prebrojavanje je također ponekad korisno. Kada ga provedemo na parovima (čvor, brid susjedan čvoru) dobivamo lemu o rukovanju:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = 2|E|$$

Ovdje d_k predstavlja stupanj čvora k, a $|E|$ je broj bridova u grafu.
Iz leme o rukovanju slijedi da je broj čvorova s neparnim stupnjem paran.

Eulerov put je put u grafu koji posjećuje svaki brid točno jednom (čvorove možda više puta). Ako se dodatno vraća u početni čvor naziva se Eulerova tura ili Eulerov ciklus.
Dovoljan i nužan uvjet za postojanje Eulerovog puta je da je broj čvorova s neparnim stupnjem jednak 0 ili 2. U slučaju kada svaki čvor ima paran stupanj, zapravo dobivamo Eulerov ciklus, a inače put počinje u jednom od čvorova neparnog stupnja i završava u drugom.
Hamiltonov put i ciklus definiraju se slično, no u ovom slučaju svaki čvor se posjećuje točno jednom, a neki bridovi su možda neposjećeni. Ne postoji jednostavan uvjet koji je nužan i dovoljan za postojanje Hamiltonovog puta ili ciklusa.

U usmjerenim grafovima, ako je riječ o tome iz kojih čvorova je moguće doći do kojih drugih, korisno je promatrati rastav na SCC (Strongly Connected Components). Za dva čvora kažemo da su čvrsto povezana ako postoji put od prvog do drugog te ako također postoji put od drugog do prvog. Lako je provjeriti da je time definirana relacija ekvivalencije kojom se graf particionira na više klasa, a unutar svake klase moguće je od svakog čvora doći do svakog drugog. Možemo zamisliti da svaku klasu komprimiramo u jedan čvor nakon čega dobivamo usmjereni graf bez ciklusa, tj. DAG (Directed Acyclic Graph).

Turnir ili turnirski graf definiramo kao usmjereni potpuni graf.

Stabla i razno

1. Dan je graf sa $n \geqslant 3$ čvorova. Dokažite da za svaki $3 \leqslant k \leqslant n$ postoji ili jednostavan ciklus od najviše k čvorova, ili nezavisan skup od točno $\lceil k/2 \rceil$ čvorova. Nezavisan skup čvorova je takav u kojem nikoja dva čvora nisu povezana bridom.

2. Neka je G povezan graf s m bridova. Dokažite da je moguće označiti bridove s brojevima $1, 2, ..., m$ u nekom poretku tako da za svaki čvor, ako taj čvor ima stupanj barem 2, onda je najveći zajednički djelitelj svih oznaka bridova spojenih na taj čvor jednak 1.

3. Zadano je n točaka u ravnini tako da nikoje tri nisu kolinearne. Svaka točka ima oznaku koja je prirodan broj između 1 i n tako da te oznake tvore permutaciju. Jedan potez sastoji se od biranja dvije različite točke (ako nismo nekad prije izabrali taj par), zamjene njihovih oznaka te konačno crtanjem dužine između njih. Dokažite da je konačnim nizom poteza moguće postići da k-ta točka ima oznaku k, za sve $1 \leqslant k \leqslant n$, te da se nikoje dvije nacrtane dužine ne sijeku, osim možda u krajnjim točkama.

4. Na $n \times m$ pravokutnoj ploči, gdje su n i m neparni prirodni brojevi, su postavljena 1×2 i 2×1 domina tako da prekrivaju sva osim jednog kutnog polja ploče. Dozvoljeni potezi su:

   - Horizontalno pomaknuti 1×2 domino susjedan praznom polju na to prazno polje.
   - Vertikalno pomaknuti 2×1 domino susjedan praznom polju na to prazno polje.

   Dokažite da je moguće nizom takvih poteza postići da je bilo koje kutno polje ploče prazno.

Bipartitnost

5. Zadano je n točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu. Dokažite da je moguće svaku točku pobojati u jednu od dvije boje, crvenu ili plavu, tako da za svaki vertikalni ili horizontalni pravac vrijedi da je apsolutna razlika između broja crvenih i broja plavih točaka na tom pravcu najviše 1.

6. Koliko najviše bridova može imati graf s n čvorova, ako graf ne sadrži nijedan trokut (ciklus veličine 3).

7. $2n$ ljudi sjedi oko okruglog stola, $n \geqslant 2$. Ljudi su podijeljeni u n disjunktnih parova. Dokažite da je moguće svakome dodijeliti jednu od oznaka A ili B tako da u svakom paru jedna osoba ima oznaku A, a druga B, te također da ne postoje tri uzastopne pozicije oko stola gdje sve tri osobe imaju istu oznaku.

SCC-ovi i turniri

8. Dan je jednostavan usmjeren graf sa 101 čvorova. Između svaka dva čvora postoji najviše jedan brid. Svaki čvor ima in-degree i out-degree jednak točno 25. Dokažite da je moguće iz svakog čvora doći do svakog drugog.

9. Dokažite da u turniru s $2^n - 1$ čvorova postoji podskup od njih n koji ne sadrži ciklus.

10. Dokažite da u svakom turniru postoji Hamiltonov put.

11. Dan je turnir tako da od svakog čvora postoji put do svakog drugog. Dokažite da u tom grafu postoji Hamiltonov ciklus.

12. Dokažite da ako u turniru postoji ciklus veličine $k + 1$, onda postoji i ciklus veličine k, za sve $k \geqslant 3$.

13. Dan je turnir od 250 čvorova. Dokažite da je moguće pobojati svaki brid u jednu od 10 boja tako da ne postoji usmjereni lanac od dva brida iste boje.

14. Dano je 2020 parova dječaka i djevojaka. Pretpostavimo da su se rukovali uz sljedeće uvjete:

    - Dječaci se nisu rukovali s dječacima i djevojke se nisu rukovale s djevojkama.
    - Dječak i djevojka unutar svakog para su se rukovali točno jednom.
    - Među svake četiri osobe iz dva para, dogodila su se barem tri rukovanja.

    Dokažite da je moguće odabrati točno 4038 osoba i posložiti ih oko okruglog stola tako da su se svake dvije susjedne osobe rukovale.

15. Turnir nazivamo *neuravnoteženim* ako za svaki podskup od 6 čvorova postoji čvor koji pobjeđuje preostalih 5 ili gubi od preostalih 5. Ako se čvorovi ne razlikuju, koliko postoji različitih neuravnoteženih turnira s 2015 čvorova?

6.9. M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ u $\triangle ABC$ takvom da $|AB| = |AC|$. Neka je P točka na njegovoj opisanoj kružnici i Q točka na $\overline{AP}$ takva da je $|QP| = 2|QA|$. Pravac kroz P okomit na BC siječe MQ u točki N. Dokaži da postoji fiksna kružnica na kojoj, neovisno o odabiru P, leži N.
2. Neka je ABC trokut, M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je D točka takva da je $|AD| = |AB|$, AD je okomito na AB te su C, D sa suprotnih strana AB. Dokaži:
$$\sqrt{|AB| \cdot |AC| + |AM| \cdot |BC|} \geqslant \frac{|CD|}{\sqrt{2}}$$
3. Neka su a, b, c stranice u trokutu i h_a, h_b, h_c visine nasuprot njima, redom. Dokaži da
$$a + b \geqslant \sqrt{c^2 + 4h_c^2}$$
4. Neka je H ortocentar u šiljastokutnom $\triangle ABC$. Neka su O_A, O_B, O_C središta kružnica opisanih $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$ Dokaži da su pravci AO_A, BO_B, CO_C konkurentni.
5. Neka je ABC trokut. Neka su točke P, Q na stranicama $\overline{AB}, \overline{AC}$ redom takve da $|AP| = |AQ|$. Neka su S i R različite točke na $\overline{BC}$ takve da vrijedi $|\angle BPS| = |\angle PRS|$ i $|\angle CQR| = |\angle QSR|$. Dokaži da je $PQRS$ tetivan četverokut.
6. Neka je $ABCD$ četverokut i P točka unutar njega takva da su površine trokutova APB, BPC, CPD, DPA jednake. Dokaži da barem jedna dijagonala raspolavlja površinu četverokuta.
7. Neka je ABC jednakokračan trokut u kojem vrijedi $|AB| = |AC|$. Simetrale kutova $\angle CAB$ i $\angle ABC$ sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u D i E redom. Neka je K središte kružnice upisane trokutu ADC. Ako $|\angle BEK| = 45°$, koje vrijednosti može poprimiti $|\angle CAB|$?
8. Konveksni četverokut podijeljen je dijagonalama na četiri trokuta čije su upisane kružnice sukladne. Dokaži da je taj četverokut romb.
9. Neka je ABC trokut. Neka su M, N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom i neka je T polovište luka $\widehat{BC}$ koji ne sadrži A. Kružnice $\odot AMT$ i $\odot ANT$ sijeku simetrale $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u točkama X i Y koje su unutar trokuta ABC redom. MN i XY se sijeku u K. Dokaži: $|KA| = |KT|$.

Dio II

Zadaci s predavanja na drugom terminu

7. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

7.1. A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Monom je algebarski izraz, umnožak nekog broja varijabli koje predstavljaju brojeve ili druge algebarske izraze. Npr. x, y^2, $2c^3$, $5ab^3c^2$. Polinomi su algebarski izrazi koji se dobivaju zbrajanjem više monoma. Binom je polinom koji se sastoji od 2 člana npr. $a+b$, $5y+8z$; a trinom od 3 npr. $x+y+z$, $a^2+2ab+b^2$, $2x^2+5x-12$. Stupanj monoma je zbroj eksponenata svih varijabli koje sadrži, a stupanj polinoma je najveći stupanj od svih monoma koji ga čine. Faktorizirati polinom znači napisati ga u obliku umnoška polinoma manjih stupnjeva i nužno je za rješavanje brojnih zadataka iz algebre i teorije brojeva.

Polinom se faktorizira grupiranjem članova tako da se iz njih može izlučiti zajednički faktor ili da se na njih može primijeniti neka od poznatih formula. Cilj svakog koraka faktorizacije je grupirati članove polinoma, tako da kada se svaka skupina faktorizira posebne, sve sadrže neki polinom kao zajednički faktor koji se tada izluči iz svih skupina. U sljedećem koraku treba faktorizirati jedan od polinoma manjih stupnjeva čiji je umnožak početni polinom. Primjer: $a^3+2b^3+a^2b+2ab^2 = a^3+a^2b+2ab^2+2b^3 = a^2\cdot(a+b)+2b^2\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a^2+2b^2)$. Ponekad polinom nije moguće faktorizirati samo pomoću članova koji su već napisati nego trebati pametno odabrati novi član koji ćemo dodati i oduzeti na polinom tako da se ne promijeni vrijednost polinoma. To nam omogućuje da dodani član grupiramo s postojećima i tako faktoriziramo izraz. Primjer: $a^2-b^2 = a^2+ab-ab-b^2 = a\cdot(a+b)-b\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a-b)$.
Također, u nekim zadacima su zadani posebni uvjeti koji vrijede za brojeve u polinomu te se oni mogu koristiti u faktorizaciji izraza tako da se dio uvjeta izjednači s ostatkom i onda se neki članovi polinoma grupiraju tako da se kod izlučivanja u zagradi dobije dio uvjeta i onda se on može zamijeniti s ostatkom uvjeta.

Npr. ako je uvjet $a+b+c=0$, u faktorizaciji polinoma se može grupiranjem dobiti $a+b+c$ i zamijeniti s 0, a i zamijeniti s $-b-c$ ili $b+c$ zamijeniti s $-a$.

Popis korisnih formula i tvrdnji:

- Razlika kvadrata: $a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$
- Kvadrat zbroja: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- Kvadrat razlike: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- Razlika kubova: $a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
- Zbroj kubova: $a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$
- Kub zbroja$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- Kub razlike $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- Kvadratni polinom oblika ax^2+bx+c gdje su a, b i c realni brojevi se ponekad može brzo faktorizirati u obliku $(a_1x-x_1)\cdot(a_2x-x_2)$ gdje je $a_{12}=a$, $-a_1x_2-a_2x_1=b$, $i\,x1\cdot x2=c$;a sigurno se može faktorizirati u obliku $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ gdje je $x1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Kvadrat trinoma $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
- Kub trinoma $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$
- Izraz oblika $x^a+x^b+x^c$, gdje su a, b, i c prirodni brojevi ili nula koji daju međusobno različite ostatke pri djeljenju s 3, može se faktorizirati i jedan od faktora će biti x^2+x+1, drugi faktor će biti pozitivnog stupnja, ako je početni izraz različit od x^2+x+1.
- a^n-b^n gdje je n prirodan broj se može faktonizirati kao $(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
- a^n+b^n gdje je n neparan prirodan broj se može faktonizirati kao $(a+b)\cdot(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$

Lakši zadaci

1. Faktoriziraj a^3+a^2+a+1
2. Faktoriziraj $ac+bd+ad+bc$
3. Faktoriziraj $a^2+10ab-70b-49$
4. Faktoriziraj $a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4$
5. Faktoriziraj $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-4abcd$
6. Faktoriziraj x^2+3x+2
7. Faktoriziraj a^2+5a+6
8. Faktoriziraj $6a^2+7a+2$
9. Faktoriziraj $2x^4-17x^2-9$
10. Faktorziraj $(x^2-2x-1)^2-4$
11. Faktoriziraj $a^5+2a^3-8a^2-16$
12. Faktoriziraj $a^3-a^2b-ab^2+b^3$
13. Faktoriziraj $8a^3b^3+36a^2b^2c+54abc^2+27c^3$
14. Zapiši kao cijeli broj $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
15. Faktoriziraj a^4+a^2+1
16. Faktoriziraj x^5+x+1

Umjereni zadaci

17. $a,b,c\in\mathbb{R}$ Dokaži da iz $(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2=(a+b-2c)^2+(a-2b+c)^2+(b+c-2a)^2$ slijedi $a=b=c$.
18. Dokaži da je a^4+4b^4 složen broj ako su $a,b\in\mathbb{N}$ i $a,b\geqslant 2$.
19. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy+1\neq 0$ i neka su
$$A=\frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1} \quad \text{i} \quad B=\frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y}\ .$$
Odredi koji je broj veći, A ili B.
20. Dokaži ako za realne brojeve $a,b,c\neq 0$ vrijedi $a+b+c\neq 0$ i
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$
onda je zbroj neka dva od njih jednak nuli.
21. Dokaži da ako su $a,b,c\in\mathbb{R}$ i $a+b+c=0$ vrijedi $a^3+b^3+c^3=3abc$.
22. Pojednostavi $\dfrac{a^3}{(a-b)\cdot(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)\cdot(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)\cdot(c-b)}$.
23. Dokaži da ako su $a,b,c\in\mathbb{R}$ i $a+b+c=0$ vrijedi $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.
24. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24$, pri čemu su a, b i c realni brojevi, te odredi a, b i c za koje se ta vrijednost postiže.

25. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2ab + b^2 &= a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 &= b \end{aligned}$$

u skupu realnih brojeva.

Teži zadaci

26. Dokaži da za nenegativne realne brojeve $x,\ y,\ z$ i t vrijedi

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

27. Dokaži da ako su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a+b+c=0$ vrijedi $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5} = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

28. Brojevi a, b, c, d zadovoljavaju relaciju $a+b+c+d=0$. Neka je $S_1 = ab+bc+cd$ i $S_2 = ac+ad+bd$. Pokažite da je $5S_1 + 8S_2 \leqslant 0$.

29. Neka su x, y, z različiti realni brojevi. Dokaži

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0$$

7.2. C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Matematička indukcija metoda je dokazivanja kojom se dokazuju tvrdnje vezane uz skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Princip matematičke indukcije: Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n+1$, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.
Matematička indukcija provodi se u tri koraka:

1. **BAZA:** dokazujemo zadanu tvrdnju za najmanji slučaj, najčešće $n = 1$.
2. **PRETPOSTAVKA:** pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$.
3. **KORAK:** koristeći pretpostavku, dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n+1$.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije. Ponekad nam je potrebno više informacija (pretpostavki) da bismo pokazali korak indukcije pa u drugom koraku indukcije pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za sve $n \leqslant k$ za neki proizvoljan k prirodan broj.

Primjer 1. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje.
Baza indukcije. Trebamo dokazati da navedena jednakost vrijedi za broj n = 1. Lijeva strana jednakosti zapravo predstavlja zbroj svih brojeva od 1 do n pa je u ovom slučaju jednaka 1, dok je desna strana jednaka

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da jednakost

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

Korak indukcije. Trebamo dokazati da jednakost vrijedi i za $k+1$, odnosno da vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

. Lijevu stranu možemo raspisati koristeći pretpostavku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 ... + n}_{prema\ pretpostavci = \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ovime je korak indukcije dokazan, pa tvrdnja zadatka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Lakši zadaci

1. Dokažite da je n-ti neparan broj jednak $2n - 1$ za svaki prirodan broj n.
2. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$.

3. Matematičkom indukcijom provjerite sljedeće formule za zbrojeve potencija $S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, k \in \mathbb{N}$.
$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$
$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$S_3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

4. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

5. Matematičkom indukcijom dokaži:
a) $5|6^n + 4$
b) $13|3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}$
c) $100|7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^{4n}$

6. Dokaži da je zbroj kutova u mnogokutu s $n + 2$ stranice jednak $n \cdot 180°$.

7. Dokaži da je $2^{2^{n+2}} + 4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n.

8. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s n - 1 loptica duž stranice, itd. Dokažite da je za piramidu od n slojeva potrebno $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$loptica.

Teži zadaci

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži jednakost:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

10. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn ili više.

11. Dokaži da je za svaki prirodni broj n, broj

$$\underbrace{\overline{22...22}}_{\text{n znamenaka}} - 3^n + 1$$

djeljiv brojem 7.

12. Za sve prirodne brojeve n i $m \geqslant 2$ dokaži:

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}} < m + 1$$

13. Označimo $n - ti$ po redu prost broj sa p_n. Dokažite da vrijedi $p_n < 2^{2^n}$.

14. (Lema o rukovanju) U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

15. Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamanja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. Ogrlica može biti i bez kamenja. Dokažite da se poglavičina naredba može izvršiti koristeći $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ različitih vrsta kamenja. I da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.

7.3. C25: Logika i dokazi - Matko Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćete se s osnovama matematičke logike i raznim načinima dokazivanja. Za razliku od predavanja koje ste do sada slušali, bit će nam bitnije kako i na koji način nešto dokazati nego ono što zapravo dokazujemo. Svrha predavanja je da usvojite kako pristupiti zadacima prikladnim načinima dokazivanja te da te dokaze provede pravilno, tj. da znate kada ste nešto zaista dokazali.

Započet ćemo s nekoliko uvodnih zadataka. Svaki ćemo dokazati na različit način. Pokušajte uočiti razlike među dokazima i razmisliti s kojima ste se već susreli. Sve načine dokazivanja uskoro ćemo detaljnije obraditi zajedno s nekim logičkim pojmovima.

1. Dokažite da je zbroj parnog i neparnog broja neparan broj.

   Rješenje. Zapišemo li parni broj u obliku $2k$, a neparni u obliku $2l+1$ za neke prirodne brojeve k i l, tvrdnja slijedi direktno jer je $2k+2l+1 = 2(k+l)+1$, što je neparan broj.

2. Dokažite da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1.

   Rješenje. Podijelimo zadatak slučajeve ovisno o parnosti. Ako je početni prirodni broj n paran, možemo ga zapisati u obliku $2k$ za neki prirodan broj k. Sada zbog $(2k)^2 = 4k^2$, pa je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0. Slično, ako je početni broj neparan, možemo ga zapisati u obliku $2k+1$ za neki k, pa zbog $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$, pa pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1.

3. Dokažite da ne vrijedi $x-y = y-x$, za cijele brojeve x i y.

   Rješenje. Dovoljno je pronaći neke x i y za koje tvrdnja ne vrijedi, npr. 2 i 7.

4. Ivica je na izlet ponio izvjesnu svotu novaca. Za ulazak u muzej potrošio je $\frac{3}{7}$ukupne svote, za sok je dao $\frac{3}{5}$ ostatka, a zatim je za kupnju suvenira potrošio $\frac{3}{8}$ ostatka novca koji mu je preostao nakon kupnje muzejske ulaznice i soka. Koliko je kuna Ivica imao na početku izleta, ako mu je ostalo 8 kuna?

   Rješenje. Rješavanjem unatrag kao u zadacima iz nižih razreda dobijemo da je imao 56kn.

5. Dokažite Dirichletovo pravilo: ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

   Rješenje. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga.

6. Dokažite da vrijedi tvrdnja: ako je a^2 paran, onda je i a paran.

   Rješenje. Dokazat ćemo nešto drugačiju tvrdnju: ako je a neparan, tada je i a^2 neparan. Naime, ako je n neparan, vrijedi $a = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ za neki n, što je neparno. Ukoliko vrijedi ova tvrdnja, vrijedi i tvrdnja zadatka. Za sada razmislite zašto, a kasnije ćemo to detaljno objasniti.

Nakon uvodnih zadataka vidimo da se nekih metoda dokazivanja nije lako odmah sjetiti ili nije sasvim jasno zašto takvi dokazi vrijede. U tome će nam pomoći malo znanja iz logike. Nemojte da vas zabrine količina novih pojmova - njihova jedina svrha je da nam pomognu u razumijevanju nekih vrsta dokaza. Uostalom, s mnogima ste se već prije sreli iako možda niste bili toga svjesni. Nakon svakih nekoliko pojmova nalazi se izbor zadataka na kojima ćemo ih izvježbati.

Tvrdnja i negacija

Tvrdnja je neka izjava, rečenica, sud koja je ili istinita ili neistinita, npr. "Danas je subota", "Tri je paran broj", "Sunce sija i vjetar puše", "Svaki broj djeljiv s 10 završava nulom", "Dva je paran broj ili je prost", itd. Navedite još primjera!

Negacija tvrdnje je tvrdnja suprotna polaznoj - govore nam istu informaciju, ali jedna drugoj su značenjem suprotne jer istinita tvrdnja negacijom postaje neistinita, i obratno. Pokušajte negirati tj. zanijekati tvrdnje koje ste naveli kao primjere, npr. "Danas nije subota."

Pazite pritom što se događa s veznicima poput "i" i "ili" jer nije sasvim očito. Naime, negacija će "pretvoriti" ta dva veznika (ili bilo koje veznike koje nose isto značenje kao oni: npr. veznici "a" i "ali" i još neki veznici u jeziku logike imaju isto značenje kao veznik "i") u onaj suprotni, i negirati tvrdnje koje su bile povezane tim veznikom.

Negacije preostalih gornjih tvrdnji bile bi "Tri nije paran broj", "Sunce ne sija ili vjetar ne puše", "Dva nije paran ni prost". Zašto to ima smisla?

Dobra provjera jeste li nešto dobro negirali je da je točno jedna tvrdnja od polazne tvrdnje i njene negacije istinita te da polazna tvrdnja i negacija zajedno obuhvaćaju sve mogućnosti.

1. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite i negirajte ih: "Pravokutni trokuti su jednakostranični i dva je prost broj", "Ne pijem, ne pušim, ne psujem", "Ili sam preumoran, ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije ni prost ni složen."

Kontraprimjer

Pazite pri negiranju tvrdnji koje sadržavaju riječi "svaki" ili "postoji" ("neki"). To smo koristili u 3. zadatku. Npr. negacija tvrdnje "Svi brojevi su parni" nije "Svi brojevi su neparni" - dovoljno je da je samo jedan broj neparan da polazna tvrdnja ne bi vrijedila i jednom kad nađemo takav primjer polazna tvrdnja ne vrijedi. Takav primjer zovemo "kontraprimjer", a točna negacija je "Postoji neparan broj." Tako smo kontraprimjerom dokazali 3. zadatak iz uvoda.

Slično je i kada se "svaki" i "postoji" zamijene: negacija tvrdnje "Postoji paran prost broj" je "Svi prosti brojevi su parni". Razmislite zašto "Postoji neparan prost broj" nije ispravna negacija.

2. Dokažite da za cijele brojeve x i y općenito ne vrijedi $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ tako da nađete kontraprimjer.
3. Dokažite da nije istina da su svi složeni brojevi djeljivi svim prostim brojevima koji su manji od njih.

Direktan dokaz

Implikacija je tvrdnja koja je sastavljena od uzroka i posljedice, npr. "Ako pada kiša, onda trava raste", "Ako je geometrijski lik kvadrat, onda je taj lik i pravokutnik", "Ako je broj prirodan, onda je i cijeli", itd. U matematici ćemo uzrok često nazivati pretpostavkom, a posljedicu tvrdnjom. Navedite još primjera implikacija! Oznaka za implikaciju je $\Rightarrow$. Za tvrdnju oblika $A \Rightarrow B$ kažemo da je B nužan uvjet za A, ako vrijedi A tada nužno vrijedi i B, također kažemo da je A dovoljan uvjet za B, dovoljno je da vrijedi A jer tada odmah vrijedi i B.

Dokaz iz 1. uvodnog zadatka zapravo je samo niz implikacija koje se nadovezuju jedna na drugu. Kada dokaz slijedi direktno kao posljedica nekih istinitih tvrdnji, kažemo da se radi o direktnom dokazu.

Dokaz podjelom na slučajeve

Drugi zadatak dokazan je na sličan način kao prvi, samo je prvo bila potrebna podjela na slučajeve. To je korisno imati na umu ako ne znate pristupiti zadatku: podijelite ga na više slučajeva, a ako niste sigurni kako napraviti podjelu, pokušajte uočiti neke pravilnosti na nekoliko primjera da lakše dobijete ideju za moguće slučajeve. Pazite da obuhvatite sve moguće slučajeve svojom podjelom!

4. Dokažite da kub prirodnog broja pri dijeljenju s 9 daje ostatak 0, 1 ili 8.

Dokaz kontradikcijom

Kako negiramo implikaciju? Razmislite što bi imalo smisla! Točne negacije gornjih tvrdnji su "Kiša pada i trava ne raste", "Geometrijski lik je kvadrat, ali nije pravokutnik", "Broj je prirodan i nije cijeli". Dakle, negacija implikacije je tvrdnja u kojoj je istovremeno pretpostavka ostala ista, a posljedica je negirana. Važno je primijetiti da je tvrdnja oblika "ako A onda B" jednaka tvrdnji "vrijedi A ili ne vrijedi B".

Dokaz kontradikcijom vrsta je indirektnog dokaza jer tvrdnju ne dokazujemo izravno već tako da dobijemo kontradikciju, tj. proturječnost, nešto besmisleno. Kada to koristimo?

Ako nismo sigurni kako dokazati da neka implikacija vrijedi, možda je lakše pokušati dokazati da njena negacija ne vrijedi. Sjetimo se: to znači da istovremeno vrijedi uzrok (pretpostavka), a ne vrijedi posljedica (tvrdnja). To napravimo tako da pretpostavimo da vrijedi negacija tvrdnje i dođemo do neke tvrdnje koja nema smisla, tj. do kontradikcije.

Peti uvodni zadatak dokazali smo svođenjem na kontradikciju: pretpostavili smo da vrijedi uzrok i posljedica ne vrijedi, ali polazeći od toga dobili nešto što nema smisla, dakle naša pretpostavka nije bila istinita, što znači da je njena negacija (tj. početna tvrdnja) istinita, što smo i htjeli dokazati.

5. Tri dječaka došla su na igralište s loptama A, B, C različitih boja. Jedna lopta je siva, druga bijela, a treća plava. Koje su boje lopte ako je samo jedna od tri izjave istinita: A je plava, B nije plava, C nije siva?
6. Tri osumnjičenika dali su sljedeće iskaze:
   A: Iskaz osobe B je neistinit.
   B: Iskaz osobe C je neistinit.
   C: Lagale su i osoba A i osoba B.
   Tko govori istinu?
7. U seocu Istinolažje žive Istinići koji uvijek govore istinu i Lažići koji uvijek lažu. Susreli ste četiri stanovnika A, B, C, D i rekli su vam sljedeće:
   A: Mi smo sva četvorica Lažići.
   B: Ne, samo je jedan od nas Lažić.
   C: Među nama su točno dva Lažića.
   D: Ja sam Istinić.
   Je li stanovnik D uistinu Istinić?
8. Neka su a, b i c međusobno različite znamenke različite od nule. Može li zbroj $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$ biti jednak kvadratu nekog prirodnog broja
9. Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.
10. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Još malo o implikaciji

Još jedan važan pojam vezan uz implikaciju je **obrat**: tvrdnja koju dobijemo kada "obrnemo" uzrok i posljedicu, npr. "Ako trava raste, onda kiša pada", "Ako je geometrijski lik pravokutnik, onda je kvadrat", itd. Uočite da čak i ako je tvrdnja istinita, njen obrat uopće ne mora biti istinit, kao što je slučaj u ovim primjerima.

11. Smislite tri istinite implikacije o matematičkim pojmovima i negirajte ih!
12. Napišite njihov obrat i odredite je li istinit ili ne.
13. Napišite obrat Talesovog teorema: Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.
14. Dokažite da ne vrijedi obrat sljedeće tvrdnje: Umnožak dvaju prirodnih brojeva a i b djeljiv je nekim prirodnim brojem c kada je barem jedan od faktora umnoška djeljiv brojem c.
15. Dokažite sljedeću tvrdnju i provjerite vrijedi li obrat: Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je s 8.
16. Provjerite vrijedi li obrat ove tvrdnje: Ako je prirodan broj djeljiv s 12, onda je djeljiv s 3 i 4.

Dokazivanje unatrag

Primjer implikacije kojoj su oba smjera istinita je npr. Talesov ili Pitagorin poučak, i tu vrstu implikacije zovemo **ekvivalencija**. Ona je zapravo sastavljena od dvije implikacije jer obuhvaća oba smjera. U vašoj srednjoškolskoj

matematičkoj karijeri susrest ćete se s dokazivanjem ekvivalencija i bit će jako važno da uvijek dokažete obje implikacije, tj. oba smjera.

U tom slučaju također ne koristimo riječi "ako" i "onda", već izraz "ako i samo ako": "Trokut je pravokutan ako i samo ako je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze." Česta je i jezična konstrukcija "odredi nužan i dovoljan uvjet". Oznaka za ekvivalenciju je $\Leftrightarrow$.

Na temelju ekvivalencije možemo dokazivati neke vrste zadataka "unatraške", jer oba smjera rješavanja vrijede. To smo napravili u 4. zadatku iz uvoda. Danas se nećemo previše baviti takvim zadacima, ali imajte na umu ovu metodu rješavanja i zašto je povezana s ekvivalencijom.

Dokaz po kontrapoziciji

Iako obrat ne mora uvijek biti istinit, postoji vrsta obrata koja je uvijek istinita ako je polazna tvrdnja istinita, a zove se obrat po kontrapoziciji. Obrati po kontrapoziciji gornjih tvrdnji bili bi "Ako trava ne raste, onda kiša ne pada", "Ako geometrijski lik nije pravokutnik, onda nije ni kvadrat", "Ako broj nije cijeli, nije ni prirodan".

Ono što se dogodi je da napravimo "običan" obrat, te zatim obe tvrdnje u implikaciji negiramo. To je ono što smo koristili u 6. zadatku u uvodu. Takav dokaz je indirektan jer nismo dokazali polaznu tvrdnju već njen obrat po kontrapoziciji, odakle je tek slijedila polazna tvrdnja.

17. Smislite tri implikacije o matematičkim pojmovima i napišite kako glasi njihov obrat po kontrapoziciji. Uvjerite se da su istinitosne vrijednosti implikacije i njenog obrata po kontrapoziciji jednake.
18. Zadana je tvrdnja: "Ako je n prirodan broj, onda je i cijeli broj". Napišite ovoj tvrdnji negaciju, obrat, obrat po kontrapoziciji, te za svaku tvrdnju dokažite je li istinita ili ne.
19. Dokažite koristeći obrat po kontrapoziciji: ako je kvadrat nekog broja višekratnik broja 5, onda je i on sam višekratnik broja 5.
20. Dokažite obratom po kontrapoziciji da ako je $x^2 - 6x + 5$ paran broj, onda je x neparan broj.

Hvala Patriciji koja je pripremila većinu predavanja

7.4. G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Poučci o sukladnosti trokuta. Dva trokuta su sukladna ako se poklapaju u

- svima trima stranicama (SSS poučak)
- dvjema stranicama i kutom između njih (SKS poučak)
- jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (KSK poučak)
- dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj (SSK poučak)

Sukladnost dva trokuta označavamo simbolom $\cong$ (npr. $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$).

Poučci o sličnosti trokuta. Dva trokuta su slična ako

- im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (SKS poučak)
- su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (KK poučak)
- su im odgovarajuće stranice proporcionalne (SSS poučak)
- su im jednaki omjeri dviju stranica i kut nasuprot veće od njih (SSK poučak)

Sličnost dva trokuta označavamo simbolom $\sim$ (npr. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$). Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest *stalan* (za te trokute) i naziva se koeficijentom sličnosti k.

Na natjecanjima, sukladnost i sličnost su često korisni alati u raznim geometrijskim situacijama te ih dokazujemo/pronalazimo koristeći neke već poznate teoreme, tvrdnje ili metode kojih ćemo se ukratko prisjetiti.

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je $180°$), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni
- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni
- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta
- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta
- spojnica polovišta dvije stranice trokuta naziva se srednjicom i ona je paralelna s trećom stranicom i jednaka polovici njene duljine
- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)
- u pravokutnom trokutu je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze (Pitagorin poučak)
- svaka je točka na simetrali kuta manjega od $180°$ jednako udaljena od krakova tog kuta (pod udaljenosti točke i pravca podrazumijevamo udaljenost točke i nožišta okomice iz točke na taj pravac)
- svaka je točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine
- zbroj unutarnjih kutova u općenitom mnogokutu s n stranica je $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$), zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je $360°$

Lakši zadaci

1. Nad katetom $\overline{AC}$ i hipotenuzom $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su kvadrati $ACFG$ i $ADEB$. Dokaži da je $|CD| = |BG|$.
2. Neka je točka T unutar kružnice k i neka se tetive kružnice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku u T. Dokaži da je $|AT|\cdot|TC| = |BT|\cdot|TD|$ (umnošci s lijeve i desne strane jednakosti se nazivaju *potencijom točke* T u odnosu na k).

3. U trokutu ABC je $|AB| = 30$mm i $|AC| = 60$mm. Iz točke D na stranici $\overline{AC}$ nacrtan je pravac koji stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki E tako da je $|\angle ADE| = |\angle CBA|$. Odredi $|AD|$ i $|AE|$ ako je $|AE|$ dulja od $|AD|$ za 6mm.

4. Dan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka K tako da je $|AK| : |AB| = 5 : 7$, a na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka N tako da je $|DN| : |NC| = 2 : 3$. U kojem omjeru dužina $\overline{KN}$ dijeli dijagonalu $\overline{BD}$, računajući od točke D?

5. Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AC}$ zadana je točka N tako da je $|AN| = 28$cm i $|NC| = 12$cm. Na stranici $\overline{BC}$ zadana je točka M tako da je $|BM| = 14$cm i $|MC| = 16$cm. Površina četverokuta $ABMN$ iznosi 252cm^2. Izračunaj površinu trokuta MNC.

Umjereni zadaci

6. Neka su točke A i B sjecišta kružnica k_1 i k_2. Neka su pravci a i b kroz točku A takvi da a siječe k_1 i u točki C, a k_2 i u točki D i b siječe k_1 i u točki E, a k_2 i u točki F, pri čemu točke C, D, E, F pripadaju istoj poluravnini u odnosu na pravac AB i točka E se nalazi unutar kuta $\angle BAC$. Dokaži da je $\triangle BEC \sim \triangle BFD$.

7. Visina i težišnica trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A dijeli kut $\angle BAC$ na tri jednaka dijela. Odredi sve kuteve trokuta.

8. a) Ako u $\triangle ABC$ simetrala $\angle BAC$ siječe $\overline{BC}$ u K, dokaži da je $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.

   b) Osnovica jednakokračnog trokuta ima duljinu a, a krak duljinu b. Simetrale kutova na osnovici sijeku krakove u točkama P i Q. Dokaži da vrijedi $|PQ| = \frac{ab}{a+b}$.

9. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABLK$ i $ACMN$. Dokaži da vrijedi $|KN| = 2|AP|$, gdje je P polovište dužine $\overline{BC}$.

10. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku,polumjera r_1 i r_2. Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.

    Unutarnja tangenta (je ona zajednička tangenta koja) siječe dužinu koja spaja središta kružnica.

Teži zadaci

11. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C i D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne ovise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

12. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{CD}$ dana je točka E, a na stranici $\overline{BC}$ dana je točka F takva da $\angle BAF = \angle FAE$. Dokaži da je $|BF| + |DE| = |AE|$.

13. Unutar trokuta ABC uzeta je točka P tako da je $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CBP$. Nožišta okomica povučenih iz točke P na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su točke M i N. Dokažite da je $|DM| = |DN|$, gdje je D polovište stranice $\overline{AB}$.

14. Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ u točkama D, E, F redom. Neka je točka K simetrična točki D s obzirom na središte upisane kružnice i neka se pravci DE i FK sijeku u S. Dokaži da je pravac AS paralelan pravcu BC.

7.5. N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Korisne ideje u teoriji brojeva

- Metoda dijeljenja (kvocijenta)
- Metoda faktorizacije
- Metoda ostataka (kongruencija)
- Metoda nejednakosti (ograničavanja)
- Metoda zbroja kvadrata
- Metoda smještanja među kvadrate i kubove

Lagani zadaci

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 11^2 = y^2$.
2. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x^2 - xy - 2y^2 = 18$.
3. Riješite u skupu cijelih brojeva jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{7}{xy} = 1$.
4. Odredite rješenja jednadžbe u skupu prirodnih brojeva $x^2 + 10y = 1234567$.
5. Pokaži da $n^2 + n + 1$ nije potpun kvadrat ni za koji prirodan broj n.

Umjereni zadaci

6. U cjelim brojevima riješi jednadžbu $(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$.
7. Odredi prirodne brojeve a, b, c takve da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
8. Dokaži da jednadžba $19x^3 - 84y^2 = 1984$ nema rješenja u cijelim brojevima.
9. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$10x^3 + 20y^3 + 8xyz = 1999z^3.$$
10. Riješite u prirodnim brojevima jednadžbu
$$3(xy + yz + zx) = 4xyz.$$

Teži zadaci

11. Nađi sve prirodne brojeve x i y takve da vrijedi $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.
12. Nađite sve parove (x, y) cijelih brojeva takve da je $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.
13. Nađite sve proste brojeve p za koje je jednadžba $x^4 + 4 = py^4$ rješiva u cijelim brojevima.

8. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

8.1. A22: Nejednakosti - Paula Horvat

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Za sve nejednakosti vrijede sljedeća osnovna svojstva:

1. $x \geq y$ i $x \leq y \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $x \geq y$ i $y \geq z \implies x \geq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. $x \geq y$ i $a \geq b \implies x + a \geq y + b, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$
4. $x \geq y \implies x + z \geq y + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
5. $x \geq y$ i $a \geq b \implies xa \geq yb, \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$
6. $x \geq 0$ i $y \geq 0 \implies xy \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0, x^2 = 0$ samo za $x = 0$

Na ovom predaanju upoznat ćete različite metode rješavanja nejednakosti.

Svođenje na sumu kvadrata
Svođenje na sumu kvadrata jedna je od metoda rješavanja nejednakosti iz čega proizlazi da je dana suma nenegativna.
Primjer 1. Dokažimo da vrijedi $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ za svaki $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \iff (a - b)^2 \geqslant 0.$$

KAGH nejednakosti

- kvadratna sredina - $K = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$
- aritmetička sredina - $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$
- geometrijska sredina - $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
- harmonijska sredina - $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost **za pozitivne realne brojeve**:

$$K \geq A \geq G \geq H.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Primjer 1. možemo dokaziti i pomoću $K-A$ nejednakosti (nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine).

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \\
\iff &\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \\
\iff &2a^2+2b^2 \geqslant a^2+2ab+b^2 \\
\iff &a^2+b^2 \geqslant 2ab.
\end{aligned}$$

CSB (Cauchy-Schwarz-Bunjakovski) nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geqslant (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i te y_i proporcionalni (u slučaju da niti jedna varijabla nije jednaka nuli, to znači da postoji $k>0$ takav da je $y_i = kx_i,\ \forall i \in \{1,2,\ldots n\}$).

Lakši zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
2. Dokaži da za realne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$$
uz uvijet da je $a+b=1$.
3. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$
4. Ako su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1,$$
dokaži nejednakost
$$(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8.$$
5. Ako je $x+y=1$, dokaži da vrijedi $xy \leqslant \frac{1}{4}$.
6. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a+b \leqslant 2$ vrijedi
$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \leqslant \frac{2}{1+ab}.$$

Umjereni zadaci

7. (Nesbittova nejednakost) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
8. Odredi minimum funkcije
$$F(x,y,z)=(x+y)(y+z)$$
ako je $xyz(x+y+z)=1$ i $x, y, z > 0$.
9. Neka je n prirodan broj. Dokaži da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0,1]$ vrijedi
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n+1)^2 \geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

10. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi. Ako vrijedi $xy + yz + zx = 1$, dokaži da vrijedi

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} < 1.$$

11. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokaži nejednakost

$$a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b} \leqslant 1.$$

12. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geqslant 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

Teži zadaci

13. Dokaži da za trokut sa stranicama a, b, c i površinom S vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

14. (CSB) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

za realne brojeve $x, y, z \neq 1$ koji zadovoljavaju uvjet $xyz = 1$

15. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

za realne brojeve $x, y, z \neq 1$ koji zadovoljavaju uvjet $xyz = 1$.

8.2. C22: Indukcija - Laura Horvat

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Matematička indukcija metoda je dokazivanja kojom se dokazuju tvrdnje vezane uz skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Princip matematičke indukcije: Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 te ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodan broj n slijedi da ona vrijedi i za njegov sljedbenik $n+1$, tada ona vrijedi za svaki prirodan broj.

Provodi se u tri koraka:

1. **BAZA:** dokazujemo zadanu tvrdnju za najmanji slučaj, najčešće $n = 1$.
2. **PRETPOSTAVKA:** pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$.
3. **KORAK:** koristeći pretpostavku, dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n+1$.

Ponekad je potrebno pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za svaki $k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Tako prilagođena metoda naziva se **jaka indukcija**.
Princip matematičke indukcije možemo prilagoditi bilo kojem konačnom ili prebrojivom skupu (npr. parni ili cijeli brojevi).

Lakši zadaci

1. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Dokaži da je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Dokaži jednakost:
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$
4. Neka je $k \in \mathbb{N}$ neparan. Dokaži da broj 2^{n+2} dijeli $k^{2^n} - 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
5. Neka je $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ za sve $n \geqslant 2$, uz početne uvjete $a_1 = 1$, $a_2 = 8$.
Dokaži da je tada $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Umjereni zadaci

6. Dokaži da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi nejednakost:
$$|\sin nx| \leqslant n\,|\sin x|\,.$$
7. Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$. Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.
8. Neka je F_n Fibonaccijev niz definiran s $F_0 = 0, F_1 = 1$ te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geqslant 2$. Dokaži da je
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$
gdje su α i β rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
9. Juraj ima čokoladu pravokutnog oblika koja se sastoji od n kockica. Lomi ju na dijelove tako da svaki od dijelova koje ima razbije po dužini ili širini uz rubove kockica, sve dok ne dobije n razdvojenih kockica čokolade. Dokaži da mu je za to, bez obzira na redoslijed lomljenja, potrebno točno $n-1$ poteza.
10. *(Hanojski tornjevi)*
Dana su tri štapa. Na prvom štapu nalazi se n diskova različitih veličina poredanih tako da su manji uvijek na većima. Diskove je potrebno jedan po jedan premjestiti s prvog na treći štap (služeći se drugim) na način da ni u jednom trenutku veći disk ne bude na manjem. Dokaži da se to može postići s $2^n - 1$ poteza.

Teži zadaci

11. Neka je x pozitivan, a y negativan realan broj takav da je $x + y > 0$. Dokaži da za svaki prirodan broj $n > 1$ vrijedi:
$$x^n + (-1)^{n+1}y^n > n \cdot (x + y) \cdot (-1)^{n-1}y^{n-1}.$$

12. Dokaži da za proizvoljan $n \geqslant 3$ postoje različiti prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji zadovoljavaju
$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

13. Dokaži da se svaki prirodan broj $n \geqslant 8$ može prikazati u obliku $n = 3m + 5k$, za $k,\ m \in \mathbb{N}$.

14. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost:
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

15. Dokaži da za Fibonaccijeve brojeve vrijede sljedeće tvrdnje:
    a) $\gcd(F_{n+1}, F_n) = 1$
    b) $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$, za $m, n \geqslant 0$.

8.3. C26: Invarijante - David Mikulćić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Invarijanta je veličina u sustavu koja se ne mijenja tijekom nekog procesa. Često kad se u zadatku odvija proces kojim se treba doći do određenog rezultata ili konfiguracije je korisno naći invarijantu. Ukoliko rezultat do kojeg trebamo doći ne očuva vrijednost invarijante početnog stanja, time smo pokazali da taj rezultat ne možemo postići.

Bitna napomena: nalaženje invarijante je korisno za isključivanje slučajeva, ali ne možemo koristiti invarijantu kao dokaz da za ostale slučajeve možemo postići cilj, već trebamo pokazati to konstrukcijom.

Primjer. Na ploči se nalaze brojevi 5, 7, 12, 25, 6. Marija u svakom potezu bira par brojeva (x, y), briše ih s ploče i umjesto njih napiše par $(2y - x, 2x - y)$. Može li tako nizom poteza postići da na ploči piše pet desetki?

