Ljetni kamp mladih matematičara 2020.

Ogulin, 16.-30.8.2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI

Marin Getaldić

Sadržaj

1 Predgovor **6**

2 Uvod **7**
2.1 O udruzi . . . 7
2.2 Povijest kampova . . . 8
2.3 Ovaj kamp . . . 8
2.4 Aktivnosti na kampu . . . 9
2.5 Popis mentora . . . 9
2.6 O predavanjima . . . 9
2.7 NFMO . . . 9

I Zadaci s predavanja na prvom terminu **10**

3 Zadaci za prvu grupu **11**
3.1 A11: Nejednakosti - Mateo Dujić . . . 11
3.2 C11: Prebrojavanja - Lucija Relić . . . 14
3.3 C13: Invarijante - Maja Drmač . . . 16
3.4 G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić . . . 18
3.5 N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač . . . 20

4 Zadaci za drugu grupu **22**
4.1 A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač . . . 22
4.2 C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić . . . 24
4.3 C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad . . . 26
4.4 G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad . . . 28
4.5 N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić . . . 30

5 Zadaci za olimpijske grupe **32**
5.1 I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak . . . 32
5.2 I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara . . . 34
5.3 I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak . . . 35
5.4 I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara . . . 37
5.5 I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak . . . 38
5.6 I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić . . . 40
5.7 MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 41
5.8 M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad . . . 42
5.9 M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić . . . 44
5.10 M8: Diofantske - Ivan Sinčić . . . 46
5.11 M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić . . . 49
5.12 M10: Euler, CRT - Borna Šimić . . . 50
5.13 M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara . . . 51

II Zadaci s predavanja na drugom terminu **52**

6 Zadaci za prvu grupu **53**
6.1 A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić . . . 53
6.2 C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić . . . 56
6.3 G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić . . . 59
6.4 N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić . . . 62

6.5 C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić . . . 64

7 Zadaci za drugu grupu **66**
7.1 A22: Nejednakosti - Al Depope . . . 66
7.2 C22: Invarijante - Luka Banović . . . 68
7.3 G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić . . . 70
7.4 N22: Diofantske - Al Depope . . . 72
7.5 C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić . . . 74

8 Zadaci za treću grupu **76**
8.1 A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić . . . 76
8.2 C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić . . . 78
8.3 G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović . . . 80
8.4 N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić . . . 82
8.5 C26: Princip ekstrema - David Mikulčić . . . 83

III Hintovi s predavanja na prvom terminu **84**

9 Hintovi za prvu grupu **85**
9.1 A11: Nejednakosti - Mateo Dujić . . . 85
9.2 C11: Prebrojavanja - Lucija Relić . . . 86
9.3 C13: Invarijante - Maja Drmač . . . 87
9.4 G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić . . . 88
9.5 N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač . . . 89

10 Hintovi za drugu grupu **90**
10.1 A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač . . . 90
10.2 C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić . . . 91
10.3 C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad . . . 92
10.4 G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad . . . 93
10.5 N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić . . . 94

11 Hintovi za olimpijske grupe **95**
11.1 I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak . . . 95
11.2 I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara . . . 96
11.3 I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak . . . 97
11.4 I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara . . . 98
11.5 I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak . . . 99
11.6 I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić . . . 100
11.7 MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 101
11.8 M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad . . . 102
11.9 M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić . . . 103
11.10 M8: Diofantske - Ivan Sinčić . . . 104
11.11 M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić . . . 105
11.12 M10: Euler, CRT - Borna Šimić . . . 106
11.13 M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara . . . 107

IV Hintovi s predavanja na drugom terminu **108**

12 Hintovi za prvu grupu **109**
12.1 A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić . . . 109
12.2 C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić . . . 110
12.3 G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić . . . 111
12.4 N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić . . . 112
12.5 C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić . . . 113

13 Hintovi za drugu grupu **114**
13.1 A22: Nejednakosti - Al Depope . . . 114
13.2 C22: Invarijante - Luka Banović . . . 115
13.3 G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić . . . 116
13.4 N22: Diofantske - Al Depope . . . 117
13.5 C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić . . . 118

14 Hintovi za treću grupu **119**
14.1 A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić . . . 119
14.2 C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić . . . 120
14.3 G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović . . . 121
14.4 N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić . . . 122
14.5 C26: Princip ekstrema - David Mikulčić . . . 123

V Rješenja s predavanja na prvom terminu **124**

15 Rješenja za prvu grupu **125**
15.1 A11: Nejednakosti - Mateo Dujić . . . 125
15.2 C11: Prebrojavanja - Lucija Relić . . . 126
15.3 C13: Invarijante - Maja Drmač . . . 129
15.4 G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić . . . 130
15.5 N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač . . . 131

16 Rješenja za drugu grupu **133**
16.1 A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač . . . 133
16.2 C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić . . . 134
16.3 C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad . . . 135
16.4 G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad . . . 137
16.5 N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić . . . 138

17 Rješenja za olimpijske grupe **139**
17.1 I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak . . . 139
17.2 I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara . . . 140
17.3 I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak . . . 141
17.4 I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara . . . 142
17.5 I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak . . . 143
17.6 I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić . . . 144
17.7 MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić . . . 145
17.8 M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad . . . 146
17.9 M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić . . . 148
17.10 M8: Diofantske - Ivan Sinčić . . . 149
17.11 M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić . . . 151
17.12 M10: Euler, CRT - Borna Šimić . . . 153
17.13 M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara . . . 154

VI Rješenja s predavanja na drugom terminu **155**

18 Rješenja za prvu grupu **156**
18.1 A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić . . . 156
18.2 C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić . . . 158
18.3 G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić . . . 160
18.4 N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić . . . 161
18.5 C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić . . . 162

19 Rješenja za drugu grupu **163**
19.1 A22: Nejednakosti - Al Depope . . . 163
19.2 C22: Invarijante - Luka Banović . . . 166
19.3 G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić . . . 168
19.4 N22: Diofantske - Al Depope . . . 169
19.5 C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić . . . 172

20 Rješenja za treću grupu 173
20.1 A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić . . . 173
20.2 C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić . . . 174
20.3 G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović . . . 175
20.4 N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić . . . 177
20.5 C26: Princip ekstrema - David Mikulčić . . . 178

VII Projekti na Ljetnom kampu 179

21 Projekti 180
21.1 O projektima . . . 180
21.2 Popis projekata . . . 180
21.2.1 Kriptografija . . . 180
21.2.2 Hadamardove matrice . . . 181
21.2.3 Teorija grafova . . . 182
21.2.4 Fleksagoni . . . 182
21.2.5 Modalna logika . . . 183
21.2.6 Primjena vjerojatnosti u (netipičnim) igrama . . . 184
21.2.7 Funkcijske . . . 184
21.2.8 PCA . . . 184

VIII Završne riječi 185

22 Završno 186
22.1 Zahvale . . . 186
22.2 Kontakt . . . 187

1. Poglavlje

Predgovor

U ovoj knjizi moguće je pronaći skoro sva predavanja koja su se održala na Ljetnom kampu mladih nadarenih matematičara 2020. godine, zajedno s hintovima i rješenjima.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi. Trenutno je ovo jedan od najvećih natjecateljskih materijala na hrvatskom jeziku, pa se nadamo da će učenicima pružiti dovoljno zanimljivih tema na odabir.

Dodatno, knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bi zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na sljedeću e-mail adresu: mnm@mnm.hr

Autori,
20. rujna 2020.

2. Poglavlje

Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tijekom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkom PMF-u, gostovanjima udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp je najveća i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarama koje nastoje ostvariti sve njihove matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te se udruga može pohvaliti time da je ovo izdanje kampa, iako nešto drugačije s obzirom na okolnosti, dovedeno na visoku razinu. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Jedan od ciljeva kampa jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampu možemo sresti i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

Slika 2.2: Ljetni kamp 2015.

Slika 2.3: Ljetni kamp 2017.

2.3. Ovaj kamp

Ovo je bio 11. ljetni kamp, a zbog sigurnosti svih polaznika, održan je u dva termina, 16.-23. i 23.-30. kolovoza. Oba su održana u Ogulinu. Učenici i mentori bili su smješteni u Učeničkom domu Ogulin u kojem su se odvijali i projekti, a predavanja su se održavala u Pučkom otvorenom učilištu Ogulin.

Slika 2.4: Učenički dom Ogulin [1]

[1] Izvor fotografije: OG portal

2.4. Aktivnosti na kampu

Glavne su aktivnosti na kampu jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata, te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici slušaju detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici se uz ručak imaju priliku odmoriti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analize određenih tema vezanih uz natjecateljsku, primjenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik kampa na početku kampa odabire jedan od ponuđenih projekata iz raznovrsnih područja matematike te radi na njemu do kraja kampa učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije iz odabrane teme.

Jedno popodne, umjesto projekata, učenici su se okušali u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli". Dok su u prvom terminu za vrijeme relija iskusnijim natjecateljima organizirana predavanja, iskusni natjecatelji u drugom terminu imali su priliku rješavati NFMO i zaista doživjeti kako izgleda ozbiljnije matematičko natjecanje.

Nakon projekata slijedi kratak odmor, zatim večera nakon koje se odvijaju raznovrsne aktivnosti, kao što je Estimathon, natjecanje u procjenjivanju. Nakon organiziranih i zajedničkih aktivnosti polaznici imaju slobodno vrijeme tokom kojeg se mogu družiti igrajući razne društvene igre kao što su misije, Blotto, mafija, bela, pantomima, alias i kockice, a na slobodno jutro Učenički dom Ogulin počastio je polaznike odlaskom u ogulinski muzej.

2.5. Popis mentora

Luka Banović	Maja Drmač	Ivan Sinčić
Matija Bašić	Mateo Dujić	Borna Šimić
Mislav Brnetić	David Mikulčić	Andrija Tomorad
Al Depope	Ivan Novak	Tadej Petar Tukara
Patricija Dovijanić	Lucija Relić	Nika Utrobičić

2.6. O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u tri do četiri skupine ovisno o njihovoj starosti te dosadašnjim postignućima.

Među grupama posebno se ističu grupe kojima pripadaju sudionici međunarodnih natjecanja. Predavanja za te grupe namijenjena su članovima hrvatske JBMO, MEMO i IMO ekipe kojima je kamp zadnja priprema za natjecanje pa zbog toga imaju predavanja i prijepodne i poslijepodne, a osim predavanja imaju i simulacije. Svi ostali polaznici kampa imaju predavanja isključivo prijepodne.

Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja pripremljeni su i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

2.7. NFMO

U drugom terminu ovogodišnjeg ljetnog kampa po prvi put održala se NF matematička olimpijada: ultimativni matematički izazov te prva olimpijada na kojoj sudionici jedni drugima zadaju zadatke. Hrvatska je, kao jedini sudionik ove neslužbene prestižne Olimpijade, neslužbeno poslala 2 natjecatelja: NA i FC. Naši su olimpijci dominirali podijem te iz Ogulina donijeli i patlidžan i paradajz, obje prestižne nagrade.

Dio I

Zadaci s predavanja na prvom terminu

3. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

3.1. A11: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Ovo predavanje namijenjeno je za one koji prvi put vide nejednakosti, kao i one koji su nešto već vidjeli, ali ne misle da im nejednakosti idu od ruke. U prvom dijelu predavanja biti će obrađene osnovne nejednakosti za koje treba minimalno predznanje, a na njega se nadovezuju A-G i A-H nejednakost koje se iz metodičkih razloga predstavljaju najprije u dvije, a zatim u tri varijable. Predavanje završava predstavljanjem KAGH nejednakosti, koje su najpoznatije i najkorištenije netrivijalne jednakosti u matematici općenito.

Osnovne (elementarne) nejednakosti

Teorem 1. *Postoji mnogo trivijalnih činjenica koje su baza za dokazivanje nejednakosti. Neke od njih su sljedeće:*

1. *Ako $x \geqslant y$ i $y \geqslant z$, onda $x \geqslant z$, za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$*
2. *Ako $x \geqslant y$ i $a \geqslant b$, onda $x + a \geqslant y + b$, za svaki $x, y, a, b \in \mathbb{R}$*
3. *Ako $x \geqslant y$, onda $x + z \geqslant y + z$, za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$*
4. *Ako $x \geqslant y$ i $a \geqslant b$ onda $xa \geqslant yb$, za svaki $x, y \geqslant 0$ ili $a, b \geqslant 0$*
5. *Ako $x \in \mathbb{R}$ onda $x^2 \geqslant 0$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako $x = 0$.*

Ove činjenice koristit ćemo u zadatcima i nije ih potrebno obrazlagati. Krenimo sa zadatcima.

1. Dokaži da za svaki realni broj $x > 0$, vrijedi sljedeća nejednakost
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$
2. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dokaži nejednakost
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$$
3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$
4. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$$
5. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakosti
$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$$
6. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži da
$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leqslant 3\sqrt{3}$$

7. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$$

8. Neka su $a, b, c > 1$ realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}$$

9. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži nejednakost

$$x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geqslant 0$$

10. Dokaži da za proizvoljne realne brojeve x, y, z sljedeća nejednakost vrijedi

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geqslant 2x(xy^2 - x + z + 1)$$

Nejednakosti među sredinama

Sljedeći teorem zove se A-G nejednakost.