Rješenje. Vidimo da je suma odabranog para (x, y) nakon poteza jednaka $2y - x + 2x - y = x + y$, odnosno ostaje ista. To znači da je *suma brojeva na ploči invarijanta.* Početna suma je jednaka $5 + 7 + 12 + 25 + 6 = 55$, a kako trebamo na kraju dobiti sumu $5 \cdot 10 = 50$, nije moguće postići traženu konfiguraciju. Međutim, naivno možemo povući zaključak da Marija nekim nizom poteza može doći do svake konfiguracije pet brojeva kojima je zbroj 55, što nije točno (*vidi 3. zadatak*).

Traženje invarijanti u zadacima je obično puno manje očito od ovog primjera. Neki najčešći primjeri invarijanti su ostatak koji suma daje pri dijeljenju s nekim prirodnim n, težinska suma brojeva, umnožak, broj/parnost nekih ekstremnih vrijednosti. Slično invarijantama, postoje i **monovarijante**: varijable čija se vrijednost kroz proces konstantno (ne) povećava ili (ne) smanjuje.

Lakši zadaci

1. Na Ljetnom kampu se igra šahovski turnir. Pravila prvog kruga su sljedeća: svaki igrač igra sa svakim, pobjednik okršaja dobiva 3 boda, gubitnik -1 bod, a ako završi izjednačeno svaki igrač dobiva po bod. Ako u turniru sudjeluje 11 učenika, koliki je zbroj bodova svih igrača na kraju prvog kruga?
2. Ploča 8 x 8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?
3. Vratimo se na zadatak iz primjera: pokaži da Marija potezima opisanima u zadatku ne može postići da na ploči pišu brojevi $7, 9, 11, 13, 15$.
4. U krugu piše 2020 nula i 2 jedinice. Jana u svakom potezu bira tri uzastopna broja i dodaje svakom 1. Može li postići da na kraju svi brojevi budu jednaki?
5. Mirko pred sobom ima papirnati mnogokut, škare i ljepilo. Dopuštena mu je sljedeća operacija: može odrezati dio mnogokuta, zrcaliti ga s obzirom na simetralu dužine stranice po kojoj je rezao i zaljepiti nazad po istoj stranici na kojoj je odrezao dio. Može li Mirko doći do kvadrata ako je krenuo s jednakostraničnim trokutom?

Umjereni zadaci

6. Žaba stoji u točki $(2, 3)$ koordinatnog sustava. U svakom potezu može skočiti s trenutnog polja (x, y) na polje $(0.8x - 0.6y, 0.6x + 0.8y)$ ili $(0.8x + 0.6y, 0.6x - 0.8y)$. Može li žaba nekim nizom poteza doći do polja $(1, 1)$?
7. Anja i Boris igraju igru s pločom čokolade dimenzija 100×100 (kockica). Naizmjence svako od njih ili prelomi jedan od komada čokolade na dva dijela *po crti* ili pojede jedan komad, pri čemu se komadić čokolade dimenzije 1×1 ne može prelomiti. Gubitnik je onaj koji pojede zadnji komad čokolade. Ako Anja kreće prva, tko ima pobjedničku strategiju?
8. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi 1, 2, 3, 4, ... 2011, 2012, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi 2, 4, 6, 8, ... 4022, 4024 ?

9. Na ploči su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 20212021. U svakom potezu biramo broj, brišemo ga i umjesto njega zapisujemo zbroj njegovih znamenki. To ponavljamo dok ne ostanemo samo s jednoznamenkastim brojevima. Hoće li na ploči biti više jedinica ili dvojki?

10. Anja i Boris igraju novu igru. Anja napiše nekoliko prirodnih brojeva na ploču, a Boris zatim pokušava postići da su svi brojevi na ploči isti tako da u svom potezu obriše dva broja (a, b) i umjesto njih napiše dva puta njihov zbroj, dakle $(a + b, a + b)$. Hoće li Boris uspjeti u svom naumu ako Anja na ploču napiše

    a) jednu peticu i četiri jedinice,
    b) dvije petice i 2019 jedinica?

11. Matej i Vedran igraju igru. Matej prvo zadaje par cijelih brojeva (x, y), a Vedran nakon njega par cijelih brojeva (z, w). Matejev cilj je od para (x, y) doći do (z, w) nizom transformacija, gdje za svaku transformaciju ima mogućnost trenutni par (a, b) pretvoriti u (b, a), $(a + b, b)$ ili $(a - b, b)$. Kakav par (z, w) mora Vedran odabrati u odnosu na odabrane Matejeve brojeve (x, y) da osigura da Matej ne može nikakvim odabirom transformacija dobiti tražene brojeve?

Teži zadaci

12. Brojevi 1 i -1 su upisani u vrhovima pravilnog dvanaesterokuta tako da -1 piše u samo jednom vrhu, a u ostalima piše 1. U svakom koraku Luka smije zamijeniti predznake brojeva u 4 uzastopna vrha. Može li Luka ponavljanjem postupka postići da se broj u kojem je pisalo -1 pomakne na susjedni vrh, a da u svim ostalim vrhovima piše 1?

13. Ukrug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

    - svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja
    - odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

    Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane

    a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?
    b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

14. Na ploči je zapisano $n \geqslant 3$ prirodnih brojeva. Potez se sasatoji od biranja tri broja a, b i c s ploče tako da čine stranice nedegeneriranog, nejednakostraničnog trokuta i zamjene s $a + b - c$, $b + c - a$, i $c + a - b$. Dokaži da je broj poteza konačan.

15. Prvih 100 prirodnih brojeva je napisano na ploču, i to svaki točno jednom. Petar u svakom koraku bira dva broja a i b s ploče, briše ih i umjesto njih na ploču napiše najveći zajednički djelitelj brojeva $a^2 + b^2 + 2$ i $a^2b^2 + 3$. Naposljetku na ploči ostane jedan broj. Dokažite da taj broj ne može biti potpun kvadrat.

8.4. G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Teorem 8.4.1 (Teorem o obodnom i središnjem kutu)**.** *Središnji kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od obodnog kuta nad tom istom tetivom.*

Korolar 8.4.2 (Talesov teorem)**.** *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Teorem 8.4.3 (Teorem o kutu između tangente i tetive)**.** *Kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Definicija 8.4.4. Tetivni četverokut *je četverokut kojemu se može opisati kružnica.*

Karakterizacije *(tetivni četverokuti imaju ova svojstva, ali vrijedi i obrat, četverokut za koji vrijedi neko od navedenih svojstava je tetivan)*:

- zbroj nasuprotnih kuteva je $180°$
- U četverokutu $ABCD$ vrijedi neka od ovih jednakosti kuteva (a ako vrijedi neka, vrijedi i svaka):
  - $|\angle ABD| = |\angle ACD|$
  - $|\angle ADB| = |\angle ACB|$
  - $|\angle BAC| = |\angle BDC|$
  - $|\angle CAD| = |\angle CBD|$
- simetrale stranica četverokuta sijeku se u jednoj točki (ta točka je onda središte opisane kružnice)
- **(Ptolomejev poučak)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$.

Zagrijavanje

1. Dokažite "Teorem o kutu između tangente i tetive".
2. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $|\angle ABC| + |\angle CDE|$.
3. Dokažite da ako simetrale unutarnjih kuteva četverokuta tvore četverokut onda je taj (drugi) četverokut tetivan.
4. Dan je trokut $\triangle ABC$. Simetrala kuta u vrhu C siječe opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u točki D (naravno siječe ju i u točki C). Označimo nožište okomice iz D na dužinu $\overline{AB}$ s E. Dokažite da je $|AE| = |BE|$, tj. da je pravac DE simetrala dužine $\overline{AB}$.

Lakši zadaci

5. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.
6. Dokaži da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
7. U šiljastokutnom trokutu ΔABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ΔABC leži na visini $\overline{BN}$.
8. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.
9. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC. Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.
10. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

Teži zadaci

11. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Neka je E sjecište pravaca paralelnih sa AC i BD koji prolaze kroz B i A, redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB u F i G, redom. Dokažite da točke C, D, F i G leže na istoj kružnici.

12. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Pravci l_1 i l_2 su okomiti na AB i redom prolaze točkama A i B. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Okomice iz M na AC i BC sijeku pravce l_1 i l_2 redom u točkama E i F. Ako je D sjecište EF i MC, dokaži da je $\angle ADB = \angle EMF$.

13. Neka je ABC šiljastokutan trokut i neka su D i E redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je F točka takva da je D polovište dužine $\overline{EF}$. Točka G je na segmentu $\overline{CD}$ tako da polovište od $\overline{BG}$ leži na kružnici Γ opisanoj trokutu FDB. Označimo sa H drugo sjecište kružnice Γ i FC. Pokaži da je četverokut $BHGC$ tetivan.

Hvala Luciji koja je pripremila većinu predavanja

8.5. N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Kongruencije su ostatci pri djeljenju nekog cijelog broja s nekim prirodnim brojem. Zapis $a \equiv r \pmod{n}$ (čitamo a je kongruentno r modulo n) znači da je ostatak pri djeljenju broja a s n jednak ostatku pri djeljenju broja r s n, tj. da im je razlika djeljiva s n.

Svojsta Kongruencija

$k \in \mathbb{Z},\ a \equiv a + kn \pmod{n}$
$a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies a + c \equiv b + d \pmod{n}$
$a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n} \implies ac \equiv bd \pmod{n}$
$c \in \mathbb{N}, gcd(c, n) = d,\ a \equiv b \pmod{n} \implies \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{\frac{n}{d}}$
$k \in \mathbb{N},\ a \equiv b \pmod{n} \implies a^k \equiv b^k \pmod{n}$

Definicija Eulerove funkcije: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n)$ je broj brojeva realitivno prostih s n manjih jednakih n.
$gcd(a, b) = 1 \implies \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
Ako je p^k potencija prostog broja p onda $\varphi(p^k) = p^k - p^{(k-1)}$
Ako je $n = \prod_i^k p_i^{\alpha_i}$ gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi onda je

$$\varphi(n) = \prod_i^k (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = n \cdot \prod_i^k (1 - \frac{1}{p_i}).$$

Eulerov teorem $gcd(a, n) = 1 \implies a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
Mali Fermatov teorem - poseban slučaj Eulerova teorema kada je p prost broj:
$gcd(a, p) = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Korisne ideje u teoriji brojeva

- faktoriziranje
- promatranje svih ostataka koje određeni algebarski izraz može poprimiti modulo neki broj
- uspoređivanje algebarskih izraza
- najveći zajednički djelitelj, Euklidov algoritam: $gcd(a, b) = gcd(a, a - b)$
- provjeravanje tvrdnje za male brojeve kako bi se otkrilo pravilo za sve

Lagani zadaci

1. Riješi jednadžbu $2^x - 1 = y^2$ u skupu prirodnih brojeva.
2. Odredi ostatak broja 7^{69} pri dijeljenju s 5.
3. Riješi jednadžbu $2^x + 1 = y^2$ u skupu prirodnih brojeva.
4. Riješi jednadžbu $2^x = 3^y + 5$ u skupu prirodnih brojeva.
5. Dokaži da je broj $3^{105} + 4^{105}$ djeljiv s 13, i da nije djeljiv s 11.
6. Dokaži da je broj $2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljiv s 7.
7. Dokaži da je $2^{2^{6n+2}} + 3$ djeljiv s 19 $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0$.
8. Neka je n neparan prirodan broj veći od 1. Dokaži da je barem jedan od brojeva $2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$ djeljiv s n.

Umjereni zadaci

9. Riješi $3^x - 5^y = z^2$ u skupu prirodnih brojeva.
10. Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je broj $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \ldots + n^{\varphi(n)}$ relativno prost s n.
11. Dokaži da ne postoje prosti brojevi p i q, i prirodan broj n, takvi da je $p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2$.
12. Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje $n \mid (2^{n!} - 1)$.
13. $x, y \in \mathbb{Z}$ Odredi sva rješenja jednadžbe $5^x = 1 + 4y + y^4$.

Teži zadaci

14. Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svim članovima beskonačnog niza
$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \ n \geqslant 1.$$
15. Odredi sve proste brojeve x i y, za koje je $x^y - y^x = xy^2 - 19$.
16. Neka je p prost broj $p > 3$. Dokaži da je broj $1^{p+2} + 2^{p+2} + \cdots + (p-1)^{p+2}$ djeljiv s p^2.
17. Neka je p prost broj i $x_1, x_2, \ldots, x_p$ su cijeli brojevi. Dokaži da ako je $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_p^n \equiv 0 \pmod{p}$, onda vrijedi $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_p \pmod{p}$.
18. Pronađi $n \in \mathbb{N}, 100 \leqslant n \leqslant 2021$ takav da je $\frac{2^n+2}{n}$ prirodan broj.

9. Poglavlje

Zadaci za treću grupu

9.1. A23: Funkcijske - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovome predavanju biti će obrađene razne metode rješavanja funkcijskih jednadžbi. Dakako, ne postoje šablone kojima se one mogu rješavati, ali vidjet ćemo da postoje neki standardni trikovi koje odmah možemo provjeriti prolaze li. Iako se na državnom natjecanju javljaju tek u 4. razredu, svakako su tema koja se jako često javlja na međunarodnim natjecanjima.

Podsjetnik

Definicija 9.1.1. *Funkcija je pridruživanje elemenata iz jednoga skupa (domene) elementima iz drugog skupa (kodomene) pri kojemu je svakomu elementu prvoga skupa pridružen jedinstveni element drugoga skupa*

Definicija 9.1.2. *Injekcija je funkcija $f\colon A \to B$ koja različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, tj. pri kojoj za $a_1, a_2 \in A$:*

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Definicija 9.1.3. *Surjekcija je funkcija $f\colon A \to B$ pri kojoj je svakom elementu kodomene pridružen barem jedan element domene, a slika je cijeli skup B, tj. pri kojoj $\forall b \in B \exists a \in A$ t. d. $f(a) = b$.*

Definicija 9.1.4. *Bijekcija je funkcija f koja je i surjekcija i injekcija.*

Definicija 9.1.5. *Parna funkcija je funkcija f koja ima svojstvo $f(x) = f(-x)$, $\forall x$.*

Definicija 9.1.6. *Neparna funkcija je funkcija f koja ima svojstvo $-f(x) = f(-x)$, $\forall x$.*

Definicija 9.1.7. *Funkcija $f\colon A \to B$ je involucija ako $f(f(x)) = x, \forall x \in A$.*

Zadatci

1. Za danu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$(f(2^{x^3+x}))^2 - f(2^{2x}) \leqslant 2 \quad \wedge \quad (f(2^{2x}))^3 - 3f(2^{x^3+x}) \geqslant 2$$

   za sve $x \in \mathbb{R}$, dokaži da nije injektivna.

2. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

   Dokaži da je f surjekcija.

3. Aritmetička funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zadovoljava sljedeću nejednakost $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f(n+1) - f(n))(f(n+1) + f(n) + 4) \leqslant 0$$

   Dokaži da f nije injekcija.

4. Neka je $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t. d.
$$f(x+y) + f(x-y) = 2\max(f(x), f(y))$$
Dokaži da je f parna.
5. (Cauchyjeva funkcijska jednadžba) Neka je $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t. d.
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Odredi sva rješenja ove funkcijske jednadžbe.
6. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aritmetička funkcija t. d.
$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$
za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Dokaži da je f involucija. Odredi sve f koje zadovoljavaju tvrdnju.
7. Pronađi sve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t. d. $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y)))$$
8. Odredi sve $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju
$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$
9. Odredi sve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju
$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$
10. Odredi sve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju
$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$
11. Odredi sve $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju
$$f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3$$
12. Odredi sve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t. d.
$$f(1-x) = 1 - f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
13. Odredi sve $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t. d. $f(1) = 2$ i
$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$
14. Odredi sve $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ t. d.
$$f(xf(y)) = f(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

9.2. C23: Teorija grafova - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Nema znanosti koja se ne koristi grafovima. Iako su naprimjenjiviji u računarstvu pa se tako koriste u razvijanju brzih algoritama za pretraživanje i raznim područjima Umjetne inteligencije, oni se koriste i u medicini, prometu, epidemiologiji itd. Grafovi igraju ključnu ulogu u izgradnji modela za prepoznavanje lica, širenja bolesti pa čak i samo ljudskog mozga čiji vrhovi su tijela neurona, a bridovi su aksoni i dentriti. Slično tome, u računarstvu su nastale neuronske mreže koje predstavljaju model usmjerenog težinskog grafa. U ovom predavanju definirat ćemo osnovne pojmove, pokazati neke lakše rezultate iz Teorije grafova i uhvatiti se u koštac sa zanimljivim zadatcima. Poanta predavanja je da se shvate sve (ionako intuitivne) definicije te ulove neke osnovne metode i trikovi kako se zadatci s grafovima rješavaju i što se treba uočavati. Naposlijetku, vidjet ćemo da se značajno teži zadatci mogu u nekoliko redova dokazati sa rezultatima koje pokažemo te da će iste biti korisno upamtiti za budućnost.

Definicija 9.2.1. ***Graf*** *definiramo kao uređeni par skupova (V, E), gdje je V skup* ***vrhova****, a E skup 2-podskupova od V, koje zovemo* ***bridovi****.*

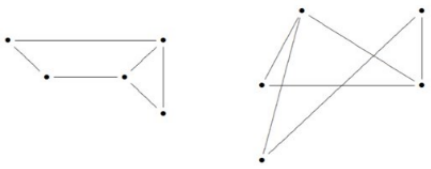
Definicija 9.2.2. *Ako su bridovi predstavljeni uređenim parovima, govorimo o* ***usmjerenim bridovima****. Graf koji ima usmjerene bridove zovemo* ***usmjereni graf****.*

Definicija 9.2.3. *Dva vrha su* ***susjedna*** *ako postoji brid koji ih spaja.*

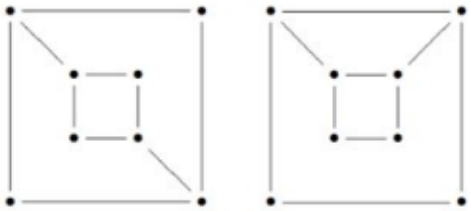
Definicija 9.2.4. *Kažemo da su dva grafa* ***izomorfna*** *ukoliko je moguće označiti vrhove oba grafa na isti način, i to tako da za svaki označeni par u, v vrhova, broj bridova koji spajaju u i v u G_1 je jednak broju bridova koji spajaju u i v u G_2.*

Lakši zadaci

1. Dokažite da su grafovi na Slici 9.1 izomorfni.



Slika 9.1: Izomorfni grafovi



Slika 9.2: Neizomorfni grafovi

2. Dokažite da grafovi na Slici 9.2 nisu izomorfni.

Definicija 9.2.5. ***Podgraf*** *grafa $G = (V, E)$ je graf kojemu su skup vrhova i skup bridova podskupovi od V i E, redom.*

Definicija 9.2.6. ***Šetnja*** *u grafu je niz $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, gdje je e_i brid $\{v_{i-1}, v_i\}$, za $i = 1, \ldots, n$.* ***Staza*** *ke šetnja u kojoj su svi bridovi različiti, dok je* ***put*** *šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg). Zatvoreni put zovemo* ***ciklus****.*

3. Nađite graf koji ima vrhove x, y i z takve da postoje putevi od x do y i od y do z, ali da šetnja dobijna spajanjem puteva od x do y i od y do z nije put.

Definicija 9.2.7. ***Stupanj*** *vrha x grafa G definiramo kao broj bridova grafa G koji sadrže vrh x. Nadalje, kažemo da je vrh* ***izoliran*** *ukoliko je stupnja nula, a* ***list*** *ukoliko je stupnja jedan.*

Teorem 9.2.8. *Suma stupnjeva vrhova grafa jednaka je dvostrukom broju bridova.*

Korolar 9.2.9. *Suma stupnjeva vrhova je paran broj.*

Korolar 9.2.10. *Broj vrhova s neparnim stupnjem je paran.*

Definicija 9.2.11. ***Stablo*** *je povezan graf bez ciklusa.* ***Šuma*** *je (ne nužno povezan) graf bez ciklusa.*

Razni korisni zadatci

4. U grafu G s n vrhova pretpostavimo da niti jedan vrh nema stupanj veći od Δ. Dokaži da se tada vrhovi mogu obojati s najviše $\Delta + 1$ bojom, tako da nikoja dva susjedna vrha nisu iste boje.
5. Dokaži da grafu G s V vrhova i E bridova, postoji inducirani podgraf H pri čemu svaki vrh ima stupanj barem $\frac{E}{V}$. (Drugačije rečeno, graf s prosječnim stupnjem d ima inducirani podgraf s minimalnim stupnjem barem $\frac{d}{2}$).
6. Dan je graf G u kojem svaki vrh ima stupanj barem $n-1$ i stablo T s n vrhova. Pokaži da postoji podgraf od G izomorfan sa T.
7. Dokaži da ako su u grafu G svi vrhovi stupnja barem δ, tada postoji staza duljine barem $\delta + 1$.
8. Pokaži da je moguće particionirati skup vrhova V grafa G s n vrhova na dva skupa V_1 i V_2 tako da svaki vrh u V_1 ima barem onoliko susjeda u V_2 koliko ima u V_1, i isto tako svaki vrh u V_2 ima barem onoliko susjeda u V_1 koliko ima u V_2.
9. Turnir s n vrhova je usmjereni graf takav da za svaka dva vrha u i v, postoji ili usmjereni brid od u do v, ili od v do u. Dokaži da svaki turnir ima Hamiltonovu stazu (stazu koja prolazi kroz sve vrhove).

Definicija 9.2.12. *U grafu G sa skupom vrhova V, podskup D od V je dominirajući skup ako je svaki vrh v ili u D ili ima susjeda u D.*

Lemma 9.2.13. *Ako G nema izoliranih vrhova, tada ima dominirajući skup veličine najviše $\frac{|V|}{2}$*

Definicija 9.2.14. *Razapinjući podgraf grafa G je podgraf od G koji sadrži sve vrhove od G. Razapinjuće stablo u G je razapinjući podgraf koji je stablo (tj. koji je acikličan).*

Napomena 9.2.15. *Uočimo da ako G nije povezan, ne može imati razapinjuće stablo (jer inače bi postojala staza između svaka 2 para vrhova duž njegovih bridova).*

Lemma 9.2.16. *Svaki konačan povezan graf $G = (V, E)$ ima razapinjuće stablo.*

Primjeni prethodne rezultate na težim zadatcima :)

10. Neka je T stablo s t vrhova i neka je G graf s n vrhova. Pokaži da ako G ima barem $(t-1)n$ bridova, onda G ima podgraf izomorfan T.
11. Neka je G usmjeren graf s n vrhova takav da u svaki vrh ulaze i izlaze po 2 brida. Pokažite da možemo particionirati vrhove od G u tri skupa tako da niti jedan vrh nije u istom skupu kao i oba vrha u koje on pokazuje bridom koji iz njega izlazi.
12. Tvrtka s $2n+1$ osobom ima sljedeće svojstvo: za svaku grupu od n ljudi, postoji osoba u preostalih $n+1$ koja zna sve u ovoj grupi. Pokažite da postoji osoba kojazna sve ljude u tvrtki.

9.3. C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Najčeći oblik zadataka s pločama su zadaci popločavanja u kojima rješenje često sadrži bojanje. Bojanje nam omogućava da promatranjem samo jedne pločice donesemo zaključke o cjelokupnom popločavanju te često tako postignemo kontradikciju.

Kao i drugi zadaci iz kombinatorike, zadaci s pločama često sadrže indukciju, metodu kontradikcije, Dirichletov princip, invarijante, prebrojavanja...

Ne zaboravite pronaći konstrukciju kada dokazujete da je nešto moguće!

Lakši zadaci

1. Je li moguće ploču dimenzije 10×10 popločati s 25 pločica dimenzija 4×1?

2. Pravokutni pod prekriven je pločicama 2×2 i 1×4. Jedna se pločica razbila, no dostupna nam je pločica drugog oblika. Dokažite da se pod ne može prekriti prerazmještajem ovih pločica.

3. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče. a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i akoje polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši polje Y. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

4. Dokažite da se pravokutnik $a \times b$ može popločati s $n \times 1$ pločama ako i samo ako $n \mid a$ ili $n \mid b$.

Umjereni zadaci

5. Na ploču 8×8 dimenzija postavljaju se tromino pločice oblika L tako da svaka tromino pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju. Koliko je najmanje tromino pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino pločica?

6. Nazovimo ploču $n \times n$ defektnom ako joj nedostaje jedno polje. Dokaži da se svaka defektna ploča dimenzija $2^k \times 2^k$ može popločati pločicama u obliku slova L.

7. Može li šahovski skakač obići ploču dimenzija 4×2012 i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom?

8. Sva polja 4×4 tablice su bijela. Jedan potez sastoji se od odabira 1×3 pravokutnika i zamjene boja (crno u bijelo, bijelo u crno) u tom pravokutniku. Možemo li nakon konačnog broja koraka doći do potpuno crne ploče?

9. Ploča dimenzija 6×6 popločana je 2×1 dominama. Pokaži da možemo pronaći pravac duž kojeg ćemo prelomiti ploču tako da ne prelomimo niti jednu dominu!

10. Pravokutnik P čije su duljine stranica neparni prirodni brojevi podijeljen je na manje pravokutnike cjelobrojnih duljina stranica. Dokaži da postoji barem jedan manji pravokutnik kojem su udaljenosti od četiriju stranica pravokutnika P iste parnosti.

Teži zadaci

11. Na ploči $N \times N$ ($N \geqslant 2$) dva su dijagonalno suprotna kutna polja obojena u crno, a ostala poja obojena su u bijelo. U jednom koraku odaberemo redak ili stupac i promijenimo boju svakom polju u tom retku ili stupcu iz crne u bijelu i obratno. Koji je najmanji dodatni broj polja koje na početku moramo obojiti u crno kako bismo nakon konačnog broja opisanih koraka mogli dobiti ploču na kojoj su sva polja crna?

12. Dva oblika prikazana ispod, sastavljena od 6 i 10 jediničnih kvadratića, zovu se *stubišta*.

Dana je 2018×2018 ploča koja se sastoji od 2018^2 polja gdje je svako polje jedinični kvadratić. Dva proizvoljno odabrana polja iz istog retka uklonjena su s ploče. Dokaži da se ostatak ploče ne može izrezati (po granicama polja) u *stubišta*. (*Stubišta* se smiju rotirati.)

13. Na 2012×2012 ploči, neka polja na gore desno - dolje lijevo najvećoj dijagonali s obojena. Nijedno obojeno polje nije kut ploče. Upišimo brojeve u sva polja ploče na sljedeći način: u svim obojanim poljima piše 0. U svim poljima na gornjem i lijevom rubu ploče piše 1. U svakom od preostalih polja piše zbroj njegovog gorenjeg i lijevog susjeda.

    Dokažite da broj u desnom kutu nije dijeljiv s 2011.

14. Na beskonačnoj ploči koja ima donje-lijevo polje nalaze se 3 žetona na poljima $(1,1), (2,1)$ i $(1,2)$. Jedan potez sastoji se od odabira žetona koji se nalazi na polju kojemu su polja neposredno iznad i desno prazna, uklanja tog žetona s ploče te postavljanja dva žetona na ploču, po jednog na polja neposredno iznad i desno od odabranog polja. Dokaži da će se nakon svakog konačnog broja poteza barem jedan žeton nalaziti na jednom od početna 3 polja.

9.4. G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Kako možemo definirati središte upisane kružnice, a da ne spomenemo samu upisanu kružnicu (uputa: isto za opisanu kružnicu)? Kako nalazimo točku za koju bi to vrijedilo ? (prvo promotrite za dva elementa, a onda na prvi i treći). Što ste tako pokazali? Na sličan način odredite gdje će biti središte pripisane kružnice koja dira stranicu nasuprot A te produžetke stranica nasuprot B i C preko C i B.

Izrazite radijus upisane kružnice preko a, b, c prvo u općenitom slučaju, a onda za pravokutan trokut. Izrazite dijelove stranica trokuta od vrha do dirališta preko a, b, c

Što vrijedi za četverokut kojem možemo upisati kružnicu?

NAPOMENA: U nekim zadacima neće biti potrebno crtati upisanu kružnicu, nego samo koristiti neka svojstva središta. Prisjetite se svojstava simetrala kuta, to će svakako biti potrebno.

Lakši zadaci

1. Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC. Neka su D, E i F nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB redom. Ako su četverokuti $AEPF$, $BFPD$ i $CDPE$ tangencijalni, dokaži da je P središte trokutu ABC upisane kružnice.
2. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I i središtem pripisane I_A, neka su M i N nožišta okomica na BC iz I i I_A redom. Dokaži da je $|AM| = |BN|$.
3. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC a D točka na luku CA tom trokutu opisane kružnice koji ne sadrži točku B. Neka je E točka takva da je D polovište dužine $\overline{AE}$. Ako je $\angle ECA = 90^o$ i $\angle IEC = 40^o$, odredi kut $\angle BAC$.
4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\angle BAC = 48^o$, $\angle CAD = 66^o$, $\angle CBD = \angle DBA$. Odredi kut $\angle BDC$.

Umjereni zadaci

5. Unutar trokuta ABC nalaze se točke M i N. Udaljenosti točke M od pravaca AB, BC i AC su redom 10, 7 i 4. Udaljenosti točke N od tih pravaca su redom 4, 10 i 16. Odredi polumjer trokutu ABC upisane kružnice.
6. Unutar polukruga s promjerom $\overline{AB}$ i središtem luka M nalazi se točka C. Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u D i E. Pravac DE siječe polukružnicu u X i Y. Dokaži da su kutovi $\angle ACB$ i $\angle XMY$ jednaki.
7. U trokutu ABC kut pri vrhu B iznosi 120°. Neka su A_1, B_1, C_1 redom točke na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ takve da su AA_1, BB_1, CC_1 simetrale kutova trokuta ABC. Odredi kut $\angle A_1B_1C_1$.
8. Dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su redom točke D i E. Dirališta pripisane kružnice nasuprot vrha A s pravcima AB i AC su redom točke F i G. Neka simetrale kutova $\angle CBA$ i $\angle ACB$ sijeku pravac DE u točkama X i Y redom te neka vanjske simetrale kutova$\angle CBA$ i $\angle ACB$ sijeku pravac FG u točkama Z i W redom. Dokaži da je četverokut $XYZW$ tetivan.

Teži zadaci

9. Neka je ω upisana kružnica trokutu ABC, te ona dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama D_1 i E_1. Neka su D_2 i E_2 točke na $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom takve da vrijedi $|CD_2| = |BD_1|$ i $|AE_2| = |CE_1|$. Neka je Q sjecište ω i AD_2 koje je bliže točki A, a P sjecište AD_2 i BE_2. Dokaži $|AQ| = |PD_2|$.
10. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je$|AB| = |BD|$. Upisana kružnica trokuta BCD dodiruje pravce AC i BD redom u točkama E i F. Dokaži da pravac EF raspolavlja dužinu $\overline{DI}$.
11. Upisana kružnica trokuta ABC ima središte I te dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ redom u točkama D, E, F. Neka je k kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku E. Drugo sjecište pravca DE s kružnicom k je točka K. Paralela s pravcem DF kroz točku I siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki P. Točka L je sjecište pravca CP i kružnice k takvo da se P nalazi između točaka C i L. Točka O je središte opisane kružnice trokuta DKL. Dokaži da su pravci AI i DO paralelni.

9.5. N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovome predavanju proučavat ćemo česte konstrukcije i tehnike u Teoriji brojeva, poput Malog Fermatovog i Eulerovom teorema, Kineskog teorema o ostacima te diofantskih jednadžbi.

Eulerov i Mali Fermatov teorem

Definicija 9.5.1. *Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a-b$, kažemo da je a **kongruentan** b modulo m i pišemo*

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Propozicija 9.5.1. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.*

(1) $a \equiv b \pmod{m} \quad \wedge \quad c \equiv d \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}, \quad ac \equiv bd \pmod{m}$

(2) $a \equiv b \pmod{m} \quad \wedge \quad d \mid m \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \pmod{d}$

(3) $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bc \pmod{mc}, \quad c \neq 0$

Propozicija 9.5.2. *Vrijedi $ax \equiv ay \pmod{m}$ ako i samo ako $x \equiv y \pmod{\frac{m}{\gcd(a,m)}}$.*
Posebno, ako je $ax \equiv ay \pmod{m}$ i $\gcd(a,m) = 1$, onda je $x \equiv y \pmod{m}$.

Definicija 9.5.2. *Kažemo da je prirodan broj $p > 1$ **prost** ako p nema djelitelja d takvog da je $1 < d < p$. Ako prirodan broj a nije prost, kažemo da je **složen**.*

Definicija 9.5.3. *Brojevi a i b su **relativno prosti** ako im je najveći zajednički djelitelj 1 (pišemo: $(a,b) = 1$ ili $\gcd(a,b) = 1$).*

Definicija 9.5.4. ***Eulerova funkcija** $\phi(m)$ predstavlja broj svih prirodnih brojeva koji su relativno prosti s m.*

Propozicija 9.5.3. *Svojstva Eulerove funkcije:*

(1) Za $m \in \mathbb{N}$ $\phi(m)$ je paran broj, osim za $m = 1, 2$.

(2) ϕ je multiplikativna, tj. vrijedi: $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.

(3) Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\phi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Teorem 9.5.4 (Eulerov teorem)**.** *Za relativno proste brojeve a i m vrijedi*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Korolar 9.5.4.1 (Mali Fermatov teorem)**.** *Za relativno proste a i p, te p prost vrijedi*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Lema 9.5.5. *Za relativno proste a i m vrijedi*

$$a^b \equiv a^{b \pmod{\phi(m)}} \pmod{m}$$

Zadaci:

1. Bez pozivanja na Eulerov teorem, dokaži Mali Fermatov teorem.
2. Odredi $2^{98} \pmod{33}$.
3. Koliko ima prostih brojeva p takvih da $p \mid 29^p + 1$?
4. Neka je $a \in \mathbb{N}$ i $p \in \mathbb{N}$ prost. Dokaži: $p \mid a^p - 1 \;\Rightarrow\; p^2 \mid a^p - 1$.
5. Neka je $f(x) = x^{x^{x^x}}$. Odredi zadnje dvije znamenke od $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.
   Napomena: Promotri Definiciju 2.3. i Teorem 2.4. u idućem poglavlju.

Kineski teorem o ostacima

Definicija 9.5.5. ***Reducirani sustav ostataka*** *modulo m skup je svih prirodnih brojeva strogo manjih od m koji su relativno prosti s m.*

Napomena 9.5.5.1. *Svaki reducirani sustav ostataka modulo m ima $\phi(m)$ elemenata.*

Teorem 9.5.6. *Neka su a i m relativno prosti. Neka je reducirani sustav ostataka od m skup $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(m)}\}$. Tada je skup $S = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(m)}\}$ jednak skupu R gledamo li modulo m.*

Definicija 9.5.6. *Kažemo da je broj b* ***inverz*** *broja a modulo m, gdje su a i m relativno prosti, ako vrijedi*

$$ab \equiv 1 \pmod{m}$$

Teorem 9.5.7. *Ako je $\gcd(a, m) = 1$, tada a uvijek ima jedinstven inverz modulo m.*

Korolar 9.5.7.1. *Jednadžba $ax \equiv b \pmod{m}$ ima rješenje kada je $\gcd(a, m) = 1$.*

Teorem 9.5.8 (Kineski teorem o ostacima)**.** *Sustav kongruencija*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{b_n} \end{cases}$$

pri čemu su $b_1, b_2, \ldots, b_n$ u parovima relativno prosti (tj. $\gcd(b_i, b_j) = 1$ ako i samo ako $i \neq j$) ima jedinstveno rješenje x modulo $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Zadaci:

6. Dokaži Teorem 2.2.
7. Dokaži Teorem 2.4.
8. Dokaži Kineski teorem o ostacima.
9. Pronađi rješenje sustava kongruencija

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{11}. \end{cases}$$

10. Pronađi rješenje sustava kongruencija

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \\ x \equiv 5 \pmod{84}. \end{cases}$$

11. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pronađi broj rješenja kongruencije $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$.
12. Neka je $p \in \mathbb{N}$. Kažemo da je prirodan broj a p-siguran ako je za više od 2 udaljen od svakog višekratnika broja p. Primjerice, 10-sigurni brojevi su $3, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 23, \ldots$ Koliko je brojeva manjih ili jednakih 10000 koji su istovremeno 7-sigurni, 11-sigurni i 13-sigurni?

Diofantske jednadžbe

Definicija 9.5.7. *Jednadžbu koja svoja rješenja nalazi u domeni cijelih brojeva nazivamo* ***diofantskom jednadžbom****.*

Napomena 9.5.8.1. *Najčešće metode rješavanja diofantskih jednadžbi su:*

- *metoda faktorizacije*
- *rješavanje preko nejednakosti*
- *metoda parametra*
- *rješavanje pomoću modularne aritmetike*

Zadaci:

13. Pronađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy).$$

14. Odredi sve nenegativne parove cijelih brojeva (x, y) za koje je

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

15. Riješi sljedeću jednadžbu po $x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}.$$

16. Pronađi prirodna rješenja jednadžbe

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2.$$

17. Dokaži da jednadžba

$$(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+2001)^2=y^2$$

nema cjelobrojnih rješenja.

10. Poglavlje

Zadaci za četvrtu grupu

10.1. A24: Nestandardna algebra - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Zadaci

1. Neka je P polinom stupnja $n > 2$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da su mu nultočke različite i u intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Neka je a vodeći koeficijent polinoma P. Dokaži da je $|a| > 2^{n+1}$.

2. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ i $b_1, b_2, ..., b_n$ različiti realni brojevi. U matricu $n \times n$ je na mjestu (i, j) napisan broj $a_i + b_j$. Ako znamo da je umnožak elemenata u svakom retku jednak, dokažite da je i umnožak elemenata u svakom stupcu jednak.

3. Neka je $f : (0, 1) \to (0, 1)$ funkcija definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ako } x < \frac{1}{2}, \\ x^2 & \text{ako } x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   Neka su a i b realni brojevi takvi da je $0 < a < b < 1$. Definiramo nizove a_n i b_n realnih brojeva na sljedeći način:

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ i } a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1}) \text{ za } n > 0.$$

   Dokažite da postoji prirodan broj n takav da je

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

4. Neka su $z_1, z_2, ..., z_n$ kompleksni brojevi takvi da je

$$|z_1| + |z_2| + ... + |z_n| = 1.$$

   Dokaži da postoji podskup S skupa $z_1, ..., z_n$ takav da je

$$\left|\sum_{z \in S} z\right| \geqslant \frac{1}{6}$$

   4.* Nađi bolju ogradu.

5. Na ploči su zapisani brojevi $1000, 1001, ..., 2999$. U svakom koraku Boris može obrisati dva broja, recimo a i b, te napisati broj $\frac{1}{2}\min\{a, b\}$.

   Nakon 1999 takvih operacija na ploči je ostao samo broj c. Dokaži da je $c < 1$.

6. Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva definiran s $a_1 = t$ i

$$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n),\ n \geqslant 1.$$

   Za koliko različitih vrijednosti broja t vrijedi $a_{2015} = 0$?

7. Dano je osam realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_8$ različitih od nule. Dokaži da je barem jedan od šest brojeva $a_1a_3 + a_2a_4, a_1a_5 + a_2a_6, a_1a_7 + a_2a_8, a_3a_5 + a_4a_6, a_3a_7 + a_4a_8, a_5a_7 + a_6a_8$ nenegativan.

8. Neka je $n > 2$ cijeli broj i neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za svaki pravilan n-terokut $A_1A_2...A_n$ vrijedi
$$f(A_1) + f(A_2) + ... + f(A_n) = 0.$$
Dokaži da je f nul-funkcija.

10.2. C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Princip ekstrema - fiksiranje nekog elementa s minimalnom ili maksimalnom vrijednosti nekog svojstva (poput koordinata ili udaljenosti)

Konveksna ljuska nekog skupa točaka u ravnini jest presijek svih konveksnih skupova kojima je taj skup podskup.

Standardne tehnike u kombinatorici: indukcija, metoda kontradikcije, invarijante i monovarijante

Lakši zadaci

1. (Sylvester-Gallai teorem) Dano je konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nisu sve kolinearne. Dokaži da postoji par točaka koje leže na pravcu na kojem ne leži nijedna od preostalih zadanih točaka.

2. Dan je skup od $n \geq 3$ pravaca takav da ne prolaze svi kroz jednu točku te nikoja 2 nisu paralelna. Dokaži da postoji točka kroz koju prolaze samo 2 od zadanih pravaca.

3. Neka je n prirodni broj. Unutar kružnice nalaze se točke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a na kružnici točke $B_1, B_2, \ldots, B_n$ takve da su dužine $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ u parovima disjunktne. Skakavac smije skočiti iz točke A_i u točku A_j (za $i, j \in 1, 2, \ldots, n, i \neq j$) ako i samo ako dužina $\overline{A_iA_j}$ ne prolazi nijednom unutarnjom točkom dužina $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$.

   Pokaži da skakavac može doći iz bilo koje točke A_i u bilo koju točku A_j.

Umjereni zadaci

4. Neka su $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ $2n$ različitih točaka na jediničnoj kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Svaka je točka obojena crvenom ili plavom bojom tako da je n točaka crveno i točno n plavo. Neka je $R_1, R_2, \ldots, R_n$ proizvoljan poredak crvenih točaka. Neka je B_1 plava točka najbliža R_1 putujući po kružnici u smjeru obrnuto od kazaljke na satu počevši od R_1. Zatim je B_2 ona od preostalih plavih točaka koja je najbliža R_2 putujući po kružnici u smjeru obrnuto od kazaljke na satu počevši od R_2 i tako dalje dok ne označimo sve plave točke $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Dokaži da broj kružnih lukova usmjerenih obrnuto od kazaljke na satu oblika $R_i \to B_I$ koji sadrže točku $(1, 0)$ ne ovisi o poretku crvenih točaka $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

5. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Ivica i Marica igraju igru: Prvo Ivica označi stranice pravilnog n-terokuta brojevima $1, 2, \ldots, n$ na proizvoljan način, koristeći svaki broj točno jednom. Zatim Marica podijeli taj n-terokut u trokute crtajući $n-3$ dijagonala koje se ne sijeku unuter n-terokuta. Sve su dijagonale označene brojem 1. Unutar svakog trokuta upisan je umnožak brojeva napisanih na njegovim stranicama. Neka je S suma tih $n-2$ umnožaka.

   Odredi vrijednost od S ako Marica želi da S što manji, a Ivica želi da S bude što veći i ako oboje igraju optimalno.

6. *Prerez* konačnog skupa točaka u ravnini je podjela tog skupa na disjunktne podskupove A i B za koju postoji pravac koji ne prolazi niti jednom točkom promatranog skupa, takav da su sve točke skupa A s jedne strane, a sve točke skupa B s druge strane tog pravca. Odredi najveći mogući broj prereza skupa od n točaka u ravnini.

7. *Splet* je konačan skup pravaca u općem položaju (tj. svaka dva pravca se sijeku, ali nikoja tri ne prolaze istom točkom). Pravci spleta dijele ravninu na *područja* čije su stranice dužine ili polupravci. *Labirinit* je splet u kojem je svaki pravac obojan, poput zida, s jedne strane crvenom, a s druge strane plavom bojom. Dva područja sa zajedničkim vrhom koja u toj točki imaju i crvene i plave stranice nazivamo *povezanima*. Po labirintu se kreću mravi koji mogu prijeći iz područja u kojem se nalaze samo u područje koje je s njim povezano. Za splet S definiramo $k(S)$ kao najveći broj mrava koje je moguće razmjestiti po svakom labirintu na S tako da se nikoja dva mrava ne mogu sastati krećući se po labirintu.

   Za $n \in N$ odredi sve moguće vrijednosti $k(S)$ pri čemu je S splet od n pravaca.

Teži zadaci

8. U ravnini se nalazi $n \geq 2$ dužina takvih da se svake dvije dužine sijeku u unutrašnjoj točki i da nikoje tri dužine nemaju zajedničku točku. Geoff mora izabrati po jednu krajnju točku svake dužine i na nju postaviti žabu okrenutu prema drugoj krajnjoj točki te dužine. Potom će pljesnuti rukama $n - 1$ puta. Svaki put kada pljesne, svaka žaba odmah skoči prema naprijed do iduće točke presjeka na svojoj dužini. Žabe nikad ne mijenjaju smjer svojih skokova. Geoffu želi postaviti žabe tako da nikoje dvije od njih niti u jednom trenutku ne zauzimaju istu točku presjeka.

   a) Dokaži da Geoff uvijek može ispuniti svoju želju ako je n neparan.

   b) Dokaži da Geoff nikad ne može ispuniti svoju želju ako je n paran.

9. U koordinatnoj se ravnini nalazi konačno mnogo *zidova*, odnosno disjunktnih dužina, od kojih nijedan nije paralelan s koordinatnim osima. Buldožer se iz proizvoljne točke počinje kretati u $+x$ smjeru (udesno). Svaki put kada se buldožer sudari sa zidom, okrene se za $90°$ (okrenut od zida) i nastavi se kretati. (Dakle, buldožer se uvijek kreće paralelno s koordinatnim osima.)

   Dokaži da je nemoguće da se buldožer sudari s obe strane svakog zida.

10.3. C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na časovima matematike u školi se prečesto kompleksnim brojevima i polinomima pristupa na neintuitivan i površan način, pa tako ne dobijemo priliku da otkrijemo mnoga njihova zanimljiva svojstva i koliko su zapravo povezani. Ovo predavanje je pravljeno s ciljem da tu nepravdu barem malo ispravi. Veliku zahvalu što sam uopšte u stanju ovo predavanje otkucati u LaTeXu dugujem Milici Vugdelić i Ervinu Maciću od kojih sam učio osnove LaTeXa kojima sam posebno zahvalan na ustupljenim originalnim rješenjima za neke od zadataka i pomoći oko kucanja istih.

Očekujte neočekivano

U ovom odjeljku diskutirat ćemo rješenja nekoliko nepreteških zadataka koji iako se na prvu čine ružni i nezanimljivi se ispostave neočekivano elegantnima zbog "magične" povezanosti mnogih elemenata matematike.

1. Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $b - d \geqslant 5$ i da su sve nultočke x_1, x_2, x_3, x_4 polinoma $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ realne. Naći minimalnu vrijednost izraza $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$
2. Dokazati da su svi članovi niza $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ za $n \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi.
3. Dokazati da broj $(12 + 5i)^n$ nije realan ni za jedno $n \in \mathbb{N}$.

Čebiševljevi polinomi

Posmatrajmo uglove $20°, 40°, 60°, 80°$. Zajedničko ovim uglovima da je sin njihove devetostruke vrijednosti jednak 0. To nam daje naznaku da bi trebala postojati neka veza između $\sin 20°$, $\sin 40°$,$\sin 60°$,$\sin 80°$. Odgovor na pitanje koja je to veza daju nam Čebiševljevi polinomi.
Polinomima Čebiševljevog tipa nazivamo specifične polinome koje definišemo preko njihovih vrijednosti za određene trigonometrijske funkcije. Iz njihove najpoznatije definicije čak nije najjasnije da se radi o polinomima. U daljnjem tekstu pozabavit ćemo se glavnim vrstama Čebiševljevih polinoma, dokazati da oni zaista jesu polinomi i navesti neke njihove osobine koje nam mogu biti korisne u rješavanju određenih problema.

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Za prirodan broj n sa $T_n(x)$ označavmo n-ti Čebivševljev polinom prve vrste koji je definisan tako da je $T_n(x) = \cos(\cos^{-1} x)$ ili ljepše i korisnije zapisano:

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

Korištenjem poznatih trigonometrijskih formula $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ i $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ imamo da je $T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x$.
Želimo najprije pokazati da ovo zaista jeste polinom, tj. da je $\cos nx$ polinom po $\cos x$. Ako idemo na dokaz indukcijom imamo iz identiteta

$$\cos nx = \cos(x + (n-1)x) = \cos x \cos(n-1)x - \sin x \sin(n-1)x$$

da je dovoljno pokazati da se $\sin x \sin(n-1)x$ može prikazati kao polinom po $\cos x$. Međutim, to slijedi iz $\sin x \sin(n-1)x = \frac{1}{2}(\cos(n-2)x - \cos nx)$. Odavdje sređivanjem slijedi vrlo koristan identitet $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx$ odakle slijedi da Čebiševljevi polinomi zaista jesu polinomi i da zadovoljavaju rekurziju:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Ovako lijepa rekurzija daje nam mogućnost da na prilično jednostavan način računamo Čebiševljeve polinome i utvrdimo mnoga njihova korisna svojstva. Nekoliko prvih Čebiševljevih polinoma prve vrste su:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$
$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste zadovoljavaju sljedeća svojstva koja se dosta lagano mogu pokazati (najčešće indukcijom):

1. Koeficijenti svih $T_n(x)$ su cijeli brojevi.
2. Ako je n parno nenulte koeficijente $T_n(x)$ ima samo uz članove oblika x^2t, a ako je n neparno onda nenulte koeficijente ima samo uz članove oblika x^{2t+1}.
3. Nenulti koeficijenti alterniraju u predznaku.
4. Slobodni član je jednak $(-1)^k$ za $n = 2k$ i 0 za $n = 2k + 1$.
5. Vodeći koeficijent $T_n(x)$ je 2^{n-1}.
6. Koeficijent uz x u $T_{2n+1}(x)$ je $(-1)^n(2n + 1)$.
7. Suma koeficijenata svakog $T_n(x)$ je 1.
8. Koeficijent uz x^2 u $T_{2k}(x)$ je $(-1)^{k+1}2k^2$.
9. Suma apsolutnih vrijednosti koeficijenata $T_n(x)$ je $1\frac{}{2}((1+\sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.
10. Nultočke $T_n(x)$ su $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ gdje $k \in \mathbb{Z}$.

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste za prirodan broj n označavaju se sa $U_n(x)$ i definišu se tako da je:

$$U_n(\cos x)\sin x = \sin(n + 1)x$$

Sličnim razmatranjem kao gore pokazuje se da $U_n(x)$ zaista jeste polinom i da Čebiševljevi polinomi druge vrste zadovoljavaju istu rekurziju kao i oni prve vrste, pa kad znamo da je da je $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ rekurzija:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

nam daje mogućnost da određujemo Čebiševljeve polinome druge vrste i njihove osobine.
Nekoliko prvih Čebiševljevih polinoma druge vrste su:

$$U_0(x) = 1$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$
$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$
$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

Osobine Čebiševljevih polinoma druge vrste koje možemo slično dokazati su:

1. Koeficijenti svih $U_n(x)$ su cijeli brojevi.
2. Ako je n parno nenulte koeficijente $T_n(x)$ ima samo uz članove oblika x^2t, a ako je n neparno onda nenulte koeficijente ima samo uz članove oblika x^{2t+1}.
3. Nenulti koeficijenti alterniraju u predznaku.
4. Slobodni član je jednak $(-1)^k$ za $n = 2k$ i 0 za $n = 2k + 1$.
5. Vodeći koeficijent $U_n(x)$ je 2^n.
6. Koeficijent uz x u $U_{2n+1}(x)$ je $(-1)^n(2n + 2)$.
7. Suma koeficijenata svakog $U_n(x)$ je $n + 1$.
8. Nultočke $U_n(x)$ su $\cos(\frac{k\pi}{n})$ gdje $k \in \mathbb{Z}$.

Čebiševljevi polinomi u (ne)takmičarskim zadacima

1. Ako su $c_0, c_1, c_2, ..., c_8$ različiti brojevi iz skupa $1, 2, ..., 9$ dokazati da važi:
$$sin\ c_0{}^\circ \cdot sin\ (10^\circ + c_1{}^\circ) \cdot sin\ (20^\circ + c_2{}^\circ) \cdot ... \cdot sin\ (80^\circ + c_8{}^\circ) \leqslant \frac{\sqrt{10}}{512}$$
2. Neka je $\alpha = \frac{2\pi}{2021}$. Izračunati:
$$cos\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha \cdot ... \cdot cos 1010\alpha$$
3. Odrediti sve realne polinome $P(x)$ takve da je $P(x^2 - 2) = P(x)^2 - 2$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Odabrani teži zadaci

1. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji jedinstven polinom Q s koeficijentima iz skupa $0, 1, 2, ..., 9$ takav da je $Q(-2) = Q(-5) = n$.
2. Naći sve polinome $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima tako da za svaki prirodan broj n jednačina $P(x) = 2^n$ ima cjelobrojno rješenje.

10.4. N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ovo je većinom kombinatorno predavanje. Iako će se ponegdje pojavljivati pojmovi i teoremi iz teorije brojeva, preporučam da se zadaci rješavaju više kombinatorno, tj. nemoj zadacima prisilno pristupati TB-ovski, već samo onda kad prirodno dođe. Ako nisi siguran kako bi počeo zadatak, predlažem promatranje malih primjera ili nekih posebnih zanimljivih slučajeva (npr. prostih brojeva, kvadrata prirodnih brojeva...). Ne zaboravite na klasične kombinatoričke fore (princip ekstrema, indukcija, Dirichlet, invarijante, ...).

Ako je pitanje da/ne, razmislite o pogađanju rješenja. Osim ako je pitanje "Vrijedi li za sve ... ?" gdje će pretpostavka suprotnog dati ili kontradikciju ili bitne imformacije o onom za koji ne vrijedi, te dvije tvrdnje bi se najvjerojatnije pokazale na vrlo različite načine i trebat će se baviti samo jednom.

Lakši zadaci

1. Dokaži da svaki prirodan broj ima višekratnika oblika 555...5000...0
2. Na igralištu se nalazi 2014 sportaša koji na dresovima imaju brojeve od 1 do 2014 (svaki broj je na točno jednom dresu). Na početku su svi u stojećem položaju. U određenim vremenskim intervalima trener uzvikuje redom sve prirodne brojeve od 1 do 2014. Sportaši kojima je na dresu višekratnik uzviknutoga broja odmah mijenjaju svoj položaj iz stojećeg položaja u čučanj ili obratno. Koliko je sportaša u čučnju nakon što trener uzvikne broj 2014?
3. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su prijateljska ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.
4. Skakavac se na početku nalazi u ishodištu brojevnog pravca, na broju 0, a zatim skače uvijek u istom smjeru. Za prirodni broj k, skakavac u prvom skoku dolazi na broj 1, a svaki sljedeći skok je točno k puta dulji od prethodnog. Na mjestu svakog višekratnika broja 2015 nalazi se rupa. Odredi sve prirodne brojeve k takve da skakavac može skočiti 2015 puta, a da pritom ne uskoči u rupu.
5. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da je $f(ab) = f(a + b)$ za sve prirodne brojeve $a \geqslant 4$ i $b \geqslant 4$. Dokaži da je $f(n) = f(8)$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant 8$.

Umjereni zadaci

6. Dva igrača igraju igru na školskoj ploči naizmjence odigravajući poteze. Igrač koji jena potezu bira dva relativno prosta broja napisana na ploči, briše ih te zapisuje na ploču njihov zbroj. Gubi igrač koji to ne može napraviti. Dokaži da drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako je na početku na ploči bilo napisano

   (a) 2019 jedinica; (b) 2020 jedinica.
7. Nađi sve parove različitih cijelih brojeva (a, b) takve da postoji skup prirodnih brojeva S takav da za svaki cijeli n točno jedan od brojeva $n, n + a, n + b$ bude element iz S.
8. Broj n je "zanimljiv" ako se u nizu $1, 2, ..., n$ svaka znamenka pojavljuje parno mnogo puta. Dokaži da ima beskonačno mnogo zanimljivih brojeva i da su svi parni.
9. Ima li konačno ili beskonačno prirodnih brojeva n za koje je $\sigma(n) > 2n$, ali ne postoji podskup djelitelja od n čija je suma točno $2n$?
10. Zadan je konačan skup prirodnih brojeva A. Njegova dvočlana particija $\{B, C\}$ je "dobra" ako je NZV elemenata iz B jednak NZD-u elemenata iz C. Nađi najmanji n takav da postoji skup s n elemenata koji ima točno 2015 "dobrih" particija.

Teži zadaci

11. Neka je $p > 2$ prost broj. Za bilo koju p-premutaciju π definiramo $f(\pi)$ kao broj višekratnika od p među brojevima $\pi(1), \pi(1) + \pi(2), ..., \pi(1) + \pi(2) + ... + \pi(p)$. Odredi prosječnu vrijednost $f(\pi)$ preko svih permutacija.
12. Neka su m, n i k prirodni brojevi i neka su $p_1, p_2, ..., p_n$ brojevi $1, 2, ..., n$ u nekom poretku. Ako za svaki $i \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi $k|(m + p_i i)$, dokaži da je barem jedan od brojeva m i n višekratnik broja k.

13. Neka je $(a_n)_n$ niz prirodnih brojeva većih od 1, gdje je a_n je najmanji broj takav da $(\forall k < n)(a_n \neq a_k)$ i $NZD(a_n, a_{n-1}) > 1$. Dokaži da neovisno o prvom elementu niza, niz će sadržati sve prirodne brojeve.

Dio III

Hintovi s predavanja na prvom terminu

11. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

11.1. A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. grupiranje
2. grupiranje
3. razlika kvadrata
4. kvadrat binoma
5. kvadrat binoma
6.
7.
8. faktoriziraj 6
9. x^2 je varijabla
10.
11. grupiranje
12. zbroj kubova
13. kub zbroja
14. kub binoma
15. dodaj i oduzmi član
16. djeljivo s $x^2 + x + 1$
17. kvadrat binoma
18. faktoriziraj izraz
19. pojednostavi izraze A i B
20. obrati pozornost na traženu tvrdnju prilikom faktorizacije
21. zamjena a+b s c
22. faktoriziraj brojnik tako da se može skratiti
23. koristi formulu za kvadrat binoma i zamjenu a s -b-c
24. minimalna vrijednost kvadrata je 0
25. zbroji jednadžbe tako da se većina izraza pokrati
26. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, izluči faktore s lijeve strane tako da se dobije desna
27. kvadrat zbroja brojeva a,b,c,d

11.2. C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. klasična indukcija, u koraku krenuti od pretpostavke i graditi dalje
2. klasična indukcija, u koraku krenuti od onoga o čemu želimo znati nešto više
3. klasična indukcija, u koraku raspisati sumu prvih $n+1$ prirodnih brojeva
4. klasična indukcija
5. klasična indukcija
6. Rješenje koje se može naslutiti na malim primjerima $(\frac{n}{n+1})$ može se pokazati indukcijom.
7. S koliko dijagonala doprinosi vrh koji je u odnosu na pretpostavku dodan u koraku?
8. U koraku (za $n+1$) promatrajte n pravaca i s koliko sjecišta doprinese taj zadnji dodani pravac.
9. U koraku (za $n+1$) promatrajte n kružnica i što se desi kad dodamo tu zadnju kružnicu.
10. Koliko ima traženih podskupova koji ne sadrže element $n+1$? Kako možemo dodati taj zadnji element?
11. Izbor markica može sadržavati barem jednu vrijednosti 5 kn ili mogu sve biti vrijednosti 3 kn.
12. Ploča $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sastoji se od 4 ploče $2^n \times 2^n$. Kako možete popločati sredinu velike ploče?
13. Proučite zadatak 8.
14. indukcija s korakom 3
15. klasična indukcija
16. Provjerite što se događa na malim primjerima.
17. Promotrimo igrača s najviše pobjeda. Njega želimo staviti na čelo kolone.
18. Napravite korake iz n u $2n$ pa iz n u $n-1$.

11.3. C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Zapišite tvrdnje u jednostavnijim oblicima: "Ne pijem i ne pušim i ne psujem", "Preumoran sam ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije prost i broj jedan nije složen".
2. Pronađite konkretne brojeve za koje ne vrijedi zadani izraz.
3. Pronađite konkretan broj za koji tvrdnja ne vrijedi.
4. Dokažite direktno koristeći poznate činjenice iz geometrije.
5. Dokažite direktno kao sličan primjer iz uvoda.
6. Zapišite broj u obliku $\overline{abcde}$ i raspišite po znamenkama.
7. Podijelite zadatak na slučajeve u ovisnosti o ostatku dijeljenja zadanog prirodnog broja s 3.
8. Za svaku od izjava posebno pretpostavite da je baš ona ta koja je istinita. Ako dobijete nešto što nema smisla, onda je ta tvrdnja sigurno lažna. Ponovite za sve tvrdnje i ona koja ne daje kontradikciju je točan odgovor.
9. Slično kao u prethodnom zadatku.
10. Slično kao u prethodnom zadatku.
11. Zapišite te brojeve po znamenkama (kao u 6. zadatku) i ponovo pomoću znamenaka zapišite kako izgleda taj zbroj. Pretpostavite da je taj zbroj kvadrat nekog prirodnog broja i pokušajte dobiti kontradikciju.
12. Pretpostavite da ih ima konačno mnogo, tj. da postoji najveći prosti broj, i pokušajte dobiti kontradikciju.
13. Pretpostavite da postoje prirodni brojevi m i n za koje je neskrativ (bitno!) razlomak $\frac{m}{n}$ jednak $\sqrt{2}$ i pokušajte dobiti kontradikciju.
14. Implikacija se negira tako da uzrok ostane nepromijenjen, posljedicu negiramo, a zatim te dvije tvrdnje povežemo veznikom "i", "a" ili "ali".
15. Obrat znači da samo zamijenimo uzrok i posljedicu, bez ikakvih negacija, i ne mora imati istu istinitosnu vrijednost kao početna implikacija.
16. Možda ćete morati uvesti još neke pojmove koji su se u polaznoj implikaciji podrazumijevali.
17. Tvrdnju zapišite jednostavnije: "Ako je barem jedan od brojeva a i b djeljiv s c, onda je i njihov umnožak ab djeljiv s c." Pazite da ste dobro napisali obrat! Obrat ne vrijedi, a to možete dokazati tako da nađete kontraprimjer.
18. Dokazati možete direktno, a obrat ne vrijedi (dokažite!).
19. Obrat vrijedi, samo razmislite kako biste to dokazali.
20. Pazite da u obratu po kontrapoziciji ne zaboravite zamijeniti uzrok i posljedicu i oboje negirati.
21. Prisjetite se značenja svih navedenih pojmova!
22. Zapišite obrat po kontrapoziciji te ga dokažite direktno. Odatle slijedi istinitost polazne tvrdnje.
23. Slično kao prethodni zadatak.
24. Imajte na umu činjenicu da je $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ za realne brojeve x i y.

11.4. G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. SKS poučak o sukladnosti.
2. KK poučak o sličnosti.
3. KK poučak o sličnosti.
4. KK poučak o sličnosti.
5. SKS poučak o sličnosti.
6. KK poučak o sličnosti.
7. KSK poučak o sukladnosti.
8. a) KK poučak o sličnosti.

   b) SKS poučak o sličnosti.
9. SKS poučak o sukladnosti.
10. SSK poučak o sukladnosti.
11. KK poučak o sličnosti, neki konstantni omjeri.
12. KK poučak o sličnosti, Pitagorin poučak.
13. Uvedi polovišta $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$. SKS poučak o sukladnosti.
14. Angle chase, KK poučak o sličnosti.

11.5. N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Ovo nije Diofantska jednadžba nego zadatak riječima - označite s x broj Diofantovih godina i izrazite na 2 načina.
2. Kojim znamenkama može završavati potpun kvadrat?
3. Pomnožite sve s xy i faktorizirajte.
4. Pomnožite sve s xy i faktorizirajte.
5. Faktorizirajte.
6. Usporedite taj izraz s 2 uzastopna potpuna kvadrata. Dobijte da je strogo manji od jednog, a strogo veći od drugog.
7. Zgodno faktorizirajte.
8. Faktorizirajte zagradu pa promatrajte parnost.
9. Faktorizirajte.
10. Promatrajte parnost.
11. Promatrajte djeljivost s 5.
12. Faktorizirajte, iskoristite to što znate najveći zajednički djelitelj faktora da upotrijebite djeljivost s 4.
13. Promatrajte djeljivost s 4.
14. Promatrajte djeljivost s 3.
15. Faktorizirajte.
16. Promatrajte ostatak pri dijeljenju sa 9.
17. Faktorizirajte desnu stranu pogodno, pa iskoristite što su faktori relativno prosti (zaključite da svaka mora biti potpun kub pa dođite do kontradikcije).

12. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

12.1. A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pomnožite zadanu nejednakost s 2 te zatim svedite na tvrdnju da je kvadrat nenegativan.
2. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane.
3. Primijenite AG nejednakost na svaki faktor s lijeve strane i iskoristite uvjet iz zadatka.
4. Pomnožite nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ i zatim iskoristite AG nejednakost.
5. Pomnožite nejednakost sa $b_1 + ... + b_n$ te zatim primijenite CSB nejednakost.
6. *KA nejednakost*

   Primijenite činjenicu da je kvadrat broja nenegativan.

   GH nejednakost

   Primijenite AG nejednakost.
7. *1. hint*

   Primijetite da je zadana nejednakost ekvivalentna sa sljedećom:

   $$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

   2. hint

   Primijenite KA nejednakost.
8. Koristite AG nejednakost na lijevoj strani kako biste dobili da je zadani izraz veći ili jednak od nekog fiksnog broja.
9. Supstituirajte izraze $(a+b), (b+c), (c+a)$.
10. Primijenite CSB nejednakost.
11. Primijenite AG nejednakost na svaki par brojeva s lijeve strane i zbrojite te nejednakosti.
12. Primijenite CSB nejednakost.
13. Primijenite CSB nejednakost na modificirani izraz.
14. Primijenite AG nejednakost na $n+1$ članova.
15. Primijetite da iz uvjeta zadatka vrijedi $a^2 < a, b^2 < b, c^2 < c$.
16. Primijenite CSB nejednakost na svaki član pod korijenom s lijeve strane.
17. Na odgovarajući način primijenite AG nejednakost na dio svakog nazivnika.
18. Uvedite supstituciju te zatim primijenite CSB nejednakost.

19. *1. hint*

    Raspišite $x_0 - x_n$ kao $x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + ... + x_{n-1} - x_n$.

    2. hint

    Primijenite zadatak 8.

20. *1. hint*

    Primijenite AG nejednakost na nazivnike razlomaka s lijeve strane.

    2. hint

    Primijenite KA nejednakost na tako dobivenu nejednakost.

21. *1. hint*

    Primijetite $\dfrac{a}{2a+b} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{4a+2b}$.

    2. hint

    Primijenite Engel formu CSB nejednakosti.

22. Odredite formulu za volumen i primijenite AG nejednakost.

12.2. C12: Indukcija - Ema Borevković

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Podijelite ploču na četiri jednaka dijela.
2. Gdje sve može stajati najveća kutija?
3. Razmislite po broju čega sve možete raditi indukciju.
4. Tvrdnja zadatka vrijedi za sve neparne brojeve.
5. Dokažite da je moguće poredati novčiće da se zadovolji tvrdnja zadatka kad je njihov broj potencija broja dva.
6. Uvijek ima parno neparnih hrpi.
7. Za koje konfiguracije čokoladica možete lako osmisliti algoritam kojim ćete sve čokoladice iz te konfiguracije moći premjestiti u jednu hrpu?
8. Dodajte još jedan grad u graf i povežite ga s ostalima.
9. Kreativno odabereti po čemu ćete provesti indukciju.

12.3. C15: Invarijante - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Kako se mijenja zbroj nakon svake partije?
2. Koje su sve mogućnosti promjene broja crnih polja?
3. Što je s parnosti brojeva na ploči?
4. Kako se mijenja zbroj brojeva u krugu?
5. Promatraj odnos opsega i površine pri svakom potezu.
6. Skiciraj nekoliko točaka. Koji su sve bitni pojmovi (tj. karakteristike) vezani za točke u koordinatnom sustavu?
7. Promatraj kakve sve mogućnosti Anja ima po broju komada čokolade na njenom potezu.
8. Kako se mijenja zbroj brojeva na ploči?
9. Znaš li neko svojstvo čiji je indikator zbroj znamenki?
10. Koji je najveći broj na ploči nakon poteza?
11. Znaš li neki algoritam/pojam iz teorije brojeva koji koristi transformacije iz zadatka?
12. Numeriraj vrhove i promatraj zbroj vrhova na kojima piše -1.
13. Promatraj zbroj brojeva u krugu.
14. Dokaži da umnožak brojeva na ploči ne raste.
15. Potpuni kvadrati ne mogu biti djeljivi s 3 i ne s 9.

12.4. G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Iskoristite teorem o obodnom i središnjem kutu.
2. Iskoristite prvu karakterizaciju tetivnih četverokuta i Talesov teorem.
3. Prva karakterizacija tetivnih četverokuta.
4. Pokažite da sjecište simetrale stranice i opisane kružnice leži na simetrali nasuprotnog kuta. Koristiti obodne kuteve (obodni kutevi nad istom tetivom su jednaki).
5. Tetivni četverokut ABCF, obodni kutevi.
6. Neka je T tražena osnosimetrična slika ortocentra. Dovoljno je dokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan (zbroj dva nasuprotna kuta je $180°$).
7. Dovoljno je dokazati da je točka N polovište stranice $\overline{AC}$.
8. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
9. *HINT 1:* Neka je M polovište od $\overline{AB}$. Treba pokazati da su točke S, R i M kolinearne. To ćemo pokazati ako pokažemo $\angle RSP = \angle MSP$.
   HINT 2: BQSM i PQSR su tetivni.
10. Tetivni četverokut i *angle chase*.
11. Dovoljno je pokazati $\angle GDC = \angle GFC$.
12. *HINT 1:* $\triangle MGH \sim \triangle MEF$
    HINT 2: $CM \perp EF$, a iz toga možemo dobiti i tetivnost nekih četverokuta.
13. Ako sa I označimo drugo sjecište kružnice Γ i BG, pokaži da je $FI \parallel CD$.
14. Neka je E sjecište AD i BC. Pronaći tetivne četverokute BZEY i AZEC.
15. Neka je N polovište od AB.
    HINT 1: Pokazazi $|NX| = |NB|$
    HINT 2: Pokazati da je MXNB tetivan.

12.5. N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Za svaki ostatak pri dijeljenju broja sa 3, odnosno 4, pogledajte ostatak njegovog kvadrata.
2. Pogledajte ostatke mod 3.
3. Promotrite sve ostatke prirodnog broja pri dijeljenju sa 6.
4. Za svaki ostatak pri dijeljenju sa 7, odredite ostatak njegovog kuba.
5. Promotrite ostatke potencije broja 2 pri dijeljenju sa 7.
6. Prebacite a^2 na drugu stranu i faktorizirajte izraz.
7. Zapišite izraz u obliku zbroja cijelog broja i razlomka.
8. Primijetite kako se zadnja znamenka periodički ponavlja.
9. Primijenite Eulerov teorem.
10. Konstruirajte odgovarajući c koji zadovoljava uvjete zadatka za sve a i b.
11. Promotrite koji je uvjet nužan kako bi c bio prirodan broj te analizirajte djeljivost brojeva a i b.
12. *1. hint*

    Pretpostavite suprotno, tj. da su oba broja kubovi prirodnih brojeva.

    2. hint

    Promotrite njihov umnožak koji bi tada također trebao biti kub prirodnog broja.
13. Primijenite Mali Fermatov teorem.
14. Rastavite na slučajeve $n = 1$ i $n > 1$.
15. Promotrite brojeve $a_k := x_k - 1$.

13. Poglavlje

Hintovi za treću grupu

13.1. A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Dokaži da je f injekcija.
2. Uvrsti neke nule.
3. Uvrsti $x := 1 - x$.
4. Odredi $f(1)$.
5. Koristi formulu za $f(f(x))$ koju si dobio iz dane jednadžbe, primijeni f na obje strane jednadžbe.
6. Dobij izraze za $f(xy)$ i $f(x + y)$ pa dođi do rješenja proširenjem s racionalnih na realne brojeve.
7. Dobij izraz za $f(x + 1) - f(x)$ i zaključi da je f polinom nekog stupnja. Odredi taj stupanj.
8. Dobij surjektivnost pa injektivnost.
9. Uvrštavaj 1 i $f(1)$.
10. Podijeli zadatak na slučajeve ovisno o tome postoji li neki broj koji se ne slika u nulu.
11. Što je $f(p - 1)$ za prosti broj p?
12. Promotri skup fiksnih točaka.
13. Dokaži da je f injektivna i multiplikativna.

13.2. C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Nađite odgovarajuće bojanje.
2. Što se događa s parnosti broja crnih polja pri svakom od navedenih koraka?
3. Točan odgovor je 4.
4. Nađite odgovarajuće bojanje.
5. Čime je jednoznačno određen pravokutnik? Kako onda u odnosu na to odrediti broj pravokutnika za proizvoljno polje?
6. Pokušajte induktivno naći algoritam koji će dati traženi raspored brojeva.
7. Indukcija (i to dvostruka).
8. Pretpostavite suprotno. Iskoristite činjenicu da postoji najmanji prirodan broj.
9. Promatrajte što se događa s prva 2 retka/stupca.
10. Nađite odgovarajuće bojanje i invarijantu.
11. Dvostruko prebrojavanje.
12. Pronađite odgovarajuće bojanje i izvršite dvostruko prebrojavanje.
13. Za koje male n je moguće doći do šahovskog bojanja? Za ostale nađite odgovarajuće bojanje i invarijantu.
14. Nađite odgovarajuću monovarijantu.

13.3. G13: Simedijane - Krešimir Nežmah

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Trigonometrijska čeva.
2. (a) izraz za omjer u kojem čevijan dijeli stranicu, vidi uvod
   (b) Polovište dijeli stranicu u omjeru $1:1$.
3. Fantomiraj polovište kao presjek između $\overline{BC}$ i refleksije pravca AX. Trig bash.
4.
   - (a) Isto kao 3. zadatak
   - (b) angle chase, koristi tetivnost i izogonalnost
   - (c) na dva načina izrazi omjer $|BD| : |DC|$.
   - (d) Uvedi točku O kao središte opisane od $\triangle ABC$
   - (e) čisti angle chase, koristi tetivnost iz (d) dijela
   - (f) koristi sličnosti iz (b) dijela
   - (g) analogno kao zadatak 1.
5. Kutove treba dobiti preko sličnosti. Dokaži sličnost koristeći omjere. Ptolomej.
6. Hint 1: Pokaži da su AC i BC tangente na $\triangle ABP$.
   Hint 2: PC je simedijana u $\triangle ABP$.
7. Hint 1: Koristi sličnost iz 4. (b).
   Hint 2: U ovom slučaju zapravo imamo sukladnost.
   Hint 3: Rotacija koja šalje $\triangle DBC$ u $\triangle DMA$ također šalje središta opisanih prvog u drugi.
   Hint 4: length chase za $|OD| = |O_1D|$ i $|AO| = |AO_1|$, gdje je O_1 središte opisane od $\triangle DMA$.
8. Hint 1: Poučak o simetrali kuta.
   Hint 2: Dovoljno je pokazati da je omjer $|AQ| : |QC|$ konstantan.
   Hint 3: Zadatak 2. (b).
9. Hint 1: AS je simedijana u $\triangle APQ$.
   Hint 2: AB prepolavlja $\overline{PQ}$.
   Hint 3: HPAQ je tetivan, pokaže se chasom
   Hint 4: Fantomiraj H' tako da leži na AS i opisanoj od $\triangle APQ$.
   Hint 5: chase preko svojstva simedijana da je H' refleksija od B.
10. Hint 1: Produži AB i AC da drugi put sijeku kružnicu sa središtem T i radijusom $|BT|$.
    Hint 2: Neka su P i Q ta sjecišta, dokaži sličnost $\triangle ABC \sim \triangle AQP$.
    Hint 3: Dovoljno je dokazati da su $\triangle AQP$ i AB_1C_1 sukladni.
    Hint 4: Štoviše, osnosimetrični su s obzirom na AT, pokaži chaseom.
    Hint 5: Ako je M polovište od $\overline{BC}$, $AMTS$ je tetivan.
11. Hint 1: Homotetija u A s koeficijentom 2. Dovoljno je pokazati da slika od F leži na opisanoj od $\triangle ABC$.
    Hint 2: Nazovimo G tu sliku od F. Nagađamo da je $ABGC$ harmonijski četverokut.
    Hint 3: Fantomiraj G' tako da je $ABG'C$ harmonijski, tj. AG simedijana, a F' kao polovište od $\overline{AG}$.
    Hint 4: Angle chase i svojstva simedijana da dobiješ kako $F' \in BD$ i $F' \in CF$.

13.4. N13: Orderi - Paula Vidas

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Odredite $\operatorname{ord}_{a^n-1} a$.
2. $q \mid 2^p - 1 \implies 2^p \equiv 1 \pmod{q}$. Promotrite $\operatorname{ord}_q 2$.
3. $q \mid p^p - 1 \implies p^p \equiv 1 \pmod{q}$. Promotrite $\operatorname{ord}_q p$.
4. Pretpostavite suprotno. Promotrite najmanji prosti djelitelj od n.
5. Bez smanjenja općenitosti pretpostavite $p > q$. Promotrite prvu relaciju.
6. $p^2 \equiv q^2 \pmod{p+q}$.
7. Mali Fermatov teorem.
8. Promotrite neki prosti djelitelj od $p^2 + 1$.
9. *Hint 1.* Ako je n neparan, faktorizirajte $p^n + 1$.

   Hint 2. Iz uvjeta djeljivosti odredite koji od brojeva n i p mora biti veći.

14. Poglavlje

Hintovi za olimpijsku grupu

14.1. M8: Konstrukcije - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Indukcija.
2. Schur+CRT
3. Prijeđi na primitivni korijen, pokušaj spariti brojeve.
4. Pretpostavi suprotno, da neki p nije u M. Promotri ostatke pri dijeljenju s p koji se beskonačno puta javljaju u M i one koji se konačno mnogo puta javljaju.

14.2. M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Izrazi $f(xy^2)$ na dva načina.
2. Dokaži $f(n) \geqslant n$
3. Slično kao prethodni zadatak.
4. Koje su moguće vrijednost f?
5. Pokrati $f(yf(x))$ i $f(x+y)$. Koja su rješenja?
6. Pokrati $f(x^2 + yg(x))$ i $f(xy)$.
7. Izrazi $f(x) - f(y)$.
8. Uvrsti nekako $yf(x) - x$ i gledaj što dalje.

14.3. M10: Grafovi - Krešimir Nežmah

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Hint 1: U slučaju da nema ciklusa, stablo je bipartitan graf.
   Hint 2: princip ekstrema, gledaj minimalni ciklus
2. Hint 1: Kako najlakše natjerati skup brojeva da ima gcd = 1?
   Hint 2: DFS ili Euler
3. Hint 1: Promatraj permutaciju kao graf.
   Hint 2: Kako riješiti kada je samo jedan ciklus?
   Hint 3: Kako spojiti dva ciklusa?
4. Hint 1: Na koja sve polja može doći prazno polje? Na koja sva polja može doći pojedini domino?
   Hint 2: Napravi graf gdje kretanje po grafu predstavlja kretanje praznog polja.
   Hint 3: Dokaži da je dobiveni graf stablo.
   Hint 4: Dovoljno je pokazati da je broj bridova za jedan manji od broja čvorova te da nema ciklusa.
   Hint 5: Za ciklus, Pickov teorem.
5. Hint 1: Napravi graf. Točke neće biti čvorovi.
   Hint 2: Kako riješiti stablo? Što onda s ciklusima.
   Alternativni hint 2: Euler, kako napraviti da svi imaju paran stupanj?
6. Hint 1: Nađi koji bi mogao biti slučaj jednakosti. Nedostatak trokuta upućuje na nedostatak neparnih ciklusa.
   Hint 2: Promatraj neki brid. Kako uvjet zadatka ograničava stupnjeve čvorova?
   Hint 3: Raspiši dobivene izraze na drugačiji način, nejednakosti.
7. Hint 1: Pokušaj uvjete zadatka kodirati u graf tako da svaki brid predstavlja uvjet da mu vrhovi moraju biti suprotne boje.
   Hint 2: Pokaži da je svaki ciklus u takvom grafu paran.
8. Hint 1: Pokaži da je graf povezan.
   Hint 2: Promatraj rastav na SCC, želimo pokazati da je samo jedan.
   Hint 3: Uvijek postoji SCC koji ima out-degree 0.
   Hint 4: Kontradikcija preko dvostrukog prebrojavanja in i out degreeova.
9. Hint 1: indukcija
   Hint 2: Fiksiraj proizvoljni čvor.
   Hint 3: Barem pola čvorova leži na jednoj strani.
10. Hint 1: indukcija
    Hint 2: Fiksiraj proizvoljni čvor i ostale podijeli na temelju odnosa sa fiksiranim.
    Alternativni hint 2: Makni proizvoljni čvor pa ga pokušaj vratiti nazad.
11. Hint 1: princip ekstrema, promatraj maksimalni ciklus
    Alternativno: indukcija, makni jedan čvor
    Hint 2: SCC
12. Hint 1: Svaki ciklus sadržan je u jednom SCC-u.
    Hint 2: Fiksiraj ciklus od $k+1$ i promatraj najveći pravi podskup koji također tvori ciklus.
13. Hint 1: Svakom čvoru dodijeli skup dozvoljenih izlazećih boja.
    Hint 2: Kako najlakše osigurati da nijedan skup nije podskup drugog?
14. Hint 1: Svaki par promatraj kao jedan čvor. Kakav graf dobivamo?
    Hint 2: Svaki turnir ima Hamiltonov put.
    Hint 3: Koristi zadatak 12.
15. Hint 1: Rastav na SCC.
    Hint 2: Što ako je neki SCC velik? Što ako imamo dva netrivijalna SCC-a.
    Hint 3: Koristi zadatak 12.

14.4. M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. N je na translaciji neke dane kružnice.
2. Dodajte točku. Ptolomej.
3. Dodajte točku. Želite primijeniti nejednakost trokuta.
4. Uvedite središte opisane kružnice trokuta ABC.
5. Pretpostavimo suprotno.
6. Spusti visine koje su jednake.
7. Promotri kružnicu opisanu trokutu KID.
8.
9. Promotri refleksiju oko simetrale $\overline{AT}$

Dio IV

Hintovi s predavanja na drugom terminu

15. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

15.1. A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. grupiranje
2. grupiranje
3. razlika kvadrata
4. kvadrat binoma
5. kvadrat binoma, rastavi -4abcd na zbroj
6.
7.
8. faktoriziraj 6
9. x^2 je varijabla
10.
11. grupiranje
12. zbroj kubova
13. kub zbroja
14. kub binoma
15. dodaj i oduzmi član
16. djeljivo s $x^2 + x + 1$
17. kvadrat binoma, zbroj kvadrata je veći jednak 0
18. faktoriziraj izraz
19. pojednostavi izraze A i B
20. obrati pozornost na traženu tvrdnju prilikom faktorizacije
21. zamjena a+b s -c
22. faktoriziraj brojnik tako da se može skratiti
23. koristi formulu za kvadrat binoma i zamjenu a s -b-c
24. minimalna vrijednost kvadrata je 0
25. zbroji jednadžbe tako da se većina izraza pokrati
26. pretpostavi poredak brojeva x, y i z, te pametno faktoriziraj.
27. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, izluči faktore s lijeve strane tako da se dobije desna

28. kvadrat zbroja brojeva a,b,c,d
29. $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

15.2. C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pretpostavka: $2n-1$ je n.-ti neparni broj.
2. Standardna indukcija.
3. Standardna indukcija.
4. Standardna indukcija.
5. Pretpostavi da $6^n+4=5k$. Pretpostavku uvrsti u korak. Isto vrijedi i za b) i c) dio zadatka.
6. U koraku nacrtaj mnogokut s $n+3$ stranice s vrhovima A_1, A_2... te povuci dijagonalu koja spaka vrh A_{n+2} s vrhom A_1.
7. Promatrati zadnje znamenke potencija broja 2.
8. Pretpostavka indukcije: Za neki $k \in \mathbb{N}$ tj. za piramidu od k slojeva potrebno je $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ loptica.
9. Standardna indukcija.
10. Pretpostaviti da se svaki prirodni broj $k \geqslant 8$ može zapisati kao $k=3a+5b$.
11. Standardna indukcija.
12. Obrnuta indukcija s bazom $m=n$, te se u koraku dokazuje za svaki prethodni m.
13. Iz pretpostavke da je za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $p_n < 2^{2^n}$ promatrati prosti broj $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
14. Iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi promatrati slučajeve kad se još jedan par rukuje. Mogući slučajevi su: rukovale su se osobe s parnim i neparnim brojem rukovanja, rukovale su se osobe s parnim brojem rukovanja i rukovale su se osobe s neparnim brojem rukovanja.
15. Standardna indukcija.

15.3. C25: Logika i dokazi - Matko Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Zapišite tvrdnje u jednostavnijim oblicima: "Ne pijem i ne pušim i ne psujem", "Preumoran sam ili je predavanje preteško", "Broj jedan nije prost i broj jedan nije složen".
2. Pronađite konkretne brojeve za koje ne vrijedi zadani izraz.
3. Pronađite konkretan broj za koji tvrdnja ne vrijedi.
4. Podijelite zadatak na slučajeve u ovisnosti o ostatku dijeljenja zadanog prirodnog broja s 3.
5. Za svaku od izjava posebno pretpostavite da je baš ona ta koja je istinita. Ako dobijete nešto što nema smisla, onda je ta tvrdnja sigurno lažna. Ponovite za sve tvrdnje i ona koja ne daje kontradikciju je točan odgovor.
6. Slično kao u prethodnom zadatku.
7. Slično kao u prethodnom zadatku.
8. Zapišite te brojeve po znamenkama i ponovo pomoću znamenaka zapišite kako izgleda taj zbroj. Pretpostavite da je taj zbroj kvadrat nekog prirodnog broja i pokušajte dobiti kontradikciju.
9. Pretpostavite da ih ima konačno mnogo, tj. da postoji najveći prosti broj, i pokušajte dobiti kontradikciju.
10. Pretpostavite da postoje prirodni brojevi m i n za koje je neskrativ (bitno!) razlomak $\frac{m}{n}$ jednak $\sqrt{2}$ i pokušajte dobiti kontradikciju.
11. Implikacija se negira tako da uzrok ostane nepromijenjen, posljedicu negiramo, a zatim te dvije tvrdnje povežemo veznikom "i", "a" ili "ali".
12. Obrat znači da samo zamijenimo uzrok i posljedicu, bez ikakvih negacija, i ne mora imati istu istinitosnu vrijednost kao početna implikacija.
13. Možda ćete morati uvesti još neke pojmove koji su se u polaznoj implikaciji podrazumijevali.
14. Tvrdnju zapišite jednostavnije: "Ako je barem jedan od brojeva a i b djeljiv s c, onda je i njihov umnožak ab djeljiv s c." Pazite da ste dobro napisali obrat! Obrat ne vrijedi, a to možete dokazati tako da nađete kontraprimjer.
15. Dokazati možete direktno, a obrat ne vrijedi (dokažite!).
16. Obrat vrijedi, samo razmislite kako biste to dokazali.
17. Pazite da u obratu po kontrapoziciji ne zaboravite zamijeniti uzrok i posljedicu i oboje negirati.
18. Prisjetite se značenja svih navedenih pojmova!
19. Zapišite obrat po kontrapoziciji te ga dokažite direktno. Odatle slijedi istinitost polazne tvrdnje.
20. Slično kao prethodni zadatak.

15.4. G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. SKS poučak o sukladnosti.
2. KK poučak o sličnosti.
3. KK poučak o sličnosti.
4. KK poučak o sličnosti.
5. SKS poučak o sličnosti.
6. KK poučak o sličnosti.
7. KSK poučak o sukladnosti.
8. a) KK poučak o sličnosti.

   b) SKS poučak o sličnosti.
9. SKS poučak o sukladnosti.
10. KK poučak o sličnosti.
11. SSK poučak o sukladnosti.
12. KK poučak o sličnosti.
13. Uvedi polovišta $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$. SKS poučak o sukladnosti.
14. KK poučak o sličnosti, Pitagorin poučak.

15.5. N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. faktorizacija
2. faktorizacija
3. kvocijent
4. kongruencije
5. smještanje među kvadrate
6. faktorizacija
7. ograničavanje
8. kongruencije
9.
10. ograničavanje
11.
12.
13. faktorizacija, gledanje mjere

16. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

16.1. A22: Nejednakosti - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Svođenje na sumu kvadrata.
2. H-A nejednakost.
3. Svođenje na sumu kvadrata.
4. A-H nejednakost.
5. A-K nejednakost.
6. Riješiti se nazivnika i svesti na sumu kvadrata.
7. A-H nejednakost s članovima $(a+b), (b+c), (a+c)$.
8. A-G nejednakost nakon što se riješite zagrada.
9. Za svaki n vrijedi $x_n \geqslant x_n^2$.
10. 1 u nazivniku zamijeniti s $xy + yz + xz$ te faktorizirati nazivnik.
11. Proširiti lijevu stranu s $a^a b^b c^c$. Bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da vrijedi $a \leqslant b \leqslant c$ te promatrati što se dešava s potencijama brojeva većih i manjih od 1. Primijeniti $abc = 1$ pri zaključivanju.
12. Riješiti se nazivnika gdje se može te primijeniti G-H nejednakost.
13. U Heronovoj formuli za površinu trokuta primijeniti A-G nejednakost.
14. Uvesti supstituciju: $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Supstituciju primijeniti i u uvjetu te dokazati novu nejednakost s novim uvjetom. Dokazuje se pomoću CSB-a.
15. Uvesti supstituciju: $a = \frac{x}{x-1}, b = \frac{y}{y-1}, c = \frac{z}{z-1}$. Supstituciju primijeniti i u uvjetu te svesti na potpuni kvadrat.

16.2. C22: Indukcija - Laura Horvat

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Standardna matematička indukcija.
2. Standardna matematička indukcija.
3. Standardna matematička indukcija.
4.
   - Baza: Koji su mogući ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju s 8?
   - $k^{2^n} = (k^{2^n} - 1) + 1$
5.
   - Jaka indukcija.
   - $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$
6.
   - Nejednakost trokuta.
   - Omeđi kosinus odozgo.
7. Kako glasi prvih nekoliko članova niza?
8. Kako su dobiveni α i β?
9. Što se dogodi nakon prvog loma?
10. Korak $[n+1]$: Najprije prebaci prvih n diskova na drugi štap.
11. Uvedi supstituciju $a = x,\ b = -y$.
12. Podijeli jednakost iz pretpostavke s 2.
13. Posebno promatraj slučajeve kad n u zapisu sadrži barem jednu peticu i kad se sastoji samo od trojki.
14. Dokaži pomoćnu tvrdnju: $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.
15.
    a) $\gcd(m, n) = \gcd(m, m \pm n)$

    b)
    - Dokaži pomoćnu tvrdnju: $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
    - Dokaži pomoćnu tvrdnju: $F_m | F_{mk}$
    - vidi hint za *a*).
    - $\gcd(m, n) = 1 \implies \gcd(m, nk) = \gcd(m, k)$

16.3. C26: Invarijante - David Mikulćić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Kako se mijenja zbroj nakon svake partije?
2. Koje su sve mogućnosti promjene broja crnih polja?
3. Što je s parnosti brojeva na ploči?
4. Kako se mijenja zbroj brojeva u krugu?
5. Promatraj odnos opsega i površine pri svakom potezu.
6. Skiciraj nekoliko točaka. Koji su sve bitni pojmovi (tj. karakteristike) vezani za točke u koordinatnom sustavu?
7. Promatraj kakve sve mogućnosti Anja ima po broju komada čokolade na njenom potezu.
8. Kako se mijenja zbroj brojeva na ploči?
9. Znaš li neko svojstvo čiji je indikator zbroj znamenki?
10. Koji je najveći broj na ploči nakon poteza?
11. Znaš li neki algoritam/pojam iz teorije brojeva koji koristi transformacije iz zadatka?
12. Numeriraj vrhove i promatraj zbroj vrhova na kojima piše -1.
13. Promatraj zbroj brojeva u krugu.
14. Dokaži da umnožak brojeva na ploči ne raste.
15. Potpuni kvadrati ne mogu biti djeljivi s 3 i ne s 9.