Teorem 2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Primijenimo ovaj teorem na sljedeća tri zadatka.

11. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant 1$$

12. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geqslant 0$$

13. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži nejednakost

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqslant 8$$

Ovaj teorem govori nam o A-H nejednakosti.

Teorem 3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Mi ćemo više koristiti sljedeći korolar ovog teorema:

Korolar 1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{a+b} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

A-H nejednakost može biti primijenjena na sljedećem zadatku.

14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\frac{ab}{a + b + 2c} + \frac{bc}{b + c + 2a} + \frac{ca}{c + a + 2b} \leqslant \frac{a + b + c}{4}$$

Teorem koji slijedi nije ništa novo, opet A-G nejednakost, no s jednom varijablom više.

Teorem 4. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b = c$.

15. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$xy + yz + zx \geqslant 9xyz$$

Isto tako, A-H nejednakost s 3 varijable:

Teorem 5. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b = c$.

Izvedite analogan korolar kao i za 2 varijable.

16. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a} + \sqrt{\frac{c+a}{b}}} \geqslant 3\sqrt{2}$$

18. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokaži nejednakost

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geqslant 8$$

19. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takvi da $x + y + z = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geqslant 2$$

20. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da $a + b + c + d = 4$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geqslant 2$$

Konačno, dajemo potpuni iskaz nejednakosti među sredinama.

Teorem 6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Tada vrijedi sljedeće*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^n}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Za one koji žele više

21. (Ruska MO 2004) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. i $a + b + c = 3$. Dokaži

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$$

22. (IMO Shortlist 1998) Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ i $xyz = 1$. Dokaži

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+x)} \geqslant \frac{3}{4}$$

23. (USAMO 1998) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Dokaži

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}$$

3.2. C11: Prebrojavanja - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćemo se s osnovnim principima prebrojavanja i primjenjivati ih u raznim kombinatornim zadacima. Prije samog prebrojavanja korisno je odrediti:

- Što točno želim prebrojati? Je li lakše prebrojati nešto s određenim svojstvom ili ono što nema to svojstvo pa oduzeti od ukupnog broja?
- Postoji li neka pravilnost? Mogu li ju uočiti raspisivajući male primjere?
- Mogu li primijeniti neku od karakterističnih metoda i principa?

Neki od osnovnih principa prebrojavanja:

- princip sume (broj elemenata unije disjunktnih skupova jednak je sumi broja elemenata tih skupova - ako imamo 5 jabuka u jednoj košari i 4 kruške u drugoj košari tada imamo ukupno $5 + 4 = 9$ komada voća)
- princip produkta (broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova - u ormaru imamo 3 jakne i 7 majici, tada imamo $3 \cdot 7 = 21$ parova (jakna, majica))
- princip kvocijenta (reformulacija principa produkta)
- princip bijekcije (dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih - ako svakoj lijevoj cipeli mogu jedinstveno pridružiti desnu cipelu tada ih imam jednako)
- princip matematičke indukcije (baza, pretpostavka i korak)
- Dirichletov princip (ako $k+1$ zečeva želimo smjestiti u k kutija barem jedna kutija imat će više od 1 zeca)

Binomni koeficijent

Binomni koeficijent (n *povrh* k) označava broj k-članih podskupova n-članog skupa: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Na primjer, ako želimo od 8 mentora na kampu odabrati 3 mentora koji će organizirati reli, a nije nam bitan njihov redoslijed, to možemo učiniti na $\binom{8}{3}$ načina.
Za vježbu pokušajte objasniti formulu za binomni koeficijent.

Zadaci za zagrijavanje

1. Marin slaže sendvič za popodnevnu užinu. U hladnjaku mu je majka ostavila 2 različita peciva, 4 vrste sira te 3 različite šunke. Na koliko načina Marin može složiti svoj sendvič, ako između dvije polovice peciva želi staviti točno jednu vrstu sira i točno jednu vrstu šunke?
2. Na koliko načina 10 učenika može stati u red?
3. (a) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva?
   (b) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?
   (c) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3?
   (d) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 5?
   (e) Koliko ima različitih četveroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1?
4. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?
5. (a) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3?
   (b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji su djeljivi s 3 ili 4?
6. Koliko postoji peteroznamenkastih parnih palindroma? Palindromi su riječi i brojevi koji se jednako čitaju (pišu) i sprijeda i straga (npr. *kapak*, 1234321).

Umjereni zadaci

7. Na ploči se nalaze svi šesteroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri čemu se u brojevima svaka znamenka pojavljuje točno jedanput. Brojevi su napisani u rastućem poretku, odnosno od manjeg prema većem. Koji se broj nalazi na 500. mjestu?

8. Na Zimskom matematičkom kampu 16 učenika i mentora odlučilo je odigrati partiju mafije. Igrači se dijele po ulogama od kojih je jedna voditelj igre. Dok se igra mafija svi sudionici osim voditelja igre moraju sjesti u krug.

   (a) Na koliko načina naših 15 učenika i mentora koji igraju mogu to učiniti? (Dva načina se smatraju istima ako se jedan može dobiti iz drugoga rotacijom kruga.)

   (b) Na koliko načina mogu to učiniti ako Petar i Ana svakako žele sjediti jedno do drugoga?

9. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?

10. Na raspolaganju imamo 7 olovaka. Na koliko različitih načina možemo odabrati olovke za ponijeti na predavanje? Možemo ponijeti između 0 i 7 olovaka, uključivo. Što ako umjesto 7 imamo n olovaka?

11. Koliko različitih tornjeva od kockica možemo dobiti slažući 7 narančastih i 13 sivih kockica jednu na drugu?

12. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

Teži zadaci

13. Koliko pozitivnih djelitelja ima broj 600?

14. (a) Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od točke $(-1, 0)$ do točke $(5, 7)$?

    (b) Koliko je takvih puteva koji ne prolaze točkom $(2, 3)$?

15. Odjeljak vagona ima dvije klupe po 4 mjesta. Od 8 putnika njih 3 žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka, 2 u suprotnom smjeru, a ostalima je svejedno. Na koliko se načina putnici mogu smjestiti?

16. Koliko anagrama ima riječ *MATEMATIKA*?

17. 100 kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

18. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva čije su znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a nikoje tri uzastopne znamenke nisu ni 123, ni 246, ni 678?

19. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju (svaka dva sijeku se točno u jednoj točki, a nikoja tri ne prolaze istom točkom) dijeli ravninu?

3.3. C13: Invarijante - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Invarijanta je veličina u sustavu koja se ne mijenja tijekom nekog procesa. Često kad se u zadatku odvija neki proces kojim se treba doći do određenog rezultata ili konfiguracije je korisno naći invarijantu. Osim invarijanti, možemo naći **monovarijante**, veličine koje tijekom procesa stalno rastu/padaju/ne rastu/ne padaju.

Jako bitna napomena: ako je zadatak oblika *"može li se doći do neke konfiguracije"* i odgovor je DA, **obavezno konstruirati rješenje!** Nalaženje invarijante je korisno za isključivanje nekih slučajeva, ali ne možemo koristiti invarijantu kao dokaz da za ostale slučajeve možemo postići cilj.

Uvodni zadatak. Na ploči se nalaze brojevi 4, 7, 11, 16, 22. Nika u svakom potezu bira trojku brojeva (x, y, z), briše ih s ploče i zapisuje brojeve $(3x - y - z, 3y - x - z, 3z - y - x)$. Može li primjenjivanjem tog poteza na trojke brojeva s ploče koje odabere dobiti da na ploči piše pet 17-ica?
Rješenje. Vidimo da je suma odabrane trojke (x, y, z) nakon poteza jednaka $3x-y-z+3y-x-z+3z-x-y = x + y + z$, odnosno ostaje ista. To znači da je *suma brojeva na ploči invarijanta.* Početna suma je jednaka $4 + 7 + 11 + 16 + 22 = 60$, a kako trebamo na kraju dobiti sumu $17 \cdot 5 = 85$, nije moguće postići traženu konfiguraciju.

Traženje invarijanti u zadatcima je obično puno manje očito od ovog primjera. Neki najčešći primjeri invarijanti su ostatak koji suma daje pri dijeljenju s nekim prirodnim n, sama suma brojeva, umnožak, broj/parnost nekih ekstremnih vrijednosti.

Lakši zadaci

1. U ravnini je 201 točka: 50 crnih i 151 crvenih. U svakom potezu biramo dvije točke i mijenjamo im boju. Možemo li postići da sve točke budu crne?

2. Ploča 8 x 8 obojana je crno-bijelo kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od 8 polja u tom retku promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

3. Mačka stoji u točki koordinatnog sustava $(3, 1)$. Svake sekunde skače na drugo mjesto u koordinatnom sustavu na sljedeći način: ako se trenutno nalazi na poziciji $P(a, b)$, bira neki prirodan broj n i skače na poziciju $P'(\frac{a+b}{n}, \frac{n \cdot ab}{a+b})$. Može li mačka odabrati neki niz prirodnih brojeva tako da doskoči
a) u točku $(1, 3)$,
b) u točku $(1, 4)$?

4. Matko i Fabijan igraju igru. Fabijan na ploču zapiše neki broj slova M i neki broj slova F. Matko zatim radi sljedeći potez: bira bilo koja dva slova, obriše ih i umjesto njih napiše slovo M ako su obrisana slova bila ista ili slovo F ako su bila različita. To ponavlja dok ne ostane samo jedno slovo. Fabijan pobjeđuje ako je to slovo F, a u suprotnom Matko.
a) Dokaži da vrijednost posljednjeg slova ovisi isključivo o početnom broju svakog slova.
b) Tko pobjeđuje ako je napisano 1010 slova F i 1010 slova M?

5. Hana ima skup brojeva $\{3, 4, 12\}$ i na njemu radi sljedeću operaciju: bira dva broja a i b iz skupa i mijenja ih s $0.8a + 0.6b$ i $0.8b - 0.6a$. Može li u konačnom broju koraka doći do skupa $\{4, 6, 12\}$?

6. Eugen pred sobom ima papirnati mnogokut, škare i ljepilo. Dopuštena mu je sljedeća operacija: može odrezati dio mnogokuta, zrcaliti ga i zaljepiti nazad po istoj stranici na kojoj je odrezao dio. Može li Eugen doći do kvadrata ako je krenuo s jednakostraničnim trokutom?

7. U krugu piše 2017 nula i 2 jedinice. Antonio u svakom potezu bira tri uzastopna broja i dodaje im 1. Može li postići da na kraju svi brojevi budu jednaki?

Umjereni zadaci

8. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi 1, 2, 3, 4, ... 2011, 2012, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi 2, 4, 6, 8, ... 4022, 4024 ?

9. Matko i Fabijan igraju novu igru. Fabijan bira 27 prirodnih brojeva i zapisuje ih na ploču. Matko zatim radi sljedeći potez: bira dva broja, briše ih, i umjesto njih dva puta napiše njihov zbroj. Matko pobjeđuje kada na ploči bude 27 istih brojeva. Postoji li neka konfiguracija brojeva koju Fabijan može napisati da pobijedi, odnosno da Matko ne može doći do svih istih brojeva?

10. Zemljište dimenzija 10 x 10 podijeljeno je na 100 čestica/jediničnih kvadratića. Svaka je čestica u početnom stanju ili obrasla u korov ili je očišćena. Na početku je m čestica obraslo u korov. Korov se širi na susjedne čestice na sljedeći način: svake godine one čestice koje su imale dvije susjedne čestice (sa zajedničkom stranicom) obrasle u korov i same obrastu u korov. Odredi najmanji m za koji postoji početni raspored u korov obraslih čestica takav da, nakon konačnog broja godina, cijelo zemljište mora obrasti u korov.

11. Eva i Paula igraju igru. Paula prvo zadaje par cijelih brojeva (x, y), a Eva nakon nje par cijelih brojeva (z, w). Paulin cilj je od para (x, y) doći do (z, w) nizom transformacija, gdje za svaku transformaciju ima mogućnost trenutni par (a, b) pretvoriti u (b, a), $(a + b, b)$ ili $(a - b, b)$. Kakav par (z, w) mora Eva odabrati u odnosu na odabrane Pauline brojeve (x, y) da osigura da Paula ne može nikakvim odabirom transformacija dobiti tražene brojeve?

12. Na ploči su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 10^6. U svakom potezu biramo broj, brišemo ga i umjesto njega zapisujemo zbroj njegovih znamenki. To ponavljamo dok ne ostanemo samo s jednoznamenkastim brojevima. Hoće li na ploči biti više jedinica ili dvojki?

Teži zadaci

13. Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$ zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom$a(x + d)^2 + b(x + d) + c$ za neki realni broj d. Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:
a) $2x^2 - 1$,
b) $2x^2 - x - 1$?

14. Na ploči je zapisano $n \geqslant 3$ prirodnih brojeva. Potez se sasatoji od biranja tri broja a, b i c s ploče tako da čine stranice nedegeneriranog, nejednakostraničnog trokuta i zamjene s $a + b - c$, $b + c - a$, i $c + a - b$. Dokaži da je broj poteza konačan.