16.4. G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Teorem o obodnom i središnjem kutu.
2. Talesov teorem.
3. Angle chase.
4. Jednakost obodnih kuteva nad istom tetivom.
5. Tetivni četverokut ABCF, obodni kutevi.
6. Neka je T tražena osnosimetrična slika ortocentra. Dovoljno je dokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan (zbroj dva nasuprotna kuta je $180°$).
7. Zapravo želimo pokazati da visina $\overline{BN}$ raspolavljava kut $\angle ABC$.
8. Dovoljno je pokazati da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
9. Neka je M polovište od $\overline{AB}$. Treba pokazati da su točke S, R i M kolinearne. To ćemo pokazati ako pokažemo $\angle RSP = \angle MSP$.
10. Angle chase.
11. Dovoljno je pokazati $\angle GDC = \angle GFC$.
12. *HINT 1:* $\triangle MGH \sim \triangle MEF$
    HINT 2: $CM \perp EF$, a iz toga možemo dobiti i tetivnost nekih četverokuta.
13. Ako sa I označimo drugo sjecište kružnice Γ i BG, pokaži da je $FI \parallel CD$.

16.5. N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. mod koji je dobar za kvadrate i potencije od 2
2. kongruencije
3. ako je umnožak brojeva potencija prostog, oba faktora su potencije prostog
4. probaj modove većih potencija ako male ne prolaze
5. kongruencije
6. prvo odredi 2222 mod 7 i 5555 mod 7
7. odredi kada je $2^x + 3$ djeljiv s 19
8. Eulerov teorem
9. ako je umnožak brojeva potencija prostog, oba faktora su potencije prostog promatraj ostatke pri djeljenju raznim brojevima
10. promatraj proste brojeve koji dijele n
11. ako je umnožak brojeva potencija prostog, oba faktora su potencije prostog MFT
12. $a^x \equiv 1 \pmod{n}$, ako $\varphi(n)|x$
13. faktorizacija i uspoređivanje
14. promotri kada je a_n djeljiv je nekim prostim p
15. MFT, definicija djeljivosti
16. faktorizacija, pametne kongruencije
17. riješi slučaj kada je neki od brojeva djeljiv s p, te svedi zadatak na taj slučaj
18. koristi MFT i pametno isprobavaj

17. Poglavlje

Hintovi za treću grupu

17.1. A23: Funkcijske - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Ideja je promotriti za koje x vrijedi $2^{x^3+x} = 2^{2x}$
2. Promotri što dobiješ ako ubaciš $x = 1$ i onda označiš lijevu stranu s b.
3. Raspiši do oblika $(f(n+1)+2)^2 \leqslant (f(n)+2)^2$.
4. BSOMP $f(x) \geqslant f(y)$. Zamijeni x i y.
5. Prvo pokaži za 0 pa iz toga ubacivanjem indukcijom za prirodne pa nadalje indukcijom isto za racionalne.
6. Zamijeni x i y pa tako pokaži involutivonost. Nadalje ubaci $y = 1$.
7. Označi $a = f(0)$ i $b = f(a)$. Oduzmi $P(f(x), 0)$ od $P(a, x)$.
8. Ubaci $x = y = 0$ pa raspiši po slučajevima što $g(0)$ može biti.
9. Ubaci po slučajevima $x = y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, a poslije toga $x + 1$ umjesto x i $y = 0$.
10. Ubaci $(0, x)$ pa pokaži bijektivnost. Ubaci $(f(x), y)$.
11. Ubaci $n = 1$ i označi $f(1) = a$. Dalje indukcijom.
12. Ideja je dobiti jednostavniju jednadžbu $g(g(x)) = -g(-x)$. Zato supstitucija $g(x) = \frac{1}{2} - f(\frac{1}{2} - x)$.
13. Klasični problem koji se može rješiti indukcijom. Prvo ubaci $x = 1$, $y = n$.
14. Označi s $P(x, y)$ jednadžbu $f(xf(y)) = f(x + y)$. Uoči da je $f(x) = 1$ $\forall x$ rješenje. Dakle, od sada pretpostavimo da $\exists u$ tako da $f(u) \neq 1$.

17.2. C23: Teorija grafova - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

- Zadatak 1: Trivijalno.
- Zadatak 2: Iskoristi tvrdnju: Ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, onda inducirani podgraf sa $V \subset V_1$ je izomorfan s induciram podgrafom $\theta(V) \subset V_2$.
- Zadatak 3: Trivijalno.
- Zadatak 4: Pohlepnim algoritmom obojaj vrhove grafa i boje možeš označiti redom po brojevima da ti je lakše.
- Zadatak 5: Ideja je osloboditi se 'loših' vrhova: onih koji imaju stupanj $< E/V$.
- Zadatak 6: Pronaći ćemo podgraf induktivno. Pretpostavimo da rezultat vrijedi za $n-1$, dokažimo da onda vrijedi za n.
- Zadatak 7: Kreni s ovim: Uzmimo u obzir najdulju moguću stazu (optimalna pretpostavka) i neka je v njegov posljednji vrh.
- Zadatak 8: Koje pretpostavke bi particija trebala imati? Intuitivno, takva particija trebala bi imati puno 'ispresijecajućih' bridova, tj. bridova čiji je jedan vrh u V_1, a drugi u V_2
- Zadatak 9: Koristimo indukciju po n pri čemu su bazni slučajevi trivijalni. Pretpostavimo da rezultat vrijedi za $n-1$ vrh. Izbrišimo vrh i formirajmo Hamiltonovu stazu s preostalih $n-1$ vrhova.
- Lema 13: Iskoristi zadatak 8.
- Lema 16: Briši vrhove iz G na sljedeći način: dok god postoji barem jedan ciklus, uzmi neki i izbriši iz njega jedan vrh.
- Zadatak 10: Iskoristi zadatke 5 i 6, rješenje je onda u 2 reda.
- Zadatak 11: Esencijalno ista ideja kao zadatak 8.
- Zadatak 12: Primijeni lemu 13 (ne nužno odmah).

17.3. C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Nađite odgovarajuće bojanje koje je korisno za pločicu dimenzija 4×1.
2. Nađite odgovarajuće bojanje koje uvijek razlikuje 2×2 i 1×4 pločice.
3. Nađite bojanje i invarijantu.
4. Pokušajte generalizirati dokaz iz 1. zadatka.
5. Odgovor je 11. Pronađite konstrukciju i dokažite zašto rješenje ne može biti $\leqslant 10$
6. Indukcija.
7. Pokušajte kombinirati dva bojanja.
8. Pokušajte naći bojanje koje je korisno za pločicu dimenzija 4×1 te zatim promotriti što se događa s poljima određene boje (nemojte pomiješati ovo bojanje s crnom i bijelom bojom iz zadatka).
9. Pretpostavite suprotno! Promotrite koliko ima mogućih pravaca duž kojih se potencijalno može prelomiti ploča te kroz koliko domina mora prolaziti svaki pravac.
10. Promotrite pravokutnik kao ploču i pronađite korisno bojanje.
11. Je li bitan redoslijed poteza? Ako ne, promotrimo prvo samo poteze po stupcima, a onda po recima (ili obrnuto).
12. Pronađite odgovarajuće bojanje.
13. Pokušajte matematički izraziti broj u donjem desnom kutu. Možda će biti korisno promotriti slučaj kad nijedno polje na dijagonali nije obojeno.
14. Pridružite određene brojeve svakom polju i pronađite invarijantu.

17.4. G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. svojstva tangencijalnog četverokuta
2. angle chasing, pod kojim kutom se sijeku simetrala unutarnjeg i simetrala vanjskog kuta?
3. prisjeti se svojstava središta upisane i simetrale kuta
4. kutovi nisu slučajni; zašto bi ovaj zadatak bio na ovom predavanju?
5. površina
6. Dokaži da su X i Y na odgovarajućim simetralama kutova trokuta ABC (fantomiraje)
7. 3. zadatak
8. 5. zadatak
9. 1.zadatak
10. Docrtaj nešto, imaj na umu da treba dokazati da jedna dužina raspolavlja drugu.
11. Promotri točku L, gdje se ona nalazi? (fantomiranje...)

17.5. N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Upotrijebi Teorem o dijeljenju s ostatkom na brojeve ia i p, $i \in 1, \dots p-1$.
   Primijeti da su svi ostaci međusobno različiti i različiti od 0.
   Pomnoži kongruencije.
2. Odredi $\phi(33)$.
3. Primijeti da je $p \neq 29$. Upotrijebi MFT.
4. Primijeti da je $\gcd(a, p) = 1$. Upotrijebi MFT.
   Faktoriziraj $a^p - 1$.
5. $100 \mid x \iff 25 \mid x \ \wedge \ 4 \mid x$
   Upotrijebi Lemu 1.9.
6. Dokaži $aa_i \not\equiv aa_j \pmod{m}$ za $i \neq j$.
7. Primijeni Teorem 2.2.
8. Definiraj $b = b_1 \dots b_n$, $m_j = \frac{b}{b_j}$.
   Promatraj rješenje jednadžbe $m_j x \equiv a_j \pmod{b_j}$.
   Definiraj $x_0 = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$.
9. Kineski teorem o ostacima.
10. Rastavi na po parovima relativno proste brojeve.
11. $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, Kineski teorem o ostacima.
12. Gledaj moguće ostatke pri dijeljenju sa 7, 11 i 13.
13. Metoda faktorizacije.
14. Razlika kvadrata. Metoda faktorizacije.
15. Primijeti simetriju, pronađi vrijednu nejednakost.
16. Izraz je simetričan, pretpostavi nešto o odnosu između x, y i z.
    $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
17. Uvedi novu nepoznanicu $z = x + 1001$.
    Promatraj ostatke lijeve i desne strane izraza $2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2$ pri dijeljenju s 3.

18. Poglavlje

Hintovi za četvrtu grupu

18.1. C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pretpostavite suprotno + Princip ekstrema - promotrite udaljenosti između točaka skups i pravaca definiranih točkama skupa.
2. Slično kao 1. zadatak
3. Indukcija + konveksna ljuska
4. Što se dogodi ako zamijenimo oznake R_j i R_{j+1}?
5. Kategorizirajte trokute na temelju toga koliko stranica trokuta su dijagonale a koliko stranice n-terokuta.
6. Indukcija
7. Odgovor je n+1. Za donju ogradu prebrojite broj područja i broj sjecišta, a za gornju ogradu pronađite labirint (bojanje pravaca spleta) kojem se područja na neki način mogu podijeliti u n+1 klasu tako da jedan mrav uvijek može proći kroz sva područja iste klase.
8. Produljite sve dužine u pravce te nacrtajte veliku kružnicu unutar koje se nalaze sva sjecišta.
9. Princip ekstrema - Je li moguće definirati najviši i najniži zid? Ako da, zašto i kako nam to pomaže?

18.2. C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković

Link na zadatke. Link na rješenja.

Hintovi za zadatke iz rubrike očekujte neočekivano

1. Kada bi umjesto x^2+1 imali x^2-1 stvari bi izgledale mnogo ljepše jer bi tada izraz koji posmatramo bio jednak $P(1)P(-1)$. Možemo li ipak nekako faktorizirati x^2+1 (ne nužno u skupu R)?
2. Da li vas oblik a_n podsjeća na rješenja nečega?
3. Neka je $a_n = Im((12+5i)^n) = \frac{(12+5i)^n - \overline{(12+5i)^n}}{2} = \frac{(12+5i)^n-(12-5i)^n}{2}$. Želimo dokazati da $a_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.Sada možemo pokušati nešto slično kao u prethodnom zadatku.

Hintovi za zadatke iz rubrike Čebiševljevi polinomi

1. Možemo prilično lako odrediti za koju permutaciju brojeva $c_0, c_1, c_2, ..., c_8$ lijeva strana nejednakosti dostiže maksimum. Dokazati da se tada dostiže jednakost, razmisliti kako pametno izračunati taj proizvod sinusa (primijetiti nešto što je zajedničko za sve argumente).
2. Znamo da je $\cos\ x = \cos\ (2\pi - x)$. Označimo li izraz čiju vrijednost trebamo izračunati sa A nameće se posmatrati izraz
$$B = \cos\ \alpha \cdot \cos\ 2\alpha \cdot ... \cdot \cos 2021\alpha$$
jer vidimo da vrijedi $B = A^2$, a ovi argumenti bi mogli biti nultočke nekog interesantnog polinoma.
3. Rješenje su zapravo polinomi Čebiševljevog tipa, ali malo drugačiji od onih koje smo spominjali u uvodu.

Hintovi za zadatke iz rubrike odabrani teži zadaci

1. Primijetimo da nam je slobodan član određen na osnovu $n mod 10$. Možemo li kako na osnovu te intuicije razviti algoritam koji će nam odrediti polinom Q?
2. Očito ne možemo zamisliti rješenja stepena većeg od 1, pa ih vjerovatno i nema. Za dokaz da P mora biti linearan gledati niz brojeva x_n gdje je x_n takav da je $P(x_n) = 2^n$.Za dovoljno velike inpute P nam je asimptotski jednak vodećem članu.

18.3. N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Prisjeti se najjednostavnijeg mogućeg zadatka iz kombinatorne TB.
2. parnost
3. Ne zaboravi na Dirichleta. Promatraj proizvoljni 2x2 kvadrat.
4. mali primjeri, zapiši sumu na ljepši način i prisjeti se MFT i Eulera.
5. Želiš pokazati korak indukcije $f(n) = f(n+1)$. Raspisuj s obje strane.
6. Kad igrač B ima pobjedničku strategiju, često će svaki njegov potez biti izravan odgovor na prošli potez igrača A. (logika je 'što god da igrač A učini, igrač B radi ovo, dakle igrač B nikad ne ostane bez poteza')
7. Počni od nekog $k \in S$. Koji brojevi sigurno jesu/nisu u S?
8. Promatraj posebno nulu. Koji je najmanji zanimljiv broj?
9. Postoji li uopće neki takav broj? Pokušaj pogoditi odgovor. Je općenito li lakše pokazati da ima beskonačno mnogo brojeva sa svojstvom nakon što nađeš barem jedan ili da svi osim konačno mnogo brojeva nemaju to svojstvo?
10. Što se događa pokušamo li prebaciti ili zamijeniti dva elementa u particijama ?
11. Podijeli permutacije u neke grupe da bude lakše prebrojiti.
12. Pretpostavi $n = qk + r, r > 0$ i pokušaj dokazati $m = k$.
13. Pretpostavi suprotno. počni od jednog broja koji ne bi bio u nizu i razmisli što sve još neće biti u nizu.

Dio V

Rješenja s predavanja na prvom terminu

19. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

19.1. A11: Faktorizacije - Matej Ljubičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. $a^2 \cdot (a+1) + (a+1) = (a+1) \cdot (a^2+1)$
2. $ac + bd + ad + bc = ac + ad + bc + bd = a \cdot (c+d) + b \cdot (c+d) = (c+d) \cdot (a+b)$
3. $a^2 + 10ab - 70b - 49 = a^2 - 49 + 10ab - 70b = (a-7)(a+7) + 10b \cdot (a-7) = (a-7) \cdot (a+7+10b)$
4. $a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4 = a^4+2a^2b^2+b^4+2a^3b+2ab^3 = (a^2+b^2)^2+ab\cdot(a^2+b^2) = (a^2+b^2)\cdot(a^2+b^2+ab)$
5. $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd = a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) = (ab-cd)^2 - (ac+bd)^2 = (ab-cd-ac-bd) * (ab-cd+ac+bd)$
6. $1+2=3,\ 1\cdot 2 = 2,\ x^2+3x+2 = (x+1)\cdot(x+2)$
7. $2+3=5,\ 2\cdot 3 = 6,\ a^2+5a+6 = (a+2)\cdot(a+3)$
8. $2\cdot 3 = 6,\ 1\cdot 2 = 2,\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 7,\ 6a^2+7a+2 = (3a+2)\cdot(2a+1)$
9. $1\cdot 2 = 2,\ 1\cdot(-9) = -9,\ 2\cdot(-9)+1 = -17,\ 2x^4 - 17x^2 - 9 = (x^2-9)\cdot(2x^2+1) = (x+3)\cdot(x-3)\cdot(2x^2+1)$
10. $(x^2-2x-1)^2 - 4 = (x^2-2x-1+2)\cdot(x^2-2x-1-2) = (x^2-2x+1)\cdot(x^2-2x-3) = (x-1)^2\cdot(x-3)\cdot(x+1)$
11. $a^5 + 2a^3 - 8a^2 - 16 = a^3\cdot(a^2+2) - 8\cdot(a^2+2) = (a^2+2)\cdot(a^3-8) = (a^2+2)\cdot(a-2)\cdot(a^2+2a+4)$
12. $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2) - ab\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2-ab) = (a+b)\cdot(a^2-2ab+b^2) = (a+b)(a-b)^2$
13. $8a^3b^3 + 36a^2b^2c + 54abc^2 + 27c^3 = (2ab)^3 + 3\cdot(2ab)^2\cdot 3c + 3\cdot 2ab\cdot\cdot(3c)^2 + (3c)^3 = (2ab+3c)^3$
14. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8 + 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{8 - 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$
15. $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + a^2 + a^2 + 1 - a^2 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2+1+a)\cdot(a^2+1-a)$
16. $(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2 = (a+b-2c)^2 + (a-2b+c)^2 + (b+c-2a)^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2ac + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc + a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ac + b^2 + c^2 + 4a^2 - 4ab - 4ac + 2bc \iff 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc = 0 \iff 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0 \iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$
    Budući da je kvadrat realnog broja veći ili jednak 0, zbroj kvadrata može biti jednak 0 samo ako su svi jednaki 0. $\implies a-b=0,\ b-c=0,\ a-c=0 \implies a=b=c$
17. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2+2b^2+2ab)\cdot(a^2+2b^2-2ab) = (a^2+2b^2+2ab)\cdot((a-b)^2+b^2);\ a^2+2b^2+2ab \geqslant 2^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 2 = 20;\ (a-b)^2 + b^2 \geqslant 0 + 4 = 4$
    Budući da je izraz jednak umnošku dva broja veća jednaka od 2 on je složen.
18. Županijsko 1. razred A varijanta 1. zadatak

19. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \implies abc\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=abc\cdot(\frac{1}{a+b+c}) \implies bc+ac+ab=\frac{abc}{a+b+c} \implies (bc+ac+ab)\cdot(a+b+c)=abc \implies a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+3abc=abc \implies a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0 \implies a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+a^2c+abc+bc^2+abc \implies ab(a+b)+c^2(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)=0 \implies (a+b)(ab+c^2+ac+bc)=0 \implies (a+b)(c(c+a)+b(c+a))=0 \implies (a+b)(c+a)(b+c)=0$
Budući da je umnožak 3 broja jednak 0, barem jedan od njih treba biti jednak nuli što je i trebalo dokazati.

20. $a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3=-c(a^2-ab+b^2)+c^3=-c(a^2-ab+b^2-c^2)=-c(a^2-ab+(b+c)(b-c))=-c(a^2-ab-a(b-c))=-c(-a)(-a+b+b-c)=-c(-a)(3b)=3abc$

21. $\frac{a^3}{(a-b)\cdot(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)\cdot(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)\cdot(c-b)}=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{a^3c-a^3b+ab^3-b^3c+c^3b-}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\frac{c(a^3-b^3)+ab(b^2-a^2+c^3(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(-c(a^2+ab+b^2)+ab(a+b)+c^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(-ca^2-abc-cb^2+a^2b+a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\frac{(b-a)(a^2b-a^2c+c^3-cb^2+ab^2-abc)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(a^2(b-c)+c(c-b)(c+b)+ab(b-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(a^2-c^2-}{(a-b)(b-c)(c-}$
$\frac{(b-a)(b-c)(ab-bc+a^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(b(a-c)+(a+c)(a-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$
$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c$

22. 1. rješenje: $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=b^4-2b^2c^2+c^4+a^4-2a^2b^2-2c^2a^2=(b^2-c^2)^2-a^3(b+c)-2a^2b^2-2a^2c^2=((b+c)(b-c))^2-a^3(b+c)-2a^2b^2-2a^2c^2=(b+c)((b+c)(b-c)^2-a^3)-2a^2b^2-2a^2c^2=(-a)(-a(b-c)^2-a^2)-2a^2b^2-2a^2c^2=a^2((b-c)^2+a^2-2b^2-2c^2)=a^2((b-c)^2+(b+c)^2-2b^2-2c^2)=a^2(b^2-2bc+c^2+b^2+2bc+c^2-2b^2-2c^2)=0$
2.rješenje: $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2-4b^2c^2=(-a^2+b^2+c^2)^2-(2bc)^2=(b^2+2bc+c^2-a^2)(b^2-2bc+c^2-a^2)=((b+c)^2-a^2)((b-c)^2-a^2)=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)=0\cdot(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)=0$

23. Županijsko 1. razred A varijanta 1. zadatak

24. Županijsko 2. razred A varijanta 1.zadatak

25. $a+b+c=0 \implies a^3+b^3+c^3=3abc;\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \iff \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=abc(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}) \iff a^5+b^5+c^5=\frac{5}{2}\cdot abc(a^2+b^2+c^2)$
$a^5+b^5+c^5=b^5+(a+c)(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4)=b^5-b(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4)=b\cdot(b^4-a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3-c^4)=b((-a-c)b^3-a^4-c^4+a^3c+ac^3-a^2c^2)=(-a^4-ab^3-c(b^3+c^3)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=b(-a^4-ab^3-c(b+c)(b^2-bc+c^2)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=b(-a^4-ab^3+ca(b^2-bc+c^2)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=ab(-a^3-b^3+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=ab(-(a+b)(a^2-ab+b^2)+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=ab(c(a^2-ab+b^2)+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=abc(a^2-ab+b^2+b^2-bc+a^2+c^2-ac)=abc(a^2...)$

26. Državno 2. razred A varijanta 2. zadatak

27. Državno natjecanje 2016., zadatak A-2.4.

28. Rješenje pod #2

29. Izvor.

19.2. C11: Uvod u indukciju - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 1
2. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 3a
3. Tvrdnju pokazujemo koristeći matematičku indukciju. Označimo sa $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$ sumu prvih n prirodnih brojeva.

   baza Provjeravamo $S(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, što je tvrdnja za $n = 1$. Budući da je $S(1) = 1$ i $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$, lagano vidimo da smo pokazali bazu indukcije.

   pret. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$.

   korak Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je

   $$S(k+1) = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

   Raspišemo lijevu stranu:

   $$\begin{aligned} S(k+1) &= 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \\ &= S(k) + (k+1) \\ &\overset{pretp.}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

   Time smo pokazali korak inducije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja zadatka vrijedi za sve prirodne brojeve n.

4. Problem 2.a)
5. Problem 5.
6. Ako raspišemo traženi zbroj $S(n)$ za prvih nekoliko $n \in \mathbb{N}$ vidimo da bi trebalo vrijediti $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Bazu smo već provjerili raspisujući male primjere. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S(n) = \frac{n}{n+1}$. Sada imamo

   $$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= S(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

   pa smo pokazali korak indukcije, tj. indukcijom smo pokazali da je traženi zbroj jednak $\frac{n}{n+1}$ za svaki prirodni broj n.

7. MNM online predavanje, zadatak 6
8. Za bazu uzmimo $n = 1$, jedan pravac sam sa sobom siječe se u 0 točaka pa smo provjerili bazu.
   Pretpostavimo da za neki proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da se n pravaca u općem položaju sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
   Sada promatramo broj sjecišta $(n+1)$ pravaca u općem položaju. Izdvojimo jedan od njih; preostalih n po pretpostavci indukcije ima $\frac{n(n-1)}{2}$ sjecišta. Izdvojeni pravac siječe svaki od preostalih n točno jednom (ne postoje 2 paralelna pravca niti 3 koja se sijeku u istoj točki), čime doprinosi broju sjecišta sa n. Zato je ukupan broj sjecišta $(n+1)$ pravaca jednak

   $$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

   čime smo pokazali i korak indukcije pa tvrdnja zadatka vrijedi po principu matematičke indukcije.

9. Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7
10. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.4, zadatak 10
11. MNM online predavanje, zadatak 9.
12. Lako vidimo da ploču 2×2 možemo popločati jednom pločicom koje god polje bilo uklonjeno. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ možemo šahovsku ploču $2^n \times 2^n$ s uklonjenim bilo kojim poljem popločati trominama. Promatramo ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ s uklonjenim nekim poljem. Ona je sastavljena od 4 ploče veličine $2^n \times 2^n$, a uklonjeno polje nalazi se u nekoj od tih četvrtina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se uklonjeno polje nalazi u gornjoj lijevoj četvrtini, pa tada tu četvrtinu po pretpostavci indukcije možemo popločati trominama. Promotrimo sada 4 polja koja se nalaze točno u sredini velike ploče. Jedno od njih (gornje lijevo) već smo popločali, pa na preostala 3 možemo pravilno postaviti jednu trominu. Međutim, ta tromina nalazi se u svakoj od preostalih četvrtina ploče (točno s jednim poljem), pa i te četvrtine sada možemo promatrati kao ploče $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim poljem, a to po pretpostavci znamo popločati trominama. Tako smo popločali cijelu veliku ploču (osim naravno onog jednom uklonjenog polja) pa smo pokazali i korak indukcije.
13. Barnes, Gordon, Mathematical induction, poglavlje 1.5, Exercise
14. Članak iz Poučka, zadatak 10.
15. Problem 35.
16. The Counterfeit Coin Problem, slajd 121
17. Županijsko 2012. 4A, 5.
18. Moguće je! Lako provjerimo da je za 4 to moguće, pa indukcijom pokažemo da možemo prijeći iz n u $2n$ i to tako da prvih n brojeva budu neparni, a zadnjih n parni i posloženi analogno rješenju za n. Tada te polovice nemaju konflikte (transformacijama $k \mapsto 2k$ i $k \mapsto 2k+1$ ne kvarimo uvjet prosjeka), a zbroj dva broja iz različitih polovica je neparan pa se njihov prosjek ne nalazi u nizu. Sada možemo napraviti konstrukciju za sve 2^n, a čim to preraste 2020^{2020} posložimo te brojeve (za 2^n, gdje je n dovoljno velik) te izbacimo one veće od 2020^{2020} i tako dobivamo dobar raspored.

19.3. C14: Logika i dokazi - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. "Pravokutni trokuti nisu jednakostranični ili dva nije prost broj", "Ili pijem, ili pušim, ili psujem", "Nisam preumoran i predavanje nije preteško", "Broj jedan je ili prost ili složen."
2. Npr. $x = 2$ i $y = 3$.
3. Npr. 12 nije djeljiv s 5, a to je prost broj manji od 12.
4. U trokutu ABC povucite pravac p kroz vrh C koji je paralelan s pravcem AB. Kut koji stranica $\overline{AC}$ zatvara s pravcem p označimo s α, a kut koji stranica $\overline{BC}$ zatvara s pravcem p označimo s β. Znamo $\alpha + \beta + \angle ACB = 180\circ$ (ispruženi kut). Kako se radi o kutevima uz presječnicu, vrijedi $\angle CAB = \alpha$ i $\angle CBA = \beta$. Iz ove dvije tvrdnje slijedi zaključak da je i $\angle CAB + \angle CBA + \angle ACB = 180\circ$, što je i trebalo dokazati.
5. Parni broj zapišimo u obliku $2k$, a neparni u obliku $2l + 1$, za neke cijele brojeve k i l. $2k(2l + 1) = 4kl + 2k = 2(2kl + k)$, što je paran broj jer je djeljiv s 2.
6. $\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 4(2500a + 250b + 25c) + 10d + e$. Ako je dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4 tj. ako je $10d + e$ djeljiv sa 4, tada je i taj peteroznamenkasti broj djeljiv sa 4 jer se može napisati kao zbroj dva broja djeljiva sa 4.
7. Prvi slučaj: prirodan broj n djeljiv je s 3, tj. $n = 3k$, za neki cijeli k. Tada je $n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3)$, što je djeljivo s 9 (ostatak je 0). Drugi slučaj: n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k + 1$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$, što daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9. Treći slučaj: n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k + 2$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$, što daje ostatak 8 pri dijeljenju s 9. Budući da svi prirodni brojevi daju ostatak 0,1 ili 2 pri dijeljenju s 3, pokrili smo sve slučajeve i tvrdnja zadatka je dokazana.
8. Istinita je 3. izjava, dakle, A je siva, B je plava i C je bijela.
9. B.
10. Pretpostavimo li da nije, dobijamo kontradikciju, dakle D je Istinić.
11. 8.razred, 4.zadatak, državno natjecanje 2018.
12. Pretpostavimo suprotno, tj. da ih ima konačno mnogo, i označimo ih s $p_1, p_2, ..., p_n$ (to su svi prosti brojevi koji postoje). Neka je $p = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Znamo da p nije prost broj jer nije jednak nijednom od $p_1, ...p_n$, ali također nije djeljiv niti s jednim prostim projem (pri dijeljenju s bilo kojim prostim brojem daje ostatak 1). Dakle, svaki prosti faktor od p je različit od $p_1, ..., p_n$. Budući da je svaki prirodan broj veći od 1 ili prost ili ima prosti faktor, dobili smo prost broj različit od $p_1, ..., p_k$, što je kontradikcija.
13. Pretpostavimo suprotno: neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku neskrativog razlomka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, što znači da su m i n relativno prosti prirodni brojevi (nemaju zajedničnkih djelitelja). Sada tu jednakosti možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2, odakle je $2n^2 = m^2$. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 2, onda je i taj broj djeljiv s 2, pa znamo da je m djeljiv s 2. Dakle m možemo napisati $m = 2k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo $n^2 = 2k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 2. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s 2, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.
14. Npr. negacija tvrdnje "Ako je trokut jednakostraničan, onda je i jednakokračan" je tvrdnja "Trokut je jednakostraničan i nije jednakokračan."
15. Obrat je "Ako je trokut jednakokračan, onda je jednakostraničan", koji očito nije istinit, a kontraprimjer je npr. trokut s duljinama stranica 5, 5, 6.
16. Ako je u trokutu ABT kut $\angle ATB$ pravi, onda točka T leži na kružnici s promjerom $\overline{AB}$.
17. Npr. $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.
18. $2k(2k + 2) = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, što je djeljivo s 8 jer je jedan od brojeva k i $k + 1$ paran. Obrat ne vrijedi jer npr. $8 = 1 \cdot 8$, što nisu uzastopni parni brojevi.
19. Obrat glasi: "Ako je prirodan broj djeljiv s 3 i 4, onda je djeljiv s 12", što vrijedi jer ako je broj djeljiv s 3, onda u svom rastavu na proste faktore ima faktor 3, a ako je djeljiv s 4, onda u svom rastavu na proste

faktore ima dvije dvojke. Dakle, broj istovremeno djeljiv s 3 i 4 u svom rastavu na proste faktore sigurno ima jednu trojku i dvije dvojke, što je u umnošku 12, pa je polazni broj djeljiv s 12. Bilo je bitno da 3 i 4 nemaju zajedničke djelitelje (razmislite zašto).

20. Npr. "Ako su pravci okomiti, onda se sijeku" je istinita tvrdnja, kao i njen obrat po kontrapoziciji "Ako se pravci ne sijeku, onda nisu okomiti."

21. Negacija je "n je prirodan i nije cijeli" što ne vrijedi jer su prirodni brojevi podskup cijelih, obrat je "Ako je n cijeli, onda je i prirodan" što ne vrijedi zbog kontraprimjera npr. $n = -2$, a obrat po kontrapoziciji je "Ako n nije cijeli, nije prirodan" što vrijedi jer i polazna tvrdnja vrijedi, a znamo da polazna tvrdnja i njen obrat po kontrapoziciji imaju istu istinitosnu vrijednost.

22. Obrat po kontrapoziciji glasi: "Ako broj nije višekratnik od 5, onda ni njegov kvadrat nije višekratnik od 5", što koristeći činjenicu da je 5 prost broj možemo lako direktno dokazati. Razmislite zašto slična tvrdnja ne vrijedi npr. za broj 4.

23. Dokazujemo "Ako je x paran, onda je x^2-6x+5 neparan", što vrijedi jer ako je x paran, tada je x^2-6x+5 neparan, jer su x^2 i $6x$ parni, a 5 nije.

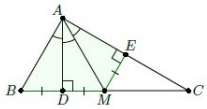
24. Ovo ostavljam za vježbu, možete vi to! ;)

19.4. G11: Sukladnost i sličnost - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Sukladnost i sličnost - Primjer 1.
2. Sukladnost i sličnost - Primjer 2.
3. Općinsko 2016. OŠ - 8.5.
4. Županijsko 2006. OŠ - 7.4.
5. Županijsko 2015. OŠ - 7.5.
6. Županijsko natjecanje 2014. OŠ 8.5.
7. Rješenje:

G3.



Neka je D nožište visine iz A, M polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz M na $\overline{AC}$. Iz uvjeta zadatka znamo da su kutevi $\angle BAD$, $\angle DAM$ i $\angle MAE$ jednaki što nam daje

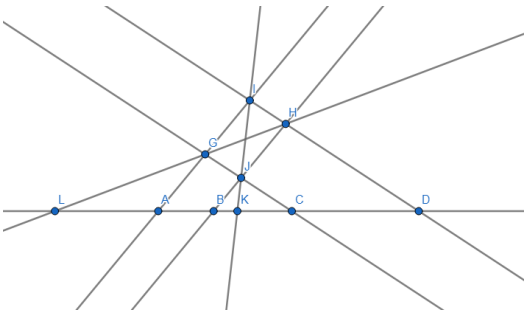
$$\triangle ABD \cong \triangle ADM \cong \triangle MAE.$$

Sada znamo da je $MC = BM = 2ME$ iz čega promatranjem trokuta $\triangle MEC$ jednostavno slijedi da su kutevi trokuta $30°, 60°$ i $90°$.

8. a) Sukladnost i sličnost - Zadatak 5.

   b) Sukladnost i sličnost - Zadatak 8.
9. Neka je Q točka na pravcu AP takva da je $|AQ| = 2|AP|$, P između A i Q. Po SKS poučku o sukladnosti trokuta vidimo da su trokuti ABQ i KAN sukladni (jednake stranice zbog paralelograma i kvadrata, jednaki kut dobijemo jer je puni kut u A jednak $360°$). Slijedi $|KN| = |AQ| = 2|AP|$.
10. Županijsko 2018. Zadatak A - 2.4.
11. Neka su L i K sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p te G, H, I i J vrhovi paralelograma, kao na skici.
    $\sphericalangle AIK = \sphericalangle BJK$ i $\sphericalangle KAI = \sphericalangle KBJ \Longrightarrow \triangle BKJ \sim \triangle AKI \Longrightarrow \frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
    $\sphericalangle KID = \sphericalangle KJC$ i $\sphericalangle IDK = \sphericalangle JCK \Longrightarrow \triangle KCJ \sim \triangle KDI \Longrightarrow \frac{|KC|}{|KD|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
    $\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KC|}{|KD|} \Longleftrightarrow \frac{|BK|}{|AB|+|BK|} = \frac{|KC|}{|KC|+|CD|} \Longleftrightarrow |BK|(|KC| + |CD|) = |KC|(|AB| + |BK|) \Longleftrightarrow \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|BK|}$
    Što znači da je K točka koja dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $|AB| : |CD|$, neovisno o izboru usporednica.

    $\sphericalangle GCL = \sphericalangle HDL$ i $\sphericalangle CLG = \sphericalangle DLH \Longrightarrow \triangle LCG \sim \triangle LDH \Longrightarrow \frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
    $\sphericalangle LGA = \sphericalangle LHB$ i $\sphericalangle ALG = \sphericalangle BLH \Longrightarrow \triangle LAG \sim \triangle LBH \Longrightarrow \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
    $\frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \Longleftrightarrow \frac{|LA|+|AC|}{|LB|+|BD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \Longleftrightarrow |LA|(|LB| + |BD|) = |LB|(|LA| + |AC|) \Longleftrightarrow \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$
    Što znači da položaj točke L ne ovisi o izboru usporednica.



12. Neka je $|BF| = x$, $|DE| = y$ i $|AE| = z$. BSO možemo pretpostaviti $|AB| = 1$.
    Dobivamo $|CE| = 1 - y$ i $|FC| = 1 - x$.
    Neka je $G = AF \cap CD$.

Iz paralelnosti stranica kvadrata dobivamo $\angle GAE = \angle BAF = \angle CGF = \angle EGA$, odnosno trokut $\triangle EAG$ je jednakokračan.
Sada

$$|CG| = |EG| - |EC| = |AE| - |CE| = z - (1 - y) = z + y - 1$$

$\angle BAF = \angle CGF$ povlači da su trokuti $\triangle FBA$ i $\triangle FCG$ slični.
Tako su omjeri odgovarajućih stranica jednaki, pa dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{z+y-1}{1-x} &= \frac{1}{x} \\ zx + yx - x &= 1 - x \\ x(y+z) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $\triangle ADE$ slijedi

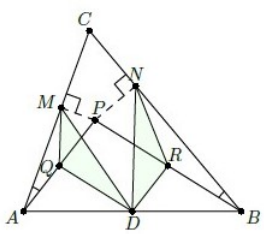
$$1 = z^2 - y^2 \tag{2}$$

Konačno, iz (1) i (2)

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 1 \\ x(y+z) &= z^2 - y^2 \\ x(y+z) &= (z-y)(z+y) \\ x &= z - y \\ x + y &= z \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

13. Rješenje:



Neka je Q polovište dužine $\overline{AP}$ te R polovište dužine $\overline{PB}$. Vrijedi $\angle PQM = 2\angle PAM = 2\angle PAC = 2\angle CBP = 2\angle NBP = \angle NRP$, jer je Q središte kružnice opisane trokutu PAM i R središte opisane od NBP. Četverokut $PQDR$ je paralelogram, jer su $\overline{RD}$ i $\overline{QD}$ srednjice trokuta ABP. Zato je $\angle DQP = \angle PRD$, a zbog toga također $\angle DQM = \angle NRD$. Nadalje je $|QM| = |QP| = |DR|$ i $|RN| = |RP| = |DQ|$ pa su trokuti MQD i DRN sukladni te je $|DM| = |DN|$.

14. MEMO 2010. T5

19.5. N11: Diofantske jednadžbe - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Označimo s x broj Diofantovih godina. Čitajući zagonetku postavljamo jednadžbu.
$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$
Sredimo jednadžbu i dobijemo
$$\frac{14+7+12+42}{84}\cdot x+9=x$$
$$\frac{84-75}{84}\cdot x=9$$
$$x=84$$
Dakle, Diofant je imao 84 godine kad je umro.
2. Transformiramo jednadžbu u
$$2y^2=2001-5x$$
Desna strana daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 5, pa mora i lijeva.

   Testiranjem svih mogućih opcija za ostatak pri dijeljenju sa 5 od y, zaključimo da lijeva strana ne može davati ostatak 1:
   - Ako $y=5k$, $2y^2=5\cdot 10k^2$, pa je lijeva strana djeljiva sa 5
   - Ako $y=5k+1$, $2y^2$ daje isti ostatak kao $2\cdot 1^2=2$ pri dijeljenju sa 5, a $2\neq 1$.
   - Ako $y=5k+2$, $2y^2$ daje isti ostatak kao $2\cdot 2^2=8$ pri dijeljenju sa 5, a $3\neq 1$.
   - Ako $y=5k+3$, $2y^2$ daje isti ostatak kao $2\cdot 3^2=18$ pri dijeljenju sa 5, a $3\neq 1$.
   - Ako $y=5k+4$, $2y^2$ daje isti ostatak kao $2\cdot 4^2=32$ pri dijeljenju sa 5, a $2\neq 1$.

   Dakle, rješenja nema.
3. Općinsko 1999. SŠ2 1
4. Pomnožimo sve s xy i prebacimo na lijevu stranu, pa dobijemo
$$x+y+1-xy=0$$
Oduzmemo 2 od obe strane i dobijemo
$$(x-1)\cdot(1-y)=-2$$
Rastavljamo na slučajeve:
   - $x-1=1$, $1-y=-2$ Rješenje $(2,3)$
   - $x-1=-1$, $1-y=2$ Rješenje $(0,-1)$ moramo odbaciti jer u originalnoj jednadžbi ne smijemo dijeliti nulom.
   - $x-1=2$, $1-y=-1$ Rješenje $(3,2)$
   - $x-1=-2$, $1-y=1$ Rješenje $(-1,0)$ moramo odbaciti jer u originalnoj jednadžbi ne smijemo dijeliti nulom.

   Jedina rješenja su $(2,3)$ i $(3,2)$.
5. Općinsko 2019. SŠ1 5
6. Primijetimo da je
$$(n+1)^2=n^2+2n+1<n^2+3n+5$$
Također za sve $n>1$,
$$n^2+3n+4+1<n^2+3n+4+n=n^2+4n+4=(n+2)^2$$

Zato za sve $n > 1$

$$(n+1)^2 < n^2 + 3n + 5 < (n+2)^2$$

pa sigurno nije riječ o potpunom kvadratu. U slučaju kad $n = 1$, $1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = 9 = 3^2$, pa je jedino rješenje 1.

7. Zapišemo jednadžbu kao

$$y(x+3) = (x+3)^2 + 3$$

Prebacimo sve što nije konstanta nalijevo i izlučimo $x + 3$:

$$(y - x - 3)(x + 3) = 3$$

Opet rastavljamo na slučajeve:

- $x + 3 = 1$, $y - x - 3 = 3$ Rješenje $(-2, 4)$
- $x + 3 = 3$, $y - x - 3 = 1$ Rješenje $(0, 4)$
- $x + 3 = -1$, $y - x - 3 = -3$ Rješenje $(-4, -4)$
- $x + 3 = -3$, $y - x - 3 = -1$ Rješenje $(-6, -4)$

8. Transformiramo izraz u

$$(n-1)(n+2)x + 4x + 2y = 1$$

Kako su $n - 1$ i $n + 2$ brojevi čija je razlika neparna, bar jedan od njuh je paran pa je i $(n-1)(n-2)x$ paran. To znači da je lijeva strana jednakosti parna, pa mora biti i desna. Kako 1 nije paran broj, rješenja nema.

9. Županijsko 2007. SŠ1 1

10. Transformiramo u

$$13p = 1470 - 4x^2$$

Desna strana je parna, pa mora biti i lijeva, dakle p mora biti paran. Jedini parni prosti broj je 2, kojeg uvrstimo u jednadžbu i dobijemo:

$$4x^2 = 1470 - 26 = 1444 = 4 \cdot 19^2$$

Jedino rješenje je $(2, 19)$.

11. Desna strana daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 5, pa daje i lijeva. Kako $5y$ daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 5, lijeva strana daje isti ostatak pri dijeljenju sa 5 kao i x^2. Provjerom kao u drugom zadatku zaključujemo da potpun kvadrat ne može davati ostatak 3 pri dijeljenju sa 5, pa rješenja nema.

12. Faktoriziramo

$$2^x = (y-1)(y+1)$$

Primijetimo da, kako je razlika $y - 1$ i $y + 1$ 2 što nije višekratnik od 4, barem jedan od tih brojeva nije djeljiv sa 4. Kako je s lijeve strane potencija broja 2, oba faktora su potencije broja 2.

Potencije broja 2 koje nisu djeljive sa 4 su samo 1 (2^0) i 2 (2^1). Slučajevi:

- $y - 1 = 1$, $y = 2$, $2^x = 3$ Nije rješenje.
- $y - 1 = 2$, $y = 3$, $2^x = 8 = 2^3$, $x = 3$ Rješenje $(3, 3)$
- $y + 1 = 1$, $y = 0$ Nije u prirodnim brojevima.
- $y + 1 = 2$, $y = 1$, $2^x = 0$

  Nije rješenje.

Jedino rješenje je $(3, 3)$.

13. Ako je $x \geqslant 2$, 2^x je djeljiv s 4, pa mora biti i $y^2 + 1$. Provjerom kao u drugom zadatku po ostacima pri dijeljenju y sa 4 zaključimo da to ne može biti. Preostaje provjeriti $x = 0$ i $x = 1$. Provjerom preostala 2 slučaja dolazimo do jedinog rješenja u prirodnim brojevima, $(1, 1)$

14. Kako $4 = 3 + 1$, 4^m uvijek daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. Kako je $9n$ djeljiv sa 3, lijeva strana daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3, međutim desna daje ostatak 2, pa rješenja nema.