15. Barbara igra igru s kamenčićima u koordinatnom sustavu. Na početku stavlja jedan kamenčić u ishodište $(0, 0)$. Potez joj se sastoji od micanja kamenčića koji se nalazi na koordinatama (i, j) i postavljanja po jednog kamenčića na $(i + 1, j)$ i $(i, j + 1)$, pod uvjetom da na tim koordinatama nema kamenčića. Dokaži da u svakom koraku igre postoji kamenčić na koordinatama (a, b) takav da je $a, b \in \mathbb{Z}$ i $a + b \leqslant 3$.

16. Imamo n žetona kojima je jedna strana bijela, a druga crna, poredanih u red tako da je svima bijela strana gore. U svakom potezu, ako je moguće, biramo nerubni bijeli žeton, mičemo ga i okrećemo njemu susjedne markere s lijeva i s desna (dakle, prvi žeton lijevo i prvi žeton desno). Dokaži da je moguće postići konfiguraciju s dva žetona ako i samo ako $n - 1$ nije djeljivo s 3.

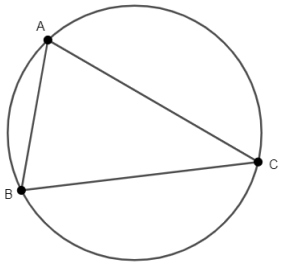
3.4. G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić

Link na hintove. Link na rješenja.

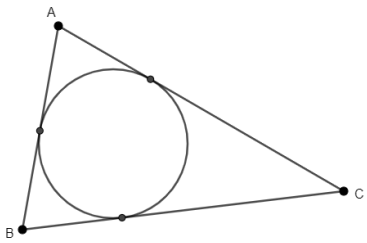
Uvod

Za kvalitetno praćenje ovog predavanja korisno je ponoviti neke pojmove i teoreme iz geometrije:

- poučci o sukladnosti trokuta - SSS, SKS, KSK, SSK
- poučci o sličnosti trokuta - KK, SKS, SSS, SSK
- simetrala dužine - pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju
- simetrala kuta - pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela
- srednjica trokuta - dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta
- opisana kružnica trokuta - kružnica koja prolazi svim vrhovima trokuta
- upisana kružnica trokuta - kružnica koja (iznutra) dira sve tri stranice trokuta



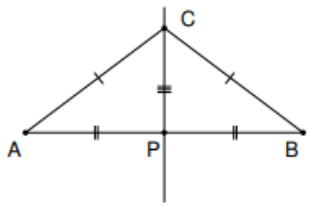
Slika 3.1: opisana kružnica



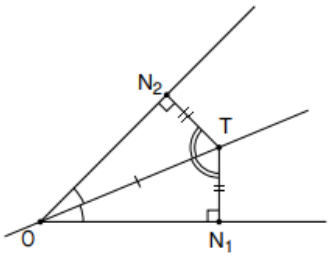
Slika 3.2: upisana kružnica

- visina trokuta - dužina koja spaja vrh s nasuprotnom stranicom trokuta i s njom zatvara pravi kut
- težišnica trokuta - dužina koja spaja vrh i polovište njemu nasuprotne stranice

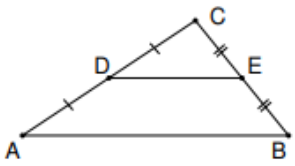
Teorem o simetrali dužine. Točka C leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.
Teorem o simetrali kuta. Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od krakova tog kuta.
Teorem o srednjici trokuta. Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.



Slika 3.3: simetrala dužine



Slika 3.4: simetrala kuta



Slika 3.5: srednjica

U ovom predavanju promatrat ćemo sljedeće karakteristične točke trokuta:

- središte trokutu opisane kružnice O - sjecište simetrala dužina stranica trokuta
- središte trokutu upisane kružnice I - sjecište simetrala kuteva trokuta
- ortocentar trokuta H - sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta
- težište trokuta T ili G - sjecište težišnica trokuta

U rješavanju geometrijskih zadataka vrlo često su od koristi i *tetivni četverokuti*, pa je zbog toga korisno znati barem najosnovnije stvari o njima. Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica, a zbroj nasuprotnih kuteva mu je $180°$. Osim toga, korisno je imati na umu i činjenicu da su obodni kutevi nad istom tetivom jednaki te da je središnji kut duplo veći od obodnog kuta nad istom tetivom.

Osnovne činjenice

1. Dokaži da se sve simetrale stranica trokuta sijeku u istoj točki koja je jednako udaljena od svih vrhova trokuta.
2. Dokaži da se sve simetrale kuta u trokutu sijeku u istoj točki koja je jednako udaljena od svih stranica trokuta.
3. Dokaži da se sva tri pravca koji sadrže visine trokuta sijeku u istoj točki.
4. Dokaži da se sve težišnice trokuta sijeku u istoj točki i ona dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha.

Lakši zadaci

5. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
6. Točke P i Q su polovišta nasuprotnih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$. Dokaži da dužine $\overline{DP}$ i $\overline{BQ}$ dijele dijagonalu $\overline{AC}$ na tri sukladna dijela.
7. Ako se središte opisane kružnice trokuta nalazi na jednoj od stranica trokuta, tada je taj trokut pravokutan. Dokažite.
8. Neka je O središte opisane kružnice, a H ortocentar trokuta ΔABC. Pravac AO siječe opisanu kružnicu u točki D. Dokaži da pravac HD prolazi polovištem stranice $\overline{HD}$.
9. U šiljastokutnom trokutu ΔABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ΔABC leži na visini $\overline{BN}$.
10. Neka je H ortocentar trokuta ΔABC. Dokažite da osnosimetrične slike točke H s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Teži zadaci

11. Dokažite da ortocentar, težište i središte opisane kružnice trokuta leže na istom pravcu. Taj se pravac naziva
    Eulerov pravac trokuta.
12. Dokažite da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta s ortocentrom leže na istoj kružnici. Ta se kružnica naziva **Feuerbachova kružnica** ili **kružnica devet točaka**.
13. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|\angle BAC| = 75°$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$, a M i N redom nožišta visina iz vrhova B i C. Odredi $|\angle MPN|$.
14. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\angle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

3.5. N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Modularna aritmetika, ili aritmetika modulo n, povezuje operacije nad brojevima s operacijama nad njihovim ostatcima pri dijeljenju nekim prirodnim brojem.
Definicija kongruencije: dva cijela broja a i b su kongruentna modulo n, $n \in \mathbf{N}$, ako n dijeli razliku a i b. To se još zapisuje kao $a \equiv b \pmod{n}$.

Neka bitna svojstva kongruencija/modularne aritmetike

Za $a, b, c \in \mathbf{Z}$ i $n \in \mathbf{N}$, vrijedi:

- $a \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, onda $b \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n}$, onda $a \equiv c \pmod{n}$.

Operacije nad kongruencijama. Za cijele brojeve $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ i proizvoljan $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

- ako $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ i $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, onda $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$, $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \pmod{n}$ i $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, tada $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ za svaki $m \in N$
- ako $ac \equiv bc \pmod{n}$ i n i c su relativno prosti, onda $a \equiv b \pmod{n}$.

Još neke definicije...

Potpuni sustav ostataka. Skup S je potpuni sustav ostataka modulo n ako elementi S svi daju različite ostatke pri dijeljenju s n, i svi ostatci se pojavljuju.
Reducirani sustav ostataka. Skup S je reducirani sustav ostataka modulo n ako svi elementi S daju različite ostatke pri dijeljenju s n i pojavljuju se svi ostaci koji su relativno prosti s n.
Eulerova funkcija. Funkcija koja broju $n \in \mathbf{N}$ pridružuje broj $\phi(n)$ koji predstavlja broj elemenata skupa $\{1, 2, ...n\}$ koji su relativno prosti s n naziva se Eulerova funkcija. Korisno svojstvo ove funkcije je da za m i n relativno proste vrijedi $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Za proste brojeve vrijedi $\phi(p) = p - 1$. Eksplicitna formula za broj $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ je $\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_r})$.
Mali Fermatov teorem. Ako je p prost broj tada za svaki a vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$. Specijalno, ako je $\gcd(a, p) = 1$ vrijedi $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. On slijedi iz **Eulerovog teorema**, koji kaže da za a i m relativno proste vrijedi $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
Diofantske jednadžbe su jednadžbe s dvjema ili više nepoznanicama čiji su koeficijenti i rješenja cijeli brojevi. Kongurencije su jako često korisne kod rješavanja diofantskih jednadžbi, što ćemo vidjeti u nekim zadatcima danas. Najčešće stvari koje se promatraju tada su ostatci pri dijeljenju s 2/3/4/5/10 ili parnost/djeljivost s 3 izraza koji u sebi ima prost broj.

Lakši zadaci

1. Pokaži da kvadrat cijelog broja može biti kongruentan isključivo 1 ili 0 (mod 3) i (mod 4).
2. Nađi sve proste brojeve p za koje je i $8p^2 + 1$ prost broj.
3. Koja je posljednja znamenka broja 3^{33}?
4. Nađi sve proste brojeve p i cijele brojeve x tako da je $13p + 4x^2 - 1470 = 0$.
5. Nađi sve cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju $x^2 + 5y = 123$.
6. Nađi sve prirodne brojeve m, n koji zadovoljavaju jednadžbu $4^m - 9n = 5$.

Umjereni zadaci

7. Nađi sve cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju $15x^2 - 7y^2 = 9$.
8. Dokaži da 7 dijeli $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ za sve prirodne brojeve n.

9. Dokaži da je $3^4 \equiv 3^{4^2} \equiv 3^{4^3} \equiv ... \equiv 3^{4^n} \pmod 7$

10. Dokaži da je broj djeljiv s 11 ako i samo ako mu je razlika zbroja znamenki na parnim mjestima i zbroja znamenki na neparnim mjestima djeljiva s 11.

11. a) Nađi sve proste brojeve p takve da $p \mid 2^p - 1$.
b) Koliko ima prirodnih brojeva $m \leqslant 1000$ za koje postoji prirodan $n \leqslant 1000$ takav da $m \mid 2^n - 1$?

12. Koje su zadnje dvije znamenke broja 3^{2041}?

Teži zadaci

13. Nađi sve prirodne $n \geqslant 2$ za koje postoji permutacija $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ brojeva $0, 1, ...n-1$ sa svojstvom da je n brojeva x_0, $x_0 + x_1$, ..., $x_0 + x_1 + ... + x_{n-1}$ međusobno različito modulo n.

14. Nađi sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $4mn - m - n$ potpun kvadrat.

15. Dokaži da je $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ jedino racionalno rješenje jednadžbe $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$.

16. Za $x \in (0, 1)$ neka je $y \in (0, 1)$ broj čija je $n-$ta decimala jednaka 2^n-toj decimali broja x. Pokaži ako je x racionalan da je i y racionalan.

17. Dokaži Eulerov, a zatim iz njega mali Fermatov teorem.

4. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

4.1. A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Niz je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, označava se $\{a_n\}$ ili (a_n).

Osnovne vrste nizova su **aritmetički** i **geometrijski**.
Niz (a_n) zovemo aritmetičkim ako je $a_n - a_{n-1} = d$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{R}$.
Niz (a_n) zovemo geometrijskim ako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$. (d i q su konstantni)

Niz za čija svaka dva susjedna člana vrijedi $a_n \leqslant a_{n+1}$ nazivamo monotono uzlazni (rastući). Za niz sa osobinom $a_n \geqslant a_{n+1}$ kažemo da je monotono silazni (opadajući).

Nizove možemo zadati na razne načine: rekurzijom, opisno, grafički, formulom. Često se u zadacima traži opći član niza a_n, što znači da se traži formula niza. Uvijek raspišite prvih nekoliko članova niza - lakše ćete uočiti pravilnosti. Također, indukcija je jako česta metoda u rješavanju zadataka s nizovima.

Lakši zadaci

1. Zadan je niz (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i
$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$
za svaki prirodni $n \geqslant 2$. Dokaži da su svi članovi niza kvadrati prirodnih brojeva.

2. Niz (a_n) je definiran tako da $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Dokaži da je niz monotono rastuć i ograničen odozgo s 3.

3. Neka je d prirodni broj te (a_n) aritmetički niz prirodnih brojeva s razlikom d. Ako je $d \leqslant 2018$, dokaži da najviše 11 uzastopnih članova niza (a_n) mogu biti prosti brojevi.

4. Neka je $a = 0.2020$, $a_1 = a$ i niz (a_n) definiran kao $a_n = a^{a_{n-1}}$. Poredaj članove niza $a_1, a_2, ...a_{2020}$ po veličini, od najmanjeg prema najvećem.

5. Niz (a_n) je zadan tako da $a_1 = a_2 = 1$ i $a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$ za $n \geqslant 3$. Dokaži da su svi članovi niza cijeli brojevi.

6. Mogu li brojevi $1, 2, ...100$ biti članovi 12 geometrijskih nizova?

Umjereni zadaci

7. Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takvih da vrijedi
$$a_1 = 1 - a_0,\ a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \text{ za } n \geqslant 1$$
Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi
$$a_0 a_1 ... a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) = 1$$

8. a) Neka je k prirodni broj. Dokaži da aritmetički niz čija je razlika prirodni broj ili ne sadrži niti jednu k-tu potenciju prirodnog broja ili ih sadrži beskonačno mnogo.

   b) Postoji li aritmetički niz čija je razlika prirodni broj koji sadrži beskonačno mnogo kubova prirodnih brojeva, ali ne sadrži niti jedan kvadrat prirodnog broja?

9. Neka su n, k, M prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = k \text{ i } a_1 a_2 ... a_n = M.$$

   Ako je $M > 1$, dokaži da ne postoji pozitivan realni broj x takav da vrijedi

$$M(x+1)^k = (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n).$$

10. Neka je (a_n) niz realnih brojeva takav da je $a_0 = -1$ i $a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + ... + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0$ za sve $n \geqslant 1$. Pokaži da je $a_n > 0$ za sve $n \geqslant 1$.

11. Dokaži da za svaki $a_1 > 1$ postoji strogo rastući niz (a_n) takav da je $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2$ djeljivo sa $a_1 + a_2 + ... + a_k$ za sve $k \geqslant 1$.

Teži zadaci

12. Neka niz pozitivnih realnih brojeva (a_n) zadovoljava $a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$ za sve pozitivne cijele brojeve k. Dokaži da $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ za sve $n \geqslant 2$.

13. Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih cijelih brojeva za koji vrijedi $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \geqslant 1$. Za sve četvorke (i, j, k, l) takve da je $1 \leqslant i < j \leqslant k < l$ i $i + l = j + k$ vrijedi nejednakost $a_i + a_l > a_j + a_k$. Odredi najmanju moguću vrijednost a_{2008}.

14. Niz $x_1, x_2, ...x_n$ je definiran tako da je $x_1 = 1$, $x_{2k} = -x_k$ i $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ za sve $k \geqslant 1$. Dokaži da je $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant 0$ za sve $n \geqslant 1$.

15. Neka je $m > 1$ cijeli broj. Niz $a_1, a_2, ...a_n$ je definiran tako da je $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ i za svaki prirodni $n \geqslant 4$

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

   Nađi sve m takve da je svaki član niza kvadrat cijelog broja.

4.2. C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić

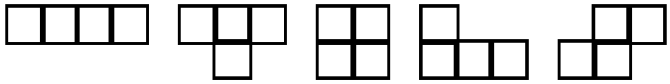
Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Zadatci ovog predavanja bave se particioniranjem skupa u konačan broj podskupova. Particioniranje se provodi **bojanjem** svakog elementa podskupa istom bojom.

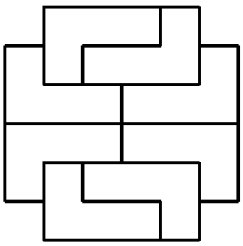
Zadatci

1. Pravokutni pod pokriven je pločicama oblika 2×2 i 1×4. Jedna se razbila. (Ne)srećom, postoji pločica koja bi ju zamijenila, no drugog oblika. Dokaži da se pod ne može pokriti preraspodjelom pločica.



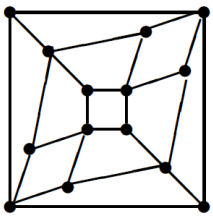
Slika 4.1: Tetromini

2. Je li moguće formirati pravokutnik s tetrominima?
3. Dokaži da 10×10 šahovska ploča ne može biti prekrivena s 25 T-tetromina.
4. Dokaži da 8×8 šahovska ploča ne može biti prekrivena s 15 T-tetromina i jednim kvadratnim tetrominom.
5. Dokaži da se 10×10 šahovska ploča ne može pokriti s 25 ravnih tetromina.



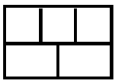
Slika 4.2: Skica za 6. zadatak

6. Neka je dana $n \times n$ šahovska ploča, ali da su joj sva četiri vrha uklonjena. Za koje vrijednosti od n možemo pokriti ploču s L-tetrominama?
7. Postoji li način pakiranja 250 $1 \times 1 \times 4$ kvadra u $10 \times 10 \times 10$ kocku?



Slika 4.3: Cestovna mreža

8. Graf prikazuje cestovnu mrežu koja spaja 14 gradova. Postoji li put koji prolazi kroz svaki grad točno jednom?
9. Pokaži da ne postoji krivulja koja siječe svaki segment na slici točno jednom.



Slika 4.4: Skica za 9. zadatak

10. Na jednom kvadratu 5×5 šahovske ploče, napišemo -1, a na ostala 24 kvadrata $+1$. U jednome potezu, možeš obrnuti predznak jednog $a \times a$ podkvadrata, pri čemu je $a > 1$. Cilj je napisati $+1$ na čitavom kvadratu. Na kojim kvadratima bi trebao -1 biti napisan da se postigne željeni cilj?

11. Sve točke u ravnini obojane su crvenom ili plavom bojom. Dokaži da za barem jednu boju uvijek postoje 2 točke zadane udaljenosti.

12. Sve točke ravnine obojane su s tri boje. Dokaži da postoje dvije točke udaljenosti 1 iste boje.

13. Dokaži da n točaka ($n \geqslant 5$) ravnine mogu biti obojane s dvije boje tako da nijedna linija ne može razdvojiti točke jedne boje od onih druge boje.

14. Uzmi u obzir tri vrha $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$ u rešetci ravnine. Možeš li dospjeti u četvrti vrh $D = (1, 1)$ kvadrata zrcaljenjima krenuvši iz A, B, C ili preko točaka u koje se prethodno zrcalilo?

15. Svaka točka ravnine obojana je s točno jednom od boja crvenom, zelenom ili bijelom. Skupovi R, G, B sastoje se od duljina onih dužina u prostoru čije su obje krajnje točke crvena, zelena i plava, redom. Pokaži da su u barem jednom od ovih skupova svih nenegativni realni brojevi.

16. 7×7 kvadrat pokriven je sa šesnaest 3×1 i jedne 1×1 pločice. Koje su dozvoljene pozicije za 1×1 pločicu.

17. Svaki element 25×25 matrice je $+1$ ili -1. Neka je a_i produkt svih elemenata i-tog retka i b_j produkt svih elemenata j-tog stupca. Dokaži da vrijedi $a_1 + b_1 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0$.

4.3. C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Sadržaj ovog predavanja će biti zadaci s geometrijskim pojmovima koji se rješavaju kombinatornim metodama. Za početak, evo nekoliko zadataka koji demonstriraju neki alat za rješavanje kombinatorne geometrije npr. princip ekstrema, indukcija, Dirichlet, invarijante i monovarijante... Također se dobro prisjetiti nekih geometrijskih trvrdnji npr. nejednakost trokuta i postojanje konveksne ljuske (*convex hull*).

1. Na sferi je zadano pet točaka. Dokaži da postoji polusfera koja sadrži barem 4 točke.
2. Zadano je nekoliko (ne nužno konačno mnogo) intervala takvih da svaka dva imaju zajednički element. Dokaži da postoji element sadržan u svim intervalima.
3. U ravnini je zadano $n > 3$ točaka takvih da nikoje 3 nisu kolinearne. Ako svake 4 čine konveksan četverokut, dokaži da svih n čine konveksan mnogokut.
4. Na koliko najviše djelova n pravaca dijeli ravninu?

Lakši zadaci

1. Zadan je kvadrat duljine stranice 6, i 7 točaka strogo unutar njega. Dokaži da postoje dvije točke međusobno udaljene za manje od $\sqrt{13}$.
2. Zadano je konačno mnogo crnih i bijelih točaka u ravnini. Na segmentu između svake dvije istobojne točke nalazi se točka suprotne boje. Dokaži da su sve te točke na istom pravcu.
3. S je skup od $n \geqslant 3$ točaka unutar kružnice k. Dokaži da postoje $a_1, a_2, a_3 \in S$ i $A_1, A_2, A_3 \in k$ takve da vrijedi $(\forall x \in S \setminus \{a_i\}) d(a_i, A_i) > d(x, A_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Dokaži da ne vrijedi analogna tvrdnja za četiri točke iz S.
4. Zadan je mnogokut nad kojim smijemo raditi sljedeću transformaciju: odaberemo neku dužinu čije su krajnje točke A i B na rubu mnogokuta, a ostale točke unutar njega, zatim jedan odsječak preslikamo osnosimetrično s obzirom na simetralu dužine. Je li takvim postupkom moguće od kvadrata dobiti jednakostraničan trokut ?

Umjereni zadaci

5. U ravnini je zadano n pravaca koji dijele ravninu na nekoliko područja. Dokaži da ravninu možemo obojati u dvije boje tako da svaka dva susjedna područja budu različite boje.
6. U ravnini je n crnih točaka, nikoje tri nisu kolinearne. Postoji li uvijek kružnica kojoj pripadaju barem tri crne točke, unutar koje nema crnih točaka?
7. U ravnini je zadano 2020 točaka, nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da postoji (ne nužno konveksan) 2020-terokut čiji su vrhovi zadane točke.
8. Na terenu se nalazi $n > 1$ nogometaša i svatko ima jednu loptu. Kad sudac da znak, svaki nogometaš dodaje svoju loptu sebi najbližem. Smijete pretpostaviti da ne postoji nogometaš kojem najbliži nije jedinstven.

   a)Dokaži da se putanje lopti ne sijeku.

   b)Za koje n možemo biti sigurni da će barem jedan ostati bez lopte?

   c)Koliko najviše lopti može primiti jedan nogometaš?
9. U nekom selu ima n kuća i n mlinova. Dokaži da je moguće svaku kuću povezati ravnom cestom s jednim mlinom (bijekcija kuća - mlin) tako da se ceste ne presjecaju

Teži zadaci

10. Triangulacija je podjela mnogokuta na trokute dijagonalama koje ne izlaze van mnogokuta i međusobno se ne sijeku. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji mnogokut s točno n triangulacija.

11. U ravnini je označeno 15 točaka. Neke su obojane crveno, neke plavo, a ostale zeleno. Broj crvenih točaka veći i od broja plavih i od broja zelenih točaka. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka crvena, a druga zelena iznosi 31. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka zelena, a druga plava iznosi 25. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka plava, a druga crvena iznosi 5. Odredi broj točaka svake boje.

12. U ravnini je $n \geqslant 2$ crvenih i isto toliko plavih točaka. Nikoje tri nisu kolinearne. Kažemo da je pravac *ravnotežni* ako prolazi kroz jednu crvenu i jednu plavu točku i ako je broj crvenih točaka na jednoj njegovoj strani jednak broju plavih na istoj toj strani.

13. Skup kružnca u ravnini je *dobar* ako vrijedi:

    I) svake dvije kružnice se sijeku u najviše 1 točki

    II) ne postoji točka kroz koju prolazi više od 2 kružnice

    III) svaka kružnica siječe 5 kružnica.

    Postoji li dobar skup s 2019 kružnica ? Postoji li dobar skup s 2020 kružnica ?

14. Zadano je pet paralelnih pravaca i na svakom su označene dvije međusobno disjunktne dužine. Za svaka dva pravca postoji okomita transverzala koja prolazi kroz označenu dužinu na obama pravcima. Dokaži da postoji okomita transverzala koja siječe tri označene dužine.

4.4. G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Počet ćemo s jednim vrlo jednostavnim zadatkom. Dokažimo da je četverokut ABCD tetivan ako i samo ako mu je zbroj dva nasuprotna kuta jednak π. Vjerojatno znate dokazati da je zbroj suprotnih kutova π ako je četverokut tetivan, ali poanta ovog zadatka je da pojasnimo metodu fantomiranja na obratu te tvrdnje. Ideja fantomiranja na ovom "zadatku" bi glasila ovako:
Nacrtamo opisanu kružnicu k kroz točke A, B i C pa uzmemo D' kao sijecište pravca CD i kružnice k. Sada slijedi da je su kutovi $\angle CDA$ i $\angle CD'A$ jednaki jer oba zbrojena s $\angle ABC$ daju π (jedan zbog uvjeta zadatka, a drugi zbog već dokazane tvrdnje čiji obrat dokazujemo sad) . Iz toga slijedi da su AD i AD' paralelni, tj. to je isti pravac. To povlači D=D' što znači da je D na kružnici k jer je po definiciji D' na k.
Dakle, u ovom zadatku smo definirali novu točku koja ima samo neke karakterizacije točke D (nalazi se na pravcu CD), ali ima i neko dodatno svojstvo (nalazi se na k) te smo dokazali da su te dvije točke zapravo ista točka. To je metoda fantomiranja. Metoda fantomiranja će se često pojavljivati u dokazima da je neka točka element određenog pravca ili kružnice. Kod takvih zadataka nije čudno da se dokazuje ekvivalencija, a ne samo implikacija. Općenito, ako treba dokazati ekvivalenciju, bilo bi dobro imati na umu da jedan smjer bude fantomiranje koje koristi drugi smjer, kao što je u nekim poznatim teoremima. Može se fantomiranje pojaviti i u npr. dokazivanja okomitosti pravaca AB i p tako da se iz A i B spuste okomice na P i dokaže da one imaju ista nožišta.
Kad uvodite fantomsku točku, imajte na umu da ona gubi neka svojstva u odnosu na zadanu točku. Zato vam savjetujem da nacrtate fantomsku točku na novoj skici. Tako ćete biti sigurni što sve smijete koristiti.
Prisjetite se dokaza Ceve i Menelaja. Jedan smjer se dokazuje fantomiranjem.