15. Izvor.

16. Rješavamo potpuno isto kao peti zadatak. Konačna rješenja su: $(-90, 9)$, $(-40, 8)$, $(-15, 6)$, $(-10, 5)$, $(0, 0)$, $(5, -10)$, $(6, -15)$, $(8, -40)$, $(9, -90)$, $(11, 110)$, $(12, 60)$, $(14, 35)$, $(15, 30)$, $(20, 20)$, $(30, 15)$, $(35, 14)$, $(60, 12)$, $(110, 11)$

17. Kada je $m \geqslant 1$, $4 \cdot 3^{2m}$ je djeljivo sa 3, pa lijeva strana daje isti ostatak kao 5 pri dijeljenju sa 3, a 5 daje ostatak 2. Zato ostatak pri dijeljenju sa 3 desne strane mora biti 2. Kao u zadatku pet, provjerimo da potpun kvadrat ne može davati ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, pa $m < 1$.

    Jedina mogućnost je $m = 0$. Uvrštavanjem imamo

    $$n^2 = 4 \cdot 1 + 5 = 9 = 3^2$$

    pa je jedino rješenje $(0, 3)$

18. Faktoriziramo kao

    $$y^2 = x(x+1)(x+2) = (x+1)(x^2+2x)$$

    Primijetimo da je $x+1$ relativno prost i sa $x+2$ i sa x jer su uzastopni, stoga je relativno prost i s x^2+2x. Kako je umnožak relativno prostih brojeva $x+1$ i x^2+2x potpun kvadrat, oba su potpuni kvadrati. Znamo da su i x^2+2x i $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ potpuni kvadrati, znamo da su to baš potpuni kvadrati $a = (x+1)^2$ i $b = x^2+2x$ čija je razlika 1, tj

    $$a^2 - b^2 = 1$$

    $$(a-b)(a+b) = 1$$

    Imamo 2 slučaja:

    - $a - b = -1$, $a + b = -1$ Rješavanjem sustava imamo $a = (x+1)^2 = -1$, a to je nemoguće
    - $a - b = 1$, $a + b = 1$ Rješavanjem sustava imamo $a = (x+1)^2 = 1$, $x^2 + 2x = 0$
      Ako $x+1 = -1$, imamo $x = -2$. Tada bi trebalo biti $y^2 = (-2)^3+3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2) = -8+6-4 = -6$, pa to nije rješenje.

      Ako $x + 1 = 1$, imamo $x = 0$, iz toga $y = 0$.

    Jedino je rješenje $(0, 0)$.

20. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

20.1. A12: Nejednakosti - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. *1. način*

   Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Oduzimanjem $2ab + 2bc + 2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

   $$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

   Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

   2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

   Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

   $$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

   Analogno dobivamo i

   $$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

   $$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

   Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

   Napomena.

   Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

2. Primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

   $$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

   što je i trebalo dokazati.

3. Kao i u prethodnom zadatku, primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

$$(1+a^x)(1+a^y)(1+a^z) \geq 2\sqrt{1\cdot a^x}\cdot 2\sqrt{1\cdot a^y}\cdot 2\sqrt{1\cdot a^z} = 8\sqrt{a^x a^y a^z} = 8\sqrt{a^{x+y+z}} = 8\sqrt{a^0} = 8$$

AG nejednakost smijemo primijeniti s obzirom da su članovi na koje primijenjujemo pozitivni brojevi.

Preostaje odrediti kada vrijedi jednakost.

Dokazali smo da jednakost vrijedi (samo) kada su svi članovi na koje primijenjujemo KAGH nejednakosti jednaki. Dakle u ovom slučaju jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$1+a^x = 1+a^y = 1+a^z$$

Odnosno

$$a^x = a^y = a^z$$

$$x = y = z$$

4. Pomnožimo nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ (kako je taj broj pozitivan, nejednakost i dalje vrijedi i ekvivalentna je prethodnoj). Dobivamo

$$x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff (x^2+1)+1 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

Primjenom AG nejednakosti na $(x^2+1)+1$ dobivamo traženu nejednakost.

Analogno, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x^2+1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

5. Množenjem nejednakosti sa $b_1+...+b_n$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

$$\iff \left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+...+b_n) \geqslant (a_1+a_2+...+a_n)^2$$

Pritom zadnja nejednakost trivijalno slijedi iz CSB nejednakosti uvrštavanjem odgovarajućih nizova ($x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$, $y_i = \sqrt{b_i}$).

6. *KA nejednakost*

Želimo dokazati:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

Prvo dokažimo nejednakost za sve nenegativne realne brojeve.

Lako se dokaže da je nejednakost ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n} \geq \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{n^2}$$

$$\iff n\cdot(x_1^2+...+x_n^2) \geq (x_1+x_2+...+x_n)^2$$

Sada raspisivanjem izraza s desne strane, prebacivanjem na lijevu stranu nejednakosti i zapisivanjem izraza u obliku sume kvadrata binoma dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\sum_{i,j:i\neq j}(x_i-x_j)^2\geq 0$$

Ta nejednakost vrijedi s obzirom na činjenicu da je svaki kvadrat nenegativan.

Sada dokažimo da KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Po prethodnom dokazu imamo

$$\sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

za nenegativne realne brojeve.

Uzmimo $x_i'=|x_i|$, dakle vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x_1'^2+...+x_n'^2}{n}}\geq\frac{x_1'+x_2'+...+x_n'}{n}$$

No, također imamo:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{x_1'^2+...+x_n'^2}{n}}\geq\frac{x_1'+x_2'+...+x_n'}{n}\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

čime je dokaz završen.

GH nejednakost

Želimo dokazati

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

Po AG nejednakosti imamo:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

■

7. Zadana nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$$

pri čemu ova zadnja nejednakost vrijedi po KA nejednakosti.

8. Za minimalnu vrijednost izraza (označimo ju sa t) mora vrijediti sljedeće:
   - izraz je uvijek veći ili jedak od te vrijednosti ($x+\frac{1}{x}\geq t$)
   - moguće je postići tu vrijednost

Ako primijenimo AG nejednakost na zadani izraz, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

Sada dokažimo da je moguće postići da izraz poprima vrijednost 2.

Jednakost se poprima ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x} \\ \iff x^2 &= 1 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

(s obzirom da je zadano da je x pozitivan). Kako zadana jednadžba ima rješenja (ima jedinstveno rješenje), vrijednost 2 se postiže, a lako je i uvrstiti $x = 1$ te se vidi da se vrijednost 2 stvarno postiže.

9. *Za Nesbittovu nejednakost postoji više dokaza, ovdje ću prikazati jedan od njih.*

Krenimo od lijeve strane nejednakosti;

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Uvedimo nove oznake:

$$\begin{aligned} x &:= a+b \\ y &:= b+c \\ z &:= c+a \end{aligned}$$

Vrijedi $(a+b+c) = \frac{x+y+z}{2}$

Sada imamo:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

i trebamo dokazati;

$$\begin{aligned} &\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \geq \frac{3}{2} \\ \iff &(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 6 \geq 3 \end{aligned}$$

Množenjem izraza na lijevoj strani dobivamo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 6 = \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{z} - 6 = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 6$$

Po zadatku 7. vrijedi da je

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\geq 2 \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} &\geq 2 \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{y} &\geq 2 \end{aligned}$$

Pa je

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 6 \geq 3 + 22 + 2 - 6 = 3$$

što je i trebalo dokazati.

10. Vrijedi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\cdot(a+b+c+d)\geq(1+1+1+1)^2=16$$

po CSB nejednakosti.

Lako dokazujemo da se jednakost zaista postiže, npr. uvrštavanjem $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Dakle, minimum je upravo 16.

11. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a$$
$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq\frac{1}{2}(2a+2b+2c)=a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

12. Po CSB nejednakosti vrijedi sljedeće:

$$14=(x^2+y^2+z^2)(1+4+9)\geq(x+2y+3z)^2$$

Odnosno, $(x+2y+3z)^2\leq 14$, pa je i $x+2y+3z\leq\sqrt{14}$ i time smo dobili gornju granicu.

Uzmemo li $x=\frac{1}{\sqrt{14}}, y=\frac{2}{\sqrt{14}}$ i $z=\frac{3}{\sqrt{14}}$, vidimo da se gornja jednakost zaista postiže, odnosno $\sqrt{14}$ je tražena maksimalna vrijednost.

13. Pomnožimo li obje strane nejednakosti s $a+b+c+d$ dobivamo da je dovoljno dokazati

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\right)(b+c+d+a)\geqslant(a+b+c+d)^2$$

Zadnja nejednakost direktno slijedi iz CSB nejednakosti.

Alternativno, tvrdnja zadatka jednostavno slijedi iz *CSB nejednakosti u Engel formi* (vidi 5. zadatak).

14. Vrijedi:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{abb\cdots b}\overset{AG}{\leq}\frac{a+b+b+..+b}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}$$

pri čemu srednja nejednakost vrijedi po AG nejednakosti na brojevima $a,b,...,b$ (b se ponavlja n puta), a iz ovoga slijedi tvrdnja zadatka.

15. Državno natjecanje 2019., SŠ A-1.3.

16. Primijetimo:

$$(x^2+1)(y^2+1)=(x^2+1)(1+y^2)\overset{CSB}{\geq}(x+y)^2$$

Sada imamo:

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\geq x+y$$

i analogno za ostale članove:

$$\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} \geq y+z$$
$$\sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geq z+x$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} + \sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geqslant 2(x+y+z)$$

što je i trebalo dokazati.

17. Državno natjecanje 2019., SŠ A-3.4.

18. Uvedimo supstituciju $a = x+1, b = y+1, c = z+1$. Vrijedi $x, y, z \geqslant 0$ te nejednakost postaje

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{(z+1)((x+1)(y+1)+1)}$$

Koristeći CSB nejednakost vidimo da vrijedi

$$(z+1)(1+(x+1)(1+y)) \overset{CSB}{\geqslant} (z+1)(1+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2) \overset{CSB}{\geqslant} (\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

što smo i htjeli pokazati.

19. Državno natjecanje 2009., SŠ A-4.2.

20. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.3.

21. Koristeći identitet $\dfrac{a}{2a+b} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{4a+2b}$, danu nejednakost možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{b}{4a+2b} + \frac{c}{4b+2c} + \frac{a}{4c+2a} \iff 1 \leqslant \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}$$

Sada možemo svaki razlomak desne strane proširiti svojim brojnikom te primijeniti Engel formu CSB nejednakosti:

$$\frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ac+a^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2ab+b^2+2bc+c^2+2ac+a^2} = 1$$

22. Volumen kutije je $(a-2x)^2x$, vrijedi $a, x \in \mathbb{R}, 2x < a$ i $x, a > 0$.

Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost tog izraza.

$$(a-2x)^2x = (a-2x)(a-2x)x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(a-2x)(a-2x)\cdot 4x}$$

$$\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 \geq (a-2x)(a-2x)\cdot 4x$$

$$(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3$$

Uvrštavanjem ove nejednakosti u gornju nejednakost dobivamo:

$$\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$$

Cilj je dokazati da je to maksimum i odrediti za koji x se postiže.

Jednakost u ovoj AG nejednakosti vrijedi ako i samo ako je

$$a - 2x = a - 2x = 4x$$
$$6x = a$$
$$x = \frac{a}{6}$$

Dakle, postoji rješenje ove jednadžbe za svaki a pa se postiže jednakost, odnosno dobivena vrijednost je maksimum. Tada vrijedi $x = \frac{a}{6}$ pa je to rješenje.

20.2. C12: Indukcija - Ema Borevković

Link na zadatke. Link na hintove.

Zadaci $3-7$ su preuzeti iz knjige 102 Combinatorial Problems.

1. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po n. Baza $n = 1$ je očita. Ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ podijelit ćemo na 4 jednake ploče veličine $2^n \times 2^n$. U središnji 2×2 kvadrat koji obuhvaća po jedno polje iz svakog od četiri dijela postavit ćemo jednu trominu pločicu koja će biti orijentirana tako da obuhvati ona tri od četiri dijela u kojima se ne nalazi prazno polje. Zatim ćemo svako od četiri dijela popločati trominama što možemo po pretpostavci indukcije.
2. Županijsko natjecanje 2020., četvrti razred, peti zadatak.
3. 102 Combinatorial Problems, zadatak 14., strana 3.
4. 102 Combinatorial Problems, zadatak 44., strana 7.
5. 102 Combinatorial Problems, zadatak 36., strana 6.
6. 102 Combinatorial Problems, zadatak 41., strana 7.
7. 102 Combinatorial Problems, zadatak 35., strana 6.
8. Zadatak ćemo riješiti indukcijom po broju čvorova u grafu. Baza je kad je jedan čvor. Po pretpostavci znamo da u svakom grafu s n čvorova postoji Hamiltonov put. Dodajmo još jedan čvor u taj graf i povežimo ga nekako u taj Hamiltonov put. Ako je brid iz njega u početni čvor puta usmjeren prema početnom čvoru puta gotovi smo. Isto vrijedi i ako je brid iz njega u završni čvor puta usmjeren prema njemu, a od završnog čvora. U suprotnom moraju postojati dva susjedna čvora u Hamiltonovom putu takva da postoji brid iz ranije posjećenog u dodani čvor i brid iz dodanog čvora u kasnije posjećeni. Ovo znači da možemo na tom mjestu ubaciti dodani čvor u Hamiltonov put. Ovime je proveden korak indukcije.
9. IMO Shortlist 2013. C3.

20.3. C15: Invarijante - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

h

1. Ako igra završi neriješeno ukupni broj bodova se poveća zs $1+1=2$, a u suprotnom za $3+(-1)=2$: invarijanta je onda ukupan broj bodova svakog meča. Ako svaki igrač igra sa svakim, to je $\frac{11\cdot(11-1)}{2}$ mečeva te ako svaki meč dodaje po 2 boda u zbroj, dobivamo da je ukupni broj bodova svih igrača jednak $11\cdot 10=110$.
2. Županijsko A 2014. - SŠ1, 5. zad.
3. Primjetimo da je $2x-y\equiv -y\equiv y \pmod 2$ i $2y-x\equiv -x\equiv x \pmod 2$, to jest broj parnih (ili neparnih) brojeva na ploči je invarijanta. Kako su na početku dva parna broja na ploči, a završna konfiguracija nema nijedan paran broj, zaključujemo da Anja ne može postići da na ploči pišu brojevi $7, 9, 11, 13, 15$.
4. Svakim potezom se suma brojeva povećava za 3, dakle ostatak sume pri dijeljenju s 3 se ne mijenja. Početna suma daje ostatak 1, a završna 0 (jer je $2022x$ djeljivo s 3) pa Jana ne može postići da svi brojevi budu jednaki.
5. Ni opseg ni površina se nakon rezanja i lijepljenja ne mijenjaju. Ako je opseg konstantan, dobivamo da bi stranica kvadrata trebala biti $\frac{3}{4}$ stranice jednakostraničnog trokuta, ali onda se površina trokuta i površina kvadrata ne podudaraju, dakle nije moguće dobiti kvadrat.
6. Uočimo da je $(0.8x-0.6y)^2+(0.6x+0.8y)^2=(0.8x+0.6y)^2+(0.6x-0.8y)^2=x^2+y^2$, tj. točke do kojih žaba može doći sve imaju jednaku udaljenost od ishodišta. Kako je udaljenost točke $(2,3)$ od ishodišta veća od udaljenosti točke $(1,1)$, zaključujemo da žaba ne može doći do polja $(1,1)$.
7. Pokažimo da Boris uvijek pobjeđuje u ovoj igri. Pri svakom potezu, broj komada čokolade na stolu se poveća za 1 ili smanji za 1, a nakon dva poteza se poveća za 2, smanji za 2 ili ostaje isti kao prije ta dva poteza. To znači da svakog igrača na potezu dočeka broj komada iste parnosti kao i broj komada pri posljednjem potezu tog igrača. Kako Anja prva kreće sa jednim komadom čokolade, svaki put kad je ona na redu će imati neparan broj komada čokolade. Igra je konačna (komadići 1×1 se moraju pojesti) pa će ju u nekom trenutku dočekati samo jedan 1×1 komadić čokolade, kojeg će morati pojesti i time Boris pobjeđuje.
8. Državno A 2012. - SŠ3, 5. zad.
9. Znamo da je ostatak broja pri dijeljenju s 9 jednak ostatku koji daje njegov zbroj znamenaka, dakle pri svakom koraku se ne mijenja ostatak svakog broja pri dijeljenju s 9. Kako je $20212021\equiv 1 \pmod 9$, bit će više jedinica na kraju.
10. a) Boris može doći do tražene konfiguracije na slijedeći način:

$$5,1,1,1,1\Rightarrow 5,2,2,1,1\Rightarrow 5,4,4,1,1\Rightarrow 5,5,4,5,1\Rightarrow 5,5,5,5,5.$$

    b) Pri svakom potezu se broj maksimalnih vrijednosti na ploči poveća za 2 ili postane 2 pa ako je na početku paran broj maksimalnih vrijednosti, to je invarijanta. Kako se maksimalna vrijednost u početnoj konfiguraciji pojavljuje dva puta, a na kraju ih treba biti 2021, zaključujemo da Boris ne može postići ovu konfiguraciju.
11. Transformacije koje Matej radi podsjećaju na Euklidov algoritam, odnosno invarijanta je $\gcd(x,y)$. Vedran samo mora odabrati brojeve tako da $\gcd(z,w)\neq\gcd(x,y)$.
12. Numerirajmo vrhove brojevima od 1 do 12 (koje ćemo nadalje zvati *oznake* da izbjegnemo zabunu), pri čemu uzmimo da na početku -1 piše u vrhu označenom s 1, i da želimo da na kraju -1 piše u vrhu označenom s 2. Promotrimo broj S koji definiramo kao zbroj oznaka vrhova u kojima piše -1; na početku je on 1, a želimo da na kraju bude 2. Primijetimo da se promjenom predznaka zbroj oznaka vrhova koji sadrže broj -1 promijeni za paran broj. Naime, uzmimo da smo u jednom koraku odabrali vrhove s oznakama $x, x+1, x+2, x+3$ (možemo gledati oznake modulo 12, tj. samo ostatke oznaka pri dijeljenju s 12). Ako su ta 4 vrha broju S pridonosila s T, poslije koraka pridonosit će s $4x+6-T$. To znači da će se S promijeniti za $T-(4x+6-T)=2T-4x-6$, a to je paran broj. Dakle, kako je S na početku bio neparan, on će uvijek ostati neparan broj, pa Luka ne može postići ono što cilja. (Alternativno, mogle su oznake vrhova naizmjence biti 0 i 1; došli bismo do istog zaključka na analogan način.)
13. Državno A 2019. - SŠ2, 5. zad.

14. MEMO 2016. - I2
15. Rješenje pod #2.

20.4. G12: Tetivni četverokuti - Lucija Relić

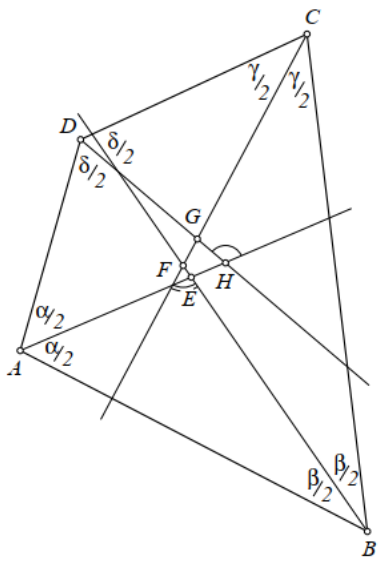
Link na zadatke. Link na hintove.

1. Promatramo kružnicu k i njenu tetivu $\overline{AB}$ te tangentu t na kružnicu k u točki B. Neka je S središte kružnice k i C neka točka na kružnici različita od A i B. Vidimo da točka C određuje obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$.Označimo $|\angle ACB| = \gamma$. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $|\angle ASB| = 2\gamma$.

   Budući da je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan, vrijedi $|\angle ABS| = 90° - \gamma$, a jer je kut između polumjera $\overline{SB}$ i tangente pravi dobivamo da je kut između tangente i tetive jednak γ.

2. 2016., opć 2A, 4.

3. Neka je $ABCD$ bilo koji četverokut čije simetrale kutova tvore četverokut $EFGH$ te neka su redom $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unutarnji kutevi četverokuta $ABCD$. Iskoristimo činjenicu da je zbroj kuteva u trokutu jednak $180°$.



   U $\triangle ABE$ dobivamo $\angle BEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, a iz $\triangle CDG$ imamo $\angle DGC = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$. Zbog vršnih kuteva imamo i $\angle HEF = \angle BEA$ te $\angle FGH = \angle DGC$.
   Kutevi $\angle HEF$ i $\angle FGH$ su nasuprotni kutevi u četverokutu $EFGH$ i za njih vrijedi

$$\begin{aligned}\angle HEF + \angle FGH &= 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{360°}{2} = 180°\end{aligned}$$

   pa po prvoj karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $EFGH$ tetivan.

4. Neka je O središte opisane kružnice, P polovište stranice $\overline{AB}$ i S sjecište simetrale stranice $\overline{AB}$ (to je pravac OP budući da je središte opisane kružnice na simetrali stranice) sa opisanom kružnicom. Želimo pokazati $\angle ACS = \angle SCB$.
   Odmah vidimo da je četverokut $ASBC$ tetivan. Budući da su $\angle ACS$ i $\angle ABS$ kutevi nad (istom) tetivom $\overline{AS}$, vrijedi $\angle ACS = \angle ABS$. Simetrala stranice okomita je na tu stranicu, pa po SKS poučku o sukladnosti trokuta znamo da su trokuti ΔASP i ΔBSP sukladni ($\overline{SP}$ je zajednička stranica, $|AP| = |PB|$ po definiciji točke P i kut između njih je pravi). Iz toga slijedi $\angle ABS = \angle BAS$.
   Sada opet primijenimo isti trik s obodnim kutevima, ovaj puta nad tetivom $\overline{BS}$, i dobivamo $\angle SCB = \angle SAB = \angle ABS = \angle ACS$, što je i trebalo pokazati.

5. 2016., žup 3A, 3.

6. Neka je H ortocentar trokuta ABC i T njegova osnosimetrična slika u odnosu na AB. Dovoljno je pokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan. Označimo sa M, N i P redom nožišta visina na BC, AB i AC.

Neka je $|\angle ACB| = \gamma$. Budući da je $|\angle CPH| = |\angle CMH| = 90°$, četverokut $CPHM$ je tetivan. U tetivnom četverokutu zboj nasuprotnih kuteva je $180°$, pa je $|\angle PHM| = 180° - \gamma$, a zbog toga je i $|\angle AHB| = 180° - \gamma$ (vršni kutevi).
Točka T je osnosimetrična slika od H u odnosu na AB pa vrijedi $\triangle ABH \cong \triangle ABT$. Zbog toga imamo

$$|\angle ATB| = |\angle AHB| = 180° - \gamma.$$

Sada smo dobili da je zbroj nasuprotnih kuteva u četverokutu $ATBC$ jednak $180°$ ($|\angle ACB| + |\angle AHB| = 180°$) pa je četverokut $ATBC$ tetivan.

7. 2012., opć 2A, 8.
8. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
   Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.
9. 2018., žup 4A, 3.
10. 2010, drž 2A, 4.
11. MEMO 2015., I3
12. JBMO 2015., 3.
13. EMC 2020., J1
14. IGO, YouTube
15. IGO 2016 Adv P2

20.5. N12: Sustavi ostataka - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. (a) Za $n \in \mathbb{N}$ pogledajmo sljedeće slučajeve:

   1. slučaj

   $n \equiv 0 \pmod 3$

   $\implies n^2 \equiv 0 \pmod 3$

   2. slučaj

   $n \equiv 1 \pmod 3$

   $\implies n^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$

   3. slučaj

   $n \equiv 2 \pmod 3$

   $\implies n^2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$

   Dakle, kvadratni ostatci mod 3 su 0 i 1.

   (b) Za ostatke pri dijeljenju sa 4 analogno zaključujemo kako su kvadratni ostatci 0 i 1.

2. Korištenjem prethodnog rezultata, primijetimo da je $p^2 \equiv 0 \pmod 3$ ili $p^2 \equiv 1 \pmod 3$.

   1. slučaj - $p^2 \equiv 0 \pmod 3$

   Primijetimo kako je jedini prost broj s takvim svojstvom $p = 3$. Naime, možemo zaključiti kako je p sigurno djeljiv sa 3, a jedini takav prost broj je upravo 3.

   Uvrštavanjem $p = 3$ dobivamo $8p^2 + 1 = 73$ što je prost broj, dakle $p = 3$ je rješenje.

   2. slučaj - $p^2 \equiv 1 \pmod 3$

   Odredimo ostatak pri dijeljenju $8p^2 + 1$ sa 3.

   $$8p^2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

   No, jedini takav prost broj je 3, a lako zaključujemo kako je $8p^2 + 1$ sigurno veći od 9, zbog čega ovaj slučaj nema rješenja.

   Dakle, jedino rješenje je $p = 3$.

3. Promotrimo sve ostatke prirodnog broja $n > 3$ pri dijeljenju sa 6.

   $n \equiv 0 \pmod 6$

   No, tada je n djeljiv s 2, a kako je veći od 2, zaključujemo da nije prost.

   $n \equiv 2 \pmod 6$

   Analogno, tada je n djeljiv s 2, a kako je veći od 2, zaključujemo da nije prost.

   $n \equiv 3 \pmod 6$

   Tada je n djeljiv s 3, a kako je veći od 3, zaključujemo da nije prost.

   $n \equiv 4 \pmod 6$

   No, kao i u ranijim slučajevima, tada je n djeljiv s 2, a kako je veći od 2, zaključujemo da nije prost.

   Preostaje zaključiti kako su jedine preostale mogućnosti za prosti broj brojevi oblika $6k + 1$ i $6k - 1$.

   Primijetite da za rješenje ovog zadatka nije potrebno dokazivati da postoje prosti brojevi traženog oblika, već samo da ne postoje oni drugog oblika, odnosno da su ovo jedine mogućnosti.

4. Ideja rješenja ovog zadatka ista je kao i ideja rješenja 1. zadatka.

   Za svaki ostatak pri dijejenju sa 7 određujemo ostatak njegovog kuba pri dijeljenju sa 7.

   Imamo:

$$\begin{aligned}
n \equiv 0 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 0 \pmod 7\\
n \equiv 1 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 1 \pmod 7\\
n \equiv 2 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 1 \pmod 7\\
n \equiv 3 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 6 \pmod 7\\
n \equiv 4 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 1 \pmod 7\\
n \equiv 5 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 6 \pmod 7\\
n \equiv 6 \pmod 7 &\implies n^3 \equiv 6 \pmod 7
\end{aligned}$$

   čime smo dokazali tvrdnju zadatka.

5. Županijsko natjecanje 2017. SŠ A-3.2.
6. Županijsko natjecanje 2015. SŠ A-1.2.
7. Državno natjecanje 2014. SŠ A-1.1.
8. Primijetimo:

$$\begin{aligned}
3^0 &= 1 \equiv 1 \pmod{10}\\
3^1 &= 3 \equiv 3 \pmod{10}\\
3^2 &= 9 \equiv 9 \pmod{10}\\
3^3 &= 27 \equiv 7 \pmod{10}\\
3^4 &= 81 \equiv 1 \pmod{10}
\end{aligned}$$

   Poznato je kako se ostaci potencija pri dijeljenju s nekim brojem (pa zato i zadnja znamenka) periodički ponavljaju, a to se lako može dokazati indukcijom (*ako to niste dokazali, svakako dokažite za vježbu*).

   Zato zaključujemo kako se ostaci potencija broja 3 pri dijeljenu s 10 ponavljaju s periodom 4, odnosno, za $k \in \mathbb{N}_0$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
3^{4k} &\equiv 1 \pmod{10}\\
3^{4k+1} &\equiv 3 \pmod{10}\\
3^{4k+2} &\equiv 9 \pmod{10}\\
3^{4k+3} &\equiv 7 \pmod{10}
\end{aligned}$$

   Kako je $333 \equiv 1 \pmod 4$, zaključujemo kako je posljednja znamenka broja 3^{333} jednaka 3.

9. Primijenimo Eulerov teorem:

   Imamo $\phi(100) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$.

   Zato po Eulerovom teoremu imamo (s obzirom da su 7^k i 100 relativno prosti):

$$7^{40} \equiv 1 \pmod{100}$$

   odnosno

$$7^{40k} \equiv 1 \pmod{100}$$

   za $k \in \mathbb{N}_0$.

   Sada odredimo ostatak pri dijeljenju eksponenta 7^{100} sa 40.

Imamo $\phi(40) = 40(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 16$.

Dakle, po Eulerovom teoremu, kako su 7 i 40 relativno prosti, imamo,

$$7^{16} \equiv 1 \pmod{40}$$

odnosno

$$7^{16k} \equiv 1 \pmod{40}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$.

Kako je $100 = 6 \cdot 16 + 4$, imamo:

$$7^{100} \equiv 7^{16\cdot 6+4} \equiv 7^4 \equiv 49 \cdot 49 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{40}$$

No to znači kako je

$$7^{7^{100}} \equiv 7^1 \equiv 7 \pmod{100}$$

10. Državno natjecanje 2017. SŠ A-1.2.
11. Državno natjecanje 2016. SŠ A-1.4.
12. Državno natjecanje 2016. SŠ A-3.2.
13. Po Malom Fermatovom teoremu imamo:

$$\begin{gathered} q^{p-1} \equiv 1 \pmod{\text{p}} \\ \implies p|q^{p-1}-1 \implies p|p^{q-1}+q^{p-1}-1 \\ p^{q-1} \equiv 1 \pmod{\text{q}} \\ \implies q|p^{q-1}-1 \implies q|p^{q-1}+q^{p-1}-1 \end{gathered}$$

Kako su p i q različiti prosti brojevi pa su zato i relativno prosti, zaključujemo

$$pq|p^{q-1}+q^{p-1}-1$$

što je ekvivalentno s tvrdnjom zadatka.

14. HMO 2018. 1.4.
15. HMO 2016. 1.4.

21. Poglavlje

Rješenja za treću grupu

21.1. A13: Funkcijske jednadžbe - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja

1. Dokažimo da je f injekcija. Iz jednadžbe imamo $x = f(f(x)) - f(x)$, pa kada bi za neke $x, y \in \mathbb{R}$ bilo $f(x) = f(y)$, imali bi
$$x = f(f(x)) - f(x) = f(f(y)) - f(y) = y,$$
što dokazuje injektivnost. Uvrštavajući $x = 0$ u početnu jednadžbu dobivamo
$$f(0) = f(f(0)) \overset{\text{injektivnost}}{\Longrightarrow} 0 = f(0) \implies f(f(0)) = f(0) = 0.$$
Sada nam ponovno korištenje injektivnosti u jednadžbi $f(f(x)) = 0$ daje
$$f(f(x)) = 0 = f(f(0)) \overset{\text{injektivnost}}{\Longrightarrow} f(x) = f(0) \overset{\text{injektivnost}}{\Longrightarrow} x = 0.$$
Dakle jedino rješenje jednadžbe $f(f(x)) = 0$ je $x = 0$.
2. xyz funkcijska https://mnm.hr/wp-content/uploads/2015/10/Uvod_u_funkcijske_jednad_be.pdf
3. U danoj jednadžbi najprije možemo izraziti $f(1-x)$ preko ostalih članova:
$$f(1-x) = \frac{xf(x) - 1}{2}.$$
Uvrštavajući $1 - x$ umjesto x (u oznaci $x := 1 - x$) u početnu jednadžbu, dobivamo
$$2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x).$$
Sada možemo iskoristiti dobiveni izraz za $f(1-x)$:
$$2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x) = (1-x) \cdot \frac{xf(x) - 1}{2}$$
$$\implies 4f(x) + 2 = (1-x)(xf(x) - 1) \implies 4f(x) + 2 = xf(x) - 1 - x^2 f(x) + x$$
$$\implies f(x)(4 - x + x^2) = x - 3 \implies f(x) = \frac{x-3}{x^2 - x + 4},$$
gdje je zadnji korak opravdan jer polinom $x^2 - x + 4$ ne postiže vrijednost 0 ni za koji $x \in \mathbb{R}$. Ostaje provjeriti dobiveno rješenje:
$$LHS = \frac{2(1-x-3))}{(1-x)^2 - (1-x) + 4} + 1 = \frac{-2x-4}{4 - x + x^2} + 1 = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x + 4},$$
$$RHS = \frac{x(x-3)}{x^2 - x + 4}.$$

4. Uvrstimo li $x = 1, y = 0$ u danu nejednakost dobivamo

$$|f(1)| \geqslant 1 \implies f(1) = 1$$

Sada uvrštavanje $y = 0$ daje

$$f(x) \geqslant x,$$

a $y = 1$ daje

$$1 - f(x) \geqslant 1 - x \implies x \geqslant f(x),$$

pa kombinirajući te dvije tvrdnje dobivamo

$$x \geqslant f(x) \geqslant x \implies f(x) = x$$

za sve $x \in [0, 1]$. Provjerom vidimo da je to uistinu rješenje.

5. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-drz-1234-AB-zad+rj/2011-SS-drz-1234-A-rj.pdf
6. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2002/2002-SS-zup-1234-zad+rj/2002-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
7. IMO 2019. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1876068p12744859
8. IMO shorlist 2002 https://artofproblemsolving.com/community/c6h17330p118698
9. EMC 2017. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1565494p9588782
10. MEMO 2017. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1502364p8868742
11. IMO shortlist 2004. https://artofproblemsolving.com/community/c6h27188p169519
12. IMO shortlist 2001. https://artofproblemsolving.com/community/c6h17450p119165
13. IMO shortlist 2010. https://artofproblemsolving.com/community/c6h418682p2362286

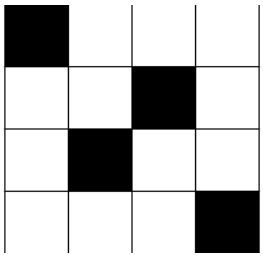
21.2. C16: Pločna kombinatorika - Luka Banović

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ne može. Obojimo ploču tako da je svako treće polje u pojedinom retku i stupcu crno, pri čemu su polja koja dijele brid s izrezanim poljem oba obojena crno. Lako sada izbrojimo da je crnih polja 22, a preostalih 41. No, budući da svaka pločica pokriva točno 1 crno polje, zaključujemo da ovakvo popločavanje nije moguće.

2. Ne možemo to učiniti ni za jedan n. Naime, nije teško primijetiti da je parnost broja crnih polja uvijek očuvana: ako je u nekom retku ili stupcu bilo c crnih polja, bit će ih $2n - c$ nakon poteza, a ako je u odabranom kvadratu bilo c crnih polja, nakon poteza bit će ih $4 - c$. Kako je na početku broj crnih polja paran, ne možemo postići da bude neparan, bez obzira na to koliki je n.

3. Točan odgovor je 4. Na slici 21.1 su crno označena polja koja treba izbaciti da ostane ploča koja zadovoljava uvjete. Sada pretpostavimo da je moguće maknuti manje od 4 polja. Primijetimo da to znači da postoji redak iz kojeg ne mičemo nijedno polje. Ako postoji još jedan redak u kojem ostavljamo sva polja na miru, očito ćemo naći 4 koja zatvaraju kvadrat. Stoga ostaje slučaj kad iz preostala 3 retka mičemo po jedno polje. Promotrimo redak kojem su ostala sva polja netaknuta i njemu susjedni redak. Sada lako vidimo da bez obzira koje polje iz tog susjednog retka maknuli postojat će 4 polja u ta 2 retka koja će zatvarati kvadrat. Dakle, dokazali smo tvrdnju.



Slika 21.1:

4. Ne možemo. Obojimo ploču šahovski. Tada imamo po 50 crnih i bijelih polja. Primijetimo da svaka pločica pokriva 3 crna i 1 bijelo polje ili 3 bijela i 1 crno polje. Za popločavanje nam treba 25 pločica, od toga recimo da njih x pokriva 3 crna polja. Ukupan broj crnih polja je $50 = 3x + (25 - x) = 2x + 25$, pa kako ova jednadžba nema rješenja u cijelim brojevima zaključujemo da traženo popločavanje nije moguće.

5. Numerirajmo retke i stupce i fiksirajmo proizvoljno polje: neka se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu. Uočimo da je nužan i dovoljan uvjet da je polje u nekom pravokutniku taj da je gornje lijevo polje tog pravokutnika u nekom od redaka $1, ..., i$ i nekom od stupaca $1, ..., j$, te da je donje desno polje u nekom od redaka $i, ..., n$ i nekom od stupaca $j, ..., n$. Gornjim lijevim i donjim desnim poljem zaista je jednoznačno određen pravokutnik. Kako gornje lijevo i donje desno polje pravokutnika možemo izabrati neovisno jedno o drugom, broj koji piše u fiksiranom polju je $ij(n - i + 1)(n - j + 1)$. Stoga je traženi zbroj jednak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij(n-i+1)(n-j+1) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n}(n+1)i - i^2\Big)^2 \\ &= \Big(\frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big)^2 = \frac{1}{36}n^2(n+1)^2(n+2)^2\end{aligned}$$

6. Je. Traženu konfiguraciju dobivamo induktivno. Recimo da ploča ima donji lijevi kut. Ploču ćemo popuniti brojevima tako da svaki redak i svaki stupac donjeg lijevog kvadrata dimenzija $2^n \times 2^n, n \geqslant 0$ sadrži sve prirodne brojeve od 1 do 2^n uključivo. Za $n = 0$ u jedino polje tog kvadrata upišemo jedinicu. Kad smo popunili na zadani način donji lijevi kvadrat dimenzija $2^n \times 2^n$, donji lijevi kvadrat dimenzija $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ popunit ćemo ovako: ovaj manji kvadrat činit će donju lijevu i gornju desnu četvrtinu većeg, dok ćemo preostale četvrtine popuniti ponovno kopijama manjeg kvadrata kojima su svi brojevi uvećani za 2^n. Ovime je jasno da ćemo naposljetku dobiti željenu konfiguraciju ploče, tj. da su svi brojevi u svakom retku i stupcu različiti te da se svi pojavljuju u svakom retku i stupcu.

7. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Baza za $n = 1$ je očita. Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k moguće popločati ploču $2^k \times 2^k$ na traženi način. Ploču $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ možemo podijeliti na 4 ploče dimenzija $2^k \times 2^k$ od kojih jednoj fali jedno polje. Tu manju ploču kojoj fali jedno polje možemo popločati prema

pretpostavci indukcije. Ostaje pokazati da preostale 3 manje ploče kojima ne fali nijedno polje možemo popločati danim pločicama.

Tu tvrdnju također ćemo dokazati indukcijom. Dakle, sada ćemo indukcijom dokazati da se ploča dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj npr. fali gornja desna četvrtina može popločati danim pločicama. Baza je identična kao i na početku. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki k. U koraku indukcije nije se teško uvjeriti da ploču dimenzija $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ kojoj fali jedna četvrtina možemo podijeliti na 4 istovjetne ploče dimenzije $2^k \times 2^k$ koje možemo popločati po pretpostavci indukcije. Ovime je dokaz gotov.

8. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje 2 susjedna polja u koja su upisani različiti brojevi. Promotrimo polje koje sadrži manji od ta 2 broja. Kako je jedan od susjeda veći od njega, a on sam mora biti aritmetička sredina susjeda, u nekom od susjednih mu polja mora pisati broj koji je manji od njega. Sada izvedemo analogni zaključak za to polje i uočimo da ovaj argument možemo naizgled u nedogled ponavljati. Međutim, kako su u polja ploče upisani **prirodni** brojevi, a postoji najmanji prirodni broj, nakon konačno mnogo koraka ipak više nećemo moći provesti ovaj korak i doći ćemo do željene kontradikcije.

9. HMO 2016.

10. Ne može. Obojimo ploču po dijagonalama u 3 boje. U svakom koraku broj žetona koji se nalaze na jednoj od boja povećava se za 1, a za ostale 2 boje se smanjuje za 1. Kako na početku na svakoj od boja imamo po 3 žetona (tj. neparno mnogo njih), broj žetona na svim bojama će uvijek međusobno biti iste parnosti. Stoga ne možemo doći do situacije da imamo 2 boje na kojima nema žetona i 1 boju na kojoj imamo jedan žeton.

11. Uvedimo sljedeće oznake: neka su za svaki $k = 1, ..., n$ m_k, n_k redom broj različitih boja koji se pojavljuju u k-tom retku, odnosno stupcu, a r_k, s_k broj redaka, odnosno stupaca u kojima se pojavljuje k-ta boja. Lako se uvjeriti da vrijedi
$$\sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n} n_k = \sum_{k=1}^{n} r_k + \sum_{k=1}^{n} s_k.$$
Nadalje, primijetimo da se k-ta boja može nalaziti samo na presjecima redaka i stupaca koji tu boju sadrže, a njih ima redom r_l, odnosno s_l. Kako se svaka boja pojavljuje na n polja, dobivamo ogradu $r_k \cdot s_k \geqslant n$, za svaki k. Sada koristeći A-G nejednakost slijedi da je
$$\sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n} n_k = \sum_{k=1}^{n} (r_k + s_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{r_k s_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{n} = 2n\sqrt{n}.$$
Dakle, aritmetička sredina $2n$ pribrojnika na lijevoj strani nejednakosti je barem $\sqrt{n}$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

12. Obojimo ploču tako da je polje crno ako se nalazi u neparnom retku i neparnom stupcu, inače neka je bijelo. Pretpostavimo da postoji traženo popločavanje u k slojeva. Kako svaka pločica pokriva najviše jedno crno polje, a crnih polja je 12, potrebno nam je barem $12k$ pločica koje onda prekrivaju barem $36k$ polja. No, za popločavanje pločice trebaju sadržavati $35k$ polja, pa dolazimo do kontradikcije.

13. Pokazat ćemo da su svi takvi n nužno djeljivi s 3. Imamo 2 dijela dokaza.

    1. dio: pokažimo da je moguće doći do šahovskog bojanja kad je n djeljiv s 3. Tada ploču možemo podijeliti u kvadrate veličine 3×3, pri čemu ćemo za neke kvadrate htjeti da im je gornje lijevo polje crno, a za neke da im je to polje bijelo. No, lako provjerimo da u najviše 3 koraka možemo od bijele 3×3 ploče doći do željenih bojanja. Dakle, kad provedemo te korake za svaku 3×3 ploču zasebno, dobit ćemo šahovsko bojanje.

    2. dio: pokažimo da je nemoguće doći do šahovskog bojanja kad n nije djeljiv s 3. Uočimo da sada ne možemo podijeliti ploču isključivo na 3×3 dijelove. Recimo da želimo dobiti da je gornje lijevo polje bijelo. Obojimo ploču neovisno o šahovskom bojanju u 3 boje tako da svako treće polje bude obojeno u istu boju idući redak po redak slijeva nadesno. Recimo da su te boje redom crvena, zelena i plava. Uočimo da $4n^2$ nužno daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, što znači da će crvenih polja biti $3k+1$, a zelenih i plavih po $3k$ za neki prirodan broj k. Kad ovako postavimo stvari, imamo da je $9k + 1 = 4n^2$, pa dodatno zaključujemo da je k neparan. Sada lako možemo odrediti koliko je crnih polja obojeno crveno, zeleno ili plavo: crveno i zeleno bit će obojeno po $\frac{3k+1}{2}$ crnih polja, a plavo $\frac{3k-1}{2}$ crnih polja. Specijalno, ako želimo šahovski obojiti ploču broj crnih polja obojen crvenom, zelenom i plavom bojom neće biti iste parnosti. No, primijetimo da krećemo od ploče gdje to nije slučaj, te da se svakim korakom to svojstvo neće promijeniti. Ovime smo pokazali tvrdnju.

14. Neka su prije poteza t brojevi na ploči $a_{1,t}, ..., a_{n,t}$, a njihova aritmetička sredina neka je S_t. Uvedimo

$$\Delta_t := \sum_{k=1}^{n} |a_{k,t} - S_t|,$$

tj. promatramo apsolutne razlike brojeva na ploči od trenutne aritmetičke sredine jer očekujemo da će se one općenito smanjivati budući da stalno brojeve približavamo aritmetičkoj sredini. Neka je x_t broj brojeva kojima u t-tom koraku dodajemo 1, a y_t broj brojeva kojima u t-tom koraku oduzimamo 1. Tada je $S_{t+1} = S_t + \frac{x_t - y_t}{n}$, pa je

$$\begin{aligned}
\Delta_{t+1} =& \sum_{k=1}^{n} |a_{k,t+1} - S_t - \frac{x_t - y_t}{n}| \\
\leqslant& \sum_{k=1}^{n} (|a_{k,t+1} - S_t| + |\frac{x_t - y_t}{n}|) \\
=& |x_t - y_t| + \sum_{k=1}^{n} |a_{k,t+1} - S_t| \\
=& |x_t - y_t| - (x_t + y_t) + \sum_{k=1}^{n} |a_{k,t} - S_t| \\
=& \Delta_t + |x_t - y_t| - (x_t + y_t)
\end{aligned}$$

Pritom smo drugi redak dobili korištenjem nejednakosti trokuta, a četvrti redak iz činjenice da je $|a_{k,t+1} - S_t| = |a_{k,t} - S_t| - 1$ za onih $x_t + y_t$ brojeva na ploči koji su promijenjeni, odnosno $|a_{k,t+1} - S_t| = |a_{k,t} - S_t|$ za ostale. Sada ako su $x_t, y_t > 0$, onda je $|x_t - y_t| - (x_t + y_t) > 0$, pa dobivamo $\Delta_{t+1} < \Delta_t$.

Ostaje slučaj kad je $x_t = 0$ ili $y_t = 0$, gdje ne možemo iz gornjeg raspisa zaključiti da je $\Delta_{t+1} < \Delta_t$. No, ovdje ćemo iskoristiti činjenicu da u nejednakosti trokuta vrijedi jednakost ako i samo ako su svi pribrojnici istog predznaka. Kako je sada $x_t - y_t \neq 0$, te uz to među brojevima $a_{k,t+1} - S_t$ moraju postojati brojevi koji su strogo pozitivni i strogo negativni (inače ne bismo mogli provesti ili ovaj ili sljedeći korak), vidimo da će u barem jednoj primjeni nejednakosti trokuta vrijediti stroga nejednakost. Stoga i u ovom slučaju imamo $\Delta_{t+1} < \Delta_t$.