Lakši zadaci

1. Zadan je $\triangle ABC$, $|AC| > |AB|$, i točka M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je p pravac koji prolazi kroz točku A i siječe AB pod kutom jednakim $|\angle MAC|$, a pravci q i r tangente na opisanu kružnicu u vrhovima B i C redom. Dokaži da su p, q, r kopunktalni.

2. a) Dokaži da se ortocentar trokuta centralnosimetrično preko polovišta stranica preslika na opisanu kružnicu.

   b) Dokaži da se ortocentar trokuta osnosimetrično preko stranica preslika na opisanu kružnicu.

3. a) Dokaži da je četverokut ABCD tangencijalan ako i samo ako vrijedi $a + c = b + d$.

   b) Dokaži da četverokut ABCD ima okomite dijagonale ako i samo ako vrijedi $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

4. Dokaži da se simetrala stranice i simetrala nasuprotnog kuta na trokutu sijeku na opisanoj kružnici.

Umjereni zadaci

5. U trokutu ABC točka O je središte opisane kružnice. K je točka na tangenti na kružnicu kroz A, takva da je KC okomit na BC, a D je sjecište pravca BC i pravca kroz K paralelnog s AB. Dokaži da su A, O, D kolinearne.

6. Dan je trokut ABC, kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu u točkama D i E tako da točka D leži između L i E. Dokaži da se pravci BD i LE sijeku u središtu kružnice k.

7. Neka su $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ visine u $\triangle ABC$ i O središte njemu opisane kružnice. Dokaži da kružnice opisane trokutima $\triangle ADO$, $\triangle BEO$ i $\triangle CFO$, osim u O, sijeku u još jednoj točki.

8. Dan je šiljastokutni trokut $\triangle ABC$ ojem vrijedi $|AB| > |AC|$ Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane $\triangle BCO$. Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M, a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N. Neka je T presjek pravaca AQ i MN. Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj $\triangle BCO$.

Teži zadaci

9. Zadan je tetivni četverokut ABCD takav da se tangente u točkama B i D na njegovu opisanu kružnicu k sijeku na pravcu AC. Točke E i F leže na kružnici k tako da su pravci AC, DE i BF paralelni. Neka je M sjecište pravaca BE i DF. Ako su P, Q i R nožišta visina trokuta ABC, dokaži da točke P, Q, R i M leže na istoj kružnici.

10. Neka je ω kružnica opisana $\triangle ABC$. Neka su M i N polovišta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a T polovište kružnog luka BC od ω koji ne sadrži točku A. Opisane kružnice AMT i ANT sijeku simetrale $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u X i Y redom, pretpostavimo da su X i Y unutar trokuta ABC. Neka je K sjecište MN i XY. Dokaži $|KA| = |KT|$.

11. Zadan je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u C, H nožište visine iz C. Neka je D točka unutar trokuta BCH takva da pravac CH raspolavlja $\overline{AD}$, a P presjek pravaca BD i CH. Zatim označimo s k kružnicu s promjerom BD, a s Q diralište tangente na k kroz P pri čemu su Q i C na istoj strani pravca BD. Dokaži da se pravci AD i CQ sijeku na k.

4.5. N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovome predavanju bavit ćemo se raznim metodama rješavanja jednadžbi u 2 ili više nepoznanica čija rješenja su u $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{Z}$. Jasno, u svakome zadatku biti će više nepoznanica nego što je dostupnih jednaždbi jer u protivnom postoje razne algebarske metode za rješavanja i one nam nisu zanimljive. Jednadžbe koje promatramo zovu se Diofantske po grčkome matematičaru Diofantu, koji se njima prvi bavio. Predavanje je tematski podijeljeno u 4 cjeline. To je samo gruba podjela, jer itekako smo svjesni da se zadatci koji se rješavaju na natjecanjima ne mogu podijeliti u neke fine kalupe. Inače bi ih svatko mogao rješiti. Predavanje sadrži mnoštvo trikova od kojih je neke čitatelj možda već vidio, no ne sumnjam da će neke koje ovdje vidi imati stalno urezano u sjećanje kada se sljedeći put bude bavio Diofantskim jednadžbama na natjecanjima.

Metoda faktorizacije

1. Pronađi sva cjelobrojna rješenja od:
$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy).$$

2. Neka su p i q prosti brojevi. Riješi u prirodnim brojevima jednadžbu:
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}.$$

3. Odredi sve nenegativne parove cijelih brojeva (x, y) za koje je
$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

4. Odredi sve cijele brojeve n za koje je jednadžba
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=n$$
rješiva u prirodnim brojevima.

Rješavanje preko nejednakosti

5. Pronađi sve parove (x, y) cijelih brojeva t. d.
$$x^3+y^3=(x+y)^2$$

6. Riješi sljedeću jednadžbu u x, y i z prirodnim:
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}.$$

7. Odredi sve četvorke (x, y, z, w) prirodnih brojeva za koje je
$$x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=\omega^2$$

8. Pronađi sva rješenja u cijelim brojevima jednadžbe:
$$x^3+(x+1)^3+...+(x+7)^3=y^3.$$

9. Pronađi sve prirodne brojeve n, $k_1, ..., k_n$ t. d. vrijede sljedeće tvrdnje:
$$k_1+\cdots+k_n=5n-4 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{k_1}+...+\frac{1}{k_n}=1.$$

Metoda parametra

10. Dokaži da postoji beskonačno mnogo trojki (x, y, z) cijelih brojeva t. d.
$$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2.$$

11. Pronađi sve trojke prirodnih brojeva t. d.
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$$

12. Neka su a i b prirodni brojevi. Dokaži da jednadžba:
$$x^2-2axy+(a^2-4b)y^2+4by=z^2$$
ima beskonačno mnogo rješenja (x_j, y_j, z_j) gdje su (x_j), (y_j), (z_j) rastući nizovi.

13. Dokaži da jednadžba:
$$2^x+1=xy$$
ima beskonačno mnogo rješenja u prirodnim brojevima

Modularna aritmetika

14. Dokaži da jednadžba
$$(x+1)^2+(x+2)^2+...+(x+2001)^2=y^2$$
nema rješenja.

15. Pronađi sve parove (p, q) prostih brojeva t. d.
$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

16. Dokaži da jednadžba
$$x^5-y^2=4$$
nema rješenja u cijelim brojevima.

17. Dokaži da ako je n prirodan broj t. d. jednadžba
$$x^3-3xy^2+y^3=n$$
ima rješenja u cijelim brojevima x, y, tada ima barem 3 takva rješenja. Dokaži da jednadžba nema cjelobrojna rješenja za $n=2891$.

18. Riješi jednadžbu
$$2^x+1=x^2y.$$

5. Poglavlje

Zadaci za olimpijske grupe

5.1. I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Najzad konstantno

Ako je $(a_n)_n$ ograničen monoton niz cijelih brojeva, onda postoje cijeli broj A i prirodan broj N takvi da je $a_n = A$ za svaki $n > N$.

Sortiranje, princip ekstrema

Svaki konačan skup brojeva je dobro uređen (svaki neprazan podskup ima minimum). Posebno, kod konačnih ili periodičnih nizova možemo promatrati njihov minimum i maksimum, i oni se postižu.

Skup prirodnih brojeva je isto dobro uređen, pa možemo promatrati prvi indeks u nizu (ne nužno konačnom) za koji vrijedi neko svojstvo, npr. najmanji j takav da je $a_j < 0$. Isto tako, smijemo promatrati minimum niza čiji su članovi prirodni brojevi.

Ono što ne smijemo je promatrati minimum ili maksimum beskonačnog ograničenog niza realnih brojeva, jer nije nužno da oni postoje.

Zadaci

1. Neka je X podskup prirodnih brojeva takav da za svaka dva (ne nužno različita) broja $x, y \in X$ vrijedi $x + y \in X$. Nadalje, vrijedi da je $\mathbb{N} \setminus X$ konačan skup s n elemenata, gdje je n prirodan broj. Dokaži da je zbroj tih n elemenata manji ili jednak n^2.

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niz realnih brojeva takav da je $a_1 + \ldots + a_n = 0$. Definiramo $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pretpostavimo da vrijedi $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geqslant 0$ za sve $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n - 1$. Dokaži da vrijedi
$$\max_{1 \leqslant l \leqslant n} |a_l| \geqslant \max_{1 \leqslant m \leqslant n} |b_m|.$$

3. Neka su a_0, b_0 prirodni brojevi. Definiramo $a_{i+1} = a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$ i $b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$ za sve $i \geq 0$. Dokaži da postoji prirodan broj n takav da je $a_n = b_n$.

4. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi
$$m^2 + f(n)^2 + (m - f(n))^2 \geqslant f(m)^2 + n^2$$
za sve parove prirodnih brojeva (m, n).

5. Neka je $N \geqslant 2$ prirodan broj, i neka su $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \ldots b_N)$ konačni nizovi nenegativnih cijelih brojeva. Za svaki cijeli broj $i \notin \{1, \ldots, N\}$, neka je $a_i = a_k$ te $b_i = b_k$, gdje je $k \in \{1, \ldots, N\}$ takav da $n \mid i - k$. Kažemo da je $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$-harmonijski ako je svaki a_i jednak sljedećoj aritmetičkoj sredini:
$$a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

Pretpostavimo da ni **a** ni **b** nisu konstantni nizovi, i da je **a** **b**-harmonijski te je **b** **a**-harmonijski. Dokaži da je barem $N+1$ brojeva od $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ jednako 0.

6. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz brojeva iz skupa $\{0, 1\}$ takav da za svaki par prirodnih brojeva (m, n) vrijedi

$$\sum_{k=1}^{2m} a_{kn} \leqslant m.$$

Dokaži da postoje prirodni brojevi u i v takvi da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{2u} a_{kv} \leqslant u - 2020.$$

5.2. I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju govorit ćemo o *length chasingu*. On nije isto kao pravi trigonometrijski bash, gdje raspisujemo sve moguće stranice i dokazujemo tvrdnju pomoću trigonometrijskih identiteta. Koristit ćemo duljine stranica kao pomoćno sredstvo za dokazivanje određenih tvrdnji. Za to će nam biti potrebne sljedeće poznate tvrdnje:

1. *Sličnost trokuta*
2. *Sinusov poučak*
3. *Potencija točke*
4. *Poučak o simetrali kuta*: Neka je ABC trokut. Neka unutarnja i vanjska simetrala kuta BAC sijeku BC u D i E. Tada je:
$$\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE} = \frac{BA}{CA}$$
5. *Ceva, sinusni Ceva i Menelaj*: U $\triangle ABC$ Ceviani AD, BE, and CF su konkurentni akko vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$
$$\frac{\sin(\angle ABE)}{\sin(\angle CBE)} \cdot \frac{\sin(\angle BCF)}{\sin(\angle ACF)} \cdot \frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\angle BAD)} = 1$$
6. *Ptolomejev teorem*

1. Neka su AP, AQ i AR tetive iste kružnice takve da je $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$. Pokažite da je: $(AP + AR) \cdot AR = (AQ + AS) \cdot AQ$.
2. Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ koncentrične kružnice, tako da je $\mathcal{C}_2$ unutar kružnice $\mathcal{C}_1$. Iz točke A na $\mathcal{C}_1$ povlačimo tangentu AB na $\mathcal{C}_2$ ($B \in \mathcal{C}_2$). Neka je C drugo sjecište pravca AB i $\mathcal{C}_1$, te neka je D polovište dužine AB. Pravac kroz A siječe $\mathcal{C}_2$ u točkama E i F tako da se simetrale stranica DE i CF sijeku u točki M na AB. Nađite, s dokazom AM/MC.
3. Kružnice Q_1 i Q_2 se dodiruju T. Points A and E are on Q_1, pravci AB i DE su tangente na Q_2 u točkama B i D, redom, a pravci AE i BD se sijeku u točki P.

   Dokažite:
   (1) $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{ED}{ET}$;
   (2) $\angle ATP + \angle ETP = 180°$.
4. Na stranicama BC i AC trokuta $\triangle ABC$ dane su točke D i E, redom. Neka je F ($F \neq C$) sjecište opisane kružnice trokuta $\triangle CED$ i pravca koji je paralelan s AB i prolazi točkom C. Neka je G sjecište pravca FD sa stranicom AB, te neka je H točka na pravcu AB takva da je $\angle HDA = \angle GEB$ i A je između H i B. Ako je $DG = EH$, dokažite da sjecište pravaca AD i BE leži na simetrali kuta $\angle ACB$.
5. Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu s promjerom BD. Točke A' i B' su zrcalne slike točaka A i B preko pravaca BD i AC redom. Ako se pravci $A'C$ i BD sijeku u P, a pravci AC i $B'D$ se sijeku u Q, Dokažite da je PQ okomit na AC.
6. Opisana kružnice ne jednakokračnog trokuta ABC sa I touches the sides BC, CA, AB at A_1, B_1, C_1 redom. Pravac AI siječe opisanu kružnicu trokuta ABC opet u A_2. Pravac B_1C_1 siječe pravac BC u A_3 i pravac A_2A_3 siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točki $A_4(\neq A_2)$. Definiramo B_4, C_4 analogno. Dokažite da su pravci AA_4, BB_4, CC_4 konkurentni.
7. Neka je $ABCD$ tangencliajni četverokut i neka je P ortogonalna projekcija središta njegove upisane kružnice na AC. Dokažite da je $\angle APB = \angle APD$

5.3. I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Neka je p prost broj. Za prirodan broj n koji nije djeljiv s p kažemo da je kvadratni ostatak modulo p ako postoji prirodan broj a takav da $p \mid a^2 - n$. U suprotnom, kažemo da je neostatak.

Za cijeli broj a i neparan prost broj p, Legendreov simbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ definiramo na sljedeći način:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ako p dijeli a} \\ 1, & \text{ako je a kvadratni ostatak modulo p} \\ -1, & \text{ako je a kvadratni neostatak modulo p.} \end{cases}$$

Svojstva Legendreovog simbola

(a, b su proizvoljni cijeli brojevi, a p proizvoljan neparan prost broj):

- $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$
- $\left(\frac{a+bp}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$
- (Eulerov kriterij) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$
- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Gaussov zakon reciprociteta

Neka su p i q različiti neparni prosti brojevi. Tada vrijedi Gaussov zakon reciprociteta:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

I njegov suplement

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p \text{ oblika } 8k \pm 1 \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Jacobijev simbol

Jacobijev simbol je generalizacija Legendreovog simbola.

Jacobijev simbol dopušta da drugi argument nije samo prosti broj, nego može biti i neparan složeni broj. Za prirodan broj a i neparan prirodan broj $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, definiramo Jacobijev simbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ preko Legendreovog na sljedeći način:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{a_k}.$$

Važno je primijetiti da ako je Jacobijev simbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ jednak -1, tada je a sigurno kvadratni neostatak modulo n, ali ako je Jacobijev simbol jednak 1, tada a nije nužno kvadratni ostatak.

Svojstva Jacobijevog simbola

Navedena svojstva relativno jednostavno slijede iz svojstava Legendreovog simbola. (m i n su neparni prirodni brojevi, a i b su cijeli brojevi)

- $\left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{ab}{n}\right)$
- $\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{mn}\right)$
- $\left(\frac{a+bn}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$

- $\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} 0 \text{ ako je } \gcd(a,n) > 1 \\ \pm 1, \text{ inače} \end{cases}$
- $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$
- $\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } n \text{ oblika } 8k \pm 1 \\ -1, \text{ inače.} \end{cases}$
- (Analogon zakona reciprociteta) Za relativno proste m i n, vrijedi

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

Henselova lema

Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima, j neki prirodan broj i p prost broj. Neka je x cijeli broj takav da je $P(x)$ djeljiv s p^j i $P'(x)$ nije djeljiv s p. Tada postoji jedinstveni 'lift' od x modulo p^{j+1}, tj. postoji jedinstveni $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ takav da je $P(x + kp^j)$ djeljiv s p^{j+1}.

Primjer: Neka je p prost broj i j prirodan broj. Tada postoji točno $p-1$ cijelih brojeva $x \in \{0, 1, \ldots, p^j - 1\}$ takvih da $p^j \mid x^{p-1} - 1$.

Primjer: Neka je p neparan prost broj i c kvadratni ostatak modulo p. Tada je c kvadratni ostatak modulo p^j za svaki $j \in \mathbb{N}$.

Zadaci

1. Neka je n prirodan broj i p prost broj takav da $8 \mid p+1$. Dokaži da $p \nmid 2^n + 1$.
2. Neka su m i n neparni prirodni brojevi veći od 1. Dokaži da $2^m - 1 \nmid 3^n - 1$.
3. Dokaži da $2^{3^{2020}} + 1$ ima barem 2020 različitih prostih faktora koji daju ostatak 3 pri dijeljenju s 8.
4. BITNA LEMA: Dokaži da ako $n \in \mathbb{N}$ nije potpun kvadrat, onda ima beskonačno prostih brojeva p takvih da n nije kvadratni ostatak modulo p.
5. Odredi sve proste brojeve p za koje postoje cijeli brojevi a, b, c koji nisu svi djeljivi s p takvi da $p \mid a+b+c$ i $p \mid a^4 + b^4 + c^4$.
6. Za prirodan broj a, definiramo niz $(x_n)_n$ tako da je $x_1 = a$ i $x_{n+1} = 2x_n + 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odredi najveći prirodan broj k za koji postoji a za koji su brojevi $2^{x_1} - 1, 2^{x_2} - 1, \ldots, 2^{x_k} - 1$ prosti.
7. Neka je $(b_n)_n$ strogo rastući niz svih prirodnih brojeva koji se mogu zapisati kao zbroj dva kvadrata prirodnih brojeva. Dokaži da postoji beskonačno prirodnih brojeva m za koje je $b_{m+1} - b_m = 2015$.
8. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji točno jedan prirodan broj $a \in \{1, \ldots, p\}$ takav da $p \mid a^3 - 3a + 1$.

5.4. I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

1. Rastući niz $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13 \cdots$ sadrži sve prirodne brojeve koji su potencija broja 3 ili suma različitih potencija broja 3. Nađi 100. član ovog niza.

2. Dan je skup $A = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Obriši barem $n-1$ brojeva iz A prema sljedećim pravilima:

   (i) Ako je broj a izbrisan i $2a \in A$ briše se i $2a$;

   (ii) Ako su a i b izbrisani i $a+b \in A$ briše se i $a+b$.

   Odredi najmanju moguću vrijednost zbroja svih obrisanih brojeva.

3. Odredi najmanji prirodni broj $n \geqslant 4$, za koji je izmedu svakih n različitih prirodnih brojeva moguće odabrati 4 različita a, b, c, d tako da je $a+b-c-d$ djeljivo s 20.

4. Neka je A skup prvih 16 prirodnih brojeva. Nađi najmanji prirodan broj k sa sljedećim svojstvom: U svakom podskupu od A s k elemenata postoje dva različita broja $a, b \in A$ takvi da je $a^2 + b^2$ prost broj.

5. Neka je X konačan skup prirodnih brojeva, $A \subseteq X$. Dokažite da postoji $B \subseteq X$ takav da je A jednak skupu brojeva iz X koji dijele neparno mnogo članova iz B

6. Neka je S skup od 2004 prirodna broja. Za svaki $a \in S$ neka je $f(a)$ broj brojeva u S koji su relativno prosti s a. Pretpostavimo da je $f(a) < 2003$ isti za sve $a \in S$. Nađi najmanji k takav da svaki podskup od k elemenata iz S sadrži dva broja koja nisu relativno prosta.

7. Neka je A skup prirodnih brjeva takav da je $|A| = 2001$. Dokaži da postoji skup B takav da vrijedi:

   (i) $B \subseteq A$;

   (ii) $|B| \geq 668$;

   (iii) $\forall u, v \in B$ (ne nužno različite), $u + v \notin B$.

8. Neka je p neparan prost broj. Nađite broj svih podskupova A skupa $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tako da A ima točno p elemenata i zbroj svih elemenata skupa A je djeljiv s p

5.5. I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak

Link na hintove. Link na rješenja.

Svi zadaci su isprva zadani kao pitanja. Za početak pročitajte okvirno zadatke i napišite **DA/NE** uz broj svakog zadatka. Nakon toga ću vam otkriti odgovor za zadatke čija je formulacija na natjecanju otkrivala odgovor. Ispod su iskazane neke malo teže činjenice koje je korisno znati, a neće vam nužno trebati na ovom predavanju.

Lifting the exponent

Za neparan prost broj p, prirodan broj n i cijele brojeve x i y takve da je $x - y$ djeljivo s p, a x i y nisu djeljivi s p vrijedi

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n).$$

Ako je $p = 2$, situacija je nešto drugačija. Naime, za paran prirodan broj n i neparne cijele brojeve x i y vrijedi

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1.$$

Za neparan prirodan broj n i neparne cijele brojeve x i y vrijedi

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y).$$

Zsigmondyjev teorem

Neka su $a > b > 0$ relativno prosti prirodni brojevi. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji prost broj p koji dijeli $a^n - b^n$ a ne dijeli $a^k - b^k$ ni za koji prirodan broj $k < n$, osim ako:

- $n = 1$ i $a - b = 1$
- $n = 2$ i $a + b$ potencija broja 2.
- $n = 6$, $a = 2$, $b = 1$.

Slično, $a^n + b^n$ uvijek ima prosti faktor koji ne dijeli $a^k + b^k$ za $k < n$, osim za $a = 2$, $b = 1$, $n = 3$.

Mihailescuov teorem

Neka su $x, y > 1$ prave potencije prirodnih brojeva. Onda je $x - y \neq 1$.

Bertrandov postulat

Za svaki prirodan broj $n > 1$ postoji prost broj $p \in (n, 2n)$.

Primitivni korijen

Za svaki prost broj p, postoji prirodan broj g takav da je $\{1, 2, \ldots, p-1\} \equiv \{g, g^2, \ldots, g^{p-1}\} \pmod p$.

Pellova jednadžba

Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Tada je skup parova prirodnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju

$$x^2 - dy^2 = 1$$

jednak $\{(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdje je (x_1, y_1) takav da je $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ uz minimalni x_1 (a taj par postoji za svaki d koji nije potpun kvadrat), a (x_n, y_n) definiramo jednakošću $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$.

Ako za $M \in \mathbb{Z}$ postoji par prirodnih brojeva (x, y) takav da je $x^2 - dy^2 = M$, tada postoji beskonačno takvih parova.

Green-Tao teorem

Za svaki prirodan broj n, postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $ak + b$ prost za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Dirichletov teorem

Ako su a i b relativno prosti prirodni brojevi, onda postoji beskonačno prostih brojeva p takvih da $a \mid p - b$.

Zadaci

1. Neka je $f(x) = x^3 + 17$. Dokaži ili opovrgni: za svaki prirodan broj $n \geq 2020$, postoji cijeli broj x takav da je $f(x)$ djeljiv s 3^n a nije djeljiv s 3^{n+1}.

2. Neka je p neparan prost broj. Dokaži ili opovrgni: za svaki cijeli broj c postoji cijeli broj a takav da je
$$a^{\frac{p+1}{2}} + (a+c)^{\frac{p+1}{2}} \equiv c \pmod{p}.$$

3. Za prirodan broj n kažemo da je *dobar skroz* ako postoje nenegativni cijeli brojevi x i y takvi da je $n = 2^x + y^2$. Postoji li beskonačno prirodnih brojeva n takvih da su $n, n+1, n+2$ i $n+3$ dobri skroz?

4. Postoji li beskonačno prostih brojeva p takvih da je $(p-1)! + 1$ potencija prostog broja?

5. Postoje li prirodni brojevi a i b takvi da je skup prostih brojeva koji dijele barem jedan broj u nizu $(x_n)_n$ definiranom s $x_n = a \cdot 2020^n + b \cdot 2021^n$ konačan?

6. Neka je S skup svih prirodnih brojeva x za koje postoje prirodan broj n i prirodni brojevi $a_1, \ldots, a_n$ te $b_1, \ldots, b_n$ takvi da je
$$x = \frac{(a_1^2 + a_1 - 1)\ldots(a_n^2 + a_n - 1)}{(b_1^2 + b_1 - 1)\ldots(b_n^2 + b_n - 1)}.$$
Sadrži li S beskonačno prostih brojeva?

7. Postoji li permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, 2002\}$ takva da za sve prirodne brojeve $m, n \in \{1, \ldots, 2002\}$ koji su različiti i koji su iste parnosti vrijedi da je $p(m) + p(n) \neq 2p(\frac{m+n}{2})$

8. Za neprazan skup $S \subset \mathbb{N}$ kažemo da je $ab+1$-zatvoren ako je za sve (ne nužno različite) prirodne brojeve a i b iz S broj $ab+1$ također iz S. Postoji li $ab+1$-zatvoren skup S takav da beskonačno prostih brojeva ne dijeli niti jedan broj iz S?

9. Postoji li beskonačan niz $a_0, a_1, \ldots$ znamenki različitih od 0 takvih da je broj $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ potpun kvadrat za sve osim konačno mnogo prirodnih brojeva n?