Dakle, dobili smo da je niz $(n \cdot \Delta_t)_t$ niz strogo padajućih nenegativnih cijelih brojeva, iz čega slijedi tvrdnja.

21.3. G13: Simedijane - Krešimir Nežmah

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Folklor.
   Rješenje slijedi direktnim uvrštavanjem u trigonometrijski oblik Čevinog teorema i iz činjenice da su pravci izogonalni.

2. Folklor.
   (a) Rješenje slijedi množenjem izraza za omjer u kojem čevijani $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$ dijele dužinu $\overline{BC}$. Vidi uvod.
   (b) Slijedi iz (a) dijela uz napomenu da ako je M polovište od $\overline{BC}$, onda je $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$.

3. Folklor.
   Označimo sa M' točku u kojoj refleksija pravca AX preko simetrale kuta $\angle BAC$ siječe dužinu $\overline{BC}$. Želimo pokazati da je $\frac{|BM'|}{|M'C|} = 1$. Vrijedi redom:
   $$\frac{|BM'|}{|M'C|} = \frac{\sin\angle BAM' \cdot \sin\angle ACB}{\sin\angle CAM' \cdot \sin\angle ABC} = \frac{\sin\angle BAM' \cdot \sin\angle ABX}{\sin\angle CAM' \cdot \sin\angle ACX} = \frac{\sin\angle CAX \cdot \sin\angle ABX}{\sin\angle BAX \cdot \sin\angle ACX} = \frac{|CX| \cdot |AX|}{|BX| \cdot |AX|} = 1,$$
   što smo i htjeli pokazati.

4. Folklor.
   - (a) Slijedi iz konstrukcije simedijane za $\triangle KBC$, što je zapravo identična konstrukcija kao i za $\triangle ABC$. Potrebno je samo uočiti da dokaz u prethodnom zadatku radi i za ovaj slučaj.
   - (b) Sličnosti slijede iz jednakosti kutova koje dobivamo ili preko tetivnosti ili preko izogonalnosti. Za $\triangle ABK \sim \triangle AMC$ imamo $\angle BAK = \angle CAM$ zbog izogonalnosti i $\angle BKA = \angle BCA = \angle MCA$ zbog tetivnosti. Za $\triangle ABK \sim \triangle CMK$ imamo $\angle BAK = \angle BCK = \angle MCK$ zbog tetivnosti, a $\angle BKA = \angle CKM$ zbog izogonalnosti. Drugi niz sličnosti dokazuje se analogno.
   - (c) Gledajući AD kao simedijanu u $\triangle ABC$ imamo $\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{|AB|}{|AC|}\right)^2$, a gledajući KD kao simedijanu u $\triangle BKC$ imamo $\frac{|BD|}{|DC|} = \left(\frac{|BK|}{|KC|}\right)^2$, iz čega je $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|CK|}$, tj. $|AB| \cdot |CK| = |AC| \cdot |BK|$.
   - (d) Neka je O središte opisane od $\triangle ABC$, a P polovište od $\overline{AK}$. Kako je $\overline{AK}$ tetiva, imamo $OP \perp AK$. Iz jednakosti kutova $\angle OPX = \angle OBX = \angle OCX = 90^\circ$ slijedi da točke B, P, O, C i X leže na kružnici s promjerom $\overline{OX}$.
   - (e) Označimo P kao pod (d) te podsjetimo se na koncikličnost točaka B, P, O, C, X. Imamo $\alpha = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOX = \angle BPX$. Zato je $\angle KBC = \angle KAC = \angle BAC - \angle BAK = \angle BPX - \angle BAP = \angle ABP$ pa je BC simedijana.
   - (f) BM je simetrala od $\angle AMK$ zbog jednakosti kutova koja slijedi iz sličnosti pod (b). MX je onda vanjska simetrala zbog okomitosti vanjske i unutarnje simetrale.
   - (g) Tražena točka je upravo izogonalni konjugat težišta trokuta. Želimo li eksplicitno pokazati da se sve tri simedijane sijeku, dokaz se provodi analogno kao 1. zadatak preko trigonometrijskog oblika Čevinog teorema. Alternativno, možemo i preko običnog Čevinog teorema uz omjer iz zadatka 2.(b).

5. Folklor.
   Već smo u zadatku 4. pokazali da iz bilo koje tvrdnje (b) - (e) slijede ostale. Preostaje pokazati jedino da iz (a) slijede ostale. Označimo sa M polovište od $\overline{BD}$. Pokazat ćemo da je $\angle BAC = \angle DAM$ preko sličnosti $\triangle ABC \sim \triangle AMD$. Već imamo $\angle BCA = \angle BDA = \angle MDA$ zbog tetivnosti pa je dovoljno dokazati omjer $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|MD|}$. Kako je $|MD| = \frac{1}{2}|BD|$, traženi omjer ekvivalentan je $|AC| \cdot |BD| = 2|AD| \cdot |BC|$, što vrijedi zbog Ptolomejevog teorema $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ i pretpostavke da $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

6. Poljska 2000., prvi dan, 2. zadatak
7. HMO 2018., prvi dan
8. IMO shortlist 2003. G2
9. Vietnam TST 2001.
10. USA TST 2007., zadatak 5.
11. USAMO 2008., zadatak 2.

21.4. N13: Orderi - Paula Vidas

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Primijetimo da su a i a^n-1 relativno prosti. Odredimo $\operatorname{ord}_{a^n-1} a$. Za $1 \leqslant x < n$ imamo $0 < a^x-1 < a^n-1$ pa ne može biti $a^x \equiv 1 \pmod{a^n-1}$. Kako je $a^n \equiv 1 \pmod{a^n-1}$, dobivamo $\operatorname{ord}_{a^n-1} a = n$. Tvrdnja sada slijedi primjenom korolara 5.5.7.

2. Neka je q prost i $q \mid 2^p-1$. Tada je $2^p \equiv 1 \pmod q$, pa $\operatorname{ord}_q 2 \mid p$.

   Ne može biti $\operatorname{ord}_q 2 = 1$, jer bi to značilo $2 \equiv 1 \pmod q \implies q \mid 1$, pa mora biti $\operatorname{ord}_q 2 = p$.

   Znamo da $\operatorname{ord}_q 2 \mid \varphi(q) = q-1$, pa imamo $p \mid q-1 \implies p \leqslant q-1 \implies q > p$.

3. Neka je q prost i $q \mid p^p-1$. Tada je $p^p \equiv 1 \pmod q$, pa $\operatorname{ord}_q p \mid p$.

   Pogledajmo slučaj kada je $\operatorname{ord}_q p = p$. Sjetmo se da $\operatorname{ord}_q p \mid \varphi(q) = q-1$, pa slijedi da je $q \equiv 1 \pmod p$. Dakle, q je traženog oblika.

   Pretpostavimo sada da za sve proste djelitelje q od p^p-1 vrijedi $\operatorname{ord}_q p = 1$. Tada je $p \equiv 1 \pmod q$. Broj p^p-1 možemo zapisati kao $(p-1)(p^{p-1}+\cdots+p+1)$. Za drugi faktor vrijedi $p^{p-1}+\cdots+p+1 \equiv p \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod q$, što je u kontradikciji s činjenicom da on ima prostog djelitelja (jer je veći od 1). Dakle, ne može za sve proste djelitelje vrijediti $\operatorname{ord}_q p = 1$.

4. Pretpostavimo suprotno, tj. $n \mid 2^n-1$. Neka je p najmanji prosti djelitelj od n. Tada $p \mid 2^n-1 \implies \operatorname{ord}_p 2 \mid n$. No $\operatorname{ord}_p 2 \leqslant \varphi(p) = p-1 < p$, što je u kontradikciji s time da je p najmanji prosti djelitelj.

5. https://artofproblemsolving.com/community/c6t30671f6h58445_prime_triplets

   Odgovor: $(p,q,r) \in \{(2,5,3),(3,2,5),(5,3,2)\}$.

6. https://artofproblemsolving.com/community/c6t32567f6h1455798_turkey_egmo_tst_2017_p6

   Odgovor: $p = q$ neparni.

7. https://artofproblemsolving.com/community/c6h559422

   Odgovor: $(p,q) \in \{(2,3),(2,5),(3,2),(5,2),(5,5),(5,313),(313,5)\}$.

8. https://artofproblemsolving.com/community/c6t30671f6h1779870_a_difficult_nt

   Odgovor: $(p,q) = (2,2)$.

9. https://artofproblemsolving.com/community/c6h472954p2648118

   Odgovor: $p = n$ ili $(p,n) = (2,4)$.

22. Poglavlje

Rješenja za olimpijsku grupu

22.1. M3: Vjerovanje u više noma - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. https://www.imomath.com/index.php?options=623&lmm=0
2. https://www.imomath.com/index.php?options=623&lmm=0
3. https://vjimc.osu.cz/storage/uploads/j21solutions1.pdf
4. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2019/07/A-Polinom-Domagoj-Cevid.pdf
   https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2017/03/A-polinomi-Bakic.pdf
5. https://imomath.com/index.php?options=622&lmm=0
6. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2017/03/A-RMM-Orlic.pdf
7. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2015/07/A-Nestandardna-algebra-Kristina-Ana-Skreb.pdf
8. https://artofproblemsolving.com/community/c7h1679689p10705996
9. https://artofproblemsolving.com/community/c7h1812367p12079294
10. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2016/12/N-Polinomi-nizovi-funkcije-Miljen.pdf
11. https://imomath.com/index.php?options=627&lmm=0
12. https://imomath.com/index.php?options=627&lmm=0

22.2. M8: Konstrukcije - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Indukcija. Promotri skup prostih faktora koji dijele sve članove skupa s n članova i eksponent elementa koji dodaješ u skup uzmi φ njihovog umnoška. Ovako generiramo skupove $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ takve da $|S_k| = k$, a za beskonačan skup uzmi uniju S_i.

2. Po Schuru, postoji beskonačno prostih brojeva koji dijele neki od brojeva oblika $P(x)$. Neka su $p_1, p_2, \ldots$ ti prosti brojevi i neka su y_i brojevi takvi da je $P(y_i)$ djeljiv s p_i. Tada uzmimo $u \equiv y_i \pmod{p_i}$ za $i \in \{1, \ldots, n\}$. Onda $P(u)$ ima barem n različitih prostih faktora i tvrdnja slijedi.

3. Neka je g primitivni korijen mod p.

   Prepostavimo da je $p \equiv 3 \pmod 4$. Onda broju g^i pridružimo broj i. Tvrdimo da je $g^{1^2} + g^{2^2} + \ldots + g^{(p-1)^2}$ djeljivo s p. Naime, $g^{i^2} + g^{(i+(p-1)/2)^2} = g^{i^2}(1 + g^{(p-1)^2/4}) = g^{i^2}(1 + g^{(p-1)/2} = 0$ modulo p, pa sparivanjem dobivamo tvrdnju.

   Pretpostavimo da je $p \equiv 1 \pmod 4$. Sparimo g^{2k-1} sa $2k + \frac{p-1}{2}$ i sparimo g^{2k} sa $2k - 1$. Analogno kao u prvom slučaju raspišemo i dobijemo tvrdnju.

22.3. M9: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. AoPS
2. IMO SL 1977
3. IMO SL 2014
4. AoPS
5. Uvrštavanjem iz hinta imamo $f(x) < 1$ pa je f strogo padajuća. Namjestimo lijevu stranu na $f(x)f(y)$ i koristimo simetriju i injektivnost da bi dobili rješenje.
6. Koristimo injektivnost g u 0 da bi dobili $g(x) = x$. Dalje je lako.
7. IMO SL 2011
8. AoPS

22.4. M10: Grafovi - Krešimir Nežmah

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Codeforces Div 2 runda 649., zadatak D
   Ako graf nema ciklusa, bipartitan je pa možemo uzeti veću polovicu kao nazavisan skup.
   Nadalje pretpostavimo da postoji barem jedan ciklus.
   Dovoljno je pronaći ciklus takav da nema brida koji spaja dva nesusjedna čvora ciklusa. Ako je taj ciklus veličine do k onda smo pronašli dobar ciklus, a inače možemo uzeti svaki drugi čvor u tom ciklusu pa imamo nezavisan skup.
   Takav ciklus možemo uzeti kao minimalni ciklus, tada ne može postojati brid koji siječe ciklus jer bi mogli naći manji ciklus (note: princip ekstrema ovdje služi samo kao dobar write-up mechanic).
   No minimalni ciklus nije jedini koji je dobar. Mogli smo npr. uzeti prvi ciklus na koji naiđemo u DFS-u.

2. IMO 1991., 4.
   Javlja se i kao zadatak NoGcd na csacademy-u, ako netko želi submitat.
   Postoji više pristupa rješenju. Svaki koristi ideju da je moguće označiti bridove tako da se oko svakog čvora nađu bar dva uzastopna broja, što osigurava uvjet za relativno proste.
   Jedna mogućnost je označiti bridove redom kako ih DFS posjećuje. Treba posebno komentirati zašto to radi za root, obične čvorove i listove u DFS stablu.
   Druga mogućnost je dodati dummy bridove između čvorova neparnog stupnja (kojih ima parno prema lemi o rukovanju pa ih je moguće upariti), pa označiti redom po Eulerovoj turi.
   Postoji još rješenja koja npr. induktivno miču maksimalni put.
   Refleksija: zašto je bitno da je graf povezan?

3. Codeforces Div 1 runda 715., zadatak D
   Možemo ignorirati sve točke koje već na početku imaju svoju oznaku.
   Napravimo graf gdje nacrtamo brid iz točke k u p_k. Taj graf je skup disjunktnih ciklusa. Jedan ciklus možemo riješiti tako da fiksiramo točku pivota i redom radimo zamjene sa ostalima. Na početku može biti više ciklusa pa ih treba spojiti u jedan veliki. Zamjenom dvije točke iz dva različita ciklusa, njihovi ciklusi se spajaju.
   Lijep način da se dovrši je da se unaprijed izabere točka pivot, a preostale točke sortiramo cirkularno oko pivota. Sada možemo ići redom u krug i ako su trenutna i prethodna točka u krugu u različitim ciklusima onda ih zamijenimo. Zgodno je uzeti najdonju točku kao pivot kako bi sve bile u istoj poluravnini.

4. Simulacija HMO 2019 zadatak 2 (drugi dan)
   Uočimo da se prazno polje miče za ± 2, iz čega slijedi da se nijedan domino nikad ne može pomaknuti dvaput za redom u istom smjeru. Dakle, svaki domino se može micati jedino naprijed-nazad u svome 1×3 pravokutniku.
   Napravimo graf gdje su čvorovi sva polja koja imaju iste koordinate mod 2 kao i početno. Dodamo brid za svaki 1×3 pravokutnik od domina koji sadrži dva čvora.
   Glavna tvrdnja je da je dobiveni graf stablo pa je moguće posjetiti sve čvorove, uključujući sva kutna polja. Dovoljno je pokazati da je broj bridova za jedan manji od broja čvorova te da nema ciklusa. Za bridove to vrijedi zato što svaki domino prekriva točno jedan čvor, a svaki čvor osim jednog (početnog kutnog polja) je prekriven jednim dominom.
   Ciklus je nemoguć jer bi se u suprotnome preko Pickovog teorema moglo pokazati da je broj polja strogo u unutrašnjosi ciklusa neparan. Naime, ukupnu zatvorenu površinu možemo podijeliti na 2×2 kvadrate pa je djeljiva s 4, a broj čvorova u ciklusu je paran (jer jednako puta idemo gore i dolje, te lijevo i desno).

5. SPOJ HCHAINS
   Ideja je napraviti graf, ali neintuitivno je možda to da točke iz zadatka neće biti čvorovi, već bridovi. Čvorovi će biti svi vertikalni ili horizontalni pravci koji prolaze kroz barem jednu točku, a povezat ćemo dva pravca ako je dana neka točka na njihovom presjeku.
   Uočimo da je graf bipartitan zato što imamo dvije vrste čvorova - vertikalne i horizontalne pravce. Potrebno je svaki brid pobojati tako da za svaki čvor vrijedi da je apsolutna razlika između broja plavih i crvenih bridova susjednih tom čvoru najviše 1. Postoje dva načina za to.
   Prvo je da dok god postoji ciklus, maknemo ga i na njemu pobojamo bridove naizmjenično, što radi jer je ciklus paran (zbog bipartitnosti). Na kraju ostaju stabla koja možemo obojati na razne načine, recimo DFS-om.
   Druga mogućnost je preko Eulerove ture. Dodamo dva dummy čvora, po jedan na svaku stranu bipartitnog grafa. Sve čvorove neparnog stupnja spojimo s dummy bridovima do pripadajućeg dummy čvora, tako da graf ostane bipartitan. Na kraju, po potrebi spojimo i dva dummy čvora ako oba imaju neparan stupanj.

Sada možemo pronaći Eulerovu turu i pobojati bridove na njoj naizmjenično, čime svaki čvor ima jednak broj crvenih i plavih bridova. Nakon micanja dummy bridova uvjet zadatka i dalje vrijedi.
Napomena: bitno je da prilikom dodavanja održimo bipartitnost grafa tako da Eulerova tura posjeti paran broj bridova (što je bitno za početni, tj. završni čvor).

6. Folklor
Traženi najveći broj bridova je $\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tj. $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
Bipartitan graf s $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ čvorova na jednoj i $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ čvorova na drugoj strani postiže taj broj.
Za ogradu, potrebno je uočiti na koji način nedostatak trokuta postavlja ograničenje na stupnjeve čvorova, zatim napraviti dvostruko prebrojavanje te koristeći algebraske manipulacije i ograde dobiti nejednakost.
Neka je dani graf $G = (V, E)$, te $n = |V|$ i $m = |E|$. Tvrdimo da je $m \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
Budući da nema trokuta, za svaki brid $xy \in E$ vrijedi $d_x + d_y \leqslant n$. Sumiranjem po svim bridovima dobivamo:
$$\sum_{xy \in E} d_x + d_y \leqslant mn$$
S druge strane, ako prebrojimo koliko se puta svaki d_x pojavljuje u sumi imamo:
$$\sum_{xy \in E} d_x + d_y = \sum_{x \in V} d_x^2$$
Iz ovoga slijedi:
$$mn^2 \geqslant n \left(\sum_{x \in V} d_x^2 \right) \geqslant \left(\sum_{x \in V} d_x \right)^2 = 4m^2$$
Dakle, $m \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, i lagano se pokaže da je $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

7. Studentsko iz informatike 2019., zadatak G
Napravimo graf u kojemu su osobe od 1 do $2n$ čvorovi. Ako su dvije osobe u istom paru, povezat ćemo ih crvenim bridom. Dodatno, povezat ćemo plavim bridom osobe u parovima $(1, 2), (3, 4), ..., (2n - 1, 2n)$. Uočimo da ne postoje dva brida iste boje koji dijele krajnju točku. Zato će svaki ciklus u ovakvom grafu imati alternirajuće boje (crvena, plava, crvena, plava, . . .), pa je svaki ciklus parne duljine. Iz toga slijedi da je graf bipartitan pa možemo napraviti bojanje u dvije boje. Uvjeti zadatka sada su očito zadovoljeni – crveni bridovi osiguravaju da dvije osobe iz istog para nemaju isto jelo, a plavi bridovi osiguravaju da među tri uzastopne pozicije u krugu nema tri ista jela.

8. Srpsko općinsko 2019., 3. zadatak
Za početak, ako maknemo usmjerenja bridova, tvrdimo da je graf povezan. To je zato što onda svaki čvor ima stupanj 50 pa svaka dva čvora imaju barem jednog zajedničkog susjeda jer $50 + 50 > 101 - 2$.
Zatim promatrajmo rastav na SCC. Želimo pokazati da je cijeli graf jedan SCC. Pretpostavimo suprotno. Uočimo da će uvijek postojati SCC koji ima out-degree jednak 0. Njega možemo pronaći tako da pratimo redom bilo koji brid prema van iz trenutnog SCC-a dok više ne možemo. Sigurno ćemo stati jer nema ciklusa.
Sada se može doći u kontradikciju preko dvostrukog prebrojavanja in-degreeova i out-degreeova u tom SCC-u jer ispada da bi i in-degree trebao biti 0, što je nemoguće ako je graf povezan.

9. Folklor
Tvrdnja se dokaže indukcijom po n.
Za $n = 1$ imamo samo jedan čvor i možemo uzeti samo njega.
Za $n \geqslant 2$ možemo promatrati bilo koji čvor. Sve ostale čvorove možemo particionirati u dva skupa A i B tako da svi iz A pokazuju u promatrani čvor, a on pokazuje u sve iz B. Kako je $|A|+|B|+1 = 2^n - 1$, imamo $max(|A|, |B|) \geqslant 2^{n-1} - 1$ pa induktivno nađemo $n - 1$ čvorova ili iz A ili iz B i tom skupu pridodamo promatrani čvor.

10. Folklor
Moguće je riješiti na isti način kao i prethodni zadatak. Fiksiramo proizvoljni čvor i particioniramo ostale na dva skupa A i B, oni koji pokazuju u njega i oni u koje on pokazuje. Pronađemo induktivno Hamiltonov put u A i u B te ih spojimo u jedan veliki put preko fiksiranog čvora.
Drugo rješenje drugačije provodi indukciju. Maknemo proizvoljni čvor i od preostalih nađemo Hamiltonov put. Tvrdimo da se čvor koji smo maknuli može ubaciti negdje usred puta da ga produžimo. Prvo probamo ubaciti prije prvog čvora na putu, a ako to ne radi onda redom pokušavamo između svaka dva uzastopna. Ako to nije uspjelo ispada da su svi bridovi usmjereni prema maknutnom čvoru pa ga možemo dodati na kraj.
Napomenimo da smo drugo rješenje mogli zapisati i preko principa ekstrema, tako da uzmemo najduži jednostavan put i pokažemo da se može produžiti.

11. Folklor
Prvo rješenje:
Maknemo neki čvor i ostatak grafa podijelimo na SCC-ove. Uočimo da će SCC-ovi biti potpuno uređeni, tj. možemo ih zamisliti poredane u lanac tako da ako i-ti SCC dolazi prije j-tog u lancu, onda bridovi mogu ići samo iz i u j. Zbog indukcije u svakom SCC-u postoji Hamiltonov ciklus. Te cikluse možemo povezati tako da napravimo Hamiltonov put koji kreće iz bilo kojeg čvora u prvom SCC-u i završava u bilo kojem čvoru u zadnjem SCC-u. Kako je na početku graf samo jedan SCC, onda čvor koji smo maknuli pokazuje u barem jedan čvor iz prvog SCC-a te barem jedan čvor iz zadnjeg SCC-a pokazuje u njega. Na taj način možemo čvor koji smo maknuli spojiti sa spomenutim Hamiltonovim putom u ciklus. Treba pripaziti na slučaj kada je samo jedan SCC.
Drugo rješenje:
Promatramo maksimalni Hamiltonov ciklus. Zbog maksimalnosti nijedan čvor više ne možemo dodati u ciklus pa se pokaže da svaki čvor koji nije u ciklusu ili pobjeđuje svakog u ciklusu ili gubi od svakog u ciklusu. No to je kontradikcija s maksimalnošću jer ciklus možemo produžiti preko jednog dodatnog čvora koji pobjeđuje sve i jednog dodatnog koji gubi od svakog.

12. Twitch Lemma
Rastavimo graf na SCC-ove. Uočimo da je svaki ciklus sadržan u nekom SCC-u. Promatrajmo neki ciklus veličine $k+1$ te promatrajmo SCC u kojem se on nalazi. Tvrdimo da postoji ciklus veličine k koji je također u tom SCC-u. Možemo sve SCC-ove osim promatranog odbaciti tako da smo mogli odmah na početku pretpostaviti da je graf samo jedan SCC.
Ovo možemo dokazati generalizacijom ideje korištene u drugom rješenju prethodnog zadatka. Naime, dovoljno je pokazati da ako u jednom SCC-u postoji ciklus veličine k da onda postoji i ciklus veličine $k+1$, ukoliko je $k+1$ manje ili jednako veličini SCC-a. Slično kao u prethodnom zadatku, kada ciklus ne bismo mogli produžiti preko pojedinačnih čvorova, onda bi preostale čvorove u SCC-u podijelili na one koje pobjeđuju sve i na one koje gube od svih. Kako je samo jedan SCC, obje te skupine su neprazne pa možemo konstruirati ciklus veličine $k+1$ koristeći $k-1$ čvorova iz trenutnog ciklusa veličine k i po jedan dodatni iz svake skupine.

13. Opencup GP of Moscow 2020., zadatak G
Za svaki čvor v, označimo sa S_v skup svih boja za koje dozvoljavamo da budu boje za neki izlazeći brid iz v. Za svaki brid $x \to y$, možemo ga pobojati u bilo koju boju iz S_x koja nije u S_y. Ne možemo naći boju za taj brid jedino ako je S_x podskup od S_y. Dakle, potrebno je pronaći različite skupove $S_1, S_2, ..., S_{250}$ tako da nijedan nije podskup nekog drugog. Uočimo da ako svi ti skupovi imaju isti broj elemenata, uvjet je zadovoljen. Možemo izabrati bilo kojih 250 petčlanih podskupova od 10 boja, što radi jer $\binom{10}{5} = 252 \geqslant 250$.
Zanimljivost: Spernerov teorem garantira da najveći skup takvih podskupova i je $\binom{10}{5}$.

14. Koreja TST, 2020., 2. zadatak
Označimo 2020 parova sa $V_1, V_2, ..., V_{2020}$, gdje se svaka grupa V_i sastoji od dječaka b_i i djevojke g_i. Napravimo graf gdje su $V_1, V_2, ..., V_{2020}$ čvorovi te dodajmo usmjereni brid $V_i \to V_j$ ako su se rukovali b_i i g_j. Uvjeti iz zadatka osiguravaju da je dobiveni graf turnir.
U turniru postoji Hamiltonov put, a bez smanjenja općenitosti možemo označiti čvorove tako da je $V_1 \to V_2 \to ... \to V_{2020}$. Ako postoji brid $V_1 \to V_{2020}$, onda možemo posložiti ljude u krug redom $b_1V_2V_3...V_{2019}g_{2020}$. U drugom slučaju imamo Hamiltonov ciklus od 2020 čvorova, a prema zadatku 12 postoji i ciklus od 2019 čvorova koje onda možemo posložiti u krug.

15. PUMAC 2015. C8
Rješenje sa PUMAC-a je krivo!
Napravimo rastav na SCC-ove i iskoristimo zadatak 12. Uočimo da ako postoji SCC veličine $\geqslant 6$ onda postoji i ciklus veličine 6 koji ne zadovoljava uvjet zadatka. Također, ako postoje dva SCC-a veličine $\geqslant 3$, onda u svakom postoji ciklus veličine točno 3 pa ta dva trokuta zajedno također ne zadovoljavaju uvjet zadatka. Preostaju turniri kod kojih svi SCC-ovi imaju veličinu 1, osim možda jednog koji ima najviše 5 čvorova. Lako se uvjeriti da svi takvi grafovi zadovoljavaju uvjet zadatka. Sada ručno prebrojimo koliko postoji SCC-ova veličine $\leqslant 5$ do na izomorfizam i dobivamo ukupni broj od $1+2013+2012+2011 \cdot 6 = 16092$.

22.5. M11: Oporavljanje od korištenja sile - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. EGMO 2018 P1
2. Uvedimo točku E analognu točki D, ali s obzirom na vrh C.

   Sada su trokutovi DAC i EAB sukladni i vrijedi $|CD| = |BE|$. Uvedimo i presliku točke A preko M, točku A'.

   Sada je trokut DAE sukladan trokutu ABA' i ACA' pa vrijedi $|DE| = |AA'| = 2|AM|$. Konačno, znamo da je $|BD| = |AB|\sqrt{2}$ te $|CE| = |AC|\sqrt{2}$. Sada primjenom Ptolomejeve nejednakosti na četverokut $BCDE$ imamo:

   $$\begin{aligned} 2|AB| \cdot |AC| + 2|AM| \cdot |BC| &= (|AB|\sqrt{2}) \cdot (|AC|\sqrt{2}) + 2|AM| \cdot |BC| \\ &= |BD| \cdot |CE| + |DE| \cdot |BC| \\ &\geqslant |CD| \cdot |BE| \\ &= |CD|^2 \end{aligned}$$

   što je i trebalo pokazati.
3. Nad vrhom B se povuče okomica na AB duljine $2h_c$ u smjeru bliže C, nazovimo je $|BT|$. Nejednakost trokuta na trokut TCA.
4. $|AH| = 2|OM| = |OO_A|$ pa je $AHOO_A$ paralelogram i AO_A raspolavlja OH. Analogno za BO_B, CO_C.
5. USAJMO 2012 P1
6. Dovoljno je dokazati da je P na jednoj od dijagonala. Ako sada povučemo visine u dva susjedna trokuta na njihovu zajedničku stranicu, one su jednake pa njhovi vrhovi s njihovim nožištima čine paralelogram kojem je dijagonala četverokuta dijagonala. Analogno se provede sa ostale visine i dovrši.
7. IMO 2009 P4
8. Državno za 4. razred 2010.
9. IMO SL 2013

Dio VI

Rješenja s predavanja na drugom terminu

23. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

23.1. A21: Faktorizacije - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na hintove.

1. $a^2 \cdot (a+1) + (a+1) = (a+1) \cdot (a^2+1)$
2. $ac + bd + ad + bc = ac + ad + bc + bd = a \cdot (c+d) + b \cdot (c+d) = (c+d) \cdot (a+b)$
3. $a^2 + 10ab - 70b - 49 = a^2 - 49 + 10ab - 70b = (a-7)(a+7) + 10b \cdot (a-7) = (a-7) \cdot (a+7+10b)$
4. $a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4 = a^4+2a^2b^2+b^4+2a^3b+2ab^3 = (a^2+b^2)^2+ab\cdot(a^2+b^2) = (a^2+b^2)\cdot(a^2+b^2+ab)$
5. $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd = a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) = (ab-cd)^2 - (ac+bd)^2 = (ab-cd-ac-bd) * (ab-cd+ac+bd)$
6. $1+2=3,\ 1\cdot 2 = 2,\ x^2+3x+2 = (x+1)\cdot(x+2)$
7. $2+3=5,\ 2\cdot 3 = 6,\ a^2+5a+6 = (a+2)\cdot(a+3)$
8. $2\cdot 3 = 6,\ 1\cdot 2 = 2,\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 7,\ 6a^2+7a+2 = (3a+2)\cdot(2a+1)$
9. $1\cdot 2 = 2,\ 1\cdot(-9) = -9,\ 2\cdot(-9)+1 = -17,\ 2x^4 - 17x^2 - 9 = (x^2-9)\cdot(2x^2+1) = (x+3)\cdot(x-3)\cdot(2x^2+1)$
10. $(x^2-2x-1)^2 - 4 = (x^2-2x-1+2)\cdot(x^2-2x-1-2) = (x^2-2x+1)\cdot(x^2-2x-3) = (x-1)^2\cdot(x-3)\cdot(x+1)$
11. $a^5 + 2a^3 - 8a^2 - 16 = a^3\cdot(a^2+2) - 8\cdot(a^2+2) = (a^2+2)\cdot(a^3-8) = (a^2+2)\cdot(a-2)\cdot(a^2+2a+4)$
12. $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2) - ab\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2-ab) = (a+b)\cdot(a^2-2ab+b^2) = (a+b)(a-b)^2$
13. $8a^3b^3 + 36a^2b^2c + 54abc^2 + 27c^3 = (2ab)^3 + 3\cdot(2ab)^2\cdot 3c + 3\cdot 2ab\cdot\cdot(3c)^2 + (3c)^3 = (2ab+3c)^3$
14. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8 + 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{8 - 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$
15. $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + a^2 + a^2 + 1 - a^2 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2+1+a)\cdot(a^2+1-a)$
16. $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2\cdot(x^3-1) + x^2 + x + 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2) + x^2 + x + 1 = (x^2+x+1)\cdot((x-1)\cdot x^2 + 1) = (x^2+x+1)\cdot(x^3-x^2+1)$
17. $(a-b)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2 = (a+b-2c)^2 + (a-2b+c)^2 + (b+c-2a)^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2ac + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc + a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 4bc + 2ac + b^2 + c^2 + 4a^2 - 4ab - 4ac + 2bc \iff 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc = 0 \iff 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0 \iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$
    Budući da je kvadrat realnog broja veći ili jednak 0, zbroj kvadrata može biti jednak 0 samo ako su svi jednaki 0. $\implies a-b=0,\ b-c=0,\ a-c=0 \implies a=b=c$
18. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2+2b^2+2ab)\cdot(a^2+2b^2-2ab) = (a^2+2b^2+2ab)\cdot((a-b)^2+b^2);\ a^2+2b^2+2ab \geqslant 2^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 2 = 20;\ (a-b)^2 + b^2 \geqslant 0 + 4 = 4$
    Budući da je izraz jednak umnošku dva broja veća jednaka od 2 on je složen.
19. Županijsko 1. razred A varijanta 1. zadatak

20. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \implies abc\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=abc\cdot(\frac{1}{a+b+c}) \implies bc+ac+ab=\frac{abc}{a+b+c} \implies (bc+ac+ab)\cdot(a+b+c)=abc \implies a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+3abc=abc \implies a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0 \implies a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+a^2c+abc+bc^2+abc \implies ab(a+b)+c^2(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)=0 \implies (a+b)(ab+c^2+ac+bc)=0 \implies (a+b)(c(c+a)+b(c+a))=0 \implies (a+b)(c+a)(b+c)=0$
Budući da je umnožak 3 broja jednak 0, barem jedan od njih treba biti jednak nuli što je i trebalo dokazati.

21. $a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3=-c(a^2-ab+b^2)+c^3=-c(a^2-ab+b^2-c^2)=-c(a^2-ab+(b+c)(b-c))=-c(a^2-ab-a(b-c))=-c(-a)(-a+b+b-c)=-c(-a)(3b)=3abc$

22. $\frac{a^3}{(a-b)\cdot(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)\cdot(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)\cdot(c-b)}=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{a^3c-a^3b+ab^3-b^3c+c^3b-}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\frac{c(a^3-b^3)+ab(b^2-a^2+c^3(b-a))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(-c(a^2+ab+b^2)+ab(a+b)+c^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(-ca^2-abc-cb^2+a^2b+a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\frac{(b-a)(a^2b-a^2c+c^3-cb^2+ab^2-abc)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(a^2(b-c)+c(c-b)(c+b)+ab(b-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(a^2-c^2-}{(a-b)(b-c)(c-}$
$\frac{(b-a)(b-c)(ab-bc+a^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(b(a-c)+(a+c)(a-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-a)(b-c)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$
$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c$

23. 1. rješenje: $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=b^4-2b^2c^2+c^4+a^4-2a^2b^2-2c^2a^2=(b^2-c^2)^2-a^3(b+c)-2a^2b^2-2a^2c^2=((b+c)(b-c))^2-a^3(b+c)-2a^2b^2-2a^2c^2=(b+c)((b+c)(b-c)^2-a^3)-2a^2b^2-2a^2c^2=(-a)(-a(b-c)^2-a^2)-2a^2b^2-2a^2c^2=a^2((b-c)^2+a^2-2b^2-2c^2)=a^2((b-c)^2+(b+c)^2-2b^2-2c^2)=a^2(b^2-2bc+c^2+b^2+2bc+c^2-2b^2-2c^2)=0$
2.rješenje: $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2-4b^2c^2=(-a^2+b^2+c^2)^2-(2bc)^2=(b^2+2bc+c^2-a^2)(b^2-2bc+c^2-a^2)=((b+c)^2-a^2)((b-c)^2-a^2)=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)=0\cdot(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)=0$

24. Županijsko 1. razred A varijanta 1. zadatak

25. Županijsko 2. razred A varijanta 1.zadatak

26. Jednadžba je simetrična, tj. zamjena vrijednosti nekim dvjema varijablima ne mijenja iskaz, pa možemo pretpostaviti poredak brojeva x, y, i z po veličini. $z\geqslant y\geqslant x$.
$x^t\cdot(x-y)(x-z)$ je umnožak potencije pozitivnog broja i dva ne pozitivna pa je sigurno nenegativan. Preostaje dokazati da je ostatak izraza nenegativan.
$A=y^t\cdot(y-x)(y-z)+z^t\cdot(z-x)(z-y)=(z-y)(-y^t\cdot(y-x)+z^t\cdot(z-x))=(z-y)(-y^{t+1}+xy^t+z^{t+1}-xz^t)$
$zleqy \implies z\cdot z^t leqy\cdot z^t \implies z^{t+1}\geqslant yz^t$
$A\geqslant(z-y)(-y^{t+1}+xy^t+z^{t+1}-yz^t)=(z-y)(-y^{t+1}+xy^t+yz^t-xz^t)=(z-y)(y\cdot(z^t-y^t)-x\cdot(z^t-y^t))=(z-y)(z^t-y^t)(y-x)$ Svi faktori su pozitivni pa je izraz A pozitivan, što je i trebalo dokazati.

27. $a+b+c=0 \implies a^3+b^3+c^3=3abc;\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \iff \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=abc(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}) \iff a^5+b^5+c^5=\frac{5}{2}\cdot abc(a^2+b^2+c^2)$
$X=a^5+b^5+c^5=b^5+(a+c)(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4)=b^5-b(a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3+c^4)=b\cdot(b^4-a^4-a^3c+a^2c^2-ac^3-c^4)=b((-a-c)b^3-a^4-c^4+a^3c+ac^3-a^2c^2)=(-a^4-ab^3-c(b^3+c^3)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=b(-a^4-ab^3-c(b+c)(b^2-bc+c^2)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=b(-a^4-ab^3+ca(b^2-bc+c^2)+a^3c+ac^3-a^2c^2)=ab(-a^3-b^3+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=ab(-(a+b)(a^2-ab+b^2)+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=ab(c(a^2-ab+b^2)+cb^2-bc^2+a^2c+c^3-ac^2)=abc(a^2-ab+b^2+b^2-bc+a^2+c^2-ac)$
Znamo da je $a+b+c=0$ pa je i $(a+b+c)^2=0$, tj. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$, odnosno $ab+ac+bc=-\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2)$
$X=abc(2a^2+2b^2+2c^2-(ab+bc+ac))=abc(2a^2+2b^2+2c^2+\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2))=abc(\frac{5}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2))$
$X=a^5+b^5+c^5=\frac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2)$ što je i trebalo dokazati.

28. Državno 2. razred A varijanta 2. zadatak

29. $X=(\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-y})$
Vrijedi faktorizacija $a^3-b^3-c^3=(a+b+c)\cdot Y$ gdje je Y simetrični algebarski izraz u varijablama a, b, i c.
Ako uvrstimo $a=\sqrt[3]{x-y},\ b=\sqrt[3]{y-z},\ c=\sqrt[3]{z-y}$ Vrijedi $x-y+y-z+z-y-3abc=(\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-y})\cdot Y \iff -3abc=X\cdot Y$

Pretpostavimo da vrijednost izraza X jest jednaka 0. Budući da su x, y i z međusobno različiti, a b i c su različiti od 0, pa njihov umnožak ne može biti nula, a budući da je $X = 0$, -3abc mora biti jednako 0. Dobili smo kontrakdikciju pa znamo da pretpostavka ne vrijedi tj. $X \neq 0$, što je i trebalo pokazati.

23.2. C21: Uvod u indukciju - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Mathematical Induction
2. Matematička indukcija
3. Matematička indukcija
   Matematička indukcija
   Matematička indukcija
4. Izvor.
5. Matematička indukcija
6. *Baza indukcije.* Za $n = 1$ riječ je o trokutu čiji je zbroj kutova $180°$.
   Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$: zbroj kutova u mnogokutu s $n+2$ stranice iznosi $180°$.
   Korak indukcije. Promotrimo mnogokut s jednom stranicom više, dakle, s $n + 3$ stranice. Odsijecanjem bilo kojeg trokuta dobivamo jedan trokut (čiji je zbroj kuteva $180°$) i jedan mnogokut s n+2 stranice, čiji je zbroj kuteva po pretpostavci indukcije $n \cdot 180°$. Zato je zbroj kuteva u mnogokutu s $n + 3$ stranice jednak $(n + 1) \cdot 180°$, što je trebalo dokazati.
7. Školsko 2018., 4.razred
8. Zadatak 10.
9. Županijsko 2018., 4. razred
10. Zadatak 9
11. Školsko 2019., 4. razred
12. Knjiga, str. 222
13. Zadatak 4.
14. Zadatak 12.
15. Državno 2002., 3. razred

23.3. C25: Logika i dokazi - Matko Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. "Pravokutni trokuti nisu jednakostranični ili dva nije prost broj", "Ili pijem, ili pušim, ili psujem", "Nisam preumoran i predavanje nije preteško", "Broj jedan je ili prost ili složen."
2. Npr. $x = 2$ i $y = 3$.
3. Npr. 12 nije djeljiv s 5, a to je prost broj manji od 12.
4. Prvi slučaj: prirodan broj n djeljiv je s 3, tj. $n = 3k$, za neki cijeli k. Tada je $n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 9(3k^3)$, što je djeljivo s 9 (ostatak je 0). Drugi slučaj: n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k + 1$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$, što daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9. Treći slučaj: n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. $n = 3k + 2$ za neki k. Tada je $n^3 = (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$, što daje ostatak 8 pri dijeljenju s 9. Budući da svi prirodni brojevi daju ostatak 0,1 ili 2 pri dijeljenju s 3, pokrili smo sve slučajeve i tvrdnja zadatka je dokazana.
5. Istinita je 3. izjava, dakle, A je siva, B je plava i C je bijela.
6. B.
7. Pretpostavimo li da nije, dobijamo kontradikciju, dakle D je Istinić.
8. 2017, Žup, 7. razred
9. Pretpostavimo suprotno, tj. da ih ima konačno mnogo, i označimo ih s $p_1, p_2, ..., p_n$ (to su svi prosti brojevi koji postoje). Neka je $p = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Znamo da p nije prost broj jer nije jednak nijednom od $p_1, ...p_n$, ali također nije djeljiv niti s jednim prostim projem (pri dijeljenju s bilo kojim prostim brojem daje ostatak 1). Dakle, svaki prosti faktor od p je različit od $p_1, ..., p_n$. Budući da je svaki prirodan broj veći od 1 ili prost ili ima prosti faktor, dobili smo prost broj različit od $p_1, ..., p_k$, što je kontradikcija.
10. Pretpostavimo suprotno: neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku neskrativog razlomka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, što znači da su m i n relativno prosti prirodni brojevi (nemaju zajedničnkih djelitelja). Sada tu jednakosti možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2, odakle je $2n^2 = m^2$. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 2, onda je i taj broj djeljiv s 2, pa znamo da je m djeljiv s 2. Dakle m možemo napisati $m = 2k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo $n^2 = 2k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 2. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s 2, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.
11. Npr. negacija tvrdnje "Ako je trokut jednakostraničan, onda je i jednakokračan" je tvrdnja "Trokut je jednakostraničan i nije jednakokračan."
12. Obrat je "Ako je trokut jednakokračan, onda je jednakostraničan", koji očito nije istinit, a kontraprimjer je npr. trokut s duljinama stranica 5, 5, 6.
13. Ako je u trokutu ABT kut $\angle ATB$ pravi, onda točka T leži na kružnici s promjerom $\overline{AB}$.
14. Npr. $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.
15. $2k(2k + 2) = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, što je djeljivo s 8 jer je jedan od brojeva k i $k + 1$ paran. Obrat ne vrijedi jer npr. $8 = 1 \cdot 8$, što nisu uzastopni parni brojevi.
16. Obrat glasi: "Ako je prirodan broj djeljiv s 3 i 4, onda je djeljiv s 12", što vrijedi jer ako je broj djeljiv s 3, onda u svom rastavu na proste faktore ima faktor 3, a ako je djeljiv s 4, onda u svom rastavu na proste faktore ima dvije dvojke. Dakle, broj istovremeno djeljiv s 3 i 4 u svom rastavu na proste faktore sigurno ima jednu trojku i dvije dvojke, što je u umnošku 12, pa je polazni broj djeljiv s 12. Bilo je bitno da 3 i 4 nemaju zajedničke djelitelje (razmislite zašto).
17. Npr. "Ako su pravci okomiti, onda se sijeku" je istinita tvrdnja, kao i njen obrat po kontrapoziciji "Ako se pravci ne sijeku, onda nisu okomiti."
18. Negacija je "n je prirodan i nije cijeli" što ne vrijedi jer su prirodni brojevi podskup cijelih, obrat je "Ako je n cijeli, onda je i prirodan" što ne vrijedi zbog kontraprimjera npr. $n = -2$, a obrat po kontrapoziciji je "Ako n nije cijeli, nije prirodan" što vrijedi jer i polazna tvrdnja vrijedi, a znamo da polazna tvrdnja i njen obrat po kontrapoziciji imaju istu istinitosnu vrijednost.

19. Obrat po kontrapoziciji glasi: "Ako broj nije višekratnik od 5, onda ni njegov kvadrat nije višekratnik od 5", što koristeći činjenicu da je 5 prost broj možemo lako direktno dokazati. Razmislite zašto slična tvrdnja ne vrijedi npr. za broj 4.

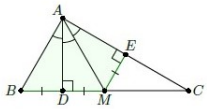
20. Dokazujemo "Ako je x paran, onda je x^2-6x+5 neparan", što vrijedi jer ako je x paran, tada je x^2-6x+5 neparan, jer su x^2 i $6x$ parni, a 5 nije.