10. Postoji li beskonačno parova prirodnih brojeva (m, n) takvih da $m \mid n^2 + 1$ i $n \mid m^2 + 1$?

5.6. I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Teorem

Prolog

Dio zadataka s ovog predavanja preuzet je iz priprema RMM ekipe 2015. godine.
https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2020/05/RMM_geometrija.pdf
Drugi bitan izvor informacija za ovo predavanje bio je sljedeći rad:
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf

1. (Kina TST 2007.) *Neka je $ABCD$ tetivni četverokut s opisanom kružnicom ω. Neka je ω_1 druga kružnica koja iznutra dira kraći luk $\widehat{AB}$ u točki P, a pravce BC i AD u točkama M i N, redom. Neka su I_1 i I_2 redom središta kružnica upisanih trokutima ABC i ABD. Dokaži da su točke M, N, I_1, I_2 kolinearne.*

2. *Koristeći istu konfiguraciju kao u prethodnom zadatku, dokaži sljedeće tvrdnje:*

1. *Ako je R polumjer kružnice ω, a r polumjer kružnice ω_1, dokaži da vrijedi*
$$\frac{|AN|}{|AP|} = \frac{|BM|}{|BP|} = \frac{|CM|}{|CP|} = \frac{|DN|}{|DP|} = \sqrt{\frac{R-r}{r}}.$$
2. *Ako je točka E presjek pravaca AC i MN, dokaži da je pravac PE simetrala kuta $\sphericalangle APC$.*
3. *Ako je točka E presjek pravaca AC i MN, dokaži da su četverokuti $APEI_2$ i $BPEI_1$ tetivni.*
4. *Ako je P' polovište kraćeg luka $\widehat{AB}$, dokaži da se pravci PP', AB i MN sijeku u istoj točki*
5. ***(Sveruska matematička olimpijada)** Ako je $E \in AC \cap MN$, $F \in BD \cap MN$ i $S \in AC \cap BD$, dokaži da vrijedi $|SE| = |SF|$.*

Sawayama Thebault

3. (Lema) *Neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC. Kružnica ω iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu ABC te pravce BC i AD redom u točkama E i F. Ako je I središte kružnice upisane trokutu ABC, dokaži da su točke E, F i I kolinearne.*

4. *Neka su G, D, E redom točke na nekom pravcu. Neka je Q točka takva da je $\sphericalangle DGQ = 90$ te neka je J točka takva da je $GJ \perp QD \parallel JE$, J se nalazi s druge strane QD od G i $QJ \cap GD$ se nalazi s druge strane QG od D. Neka je P' točka takva da je $P' \in QJ$ i $\sphericalangle P'ED = 90$ te neka je $P" \in QJ$ tako da vrijedi $\sphericalangle P"DQ = 90$. Dokaži da je $P' \equiv P"$.*

Teorem 5.6.1 (Sawayama Thebault)**.** *Neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC. Kružnica ω_1 iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu ABC te dužine $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$. Kružnica ω_2 iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu ABC te dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$. Ako su P i Q redom središta kružnica ω_1 i ω_2, dokaži da su točke P, I i Q kolinearne.*

Inverzija

Zadaci i rješenja:
https://www.imomath.com/index.php?options=323&lmm=0

5.7. MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U predavanju je par standardnih, ali i par funkcijskih jednadžbi sa "čudnim" uvjetima koje na ovaj ili onaj način morate iskoristiti. Zadaci 1, 5, 6, 7 će možda biti poznati nekima od vas koji su već bili na nekom od mojih predavanja.

Lakši zadaci

1. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(x + f(y) + f(xy)) = f(x) + yf(x + 1)$$

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(x^2 + xf(y)) = xf(x + y)$$

3. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je skup $\{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$ konačan i za sve $x, y \in R$ vrijedi
$$f(2f(x + y) - y) = f(2x) + f(y)$$

4. Neka je $M(a, b, c)$ srednji po veličini od brojeva a, b, c.
Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi
$$f(y - f(x)) + x - f(y) = -\frac{3}{2}|M(0, y, f(x))|$$

5. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da:
$$f\left(\frac{y}{f(x + 1)}\right) + f\left(\frac{x + 1}{xf(y)}\right) = f(y)$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$.

6. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x$$

7. Nađi sve bijekcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da:
$$f^{f(m+n)}(mn) = f(m)f(n)$$
za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.

8. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(xf(y) - f(x) - y) = yf(x) - f(y) - x$$

9. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi
$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

10. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je
$$f(x + y) \leqslant yf(x) + f(f(x))$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
Dokaži da za sve $x \leqslant 0$ vrijedi $f(x) = 0$.

11. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$x + f(y) + f(f(z)) = 0 \implies f(x)^3 + yf(y)^2 + z^2 f(z) = 3xyz$$

5.8. M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Nekoliko savjeta za početak:

- Ne zaboravi na bojanja i invarijante (pogotovo na "Je li moguće..." zadacima), niti na Dirichleta i princip ekstrema (pogotovo na "Odredi najmanji/najveći broj" zadacima).
- MALI PRIMJERI. Isplati se potrošiti 5-10 min na proučavanje ploče manjih dimenzija.
- Izbjegavaj proučavanje primjera koji su potpuno *random*, pogotovo ako izravno promatraš tvrdnju zadatka. Odredi si cilj, pretpostavi nešto, proučavaj kako se mijenjaju neki parametri, promotri koje poteze treba izbjegavati jer vode do onog što ne želiš...

Lakši zadaci?

1. Nađi najmanji n takav na svakoj 1000×1000 ploči s n crnih polja postoje tri crna polja čija su središta vrhovi pravokutnog trokuta.
2. Imamo šahovski obojanu 2020×2020 ploču. U potezu možemo odabrati neki skup polja koja čine pravokutnik i promijeniti boju svima. Koliko nam najmanje poteza treba da sva polja budu istobojna.
3. Imamo 1×2020 ploču. Dva igrača naizmjence zapisuju slovo S ili O u jedno polje. Prvi igrač koji dovrši riječ "SOS" u tri uzastopna polja, pobjedio je. Tko ima pobjedničku strategiju?
4. Mike i Sully igraju igru na 6×6 ploči. Igrač na potezu smije odabrati prazno polje i u njega zapisati dosad nezapisan racionalan broj. Igra završi kad svako polje ima broj i tada Mike u svakom stupcu polje s najvećim brojem (i njegove rubove) oboji u zeleno. Ako se može od lijevog do desnog kraja ploče povući krivulja koja je cijela zelena, onda Mike pobjeđuje. Ako ne, Sully pobjeđuje. Tko ima pobjedničku strategiju?
5. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Ploča $n \times n$ s n topova/kula je *smirena* ako je u svakom retku i svakom stupcu točno jedan top. Nađi najveći k takav da na svakoj smirenoj ploči postoji barem jedan $k \times k$ kvadrat bez topova.
6. Pločicu koja nastane kad $n \times n$ ploči odrežemo sva polja strogo iznad glavne dijagonale nazivamo *stepenice* reda n. Možemo li 2018×2018 ploču bez dva polja u istom retku opločiti (bez preklapanja) stepenicama reda 3 i stepenicama reda 4 ?
7. Pravokutnik P čije su duljine stranica neparni prirodni brojevi podijeljen je na manje pravokutnike čije su duljine stranica prirodni brojevi. Dokaži da među njima postoji barem jedan za kojeg su udaljenosti od stranica od P brojevi iste parnosti.
8. Na nekim poljima beskonačna ploči nalazi se automobil okrenut u jedan od četiri moguća smjera. U jednom potezu odaberemo jedan auto i pomaknemo ga jedno polje naprijed. Na jednom polju ne mogu biti dva ili više automobila, ne postoje dva koja su u istom retku (ili stupcu) usmjereni jedan prema drugom i na početku je ispred svakog auta prazno polje. Dokaži da postoji beskonačan niz poteza u kojem se svaki auto pomiče beskonačno mnogo puta.

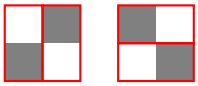
Teži zadaci?

9. Točku (x, y) za $x, y \leqslant 20$ nazivamo *pozicija*. Na početku su sve pozicije prazne. Ruby i Sapphire naizmjence povlače sljedeće poteze (ako mogu), prvo Ruby. Ruby postavi crveni kamen na prazno polje koje nije udaljeno za $\sqrt{5}$ od nekog drugog crvenog kamena. Sapphire postavi plavi kamen na bilo koje prazno polje. Odredi najveći N takav da Ruby može postaviti barem N crvenih kamena neovisno o Sapphirinim potezima.
10. Neka polja $n \times n$ ploče su plava. Poznato je da svako polje koje nije plavo ima susjedno (koje dijeli stranicu) plavo polje . Poznato je i da za svaki par plavih polja A i B postoji niz plavih polja koji počinje na A, završava na B i svaka dva uzastopna u nizu su susjedna na ploči.

    Dokaži da na ploči ima barem $\frac{n^2-2}{3}$ plavih polja.

11. Imamo ploču bez rupa sastavljenu od jediničnih kvadratića (nije nužno pravokutnik) koja je šahovski obojana. Za 2×2 kvadrat opločen 2×1 dominima na neki od prikazanih načina kažemo da je *loš*. Ako cijelu ploču možemo opločiti dominima, dokaži da ju možemo opločiti dominima tako da nema loših kvadrata i dokaži da je opločenje bez loših kvadrata jedinstveno.

    Loši kvadrati:

12. Na svakom polju $n \times n$ nalazi se ugašena žarulja. U jednom potezu možemo promijeniti stanje m uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu. Dokaži da možemo postići da sve žarulje budu upaljene ako i samo ako m dijeli n.

13. Na $n \times n$ ploči dva suprotna kuta su crna, a ostala polja su bijela. Koliko najmanje polja treba još obojati u crno kako bi smo promjenama boja svih polja u jednom retku (ili stupcu) mogli postići da sva polja budu istobojna.

14. Na 2020×2020 ploči nalaze se smeđi i zeleni crvi. Smeđi crvi se mogu kretati prema dolje i desno, a zeleni gore i desno. Koliko najviše crva može biti na ploči tako da možemo biti sigurni da postoji polje na koje niti jedan crv neće doći?

15. Neka je n paran prirodan broj. Koliko najmanje polja $n \times n$ ploče treba označiti tako da opločenje ploče 2×1 dominima, pod uvjetom da nijedan domino ne prekriva dva označena polja, bude jedinstveno?

16. Neka je α realan broj. Posejdon i Hefest igraju igru. Zadana je beskonačna kvadratna mreža. Prvo posejdon odabere nekoliko polja koja postanu *poplavljena*, zatim naizmjence povlače poteze (prvo Hefest), Hefest u svojem potezima gradi zid koji je jedna izlomljena crta po rubovima polja koja se ne siječe, a nakon njegovog n-tog poteza ne smije biti dulji od $n\alpha$ jediničnih dužina. Posejdon u svojem potezu poplavljuje sva polja koja tad imaju poplavljenog susjeda, osim ako zid prolazi njihovom granicom. Za koje α Hefest može osigurati da zid nakon konačno mnogo poteza bude zatvoren i da se sva poplavljena polja nađu unutar njega?

5.9. M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC duljina stranica a, b, c dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Središte te kružnice je točka I. Središta A, B, C-pripisanih kružnica su I_A, I_B, I_C. A-pripisana kružnica dodiruje stranice trokuta u točkama D', E', F'. Sve leme i identiteti navedeni za jedan vrh trokuta vrijede i za ostale, ciklično.

Neke duljine

$$|AE| = |AF| = |BE'| = |CF'| = \frac{b+c-a}{2}$$

Ako su X, Y dirališta A-pripisane i AB, AC:

$$|AX| = |AY| = \frac{a+b+c}{2}$$

Neke forice

- Točke I, I_A, B, C su na kružnici sa središtem u polovištu luka BC opisane kružnice trokutu ABC koji ne sadrži A (sjecištu unutarnje simetrale pri A sa opisanom kružnicom).
- Točke I_B, I_C, B, C su na kružnici sa središtem u polovištu luka BC opisane kružnice trokutu ABC koji sadrži A (sjecištu vanjske simetrale pri A sa opisanom kružnicom)
- Neka pravac DI siječe dužinu $\overline{EF}$ u točki P, a upisanu kružnicu još jednom u točki Q.
  (a) A, Q, D' su kolinearne.
  (b) Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, A, P i M su kolinearne.
- AD, BE, CF su konkurentne u Gergonneovoj, a AD', BE', CF' u Nagelovoj točki trokuta ABC.

Zadaci

1. Upisana kružnica trokuta ABC, sa središtem u I, dira stranicu $\overline{BC}$ u D. DI siječe AC u X. Tangenta iz X na upisanu raličita od AC siječe AB u Y. Ako se YI i BC sijeku u Z, dokaži $|AB| = |BZ|$.
2. Neka je $ABCD$ jednakokračan trapez sa $AB \parallel CD$. Upisana kružnica trokuta BCD dira CD u E. Neka je F na unutarnjoj simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je EF okomito na CD. Kružnica ACF siječe CD još i u G. Dokaži da je AFG jednakokračan.
3. Neka je ABC trokut i neka je I_A središte tom trokutu A-pripisane kružnice. Ona dira $\overline{BC}$ u M, a pravce AB i AC redom u K i L. LM i BI_A sijeku se u F, a KM i CI_A u G. Neka je S sjecište AF i BC i neka je T sjecište AG i BC. Dokaži da je M polovište $\overline{ST}$.
4. Neka je $\triangle ABC$ takav da $|AB| < |AC|$ sa središtem upisane kružnice u I. Neka je $E \in \overline{AC}$ takva da $|AE| = |AB|$. Neka je $G \in EI$ takva da $|\angle IBG| = |\angle CBA|$ i da su E, G sa suprotnih strana I. Dokaži da su AI, okomica na AC u E i simetrala kuta $\angle BGI$ konkurentne.
5. Neka je $\triangle ABC$ takav da $|AB| + |CA| = 3|BC|$. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ dira AB, CA u D, E. Neka su K, L točke na upisanoj kružnici nasuprot D, E. Dokaži da je četverokut $BLKC$ tetivan.
6. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan. Neka A-pripisana kružnica ima središte u I_A i dira BC, CA, AB u X, Y, Z. Neka kružnica promjera $\overline{BC}$ siječe YZ u U, V. Dokaži da se BU i CV sijeku u I_A.
7. Neka je ω_A A-pripisana kružnica u $\triangle ABC$ i D, E, F njena dirališta sa BC, CA, AB. Kružnica AEF siječe BC u P i Q. Neka je M polovište $\overline{AD}$. Dokaži da se ω_A i kružnica MPQ diraju.