23.4. G21: Sukladnost i sličnost - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Sukladnost i sličnost - Primjer 1.
2. Sukladnost i sličnost - Primjer 2.
3. Općinsko 2016. OŠ - 8.5.
4. Županijsko 2006. OŠ - 7.4.
5. Županijsko 2015. OŠ - 7.5.
6. Županijsko natjecanje 2014. OŠ 8.5.
7. Rješenje:

G3.



Neka je D nožište visine iz A, M polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz M na $\overline{AC}$. Iz uvjeta zadatka znamo da su kutevi $\angle BAD$, $\angle DAM$ i $\angle MAE$ jednaki što nam daje

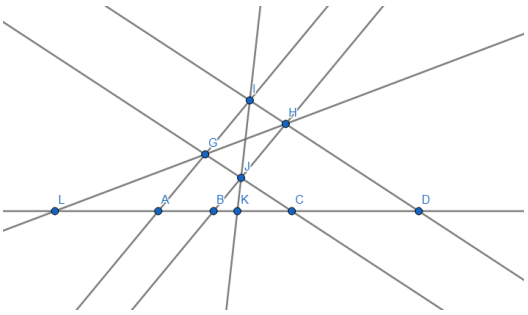
$$\triangle ABD \cong \triangle ADM \cong \triangle MAE.$$

Sada znamo da je $MC = BM = 2ME$ iz čega promatranjem trokuta $\triangle MEC$ jednostavno slijedi da su kutevi trokuta $30°, 60°$ i $90°$.

8. a) Sukladnost i sličnost - Zadatak 5.

   b) Sukladnost i sličnost - Zadatak 8.
9. Neka je Q točka na pravcu AP takva da je $|AQ| = 2|AP|$, P između A i Q. Po SKS poučku o sukladnosti trokuta vidimo da su trokuti ABQ i KAN sukladni (jednake stranice zbog paralelograma i kvadrata, jednaki kut dobijemo jer je puni kut u A jednak $360°$). Slijedi $|KN| = |AQ| = 2|AP|$.
10. Županijsko 2018. Zadatak A - 2.4.
11. Neka su L i K sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p te G, H, I i J vrhovi paralelograma, kao na skici.
    $\sphericalangle AIK = \sphericalangle BJK$ i $\sphericalangle KAI = \sphericalangle KBJ \Longrightarrow \triangle BKJ \sim \triangle AKI \Longrightarrow \frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
    $\sphericalangle KID = \sphericalangle KJC$ i $\sphericalangle IDK = \sphericalangle JCK \Longrightarrow \triangle KCJ \sim \triangle KDI \Longrightarrow \frac{|KC|}{|KD|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
    $\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KC|}{|KD|} \Longleftrightarrow \frac{|BK|}{|AB|+|BK|} = \frac{|KC|}{|KC|+|CD|} \Longleftrightarrow |BK|(|KC| + |CD|) = |KC|(|AB| + |BK|) \Longleftrightarrow \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|BK|}$
    Što znači da je K točka koja dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $|AB| : |CD|$, neovisno o izboru usporednica.

    $\sphericalangle GCL = \sphericalangle HDL$ i $\sphericalangle CLG = \sphericalangle DLH \Longrightarrow \triangle LCG \sim \triangle LDH \Longrightarrow \frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
    $\sphericalangle LGA = \sphericalangle LHB$ i $\sphericalangle ALG = \sphericalangle BLH \Longrightarrow \triangle LAG \sim \triangle LBH \Longrightarrow \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
    $\frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \Longleftrightarrow \frac{|LA|+|AC|}{|LB|+|BD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \Longleftrightarrow |LA|(|LB| + |BD|) = |LB|(|LA| + |AC|) \Longleftrightarrow \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$
    Što znači da položaj točke L ne ovisi o izboru usporednica.



12. Neka je $|BF| = x$, $|DE| = y$ i $|AE| = z$. BSO možemo pretpostaviti $|AB| = 1$.
    Dobivamo $|CE| = 1 - y$ i $|FC| = 1 - x$.
    Neka je $G = AF \cap CD$.

Iz paralelnosti stranica kvadrata dobivamo $\angle GAE = \angle BAF = \angle CGF = \angle EGA$, odnosno trokut $\triangle EAG$ je jednakokračan.
Sada

$$|CG| = |EG| - |EC| = |AE| - |CE| = z - (1 - y) = z + y - 1$$

$\angle BAF = \angle CGF$ povlači da su trokuti $\triangle FBA$ i $\triangle FCG$ slični.
Tako su omjeri odgovarajućih stranica jednaki, pa dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{z+y-1}{1-x} &= \frac{1}{x} \\ zx + yx - x &= 1 - x \\ x(y+z) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $\triangle ADE$ slijedi

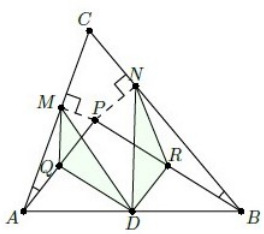
$$1 = z^2 - y^2 \tag{2}$$

Konačno, iz (1) i (2)

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 1 \\ x(y+z) &= z^2 - y^2 \\ x(y+z) &= (z-y)(z+y) \\ x &= z - y \\ x + y &= z \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

13. Rješenje:



Neka je Q polovište dužine $\overline{AP}$ te R polovište dužine $\overline{PB}$. Vrijedi $\angle PQM = 2\angle PAM = 2\angle PAC = 2\angle CBP = 2\angle NBP = \angle NRP$, jer je Q središte kružnice opisane trokutu PAM i R središte opisane od NBP. Četverokut $PQDR$ je paralelogram, jer su $\overline{RD}$ i $\overline{QD}$ srednjice trokuta ABP. Zato je $\angle DQP = \angle PRD$, a zbog toga također $\angle DQM = \angle NRD$. Nadalje je $|QM| = |QP| = |DR|$ i $|RN| = |RP| = |DQ|$ pa su trokuti MQD i DRN sukladni te je $|DM| = |DN|$.

14. MEMO 2010. T5

23.5. N21: Diofantske jednadžbe - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom faktorizacije.

$$\begin{aligned} x^2 + 11^2 &= y^2 \\ y^2 - x^2 &= 11^2 \\ (y-x)(y+x) &= 11^2 \end{aligned}$$

Sada promatramo sljedeće slučajeve.

(a) $\begin{array}{l} y - x = 11 \\ \underline{y + x = 11} \\ \text{y=11, x=0} \end{array}$

(b) $\begin{array}{l} y - x = 1 \\ \underline{y + x = 11^2} \\ \text{y=61, x=60} \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} y - x = 11^2 \\ \underline{y + x = 1} \\ \text{y=61, x=-60} \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} y - x = -11 \\ \underline{y + x = -11} \\ \text{y=-11, x=0} \end{array}$

(e) $\begin{array}{l} y - x = -1 \\ \underline{y + x = -11^2} \\ \text{y=-61, x=-60} \end{array}$

(f) $\begin{array}{l} y - x = -11^2 \\ \underline{y + x = -1} \\ \text{y=-61, x=60} \end{array}$

Slijedi da su nam sva rješenja slijedeći uređeni parovi: $(x, y) \in \{(0, 11), (0, -11), (60, 61), (-60, 61), (60, -61), (-60, -61)\}$

2. Srednji član na lijevoj strani jednadžbe možemo rastaviti kako bismo omogućili faktorizaciju:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2xy - 2y^2 &= 18 \\ x(x+y) - 2y(x+y) &= 18 \\ (x-2y)(x+y) &= 18 \end{aligned}$$

Uspjeli smo zapisati lijevu stranu kao umnožak 2 cjelobrojna izraza i taj umnožak iznosi 18. Sada bi trebalo provjeriti sve moguće slučajeve, a za to prvo trebamo pronaći sve djelitelje broja 18. To su:

$$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9 \text{ i } 18$$

Međutim, dobili smo 12 slučajeva i bilo bi lijepo kada bismo uspjeli skratiti posao i eliminirati neke slučajeve bez da ih provjeravamo uvrštavanjem i izračunavanjem.
Možemo primijetiti sljedeće:

$$(x+y) - (x-2y) = 3y$$

Dakle, razlika ovih dvaju izraza je uvijek djeljiva s 3. To znači da svi slučajevi u kojima su $x + y$ i $x - 2y$ djelitelji od 18 čiji je umnožak 18, a razlika nije djeljiva s 3, ne vode do rješenja u cijelim brojevima. Drugim riječima, odbacujemo slučajeve u kojima je $x + y$ neki od sljedećih djelitelja broja 18:

$$-18, -9, -2, -1, 1, 2, 9, 18$$

Uvjerite se da zaista u tim slučajevima dobivamo kontradikciju!
Provjerimo sada preostale slučajeve:

(a) $\underline{x + y = -6}$
U tom je slučaju $x - 2y = -3$ pa je $3y = (x+y) - (x-2y) = -6 - (-3) = -3$.
Slijedi $y = -1$, a zatim i $x = -5$. $\Longrightarrow \boxed{(-5, -1)}$

(b) $\underline{x + y = -3}$
U tom je slučaju $x - 2y = -6$ pa je $3y = (x+y) - (x-2y) = -3 - (-6) = 3$.
Slijedi $y = 1$, a zatim i $x = -4$. $\Longrightarrow \boxed{(-4, 1)}$

(c) $\underline{x + y = 3}$
U tom je slučaju $x - 2y = 6$ pa je $3y = (x+y) - (x-2y) = 3 - 6 = -3$.
Slijedi $y = -1$, a zatim i $x = 4$. $\Longrightarrow \boxed{(4, -1)}$

(d) $\underline{x + y = 6}$
U tom je slučaju $x - 2y = 3$ pa je $3y = (x+y) - (x-2y) = 6 - 3 = 3$.
Slijedi $y = 1$, a zatim i $x = 5$. $\Longrightarrow \boxed{(5, 1)}$

3. Započnimo rješenje opservacijom $x, y \neq 0$, s obzirom da se nalaze u nazivnicima.
Nadalje, pomnožimo jednakost s xy kako bismo dobili ljepši oblik

$$\begin{aligned} y + 4x + 7 &= xy \\ xy - y &= 4x + 7 \\ y(x-1) &= 4x + 7 \\ y &= \frac{4x+7}{x-1} \\ y &= \frac{4(x-1)+4+7}{x-1} \\ y &= 4 + \frac{11}{x-1} \end{aligned}$$

Ovim zaključivanjem, uspjeli smo poprilično ograničiti mogućnost izbora za y. Naime, kako y mora biti cijeli broj, onda i $\frac{11}{x-1}$ mora biti cijeli broj, tj. $x-1$ mora biti djelitelj od 11. Razmotrimo te slučajeve:

(a) $x - 1 = -11$
$\underline{x = -10}$
y=3

(b) $x - 1 = -1$
$\underline{x = 0}$
Nema rješenja

(c) $x - 1 = 1$
$\underline{x = 2}$
y=15

(d) $x - 1 = 11$
$\underline{x = 12}$
y=5

4. Pogledom na ovaj zadatak i brojeve u njemu, relativno brzo se da naslutiti kako faktorizacija vjerojatno nije pravi put k rješenju. Naizgled kompliciran zadatak rješava se prilično jednostavno promatranjem ispravne stvari, u ovom slučaju ostataka koje izraz na lijevoj strani može davati pri dijeljenju s 5.
Naime, s obzirom da je $10y$ djeljivo s 5, ostatak pri dijeljenju s 5 na lijevoj strani zapravo je samo ostatak kojeg kvadrat cijelog broja x daje pri dijeljenju s 5. Promotrimo sljedeću tablicu ostataka pri dijeljenju s 5:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

Dakle, izraz na lijevoj strani može davati ostatke 0, 1 i 4 pri dijeljenju s 5. No, istovremeno broj na drugoj strani jednakosti daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5 iz čega jasno zaključujemo kako jednadžba **nema rješenja** u cijelim brojevima.

Napomena:
Promatranje djeljivosti izraza nekim brojevima često se jednostavnije zapisuje konguencijama. Ta je tema obrađena u 3. online predavanju.

5. Primijetimo da zbog $n \in \mathbb{N}$ tj. $n > 0$ vrijedi

$$n^2 + n + 1 > n^2 + 0 + 1 > n^2$$

S druge strane, sličnim zaključivanjem imamo i

$$n^2 + n + 1 < (n^2 + n + 1) + n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Međutim, n i $n+1$ su 2 uzastopna prirodna broja. S obzirom da je $n^2 + n + 1$ strogo između njihovih kvadrata, taj broj nikako ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

6. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom faktorizacije

$$\begin{aligned} &(m^2 + n)(m + n^2) = (m+n)^3 \\ &m^3 + m^2n^2 + nm + n^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \\ &m^2n^2 + nm = 3m^2n + 3mn^2 \\ &mn(mn + 1 - 3m - 3n) = 0 \end{aligned}$$

Sada razlikujemo 3 slučaja:

1. $m = 0$, pa su rješenja svi uređeni parovi $(0, n), n \in \mathbb{Z}$

2. $n = 0$, pa su rješenja svi uređeni parovi $(m, 0), m \in \mathbb{Z}$

3. $mn + 1 - 3m - 3n = 0$
   $m(n-3) - 3(n-3) = 8$
   $(m-3)(n-3) = 8$
   Kako je jednadžba simetrična, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $m \geqslant n$, pa imamo slučajeve:

$$m - 3 = 8, n - 3 = 1$$

$$m - 3 = 4, n - 3 = 2$$

$$m - 3 = -1, n - 3 = -8$$

$$m - 3 = -2, n - 3 = -4$$

   Rješenja su sljedeća: $(x, y) \in \{(11, 4), (4, 11), (7, 5), (5, 7), (2, -5), (-5, 2), (1, -1), (-1, 1)\}$

7. Ovdje je potrebno uočiti da ne mogu sva tri broja a, b. c biti proizvoljno veliki. Dapače, $a > 3$, $b > 3$, $c > 3$ povlači $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Zato je barem jedan od tih brojeva manji od 3. BSO možemo pretpostaviti $a \leqslant b \leqslant c$. Sada razlikujemo 3 slučaja:

   (a) $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Kontradikcija!

   (b) $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Sada opet ograničavamo! Uočimo da barem jedan od brojeva b i c mora biti manji od 4. BSO $b \leqslant 4$. Slučaj $b = 2$ vodi na kontradikciju, a preostala dva daju rješenja $(2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$.

   (c) $a = 3 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. BSO $b \leqslant 3$, pa je $b = 3$ i imamo rješenje $(3, 3, 3)$.

   Dakle rješenja su trojke $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ i $(2, 4, 4)$, te njihove permutacije!

8. Ovaj zadatak riješit ćemo metodom ostataka. Prvo možemo primjetiti da $19x^3$ treba biti paran broj, pa možemo pisati $x = 2x_1$. U sljedećim koracima ćemo primjeniti slične opservacije.

$$\begin{aligned}
19(2x_1)^3 - 84y^2 &= 1984 \quad \backslash : 4 \\
38x_1^3 - 21y^2 &= 496 \\
38x_1^3 - 21(2y_1)^2 &= 496 \quad \backslash : 2 \\
19x_1^3 - 42y_1^2 &= 248 \\
19(2x_2)^3 - 42y_1^2 &= 248 \quad \backslash : 2 \\
76x_2^3 - 21y_1^2 &= 248 \\
76x_2^3 - 21(2y_2)^2 &= 124 \quad \backslash : 4 \\
19x_2^3 - 21y_2^2 &= 31
\end{aligned}$$

   Nakon što smo uvelike smanjili koeficijente u jednadžbi, lakše je uočiti sljedeće korake. Promotrimo ostatke pri dijeljenju sa 7 koje može davati izraz na lijevoj strani posljednje jednakosti. Pritom primijetimo da je 21 djeljivo sa 7 pa je dovoljno pogledati koje ostatke pri dijeljenju sa 7 može davati izraz $19x^3$. U tablicu pišemo ostatke pri dijeljenju sa 7 (uvjerite se ako niste sigurni):

x_2	0	1	2	3	4	5	6
x_2^3	0	1	1	6	1	6	6
$19x_2^3$	0	5	5	2	5	2	2

   Dakle, $19x_2^3 - 21y_2^2$ može davati ostatke 0,2 i 5 pri dijeljenju sa 7. No, na desnoj strani je broj 31 čiji ostatak pri dijeljenju sa 7 iznosi 3. Zaključujemo da jednadžba nema rješenja u cijelim brojevima x_2 i y_2. Dakle, niti početna jednadžba **nema rješenja**.

   Napomena:
   Kod jednadžbi u cijelim brojevima u kojima se pojavljuju kubovi, ima smisla promatrati djeljivost sa 7 (ili sa 9). To je posljedica tzv. Eulerovog teorema ili pak Malog Fermatovog teorema. Detaljnije o toj temi možete naći u 16. online predavanju.

9. županijsko 1999., 2.raz: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1999/1999-SS-zup-1234-zad+rj/1999-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf

10. Početna jednadžba je ekvivalentna s
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$$
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leqslant y \leqslant z$, a iz toga dobijemo $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$. Dalje slijedi $\frac{3}{x} \geqslant \frac{4}{3}$, tj. $x \leqslant \frac{9}{4}$, pa je $x \in \{1,2\}$. Analizirajući ta 2 slučaja dobimo rješenja $(1,4,12)$, $(1,6,6)$, $(2,2,3)$ i sve njihove permutacije.

fffffff

11. Primijetimo da vrijedi sljedeća nejednakost
$$\begin{aligned} y^3 = x^3+8x^2-6x+8 &< (x^3+8x^2-6x+8)+(x^2+33x+19) \\ &= x^3+9x^2+27x+27 \\ &= (x+3)^3 \end{aligned}$$
jer je $x^2+33x+19>0$, s obzirom da je $x \in \mathbb{N}$.
Nadalje, vrijedi i sljedeća nejednakost
$$\begin{aligned} y^3 = x^3+8x^2-6x+8 &> (x^3+8x^2-6x+8)-(5x^2-9x+7) \\ &= x^3+3x^2+3x+1 \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$
To vrijedi jer je $5x^2>5x$ te $4x<7$ što za posljedicu ima $5x^2-9x+7>0$.
S obzirom da je y^3 kub prirodnog broja, a strogo je veći od kuba broja $x+1$ te strogo manji od kuba broja $x+3$, jedina je mogućnost da je jednak kubu broja $x+2$. Dobivamo jednakost
$$\begin{aligned} y^3 &= (x+2)^3 \\ x^3+8x^2-6x+8 &= x^3+6x^2+12x+8 \\ 2x^2-18x &= 0 \\ x(x-9) &= 0 \end{aligned}$$
Sada je jasno da je jedino rješenje u prirodnim brojevima **x=9**, a odatle je **y=11**.

12. Za rješavanje ovog zadatka koristit ćemo metodu zbroja kvadrata. Prvo ćemo faktorizirati lijevu stranu pa promatrati slučajeve.
$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^2 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) &= (x+y)^2 \end{aligned}$$
    1. x+y=0
       Rješenje su svi uređeni parovi $(x,-x)$ gdje je $x \in \mathbb{Z}$
    2. $$(x^2-xy+y^2)=(x+y)$$
       Pomnožit ćemo jednadžbu s 2 i napisati u sljedećem obliku
       $$\begin{aligned} x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 2 \\ (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 &= 2 \end{aligned}$$
       Sada slijedi $|x-y| \leqslant 1$, $|x-1| \leqslant 1$ i $|y-1| \leqslant 1$. Nadalje promatrajući sve slučajeve dolazimo do svih preostalih rješenja, $(x,y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$.

13. Introduction to diophantine equations, the factoring method, example 8

24. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

24.1. A22: Nejednakosti - Paula Horvat

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Zadanu nejednakost množimo s 2 i dobivamo:

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

Oduzimanjem $2ab + 2bc + 2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

2. Iz $H - A$ nejednakosti i uvjeta da je $a + b = 1$ dobiva se:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$$
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 4.$$

3. Nejednakosti
4. Školjka
5. Kvadriranjem jednakosti $x + y = 1$, dobijemo

$$x^2 + y^2 = 1 - 2xy.$$

Na osnovu $A - K$ nejednakosti vrijedi:

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, tj.$$
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{1}{2} \ (zbog\ x + y = 1);$$

a odavde nakon kvadriranja:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \frac{1}{4}$$
$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Sada iz $x^2+y^2=1-2xy$. dobijemo:

$$\begin{aligned} 1-2xy &\geqslant \frac{1}{2} \\ xy &\leqslant \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.

6. Županijsko 2019., 2. razred
7. Problem solving
8. Str. 27
9. Državno 2018., 4. razred
10. Županijsko 2021., 4. razred
11. Državno 1999., II. razred.
12. Državno 2016., 3. razred.
13.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}}, \\ S &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}. \end{aligned}$$

Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leqslant \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Iz toga imamo:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(a+b+c)^4}{3^3}}$$

$$S \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4\cdot 3\sqrt{3}}.$$

Iz K-A nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \\ (a+b+c)^2 &\leqslant 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 3(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

Iz toga imamo:

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4\cdot 3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} \\ 4S\sqrt{3} &\leqslant a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} x=\frac{1}{a},\quad y=\frac{1}{b},\quad z=\frac{1}{c}\quad &\to xyz=\frac{1}{abc}=1. \\ b+c &= \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{y+z}{yz}, \\ c+a &= \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{x+z}{xz}, \\ a+b &= \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{yx}. \end{aligned}$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu:

$$\frac{x^3yz}{y+z}+\frac{y^3xz}{x+z}+\frac{z^3yx}{y+x}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}.$$

Primijenimo CSB nejednakost:

$$\left((\sqrt{y+z})^2+(\sqrt{x+y})^2+(\sqrt{z+x})^2\right)\left(\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{y+x}}\right)^2\right)\geqslant(x+y+z)^2,$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{2x+2y+2z}=\frac{x+y+z}{2}.$$

Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz},$$
$$x+y+z\geqslant 3.$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geqslant\frac{x+y+z}{2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

15. Uvedimo supstituciju:

$$a=\frac{x}{x-1}\quad\to\quad x=\frac{a}{a-1},$$
$$b=\frac{y}{y-1}\quad\to\quad y=\frac{b}{b-1},$$
$$c=\frac{z}{z-1}\quad\to\quad z=\frac{c}{c-1}.$$

Sada treba dokazati

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 1$$

uz uvjet:

$$\frac{a}{a-1}\cdot\frac{b}{b-1}\cdot\frac{c}{c-1}=1$$

Gornji uvjet je ekvivalentan s

$$\begin{aligned}abc&=(a-1)(b-1)(c-1),\\ ab+bc+ca&=a+b+c-1,\\ 2(ab+bc+ca)&=2(a+b+c-1),\\ (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)&=2(a+b+c-1),\\ (a+b+c)^2-2(a+b+c)&=a^2+b^2+c^2-2,\\ (a+b+c)^2-2(a+b+c)+1&=a^2+b^2+c^2-1,\\ (a+b+c-1)^2&=a^2+b^2+c^2-1,\end{aligned}$$

pa vrijedi

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 1.$$

24.2. C22: Indukcija - Laura Horvat

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Suma prvih n prirodnih brojeva
2. Problem 2.a)
3. Problem 3.c)
4. EM1, popravni kolokvij 2020./21.
5. Problem 17.
6. Trigonometrijska nejednakost
7. Školsko natjecanje 2020. A-4.2.
8. Problem 20.
9. Problem 33.
10. Problem 35.
11. EM1, prvi kolokvij 2017./18.
12. Problem 31.
13. Problem 38.
14. Problem 9.
15. Problem 24.

24.3. C26: Invarijante - David Mikulćić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ako igra završi neriješeno ukupni broj bodova se poveća zs $1+1=2$, a u suprotnom za $3+(-1)=2$: invarijanta je onda ukupan broj bodova svakog meča. Ako svaki igrač igra sa svakim, to je $\frac{11\cdot(11-1)}{2}$ mečeva te ako svaki meč dodaje po 2 boda u zbroj, dobivamo da je ukupni broj bodova svih igrača jednak $11\cdot 10=110$.
2. Županijsko A 2014. - SŠ1, 5. zad.
3. Primjetimo da je $2x-y\equiv -y\equiv y \pmod 2$ i $2y-x\equiv -x\equiv x \pmod 2$, to jest broj parnih (ili neparnih) brojeva na ploči je invarijanta. Kako su na početku dva parna broja na ploči, a završna konfiguracija nema nijedan paran broj, zaključujemo da Anja ne može postići da na ploči pišu brojevi $7, 9, 11, 13, 15$.
4. Svakim potezom se suma brojeva povećava za 3, dakle ostatak sume pri dijeljenju s 3 se ne mijenja. Početna suma daje ostatak 1, a završna 0 (jer je $2022x$ djeljivo s 3) pa Jana ne može postići da svi brojevi budu jednaki.
5. Ni opseg ni površina se nakon rezanja i lijepljenja ne mijenjaju. Ako je opseg konstantan, dobivamo da bi stranica kvadrata trebala biti $\frac{3}{4}$ stranice jednakostraničnog trokuta, ali onda se površina trokuta i površina kvadrata ne podudaraju, dakle nije moguće dobiti kvadrat.
6. Uočimo da je $(0.8x-0.6y)^2+(0.6x+0.8y)^2=(0.8x+0.6y)^2+(0.6x-0.8y)^2=x^2+y^2$, tj. točke do kojih žaba može doći sve imaju jednaku udaljenost od ishodišta. Kako je udaljenost točke $(2,3)$ od ishodišta veća od udaljenosti točke $(1,1)$, zaključujemo da žaba ne može doći do polja $(1,1)$.
7. Pokažimo da Boris uvijek pobjeđuje u ovoj igri. Pri svakom potezu, broj komada čokolade na stolu se poveća za 1 ili smanji za 1, a nakon dva poteza se poveća za 2, smanji za 2 ili ostaje isti kao prije ta dva poteza. To znači da svakog igrača na potezu dočeka broj komada iste parnosti kao i broj komada pri posljednjem potezu tog igrača. Kako Anja prva kreće sa jednim komadom čokolade, svaki put kad je ona na redu će imati neparan broj komada čokolade. Igra je konačna (komadići 1×1 se moraju pojesti) pa će ju u nekom trenutku dočekati samo jedan 1×1 komadić čokolade, kojeg će morati pojesti i time Boris pobjeđuje.
8. Državno A 2012. - SŠ3, 5. zad.
9. Znamo da je ostatak broja pri dijeljenju s 9 jednak ostatku koji daje njegov zbroj znamenaka, dakle pri svakom koraku se ne mijenja ostatak svakog broja pri dijeljenju s 9. Kako je $20212021\equiv 1 \pmod 9$, bit će više jedinica na kraju.
10. a) Boris može doći do tražene konfiguracije na slijedeći način:

$$5,1,1,1,1\Rightarrow 5,2,2,1,1\Rightarrow 5,4,4,1,1\Rightarrow 5,5,4,5,1\Rightarrow 5,5,5,5,5.$$

    b) Pri svakom potezu se broj maksimalnih vrijednosti na ploči poveća za 2 ili postane 2 pa ako je na početku paran broj maksimalnih vrijednosti, to je invarijanta. Kako se maksimalna vrijednost u početnoj konfiguraciji pojavljuje dva puta, a na kraju ih treba biti 2021, zaključujemo da Boris ne može postići ovu konfiguraciju.
11. Transformacije koje Matej radi podsjećaju na Euklidov algoritam, odnosno invarijanta je $\gcd(x,y)$. Vedran samo mora odabrati brojeve tako da $\gcd(z,w)\neq\gcd(x,y)$.
12. Numerirajmo vrhove brojevima od 1 do 12 (koje ćemo nadalje zvati *oznake* da izbjegnemo zabunu), pri čemu uzmimo da na početku -1 piše u vrhu označenom s 1, i da želimo da na kraju -1 piše u vrhu označenom s 2. Promotrimo broj S koji definiramo kao zbroj oznaka vrhova u kojima piše -1; na početku je on 1, a želimo da na kraju bude 2. Primijetimo da se promjenom predznaka zbroj oznaka vrhova koji sadrže broj -1 promijeni za paran broj. Naime, uzmimo da smo u jednom koraku odabrali vrhove s oznakama $x, x+1, x+2, x+3$ (možemo gledati oznake modulo 12, tj. samo ostatke oznaka pri dijeljenju s 12). Ako su ta 4 vrha broju S pridonosila s T, poslije koraka pridonosit će s $4x+6-T$. To znači da će se S promijeniti za $T-(4x+6-T)=2T-4x-6$, a to je paran broj. Dakle, kako je S na početku bio neparan, on će uvijek ostati neparan broj, pa Luka ne može postići ono što cilja. (Alternativno, mogle su oznake vrhova naizmjence biti 0 i 1; došli bismo do istog zaključka na analogan način.)
13. Državno A 2019. - SŠ2, 5. zad.
14. MEMO 2016. - I2

15. Rješenje pod #2.

24.4. G22: Tetivni četverokuti - Matko Šimić

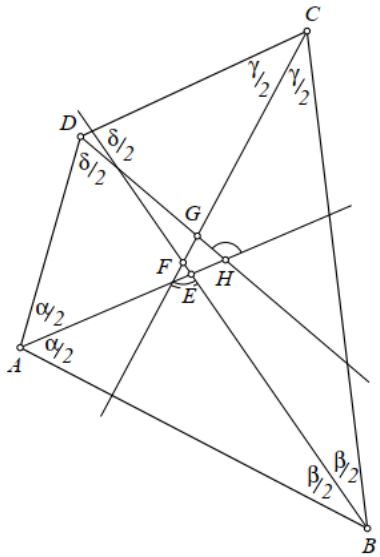
Link na zadatke. Link na hintove.

1. Promatramo kružnicu k i njenu tetivu $\overline{AB}$ te tangentu t na kružnicu k u točki B. Neka je S središte kružnice k i C neka točka na kružnici različita od A i B. Vidimo da točka C određuje obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$.Označimo $|\angle ACB| = \gamma$. Po teoremu o obodnom i središnjem kutu dobivamo da je $|\angle ASB| = 2\gamma$.

   Budući da je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan, vrijedi $|\angle ABS| = 90° - \gamma$, a jer je kut između polumjera $\overline{SB}$ i tangente pravi dobivamo da je kut između tangente i tetive jednak γ.

2. 2016., opć 2A, 4.

3. Neka je $ABCD$ bilo koji četverokut čije simetrale kutova tvore četverokut $EFGH$ te neka su redom $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unutarnji kutevi četverokuta $ABCD$. Iskoristimo činjenicu da je zbroj kuteva u trokutu jednak 180°.



   U $\triangle ABE$ dobivamo $\angle BEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, a iz $\triangle CDG$ imamo $\angle DGC = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$. Zbog vršnih kuteva imamo i $\angle HEF = \angle BEA$ te $\angle FGH = \angle DGC$.
   Kutevi $\angle HEF$ i $\angle FGH$ su nasuprotni kutevi u četverokutu $EFGH$ i za njih vrijedi

$$\begin{aligned}\angle HEF + \angle FGH &= 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\\ &= 360° - \frac{360°}{2} = 180°\end{aligned}$$

   pa po prvoj karakterizaciji tetivnih četverokuta zaključujemo da je četverokut $EFGH$ tetivan.

4. Ovdje je glavni dio zadatka uočiti za koje tetive ćemo primijeniti jednakost obodnih kutova nad istom tetivom. Da bismo to uopće mogli primijeniti, trebat će nam 4 točke na kružnici, pa svakako nije na odmet docrtati tetive koje fale: to su tetive $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$. *To je i općenito dobra strategija pri rješavanju ovakvih zadataka.* Upravo za te dvije tetive iskoristit ćemo navedenu činjenicu. Označimo $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$. Gledajući obodne kutove nad tetivom $\overline{AD}$ dobivamo $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$, a nad tetivom $\overline{BD}$ dobivamo $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. Sada vidimo da je $\angle BAD = \angle ABD$, pa je $\triangle ABD$ jednakokračan. Time smo zapravo riješili zadatak budući da znamo da je okomica iz sjecišta krakova jednakokračnog trokuta na osnovicu tog trokuta zapravo simetrala osnovice (tu činjenicu u ovom zadatku lako dobijemo npr. iz S-S-K poučka o sukladnosti primijenjenom na trokute $\triangle AED$ i $\triangle BED$). (*Luka Banović, MiŠ)*

5. 2016., žup 3A, 3.

6. Neka je H ortocentar trokuta ABC i T njegova osnosimetrična slika u odnosu na AB. Dovoljno je pokazati da je četverokut $ATBC$ tetivan. Označimo sa M, N i P redom nožišta visina na BC, AB i AC.

Neka je $|\angle ACB| = \gamma$. Budući da je $|\angle CPH| = |\angle CMH| = 90°$, četverokut $CPHM$ je tetivan. U tetivnom četverokutu zboj nasuprotnih kuteva je $180°$, pa je $|\angle PHM| = 180° - \gamma$, a zbog toga je i $|\angle AHB| = 180° - \gamma$ (vršni kutevi).
Točka T je osnosimetrična slika od H u odnosu na AB pa vrijedi $\triangle ABH \cong \triangle ABT$. Zbog toga imamo

$$|\angle ATB| = |\angle AHB| = 180° - \gamma.$$

Sada smo dobili da je zbroj nasuprotnih kuteva u četverokutu $ATBC$ jednak $180°$ ($|\angle ACB| + |\angle AHB| = 180°$) pa je četverokut $ATBC$ tetivan.

7. 2012., opć 2A, 8.
8. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB = 90°$, pa zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Tvrdnju zadatka pokazat ćemo ako pokažemo jednakost kuteva uz pravac koji bi bio transverzala. Pokažimo da je kut između tangente u A i AB jednak kutu $\angle AED$.
   Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB jednak $\angle ACB$, što je obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$. Usto, jer je $BCDE$ tetivan zaključujemo da je $\angle DCB = 180° - \angle BED = \angle AED$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.
9. 2018., žup 4A, 3.
10. 2010, drž 2A, 4.
11. MEMO 2015., I3
12. JBMO 2015., 3.
13. EMC 2020., J1

24.5. N22: Sustavi ostataka - Vedran Cifrek

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ako je $x \geqslant 2$. Promatramo jednadžbu modulo 4: $2^x - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$
   $y^2 \equiv 3 (\text{mod } 4)$, što nije moguće pa u ovom slučaju jednažba nema rješenja.
   $x = 1 \implies 2^1 - 1 = y^2 \implies y = 1$. (1,1) je rješenje zadatka.

y	0	1	2	3
$y^2(\cdot 4)$	0	1	0	1

2. $7^{69} = 7^{68} \cdot 7 = (7^4)^{17} \cdot 7 \equiv 1^{17} \cdot 7 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 5$

x	1	2	3	4
$7^x(\cdot 5)$	2	4	3	1

3. $2^x - 1 = y^2 \iff 2^x = y^2 - 1 \iff 2^x = (y+1)(y-1) \implies (y+1)$ i $(y-1)$ su potencije broja 2, pa manja dijeli veću: $(y-1)|(y+1) \implies (y-1)|2 \implies y - 1 = 1$ ili $2 \implies y = 2$ ili 3
   Ako je $y = 2$, $2^x = 3 \implies$ nema rješenja
   Ako je $y = 3$, $2^x = 8 \implies x = 3$. (3,2) je rješenje zadatka.

4. Ako je $y \geqslant 3$, onda $8|2^y \implies 2^y \equiv 0 \pmod 8$
   Promatamo jednadžbu modulo 8: $3^x \equiv 5 \pmod 8$
   $3^1 \equiv 3 \pmod 8$, $3^2 \equiv 1 \pmod 8$.
   3^x poprima samo ostatke 3 i 0 modulo 8, pa ne može biti kongruetno 5 modulo 8, tj. jednadžba nema rješenja u ovom slučaju.
   $y = 1 \implies 3^x = 7$ nema rješenja $y = 2 \implies 3^x = 9 \implies x = 2$ rješenje je (2,2)

5. $3^{105} = (3^3)^{35} \equiv 1^{35} \equiv 1 \pmod{13}$
   MFT - $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \iff 4^6 \equiv 1 \pmod{13}$
   $4^{105} = 4^{102} \cdot 4^3 = (4^6)^{17} \cdot 4^3 \equiv 1^{17} \cdot 4^3 \equiv 4^3 = 64 \equiv 64 - 52 \equiv 12 \pmod{13}$ $3^{105} + 4^{105} \equiv 1 + 12 \equiv 0 \pmod{13}$

   MFT - $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $4^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
   $3^{105} = (3^{10})^{10} \cdot 3^5 \equiv 1^{10} \cdot 3^5 \equiv 27 \cdot 9 \equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$ $4^{105} = (4^{10})^{10} \dot{4}^5 \equiv 1^{10} \cdot 4^5 \equiv 16 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 5 \cdot 5\dot{4} \equiv 100 \equiv 100 - 99 \equiv 1 \pmod{11}$
   $3^{105} + 4^{105} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{11}$

x	1	2	3
$3^x(\cdot 13)$	3	9	1

6. $2222 \equiv 3 \pmod 7$, $5555 \equiv 4 \pmod 7$
   MFT $3^6 \equiv 1 \pmod 7$, $4^6 \equiv 1 \pmod 7$
   $5555 \equiv 5 \pmod 6$, $2222 \equiv 2 \pmod 6$ $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 27 \cdot 9 + 16 \equiv 6 \cdot 2 + 2 \equiv 12 + 2 \equiv 14 \equiv 0 \pmod 7$

7. MFT $2^{18} \equiv 1 \pmod{19} \implies (2^{18})^k \equiv 1 \pmod{19} \implies 2^{18k} \equiv 1 \pmod{19} \implies 2^{18k} \cdot 16 \equiv 16 \pmod{19} \implies 2^{18k+4} \equiv 16 \pmod{19}$
   MFT $2^6 \equiv 1 (\text{mod } 9) \implies 2^{6n} \equiv 1 \pmod 9 \implies 2^{6n+2} \equiv 4 \pmod 9$
   $2^{6n+2} \equiv 4 \pmod 9 \implies 2^{6n+2} \equiv 4$ ili $13 \pmod{18}$
   Znamo da je 2^{6n+2} paran pa ne može biti $\equiv 13 \pmod{18} \implies 2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{18} \implies 2^{6n+2} = 18k + 4 \implies 2^{2^{6n+2}} \equiv 16 \pmod{19} \implies 2^{2^{6n+2}} + 3 \equiv 0 (\text{mod } 19)$

8. n je relativno prost s 2 pa vrijedi Eulerov teorem $2^{\varphi(n)} - 1$ je djeljiv s n.
   Znači, još treba pokazati da se $2^{\varphi(n)} - 1$ nalazi među zadanim brojevima, tj. da se nalazi između 1 i n - 1 (uključivo). n je relativno prost s 1 pa je $\varphi(n) \geqslant 1$.
   Ako je $n > 1$, onda postoji prosti p koji dijeli n. Neka je p^k najveća potencija broja p s kojom je n djeljiv. Nadalje, x je prirodan broj takav da je $n = p^k \cdot x$. Prema definiciji broja k, x je relativno prost s p, iz čega slijedi da je relativno prost s p^k. Onda vrijedi $\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(x)$. Broj relativno prostih manjih jednakih n ne može biti veći od broja svih brojeva do x, tj. x. $\implies \varphi(x) \leqslant x$. $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} \leqslant p^k - 1 \implies \varphi(p^k) < p^k$
   $\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(x) < p^k x = n \implies \varphi(n) \leqslant n - 1$. Iz toga slijedi da se traženi broj nalazi među zadanim brojevima.

9. Promatramo jednadžbu modulo 4: $z^2 \equiv 0$ ili $1 \pmod 4$, $3^x \equiv 1$, ili $3 \pmod 4$, $5^y \equiv 1 \pmod 4$
Vrijedi 0 ili 2 je kongruentno 0 ili 1 modulo 4, pa mora 0 biti kongruentno 0, tj. $3^x \equiv 1 \pmod 4 \implies$ x paran. Definiramo $x_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $x = 2x_2$.
Početna jednadžba je $3^{2x_2} - 5^y = z^2 \iff 3^{2x_2} - z^2 = 5^y \iff (3^{x_2} + z)(3^{x_2} - z) = 5^y$
$\gcd(3^{x_2} + z, 3^{x_2} - z)$=$\gcd(3^{x_2} + z,\ 2 \cdot 3^{x_2})$
Budući da je $3^{x_2} + z$ potencija broja 5, najveći zajednički djelitelj potencije od 5 i $2 \cdot 3^{x_2}$ je 1, pa su $3^{x_2} + z$ i $3^{x_2} - z$ relativno prosti, a budući da su obojica potencija od 5 manji od njih mora biti jednak 1.
$\implies 3^{x_2} - z = 1,\ 3^{x_2} + z = 5^y$
$z = 3^{x_2} - 1 \implies 2 \cdot 3^{x_2} - 1 = 5^y$
Pretpostavmo da je $x_2 \geqslant 2$ te promatramo jednaždbu modulo 9. Slijedi $5^y \equiv -1 \pmod 9$
Promatramo ostatke pri djeljenju potencija od 5 s 9. Uočavamo da y mora davati ostatak 3 pri dijeljenu

y	1	2	3	4	5	6
$5^x(\cdot 9)$	5	7	8	4	2	1

s 6. $y = 6k + 3, k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0$ Napišemo jednadžbu kao $2 \cdot 3^{x_2} = 5^y + 1$.
$5^y + 1 = 5^{6k+3} + 1 \equiv 5^{6k} \cdot 5^3 + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 126 \equiv 0 \pmod 7$
Budući da je desna strana djeljiva sa 7, a lijeva ne može biti djeljiva sa 7, zaključujemo da jednadžba nema rješenja u ovom slučaju. Znači $x_2 < 2$
$x_2 = 1 \implies 2 \cdot 3 - 1 = 5^y \implies y = 1,\ z = 3^{x_2} - 1 = 2$
Rješenje je (x,y,z)=(2, 1, 2).

BMO shorlist 2009

10. BMO Shorlist 2016

11. Ako je jedan od prostih brojeva djeljiv s 2, onda i drugi mora biti jer je desna strana djeljiva s 2. U tom slučaju su oba jednaka 2 i nema rješenja. Ostatak rješenja na linku BMO shorlist 2013.

12. Ako je n paran on ne može dijeliti potenciju od 2 minus jedan jer to nije paran broj. Znači n mora biti neparan. Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za bilo koji neparan broj n.
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ gdje su $p_1, \cdots, p_k$ različiti prosti brojevi. Onda je $\varphi(n) = n\frac{p_1-1}{p_1} \dots \frac{p_k-1}{p_k}$.
Dokazat ćemo da $n(p_1 - 1) \dots (p_k - 1)$ dijeli n! iz čega slijedi da $\varphi(n)$ dijeli n!
$n(p_1 - 1) \dots (p_k - 1) | n! \iff (p_1 - 1) \dots (p_k - 1) | (n - 1)!$ Budući da su $p_1 - 1, \cdots, p_k - 1$ različiti brojevi svi manji od n, oni se svi pojavljuju u raspisu od $(n - 1)!$ i to svaki samo jednom, pa je $(n - 1)!$ djeljiv s njihovim umnoškom. Iz toga slijedi da $\varphi(n) | n!$. $n! = \varphi(n)x, x \in \mathbb{N}$
Prema Eulerovom teoremu $2^{\varphi(n)} \equiv 1 (\text{mod } n)$
$2^{n!} - 1 \equiv 2^{\varphi(n)x} - 1 \equiv \left(2^{\varphi(n)}\right)^x - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod n$

13. Turski TST 2001

14. IMO Shortlist 2005

15. BMO 2004 We first tackle the cases when either p or q is equal to 2. Case i: $p = 2$. Here, our equation becomes $2^q - q^2 = 2q^2 - 19 \implies 2^q = 3q^2 - 19$. Taking this mod q, we find that $2 \equiv -19 \pmod q \implies q | 21$, so $q = 3, 7$. It is easy to see that both of these work. Case ii: $q = 2$. This yields $p^2 - 2^p = 4p - 19$. Mod p gives $-2 \equiv -19 \pmod p$, or $p = 17$. Clearly this does not hold, as "$17^2 - 2^{17}$ is very negative and the other side is very positive". No solutions here. These two cases yield the solutions $(2, 3)$ and $(2, 7)$. Now to show no solutions for p, q odd. Assume that p, q odd. Then taking mod q gives $p \equiv -19 \pmod q \implies q | (p + 19)$, so let $p + 19 = qk$. This is equivalent to $p = qk - 19$. Taking mod p yields $-q \equiv -19 \pmod p \implies p | (q - 19)$. But $p = qk - 19$, hence $k = 1$, so $p + 19 = q$. But then p, q have opposite parities, contradiction. Our solutions are $(p, q) = \boxed{(2, 3), (2, 7)}$.

16. $p > 3 \implies$ p je neparan, pa je i p+2 neparan, a p+1 je paran. $x = 1^{p+2} + 2^{p+2} + \dots + (p-1)^{p+2} = 1^{p+2} + (p-1)^{p+2} + 2^{p+2} + (p-2)^{p+2} + \dots (\frac{p-1}{2})^{p+2} + (\frac{p+1}{2})^{p+2} = (1 + p - 1)(1 - (p - 1) + (p - 1)^2 \dots - (p - 1)^p + (p - 1)^{p+1}) + (2 + p - 2)(2^{p+1} - 2^p(p - 2) + \dots - 2(p - 2)^p + (p - 2)^{p+1}) + \dots + (\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2})((\frac{p-1}{2})^{p+1} \dots (\frac{p+1}{2})^{p+1}) = p(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p - k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i)$

$$y = \frac{x}{p} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p - k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (-k)^{p+1-i)} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k)^{p+1} \cdot (-1)^{p+1} \equiv$$

$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} k^{p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (p+1)k^{p+1} \pmod{p}$ Svi k-evi su relativno prosti s p, pa možemo primijeniti MFT:

$y \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2 \equiv (\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}+1)(p) \equiv 0 \pmod{p}$

Dokazali smo da je y djeljiv s p, a $x = py$, pa je x djeljiv s p^2.

17. BMO Shorlist 2014
18. APMO 1997

25. Poglavlje

Rješenja za treću grupu

25.1. A23: Funkcijske - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Zadatci su preuzeti iz izvrsne knjige *Functional Equations in Mathematical Olympiads (2017 - 2018): Problems and Solutions (Vol. I)* autora *Amira Hosseina Parvardija* i pdfa *100 Functional Equations* istoga autora. Javno su dostupni Chapter 2 i Chapter 4 iz navedene knjige i nalazi se na prvom linku. Na drugom linku nalazi se navedeni pdf koji sadrži linkove na pripadna rješenja kada se scrolla ispod svih zadataka. Linkovi dijela knjige i cijelog pdfa također se nalaze javno dostupni na službenoj stranici autora pa je čitaču prepušteno da dalje istražuje ako je zainteresiran.

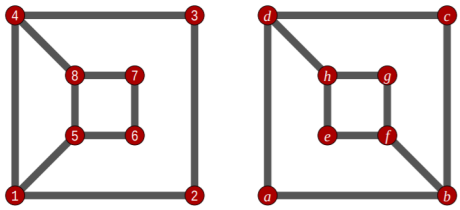
1. Chapter 2: Example 2.
2. Chapter 2: Example 1.
3. Chapter 2: Example 3.
4. Chapter 2: Example 5.
5. Rješenje ove klasične jednadžbe može se pronaći na Wikipediji: link.
6. Chapter 2: Example 7.
7. Chapter 4: Problem 4.
8. 100 Functional Equations: Problem 2.
9. 100 Functional Equations: Problem 3.
10. 100 Functional Equations: Problem 4.
11. 100 Functional Equations: Problem 5.
12. 100 Functional Equations: Problem 8.
13. Problem 1 na linku. Na istome linku u vidu Problema 13 nalazi se rješenje u realnima.
14. 100 Functional Equation: Problem 10.

25.2. C23: Teorija grafova - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Svi zadatci pronađeni su u raznim skriptama Diskretne matematike (koja se održava kao kolegij na 2. godini preddiplomskog studija Matematike) te u knjizi Olympiad Combinatorics od Pranav A. Srirama koja je po poglavljima objavljena na linkovima uz zadatke 4. - 12.

- Zadatak 1: Trivijalno.
- Zadatak 2: Označimo grafove kao na slici:



  Odmah uočavamo da je broj vrhova i broj bridova isti u oba grafa. Također vidimo da u oba grafa postoje 4 vrha stupnja 2 i 4 vrha stupnja 3. Ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, onda inducirani podgraf sa $V \subset V_1$ je izomorfan s induciram podgrafom $\theta(V) \subset V_2$. Promotrimo inducirani podgraf $G = (\{b, d, f, h\}, \{\{bf\}, \{dh\}\})$. Vrhovi tog podgrafa su stupnja 3 pa se moraju preslikavati u vrhove $1, 4, 5, 8$, ali kako god ih preslikali ta dva podgrafa neće biti izomorfna (ciklus se ne preslika u ciklus). Zaključujemo, grafovi nisu izomorfni.
- Zadatak 3: Trivijalno.
- Zadatak 4: Example 1 na ovom linku.
- Zadatak 5: Example 3 na ovom linku.
- Zadatak 6: Example 3 na ovom linku.
- Zadatak 7: Example 6 na ovom linku.
- Zadatak 8: Example 8 na ovom linku.
- Zadatak 9: Example 10 na ovom linku.
- Lema 13: Lemma 8.1 na ovom linku.
- Lema 16: Lemma 8.2 na ovom linku.
- Zadatak 10: Example 1 na ovom linku.
- Zadatak 11: Example 2 na ovom linku.
- Zadatak 12: Example 3 na ovom linku.

25.3. C27: Pločna kombinatorika - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 5.
2. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 1.
3. Županijsko 2010., 1. razred
4. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 8.
5. Državno 2015. , 4. razred, A
6. Tvrdnju možemo dokazati indukcijom. Baza za $k = 1$ je trivijalna. Pretpostavimo da se za neki k tražena ploča uvijek može popločati. Dokažimo da isto vrijedi i za ploče dimenzija $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. Podijelimo ploču na četvrtine dimenzija $2^k \times 2^k$. Jedna od četvrtina je defektna te je možemo popločati u skladu s pretpostavkom indukcije. Zatim dodamo jednu L trominu tako da prekriva po jedno polje svake od preostale tri četvrtine. Preostalo nam je popločati tri defektne $2^k \times 2^k$ ploče koje možemo popločati po pretpostavci indukcije.
7. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 34.
8. Polja ploče podijelimo u tri klase tako da upišemo brojeve 1, 2 i 3 na sljedeći način: 1 2 3 1 3 1 2 3 2 3 1 2 1 2 3 1 Primjetimo da svaki potez mijenja boju po jednom polju iz svake klase. Također primjetimo da, kako bi sva polja na kraju bila crna, svako polje mora promijeniti broju neparno mnogo puta. No to bi značilo da je broj poteza istovremeno paran (jer klasa 1 sadrži 6 polja koje svako promijeni boju neparno mnogo puta, a zbroj 6 neparnih brojeva je nužno paran) i neparan (jer klasa 2 sadrži 5 polja koje svako promijeni boju neparno mnogo puta, a zbroj 5 neparnih brojeva je nužno neparan) što je nemoguće. Dakle zaključujemo da ne možemo nakon konačnog broja koraka doći do potpuno crne ploče.
9. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 28.
10. Obojimo pravokutnik šahovski sa crnim poljem u kutovima (svi kutovi su iste boje jer su stranice neparne). Uočimo da cijela ploča ima jedno crno polje više nego bijelo. Po Dirichletu postoji pločica koja ima jedno crno polje više nego bijelo. Nije teško zaključiti da su toj pločici svi kutovi crni te da su joj udaljenosti od rubova originalne ploče iste parnosti.
11. HMO 2016, 2. dan
12. MEMO 2018. pojedinačno
13. Baltic Way 2012, Problem 7
14. Numberphile

25.4. G23: Upisana i pripisana kružnica - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. ŽUPANIJSKO 2012, 2.A
2. rješenje je preko sličnosti trokuta BMI i BI_AN te CMI i CI_AN
3. ŽUPANIJSKO 2021, 2.A
4. DRŽAVNO 2016, 4.A
5. DRŽAVNO 2017., 2.A
6. vidi zadatak iz državnog 2010., 2.A. U njemu se pokazuje tvrdnja ekvivalentna tome da su X i Y na simetralama kutova.
7. HMO 2013., 2.dan
8. HMO 2019., MEMO test
9. Izvor.
10. HMO 2015., MEMO test.
11. HMO 2018., IMO test.

25.5. N23: Konstrukcije u TB - Laura Horvat

Link na zadatke. Link na hintove.

1. EM1, Teorem 5.22.
2. Poglavlje 2.3., Example
3. Example 2.3.2.
4. Budući da $p \mid a^p - 1$, zaključujemo da $p \nmid a$, tj. $\gcd(a, p) = 1$. Dakle, možemo upotrijebiti Mali Fermatov teorem.
   $p \mid a^p - 1 \implies 0 \equiv a^p - 1 \equiv a^{p-1} \cdot a - 1 \equiv [MFT] \equiv a - 1 \pmod p \implies a - 1 = pk,\ k \in \mathbb{N}$
   S druge strane, $a^p - 1 = (a-1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1)$. Da bismo dokazali da p^2 dijeli $a^p - 1$, dovoljno je dokazati da p dijeli i drugi faktor.
   $p \mid a - 1 \implies a \equiv 1 \pmod p$. Prema tome, $a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1 \equiv 1^{p-1} + 1^{p-2} + \cdots + 1 + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod p \implies a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + a + 1 = p \cdot q,\ q \in \mathbb{N}$
   Zaključno, $a^p - 1 = pk \cdot pq = p^2 \cdot kq \implies p^2 \mid a^p - 1$, što je i trebalo dokazati.
5. Example 2.3.8.
6. Theorem 2.1.1.
7. Theorem 2.1.2.
8. Teorem 2.7.
9. Example 2.2.1.
10. Primjer 2.3.
11. Example 4.9.
12. Example 2.2.2.
13. Poglavlje 1.1., Example 1.
14. Poglavlje 1.1., Example 3.
15. Poglavlje 1.2., Example 2.
16. Poglavlje 1.2., Example 5.
17. Poglavlje 1.4., Example 1.

26. Poglavlje

Rješenja za četvrtu grupu

26.1. C24: Kombinatorna geometrija - Luka Bulić Bračulj

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Sylvester-Gallai theorem - Kelly's proof
2. Pretpostavimo suprotno, odnosno da kroz svako sjecište pravaca prolaze barem 3 pravca. Promotrimo sve parove nekog pravca i nekog sjecišta druga dva pravca te iz tog konačnog skupa odaberimo par s najmanjom udaljenosti između pravca i sjecišta. Označimo pravac s p i sjecište sa S. Povucimo okomicu q iz S na p te označimo sjecište p i q s T. Kako kroz S moraju prolaziti barem 3 te sva 3 sijeku p, barem 2 od tih sjecišta se moraju nalaziti s iste strane točke T. Označimo ta sjecišta s A i B tako da je A bliže točki T te promotrimo trokut $\triangle SBA$. Kut $\angle SAB$ mora biti ili pravi kut (ako $A = T$) ili tupi kut (jer je kut $\angle SAT$ šiljasti kut budući da se nalazi u pravokutnom trokutu $\triangle SAT$ a nije sam pravi kut). Dakle stranica nasuprot vrhu A je najdulja stranica trokuta $\triangle SBA$ odnosno visina iz vrha A je najkraća visina trokuta $\triangle SBA$. Dakle visina iz vrha A kraća je od visine iz vrha S odnosno udaljenost pravca BS od sjecišta A kraća je od udaljenosti pravca AB od vrha S. Ali to je nemoguće jer smo pretpostavili da je udaljenost pravca p (koji je isto što i pravac AB) od sjecišta S najkraća od svih takvih udaljenosti. Dakle, došli smo do kontreadikcije iz čega zaključujemo da postoji sjecište pravaca kroz kojeg prolaze najviše 2 pravca čime smo dokazali tvrdnju zadatka.
3. HMO 2018.
4. USAMO 2017.
5. MEMO 2011.
6. HMO 2019.
7. HMO 2020.
8. IMO 2016.
9. USA TSTST 2016.

26.2. C28: Kompleksni brojevi i polinomi - Boris Stanković

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja zadataka iz rubrike očekujte neočekivano

1. USAMO 2014.

2. Nije teško pokazati da su brojevi a_n rješenja rekurentne jednačine zadate sa $a_0 = 0, a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ za $n \geqslant 1$. Odavdje direktno slijedi tvrđenje zadatka.

3. Rješenje I (slično prethodnom zadatku):
Neka je $a_n = Im((12+5i)^n) = \frac{(12+5i)^n - \overline{(12+5i)^n}}{2} = \frac{(12+5i)^n - (12-5i)^n}{2}$. Ovo vrijedi jer je konjugat multiplikativan. Sada želimo dokazati da je $a_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. $12+5i$ i $12-5i$ su korijeni kvadratne jednačine $x^2 - 24x + 169 = 0$. Odavdje lagano slijedi da su brojevi a_n rješenja rekurentne jednačine zadate sa $a_0 = 0, a_1 = 5$ i $a_{n+1} = 24a_n - 169a_{n-1}$ za $n \geqslant 1$.
Nije trivijalno dokazati preko ove rekurzije da važi $a_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Najelegantniji način koji znam je primijetiti da iz $a_{n+1} \equiv 24a_n \pmod{13}$ slijedi da $13 \nmid a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

   Rješenje II (rješenje Ervina Macića na predavanju koje nije toliko povezano sa trikom koji sam želio pokazati na ovom zadatku, ali je lijepo i poučno):
Poznato je da svaki kompleksan broj $z = x + iy$ ima trigonometrijski zapis kao $z = r(cos\phi + isin\phi) = re^{i\phi}$ što vrijedi zbog Ojlerove formule i r je modul kompleksnog broja, to jeste: $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Argument našeg datog kompleksnog broja $12+5i$ označimo sa α. Jasno je da vrijedi $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. Kada množimo dva kompleksna broja z_1, z_2 ili ekvivalentno $r_1e^{i\alpha_1}, r_2e^{i\alpha_2}$ jedan sa drugim dobijemo $(r_1r_2)e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$. Dakle novodobijeni kompleksni broj ima argument $\alpha_1 + \alpha_2$. Dalje, dovoljno nam je da argument kompleksnog broja oblika $n \times \alpha$ gdje $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ ne može biti 0 $(mod\ 180°)$ jer nam je ovo uslov da kompleksan broj leži na realnoj osi što implicira da je realan broj. Sada prema proširenju Nivenove teoreme ugao α nije racionalan te nikada ne možemo imati $n \times \alpha° = k \times 180°$.

Rješenja zadataka iz rubrike Čebiševljevi polinomi

1. Zadatak je zapravo 2. zadatak na državnom takmičenju 2021. za 3. razred u Srbiji. Pored oficijelnih rješenja navodim i originalno rješenje Milice Vugdelić koje smatram zaista prelijepim.
Nakon što uradimo isto kao i u ostalim rješenjima ostaje dokazati:

$$\prod_{i=1}^{9} \sin(9i°) = \frac{\sqrt{10}}{2^9}$$

   Primetimo da važi identitet $|1 - (\cos x + i\sin x)| = \sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} = 2|\sin\frac{x}{2}|$, pa s tim uvedimo polinom

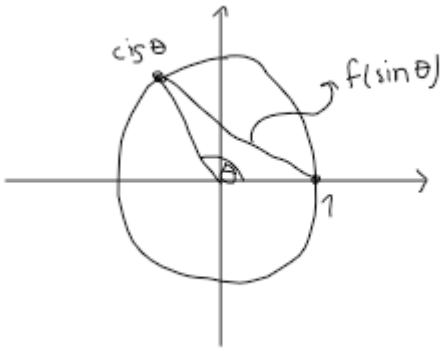
$$\begin{aligned} P(x) = \frac{x^{20}-1}{x-1} &= \prod_{k=1}^{19}(x - cis(\frac{360°}{20}k)) \\ &= \prod_{k=1}^{19}(x - cis(18°k)) \end{aligned}$$

   Vrednosno, vidimo da je $P(1) = 1^{19} + 1^{18} + \cdots + 1^0 = 20$, a sa druge strane modul od $P(1)$ jednak je:

$$\begin{aligned} |P(1)| &= \prod_{k=1}^{19} |1 - cis(18°k)| \\ &= \prod_{k=1}^{19} 2|\sin 9°k| \\ &= 2^{19}\sin 9° \sin 18° \ldots \sin 90° \sin 99° \ldots \sin 171° \\ &= 2^{19}(\sin 9° \sin 18° \ldots \sin 81°)^2 \end{aligned}$$

   odakle sirektno dobijamo željeni rezultat i jasno se vidi kako se ovo može generalizovati na druga n.

Motivacija za rešenje je bila činjenica da je $\sin\theta$ dužina tetive nad uglom u funkciji od θ (ja sam mislila da je to baš θ, ali ispostavi se da je tetiva nad uglom θ jednaka $2\sin\frac{\theta}{2}$) koja se može izračunati na drugi način (rastojanje od jedinice u kompleksnoj ravni), a kad uzmemo proizvod toga može se ispostaviti da se dobije neki "izračunljiv" polinom, kome možemo lako naći vrednost u jedinici.



2. Znamo da je $\cos\ x = \cos\ (2\pi - x)$. Označimo li izraz čiju vrijednost trebamo izračunati sa A nameće se posmatrati izraz

$$B = \cos\ \alpha \cdot \cos\ 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2021\alpha$$

jer vidimo da vrijedi $B = A^2$. Dakle dovoljno je izračunati vrijednost izraza B i predznak izraza A. Primijetimo da su brojevi $\cos\ \alpha$, $\cos\ 2\alpha$, ..., $\cos 2021\alpha$ nule polinoma $P(x) = T_{2021}(x) - 1$. Koristeći prethodno ustanovljene činjenice o Čebiševljevim polinomima prve vrste znamo da je vodeći koeficijent polinoma P jednak 2^{2020}, a slobodni član mu je jednak -1 pa je po Vijetovim pravilima $B = \frac{1}{2^{2020}}$. Također prvih 505 faktora u A su pozitivni, preostalih 505 negativni odakle zaključujemo da je $A < 0$. Također, možete pogledati i oficijelno rješenje koje ne smatram pretjerano zanimljivim jer se radi o 2. zadatku za 3. razred s hrvatskog državnog 2021.

3. Dušan Đukić 32 zadatka korona 6. zadatak

Rješenja zadataka iz rubrike odabrani teži zadaci

1. USAMO 1997.
2. Bugarska 2003.

26.3. N24: Kombinatorna teorija brojeva - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Među bilo kojih $n+1$ brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s n, pa tako i među 5, 55, 555,...., i 555...5 s $n+1$-om znamenkom
2. DRŽAVNO 2014., 1.A
3. DRŽAVNO 2012., 4.A
4. DRŽAVNO 2015., 2.A
5. DRŽAVNO 2018., 4.A
6. DRŽAVNO 2019, 4.A
7. BSO pretp. $a < b$, te $M(a,b) = 1$ (ako nije, onda se skup prirodnih brojeva podijeli na klase ekvivalencije po ostatku mod $M(a,b)$, te se svaka promatra zasibno). Ako je $n\ inS$ onda $n-b, n-a, n-b+a, n+b-a, n+a, n+b$ nisu u S. To povlači da n-b-a i n+2b-a jesu u S (jer u trojikama $(n-b-a, n-b, n-a)$ i $(n+b-a, n+b, n+2b-a)$ to su jedini brojevi koji mogu biti u S). Iz toga pak slijedi da su $n+2b-a$ i $n-3a$ iz S za svaki $n \in S => n+k(2b-a)-3la \in S => n+3 \in S$ ili $n-3 \in S$ (jer je $M(2b-a, 3a)|3$). Dakle moguće je samo da a i b daju ostatke 1 i 2 (nekim redosljedom) mod 3. Inače $k, k+a, k+b$ ne čine potpun sustav ostataka mod 3 iz čeg slijedi kontradikcija.
8. Izvor.
9. To vrijedi za 70 ($\sigma(70) = 144$), vrijedi i za sve brojeve oblika $70p$ gdje je p dovoljno velik prost broj, tj. takav da vrijedi $\sigma(70) = 144 < p$. Želimo namjestiti da čim maknemo djelitelj koji je $\geqslant 5p$ iz sume, nužno dobijemo sumu manju od $2n = 140p$, kao što kad maknemo djelitelj od 70, veći ili jednak 5, dobijemo nužno sumu manju od 140. Ima beskonačno mnogo takvih brojeva.
10. Uočimo prvo da za svaku particiju B, C svaki element iz B dijeli svaki element iz C. To znači da (zbog antisimetričnosti djeljivosti) dva elementa iz različitih podskupova, ne mogu zamijeniti mjesta da particija ostane dobra što nam daje maksimalno $n-1$ dobru particiju za n elemenata. Također, slijedi da brojevi m i n za koje ne vrijedi ni $m|n$ ni $n|m$ (tu relaciju označimo sa) moraju biti na istoj strani. Zatim definiramo relaciju $\sim$ kao relaciju povezanosti po (to je rel. ekvivalencije). Podijelimo A na klase po $\sim$, uočimo da elementi iste klase moraju biti u istom podskupu. Za svake dvije klase u različitim podskupima slijedi da NZV jedne dijeli NZD druge. Ako za neke dvije to ne vrijedi, slijedi da one ne mogu biti na istoj strani, tada nadopunimo relaciju vežući te dvije klase u jednu. Tada dobivamo nove klase ekv. s kojima ponavljamo isti postupak sve dok za svake dvije klase neće vrijediti da NZV jedne dijeli NZD druge (konačan postupak zbog konačnog broja elemenata i pada broja klasa). Tako na skupu svih klasa dobijemo relaciju totalnog uređaja $X \leqslant Y$ akko NZV od X dijeli NZD od Y. Podjela skupa na dva dijela se sada svodi na odabir jedne klase, te sve klase manje ili jednake njoj stavimo u B, a ostale u C. Pritom se u tom nizu klasa ne smije dogoditi da dvije uzastopne imaju jedan element, dakle 1008 će ih imati jedan element, a 1008 dva elementa (najmanje 3024 elementa). Konstrukcija: $A = \{2^n \cdot 3^n : n = 1, 2, ..., 1008\} \cup \{2^{n+1} \cdot 3^n : n = 1, 2, ..., 1008\} \cup \{2^n \cdot 3^{n+1} : n = 1, 2, ..., 1008\}$
11. Dokazat ćemo principom bijekcije da je broj permutacija takvih da p dijeli $\pi(1) + \pi(2) + ... + \pi(k)$ jednak broju permutacija π' takvih da $\pi'(1) + \pi'(2) + ... + \pi'(k)$ daje ostatak r pri djeljenju s p (za svaki $k = 1, 2, ..., p$, $r = 1, 2, ..., p-1$). Neka je m broj takav da je $mk \equiv r \pmod p$, takav broj postoji jer je p prost. Bijekcija će biti $\pi \mapsto \pi' = \pi + m$. Tada je $\pi'(1) + \pi'(2) + ... + \pi'(k) = (\pi(1) + m) + (\pi(2) + m) + ... + (\pi(k) + m) = \pi(1) + \pi(2) + ... + \pi(k) + mk \equiv r \pmod p$. Iz toga slijedi da, zapišemo li sve ostatke $\pi(1) + \pi(2) + ... + \pi(k)$ mod p u $p \times p!$ matricu (redak označava k, a stupac π) u svakom retku će se svaki broj pojaviti jednako puta, dakle $\frac{1}{p}$ svih ostataka je nula, tj. jedan po stupcu (permutaciji). Prosječna vrijednost $f(\pi)$ je 1.
12. HMO 2013., 2. dan
13. Pretpostavit ćemo suprotno pa izvesti iz toga zaključak da u nizu ima konačno mnogo parnih brojeva. Nakon toga ćemo svesti na kontradikciju. Neka je $a \in N$ najmanji broj koji nije u nizu i pretp. da je a neparan (inače je trivijalno). Neka je $k \in N$ takav da je a_k zadnji broj manji od a u nizu. Promatramo najmanji broj oblika $2ma$ (m prirodan) koji nije u nizu (takav postoji jer ih ima beskonačno mnogo, a svaki koji bi se pojavio iza indeksa k, iza njega bi u nizu slijedio a). Zatim promatramo parne brojeve veće od $2ma$, samo konačno mnogo njih može biti praćeno brojem manjim od $2ma$. To znači da ako imamo beskonačno mnogo parnih brojeva većih od $2ma$ u nizu, $2ma$ će također biti u nizu, stoga u nizu ima

konačno mnogo parnih brojeva. Neka je K indeks zadnjeg parnog broja u nizu. Znamo da iza a_K možemo imati samo konačno mnogo neparnih brojeva koji su manji od najvećeg parnog broja u nizu. Promatramo li onda dio niza u kojem su svi brojevi neparni i veći od najvećeg parnog broja u nizu, te uočimo li da niz ne može biti padajući, možemo zaključiti da će se pojaviti još neki paran broj. To vrijedi zato jer najmanji broj veći od x koji nije rel. prost sa x uvijek bude paran ako je x neparan (to je ustvari $x + p$ gdje je p najmanji (neparni i prosti) djelitelj od x. U nizu će se doći do broja čiji je sljedbenik veći od njega, taj sljedbenik će onda biti opisani $x+p$ jer je paran i nije bio u nizu (veći je od broja za koji smo pretpostavili da je najveći paran broj u nizu). Tako dobijemo kontradikciju.

Dio VII

Projekti na Ljetnom kampu

27. Poglavlje

Projekti

27.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 2 do 6 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz par popodneva detaljnije neku temu. Na ovogodišnjem je kampu bilo ponuđeno sveukupno 11 projekata - 5 na prvom i 6 na drugom terminu.

Većina projekata može se svrstati u sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema.

27.2. Popis projekata

27.2.1 Brojenje

Vrsta: fakultetski **Predavač:** Nika Utrobičić, Patricija Dovijanić

Na početku projekta upoznali smo se s bijekcijama i pojmovima ekvipontenosti te prebrojivosti, a proučavali smo i Hilbertov hotel. Nakon toga smo pomoću Peanovih aksioma definirali skup prirodnih brojeva i dokazali Cantor Bernsteinov teorem. Pomoću tog teorema dokazali smo da su skupovi racionalnih i cijelih brojeva prebrojivi. Također, pokazali smo da je skup realnih brojeva neprebrojiv kao i partitivni skup prirodnih brojeva. Za kraj smo uveli pojam kardinalnosti te dokazivali ekvipotentnost raznih skupova.

27.2.2 Brojanja i prebrojavanja

Vrsta: natjecateljski/fakultetski/primjena **Predavač:** Lucija Relić

Na projektu *Brojanja i prebrojavanja* bavili smo se prebrojavanjem različitih stvari, a najviše načina na koji se može nešto rasporediti. Pomoću raznih primjera upoznali smo se sa sljedećim stvarima:

- princip sume i razlike
- princip umnoška (Na koliko načina 10 učenika može stati u red?)
- princip dvostrukog prebrojavanja - kada prebrojimo nešto na 2 različita načina rezultat mora biti isti
- princip bijekcije
- Dirichletov princip

Naučili smo i nekoliko novih korisnih izraza, zapisa i formula:

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$, $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$
- $2^n =$ broj svih podskupova n-članog skupa, $2^n - 1 =$ broj nepraznih podskupova n-članog skupa
- $\binom{n+m}{n} =$ broj puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0,0)$ do (m,n)

Dalje smo se bavili dvostrukim prebrojavanjima i kombinatorno dokazali razne identitete. Na primjer,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

možemo interpretirati na sljedeći način. Lijeva strana je broj načina na koje možemo od n ljudi odabrati k ljudi ako nam nije bitan poredak. Desna strana je broj načina za odabrati $(n-k)$ ljudi od n ljudi, ali odabirom $(n-k)$ ljudi automatski smo odabrali i k ljudi koje i trebamo.
Kombinatorno smo pokazali i poznati binomni teorem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Na kraju smo sve što smo naučili primijenili kod proučavanja Fibonaccijevih brojeva. Oni zadovoljavaju formulu $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ i početne uvjete $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Fibonaccijeve brojeve povezali smo formulom $J_n = F_{n+1}$ sa brojem različitih popločavanja ploče $1 \times n$ pločicama veličine 1×1 i 1×2. Broj popločavanja zadovoljava istu formulu kao Fibonaccijevi brojevi, a to smo pokazali kombinatorno dvostrukim prebrojavanjem. Namučili smo se dokazujući još mnoge slične formule.

Bonus zadatak:

$$\sum_{i \geqslant 0} \sum_{j \geqslant 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = J_{2n+1}$$

27.2.3 Rangiranje internetskih stranica

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavač:** Mislav Brnetić

Cilj našeg projekta bio je odrediti algoritam pomoću kojeg možemo rangirati web stranice prema važnosti. Motivacija za ovaj projekt bila je zanimljiva i korisna primjena linerne algebre u stvarnom životu.

Da bi smo osmislili valjani algoritam započeli smo s definiranjem osnovnih pojmova iz linearne algebre. Parametri koje smo uzeli u obzir pri rangiranju stranica su broj stranica na koje stranica upućuje, broj stranica koje upućuju na nju i njihova vlastita važnost. Pomoću tih parametara cilj je bio osmisliti formulu koja izračunava važnost pojedine stranice.

Od pojmova iz linearne algebre upoznali smo se s matricama, osnovnim računskim operacijama s matricama, određivanjem determinante i svojstvenih vrijednosti te svojstvenih vektora matrica.

Koristeći navedeno mogli smo rješavati sustave linearnih jednadžbi. Nakon formuliranja problema u obliku sustava linearnih jednadžbi i zapisivanja takvog sustava, koristili smo novostečene metode kako bismo došli do smislenog rezultata koji je bio ekvivalentan rangiranju naših stranica, odnosno određivanju njihove važnosti.

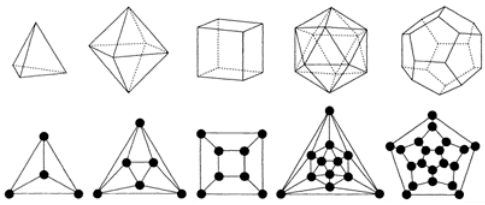
Na kraju projekta, napisali smo program koji korištenjem ove metode rješava navedeni problem.

27.2.4 Teorija grafova

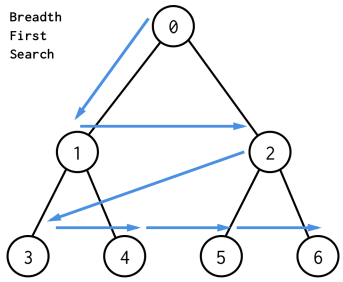
Vrsta: primjena **Predavač:** Maja Drmač, Matej Ljubičić

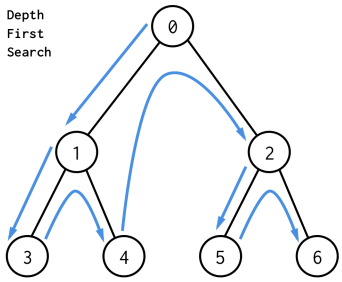
Tema ovog projekta bila je teorija grafova: od samih osnova preko raznih poznatih problema do njene primjene.

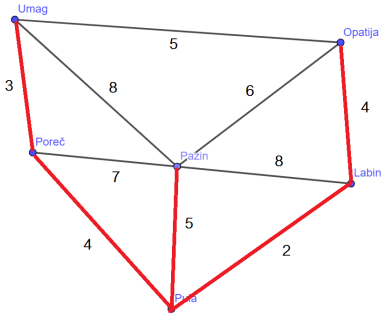
Krenuli smo od same definicija grafa te svih bitnih pojmova - izomorfnost, planarnost, bipartitnost, kromatski broj, put, ciklus, šetnja. Proučavali smo i dokazivali Eulerovu formulu ($V - E + F = 2$), postojanje Platonovih tijela te naučili definicije i dokazali kriterije Eulerovih i Hamiltonovih grafova.



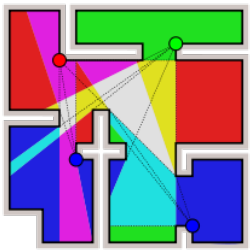
Naučili smo neke korisne algoritme poput Breadth-first searcha, Fleuryjevog algoritma za pronalaženje Eulerove staze, Kruskalovog algoritma za pronalaženje najmanjeg razapinjućeg stabla i Prüferovog kodiranja stabala te proučavali njihovu primjenu u stvarnim situacijama. Grafove smo koristili i za prikazivanje molekula u kemiji te povezali svojstva grafova s nekim svojstvima molekula (poput vrelišta, broja kovalentnih veza u zasićenim ugljikovodicima i slično).

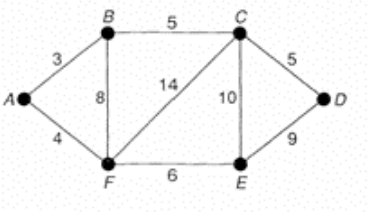


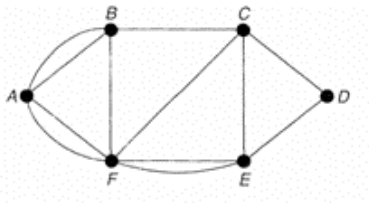




Konačno, osvrnuli smo se na neke od najpoznatijih teorema i neodgovorenih pitanja teorije grafova, poput problema kineskog poštara, problema trgovačkog putnika, Hadwiger-Nelsonova problema kromatskog broja ravnine te *art gallery* problema.







27.2.5 Vjerojatnosna metoda

Vrsta: natjecateljski **Predavač:** Ema Borevković, Paula Vidas, Luka Banović

Cilj ovog projekta bio je naučiti osnove vjerojatnosti te stečena znanja primijeniti u rješavanju natjecateljskih zadataka. Najprije smo obradili pojam vjerojatnosti, uvjetne vjerojatnosti, slučajne varijable i njenog očekivanja. Nakon uvodnih primjera prošli smo kroz nekoliko kombinatornih zadataka koji se mogu riješiti uz korištenje vjerojatnosti, bilo da se mogu isključivo tako riješiti ili znanje vjerojatnosti znatno olakšava rješavanje. Treći dan bavili smo se zanimljivim tvrdnjama iz ozbiljne matematike koje možemo riješiti dosad stečenim znanjem. Zadnji dani bili su rezervirani za izlet u algebru, kombinatornu geometriju i kombinatornu teoriju brojeva, gdje smo također rješavali zadatke koristeći vjerojatnosnu metodu.

"Bilo je teško, ali i zabavno i poučno. Sada znamo bolje igrati igru Sereš" - učenici

27.2.6 Transformacije ravnine

Vrsta: natjecateljski **Predavač:** David Mikulčić, Vedran Cifrek

Cilj projekta je upoznavanje sa naprednijim metodama rješavanja te uvježbavanje istih na težim natjecateljskim zadacima. Bavili smo se posebnim preslikavanjima u euklidskoj geometriji, točnije homotetijom i inverzijom.

Homotetija je preslikavanje određeno centrom homotetije H te koeficijentom homotetije k takva da svaku točku A preslikava u točku A' koja se nalazi na polupravcu HA te vrijedi $|HA'| = k \cdot |HA|$.

Inverzija je preslikavanje određeno centrom inverzije O te radijusom inverzije r tako da svaku točku A preslikava u A' koja je na polupravcu OA te vrijedi $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

Nakon upoznavanja pojmova i najbitnijih svojstava, lema i teorema, krenuli smo od lakših zadataka te postupno povećavali težinu sve dok nimo došli do olimpijskih.

27.2.7 Primjene modularne aritmetike

Vrsta: primjena **Predavač:** Laura i Paula Horvat

Kongruencija je ostatak nekog prirodnog broja a pri dijeljenju s drugim prirodnim brojem n. Matematički zapis kongruencije je:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Tijekom prvih par radionica učili smo o kongruencijama - njihovim svojstvima i primjeni u matematičkim zadacima, a na samome kraju i o njihovim ulogama u šifriranju. Naučili smo o mnogim vrstama šifriranja poput: Cezarove šifre, Beaufortove šifre, Vigenerove šifre, Afine šifre, Diffie-Hellman protokola. Također smo spomenuli primjenu kongruencija u ISBN-International Standard Book Number.

Cezarova šifra funkcionira na način da se svakom slovu u abecedi pri dijeli redni broj (počevši od $A = 1$), a zatim se odredi ključ za šifriranje (neki prirodni broj). Ključ služi tome da svim slovima pridruži novi redni broj u "novoj abecedi". U većini slučajeve taj broj je veći od broja slova u abecedi pa se računa dobiveni broj modulo broj slova u abecedi:

$$\text{dobiveni broj} = \text{stari broj} + \text{ključ} \equiv b \pmod{\text{broj slova u abecedi}}.$$

Beaufortova šifra također koristi princip ključa samo što je ključ riječ umjesto broja. Primjer šifriranja pomoću Beauforta:

K	L	J	U	C
D	A	N	A	S
10	12	9	20	2
3	0	13	0	18
7	11	22	20	10
H	L	W	U	K

ključ = KLJUC
riječ koju želimo šifrirati = DANAS
dobivena (šifrirana) riječ = HLWUK

27.2.8 Neuronske mreže

Vrsta: primjena **Predavač:** Mateo Dujić

Tijekom našeg projekta proučavali smo tehniku strojnog učenja. Njime smo rješavali jedan od problema nadziranog učenja, točnije klasifikaciju slika. Na zadanim slikama određivali smo nalazi li se mačka na njima ili ne. Da bismo ovo postigli, morali smo se upoznati s principom neuronske mreže i raznih podprocesa koji su bili nužni da bi dobili točan odgovor. Proces logističke regresije se sastoji od: unosa podataka, obrade podataka uz pomoć težina na bridovima neuronske mreže, određivanje greške i zatim prilagođavanje težina gradijentnim spustom. Dakle, nakon unosa podataka možemo podijeliti proces u tri dijela: Treniranje, Testiranje, Evaluiranje. Projekt se odvijao u dvije stilski različite cjeline: konceptualne i implementacijske. Tijekom konceptualnoga obradili smo svu potrebnu teoriju za razumijevanje, dok je u implementacijskom dijelu naglasak bio na programskom jeziku Python i njemu pripadnom okruženju, Jupyter Labu. Za ove potrebe naučili smo osnove Pythona i NumPya što će nam biti korisno i za programiranje van ovog projekta. Nakon što smo završili oba dijela i istrenirali model, postigli smo uspješnost od 99% na trening podacima i 73% na testnim podacima. Suočili smo se sa raznim dijelovima više matematike: linearna algebra(množenje matrica), matematička analiza (derivacije i parcijalne derivacije), vjerojatnost (uvjetna vjerojatnost), sigmoid funkcija i hiperbolične funkcije, čitanje i opisivanje grafova funkcija, osnove logaritama i eksponencijalnih funkcija. Projekt je bio na kraju izuzetno plodonosan jer smo tijekom njega obradili jednu iznimno zahtjevnu i zanimljivu tematiku.

27.2.9 Matematika i glazba

Vrsta: primjena **Predavači:** Luka Kraljević, Matko Šimić

Starogrčki matematičari pitali su se koji omjeri frekvencija zvuče najskladnije. Prema predaji, Pitagora je primjetio da su najbolji omjeri malih prirodnih brojeva. Ova će opaska biti temelj svih ljestvica. Cilj ovog projekta bila je konstrukcija ljestvice s prihvatljivim brojem polutonova I skaldnim omjerima frakvencija. Rezultat je dvanaesttonska ljestvica. Također smo se dotakli teme boje tona i rastave signala na najjednostavnije periodične funkcije, sinusoide.

Počeli smo s osnovnim tonom C i izabrali tonove koji su s osnovnim tonom u omjeru malih prirodnih brojeva. Ti omjeri bili su 2:1, 4:3 i 3:2. Tako smo dobili intervale oktave, kvarte i kvinte na osnovni ton, odnosno tonove c, F i G. Zatim smo promatrali omjere dobivenih tonova i kao razmak od jednog tona odredili smo najmanji interval, između F i G, koji iznosi 9:8 i nazvali ga cijeli ton. Na ovaj način smo interval od 1 do 2 podjelili na segmente čiji omjeri često daju male razlomke. Ponavljenjem razmaka od 9:8 smo došli do ostalih tonova. Ova je podjela rezultirala ljestvicom u kojoj dva polutona ne daju jednaki omjer kao ostali, ali u kojoj su gotovo svi razmaci između tonova bili približno ili točno omjeri malih prirodnih brojeva. Glavni problem ove ljestvice jesu nejednaki razmaci između tonova stoga nije moguće transponirati ljestvicu, to jest promijeniti osnovni ton.

Htjeli smo sačuvati omjere oktave (2:1) i kvinte (3:2) pa smo podijelili interval od 1 do 2, oktavu, na 12 tonova tako da njihovi omjeri budu međusobno jednaki. Tada njihov omjer mora biti $\sqrt[12]{2}$. Potencije $(\sqrt[12]{2})^1, (\sqrt[12]{2})^2, \ldots, (\sqrt[12]{2})^{12}$ do na grešku od 0.01 aproksimiraju početne omjere malih prirodnih brojeva. Nadalje, razmišljali smo postoje li ljestvice s brojem tonova različitim od 12 koje bi još bolje aproksimirale početne omjere. Stoga smo razmatrali je li moguće vratiti se na početni ton pomičući se za kvinte i oktave. Matematički, to znači da treba odabrati brojeve i i k takve da vrijedi:

$$2^i \left(\frac{3}{2}\right)^k = 1$$

Jednadžba vrijedi za omjer $\frac{i}{k} = -\frac{log\frac{3}{2}}{log2}$ Međutim, dobili smo iracionalni broj i želimo ga aproksimirati racionalnim. U tu svrhu koristili smo se verižnim razlomcima pomoću kojih neki iracionlan broj možemo aproksimirati proizvoljno dobro. Tako smo navedeni iracionalni broj zapisali u sljedećem obliku:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\ldots}}}}} = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \ldots]$$

Na taj način vidljivo je da je 17/29 prva aproksimacija bolja od 7/12. Međutim, ljestvica s 29 tonova bila bi vrlo nepraktična. Zaključujemo da je optimalna ljestvica s korektnim kvintama dvanaesttonska.

Glazbala vibriraju tako da osim temeljne frekvencije koja određuje visinu tona sadrže i više frekvencije, dvostruku, trostruku itd., slabijeg intenziteta. Razdioba njihovih intenziteta određuje boju tona koja se, stoga, razlikuje za različite instrumente. Na primjer, ukoliko bismo željeli razložiti obojani ton koji proizvodi žica na gitari ili ukloniti neželjeni šum iz snimke poslužili bismo se matematičkim alatom zvanim Fourierova transformacija.

Fourierovu transformaciju možemo zamisliti kao stroj koji razabire fundamentalne frekvenicje nekog obojanog tona. Time omogućava razlaganje složene periodičke funkcije na najjednostavnije komponente.

27.2.10 Voting theory

Vrsta: primjena **Predavač:** Luka Bulić Bračulj

Izbori su jedna (ne)prijatnost s kojom se čovjek susreće skoro na godišnjem nivou. Na ovom projektu smo proučavali različite izborne sustave i matematiku iza njih u cilju pripremanja mladeži za savjesno i svjesno ispunjavanje svog građanskog prava.

Najviše smo izučavali izbore u kojima od nekoliko kandidata treba izabrati jednog pobjednika. Izborni sustavi kojima smo se bavili analizirajući njihove dobre i loše strane su first-past-the-post (FPTP) voting, instant-runoff voting (IRV), Borda count, approval voting i drugi. Upoznali smo se s pojmom Condercetovog pobjednika (kandidata koji pobjeđuje sve druge u direktnom okršaju) i nekim problemima vezanim za njegovu egzistenciju. Naučili smo neke kriterije koje je poželjno da izborni sustav zadovoljava kao što su later-no-harm kriterij, no-favorite-betrayal kriterij, monotonicity kriterij i participation kriterij.

Nakon duge diskusije bilo nam je i više nego jasno da savršen izborni sustav ne postoji, a to smo i formalno pokazali kroz dokaz Arrowljevog teorema. Naime, Arrowljev teorem tvrdi da niti jedan izborni sustav u kojem glasači slobodno rangiraju kandidate po svojim preferencama ne može ispuniti sva tri od sljedećih kriterija:

1. Jednoglasnost – Ako svi glasači preferiraju kandidata A nad kandidatom B, kandidat B ne smije pobijediti
2. Nezavisnost irelevantnih alternativa – Ako kandidat A pobjeđuje kandidata B, kandidatura trećeg kandidata C ne smije uzrokovati pobjedu kandidata B

3. Nediktatura – Izborni sustav ne smije biti diktatura, odnosno ne smije postojati birač čije preference određuju ishod izbora neovisno o preferencama svih ostalih birača

Projekt se pokazao kao veoma izazovan, samo dokazivanje Arrowljevog teorema je bilo zahtjevan kombinatoran problem i za iskusne natjecatelje, a između ostalog riješili smo i C6 sa IMO Shortlista 2014 koji je zapravo simpatična varijacija ovog teorema.

Također, bavili smo se modeliranjem birača i kandidata kao točaka u n-dimenzionalnom prostoru, te smo dokazali:

- Median Voter Theorem (Condorcetov pobjednik uvijek postoji ako su glasači neparno mnogo točaka u jednodimenzionalnom prostoru, odnosno na pravcu),
- Plott's Condition (Condorcetov pobjednik u n-dimenzionalnom prostoru za $n \geqslant 2$ postoji ako i samo ako postoji glasač koji je točka za koju vrijedi da za svaki pravac kroz tu točku vrijedi da sa svake strane točke na pravcu leži jednak broj točaka odnosno glasača) i
- McKelvey's Chaos Theorem (Ako Condorcetov pobjednik ne postoji, od bilo koje točke X možemo doći do bilo koje točke Y nizom točaka $A_0 = X, A_1, A_2, \ldots, A_k = Y$ tako da za svaki $0 \leqslant i \leqslant k-1$ vrijedi da točka A_{i+1} pobjeđuje točku A_i).

Dio VIII

Završne riječi

28. Poglavlje

Završno

28.1. Zahvale

U okolnostima koje se nisu previše promijenile od prošle godine, organizacija Ljetnog kampa bila je zahtjevnija i više nepredvidljiva nego u normalnim okolnostima. Zbog toga smo iznimno zahvalni svima koji su nam u tome pomogli na bilo koji način. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jednog nešto drugačijeg, ali ništa manje uspješnog Ljetnog kampa.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu Ogulin i Pučkom otvorenom učilištu Ogulin, koji su nam, unatoč otežanim uvjetima zbog pandemije koronavirusa, odlučili izaći u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Ogulinu.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i našim vjernim sponzorima i partnerima Photomathu i Jane Streetu. Omogućili ste da se kamp održi, ali i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše udruge.

Naravno, kamp ne bi bio moguć bez svih mentora koji su organizirali i održali još jedan Ljetni kamp. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i kada kamp završi.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem bez obzira na okolnosti. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv unatoč pandemiji potvrđuje da ono što radimo u MNM-u i na Ljetnom kampu zaista čini razliku.

Veliko vam hvala na svemu!

28.2. Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.