8. Neka je ω kružnica sa središtem u točki S. Neka su A, B točke na ω takve da dužina $\overline{AB}$ nije promjer ω. Neka je T točka na kraćem luku $\widehat{AB}$. Tangente na ω kroz točke A, B sijeku se u P. Tangenta na ω u točki T siječe pravac AP u E i pravac BP u F. Neka je M polovište dužine $\overline{EF}$. Dokaži da se pravci PM, ST, AB sijeku u jednoj točki.

9. Dan je trokut ABC, sa središtem upisane kružnice I i opisanom kružnicom Γ. AI siječe Γ u D. Neka je E na luku BDC, a F na stranici $\overline{BC}$, takve da $|\angle BAF| = |\angle CAE| < \frac{1}{2}|\angle BAC|$. Ako je G polovište $\overline{IF}$, dokaži da se EI i DG sijeku na Γ.

5.10. M8: Diofantske - Ivan Sinčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Teorem Definicija Primjer Lema Zadatak
Zadatak Zadatak
Rješenje Napomena

Beskonačni spust

Ukoliko uvođenjem supstitucija za varijable u jednadžbi dođemo do istog zadatka s novim nepoznanicama (koje su najčešće manje po apsolutnoj vrijednosti od početnih), ovom metodom možemo se pozvati na rekurziju i tako naći sva rješenja zadatka.

Primjer 1. *Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

Dokaz. Lijeva strana mora biti parna pa imamo dva slučaja: Prva mogućnost je da je točno jedan od brojeva x, y, z paran, ali tada je desna strana djeljiva s 4 dok lijeva nije. Druga mogućnost je da su sva tri broja parna pa možemo uvesti supstituciju:

$$x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$$

Jednadžba sad postaje:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Ponavljajući iste argumente dobivamo da i sve tri nove varijable moraju biti parne. Ovaj postupak ponavljat će se beskonačno pa svaki od brojeva x, y, z mora biti djeljiv s 2^n za proizvoljno veliki n iz čega slijedi da je jedina mogućnost $x = y = z = 0$ što je uistinu rješenje jednadžbe. □

Primjer 2. *Odredi sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva takve da vrijedi:*

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

Dokaz. Iz dane jednadžbe slijedi:

$$\begin{cases} 36a + b = 2^x \\ a + 36b = 2^y \end{cases}$$

Kako su lijeve strane obje jednadžbe veće ili jednake od 37, moramo imati $x, y \geqslant 6$. Sada iz prve jednadžbe slijedi $4|b \Rightarrow b = 4b_1$, a iz druge slijedi $4|a \Rightarrow a = 4a_1$. Nove jednadžbe sada glase:

$$\begin{cases} 36a_1 + b_1 = 2^{x-4} \\ a_1 + 36b_1 = 2^{y-4} \end{cases}$$

Nove jednadžbe izgledaju isto kao i prošle dvije s razlikom u eksponentima na desnoj strani. Zbog ovoga možemo ponoviti argumente koje smo već iskoristili pa ćemo imati $x - 4,\ y - 4 \geqslant 6$. Zapravo, budući da ćemo ovaj argument ponoviti beskonačno mnogo puta, moramo imati $x - 4k,\ y - 4k \geqslant 6,\ \forall k \in \mathbb{N}$ što je nemoguće pa početna jednadžba nema rješenja. □

Zadatak 1. *Dokaži da jednadžba $x^4 + y^4 = w^2$ nema cjelobrojnih rješenja osim $(x, y, w) = (0, 0, 0)$.*

Smještanje između potencija

Ukoliko želimo pokazati da dana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, ovom metodom to možemo postići vrlo lako. Ona se sastoji od toga da pokažemo kako se potpuna potencija mora nalaziti strogo između dviju uzastopnih istih potpunih potencija, primjerice potpun kvadrat između dva uzastopna potpuna kvadrata.

Primjer 3. *Može li izraz $x^3 + x^2 + x + 1$ ikada biti potpun kub za prirodan broj x?*

Rješenje. Kako je x prirodan broj, vrijede sljedeće nejednakosti:

$$x^3 < x^3 + x^2 + x + 1 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Dakle dani izraz smo smjestili između dvije uzastopne potencije prirodnih brojeva, pa ne može biti potpun kub ni za koji $x \in \mathbb{N}$. □

Primjer 4. *Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, n) koje zadovljavaju sustav jednadžbi:*

$$\begin{cases} n+2=a^3 \\ n^2+n+1=b^3 \end{cases}$$

Rješenje. Množeći jednadžbe dobivamo $n^3+3n^2+3n+2=(ab)^3$. Sada vidimo da vrijedi:

$$(n+1)^3 < n^3+3n^2+3n+2=(ab)^3 < n^3+6n^2+12n+8=(n+2)^3$$

pa je $(ab)^3$ potpuni kub smješten između dvije uzastopne treće potencije prirodnih brojeva te dani sustav nema rješenja. □

Primjer 5 (Državno 2014. 3. razred). *Postoje li prirodni brojevi m i n za koje su m^2+n i n^2+m kvadrati prirodnih brojeva?*

Rješenje. Dane uvjete možemo zapisati kao sustav jednadžbi

$$\begin{cases} m^2+n=x^2 \\ n^2+m=y^2 \end{cases}$$

gdje su $x, y \in \mathbb{N}$. Kako je ovaj sustav ekvivalentan sustavu kojeg bi dobili zamjenom varijabli m i n, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m \geqslant n$. Sada vrijedi $m^2 < m^2+n=x^2 < m^2+2m+1=(m+1)^2$ pa je x^2 potpuni kvadrat smješten između dva uzastopna kvadrata prirodnih brojeva što je nemoguće. Dakle traženi m i n ne postoje. □

Vieta jumping

Ovo je relativno nova metoda koja se prvi put pojavila na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 1988. godine. Sastoji se od toga da pretpostavimo da postoji rješenje jednadžbe koje ne zadovoljava dane uvjete te koristeći Vieteove formule dokažemo da po nekom kriteriju postoji "ekstremnije" rješenje kako bi iskoristili tehniku kontradikcije ako smo pretpostavili da je prvo promatrano rješenje ekstremno, odnosno tehniku beskonačnog spusta kako bi nam ostao jednostavan slučaj.

Primjer 6 (IMO 1988.). *Neka su a, b prirodni brojevi takvi da $ab+1 \mid a^2+b^2$. Dokaži da je $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ potpuni kvadrat.*

Rješenje. Pretpostavimo da postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da $ab+1 \mid a^2+b^2$ i da broj $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ nije kvadrat prirodnog broja te fiksirajmo k. Neka su $A, B \in \mathbb{N}$ takvi da je $k=\frac{A^2+B^2}{AB+1}$ i $A+B$ je minimizirano te BSO pretpostavimo $A \geqslant B$. Fiksirajmo B, riješimo se razlomka i promatrajmo dobiveno kao kvadratnu jednadžbu u A kojeg ćemo supstituirati s x:

$$x^2-kBx+B^2-k=0$$

Znamo da je jedno rješenje ove jednadžbe $x_1=A$. Koristeći Vieteove formule dobivamo da drugo rješenje zadovoljava $x_2=kB-A$ i $x_2=\frac{B^2-k}{A}$. Prva jednakost pokazuje da je x_2 cjelobrojan, a druga $x_2 \neq 0$ jer k nije potpun kvadrat. Iz $\frac{x_2^2+B^2}{x_2B+1}=k>0$ slijedi da je $x_2>0$ pa sada iz $A \geqslant B$ dobivamo $x_2=\frac{B^2-K}{A}<A$ te $x_2+B<A+B$ što je kontradikciji s minimalnošću $A+B$. □

Primjer 7. *Neka su a, b prirodni brojevi takvi da $ab \mid a^2+b^2+1$. Dokaži da vrijedi $3ab=a^2+b^2+1$.*

Rješenje. Ako je $a=b$, imamo $a^2 \mid 2a^2+1 \implies a=1=b$ i to je rješenje jednadžbe zadovoljava tvrdnju zadatka. Nadalje BSO pretpostavimo $a>b$ i neka je $k=\frac{a^2+b^2+1}{ab}$ fiksiran te kao u prethodnom primjeru supstituiramo a sa x te promatrajmo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2-kbx+b^2+1=0$$

Jedno rješenje ove jednadžbe je a, a drugo zadovoljava $x_2=kb-a=\frac{b^2+1}{a}$ iz čega slijedi da je x_2 cjelobrojan te da je pozitivan. Zbog $a>b$ slijedi $x_2=\frac{b^2+1}{a}<b$ kadgod je $b>1$ pa primjenom ove zamjene rješenja uz fiksni k nakon konačno mnogo koraka dolazimo do slučaja gdje je $b=1$. Sada mora vrijediti $a \mid a^2+2$ pa je $a \in \{1, 2\}$. Prvi slučaj smo već promotrili, a u drugom dobivamo $k=\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3$ što vrijedi za proizvoljno odabrani k pa smo gotovi. □

Zadatak 2. *Dokaži da za svaki realan broj N jednadžba*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

ima rješenje gdje su a, b, c, d cijeli brojevi veći od N.

Zadatak 3. (Crux Mathematicorum) *Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Dokaži da je $a^2 + b^2 - abc$ potpuni kvadrat.*

Zadatak 4. *Odredi broj uređenih parova prirodnih brojeva (n, m) takvih da vrijedi $1 \leqslant n < m \leqslant 100$, $n \mid m^2 - 1$ i $m \mid n^2 - 1$.*

Zadatak 5. (IMO 2007. problem 5.) *Neka su a, b prirodni brojevi takvi da $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Dokaži da je $a = b$.*

Zadatak 6. *Neka su a, b prirodni brojevi takvi da je $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = n$ prirodan broj. Dokaži da je $n = 5$.*

5.11. M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Rubrika poučno

1. Neka su $x, y, z \geqslant 0$ takvi da je $x + y + z = 1$. Odredi maksimalnu vrijednost izraza $xy^2 + xz^2 + 2xyz$.

Polinom slučaja jednakosti

2. Neka su $-1 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$ takvi da vrijedi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Dokaži da vrijedi:

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqslant \frac{n}{4}$$

Kada se postiže jednakost?

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1)$$

Odredi najveću moguću vrijednost izraza:

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$$

4. **(IMO shortlist 2010. A2)** Neka su a, b, c, d realni brojevi koji zadovoljavaju $a + b + c + d = 6$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Dokaži da vrijedi:

$$36 \leqslant 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leqslant 48$$

Još jače!

5. Dokaži da za $x, y, z \geqslant 0$ vrijedi:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geqslant xyz + |(x-y)(y-z)(z-x)|$$

6. **(Balkan MO 2005.)** Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ i odredi kada se postiže jednakost.

7. Dokaži da za $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} > \frac{1}{3}\left(\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 - c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 - a^2} + \frac{(\max\{a,b,c\} - \min\{a,b,c\})^2}{a+b+c}\right)$$

8. Dokaži da je najveća konstanta k takva da za sve međusobno različite $a, b, c \geqslant 0$ vrijedi:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{3} \sum_{cyc} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} + k \cdot \frac{\prod_{cyc}(a-b)^{\frac{4}{3}}}{\prod_{cyc}(a+b)}$$

upravo $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

5.12. M10: Euler, CRT - Borna Šimić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Eulerov teorem

Neka je $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti sa n.
Tada za $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Z}$ za koji je $M(a, n) = 1$ vrijedi:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Za p prost dobivamo $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, što je upravo mali Fermatov teorem.

Kineski teorem o ostacima

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ relativno prosti prirodni brojevi. Sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{a_1} \\ x &\equiv x_2 \pmod{a_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv x_k \pmod{a_k} \end{aligned}$$

ima rješenje koje je jedinstveno $\pmod{a_1 a_2 \ldots a_k}$

Zadaci

1. Dokaži Eulerov teorem.
2. Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svim članovima niza $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.
3. Dokaži da skup $S = \{2^n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ima beskonačan podskup kojem su svi članovi u parovima relativno prosti.
4. Za $x \in \langle 0, 1\rangle$ neka je $y \in \langle 0, 1\rangle$ broj čija je $n-$ta decimala jednaka 2^n-toj decimali broja x. Pokaži:
$$x \in \mathbb{Q} \implies y \in \mathbb{Q}$$
5. Dokaži da za svaki prosti broj p postoji prirodan broj n takav da
$$1^n + 2^{n-1} + \ldots + n^1 \equiv 2020 \pmod{p}$$
6. Neka su a, b fiksni prirodni brojevi. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji dijele bar 1 element niza
$$a_n = a \cdot 2016^n + b \cdot 2017^n$$
7. Dokaži da za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji k uzastopnih brojeva takvih da svaki od njih ima barem m različitih prostih djelitelja.
8. Dokaži da postoji beskonačan skup $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da su svaka dva člana relativno prosta, ali suma elemenata svakog podskupa S je složena.
9. Skup $A \subset \mathbb{N}$ zovemo *neprijateljskim* ako za svaki par (a, b) brojeva iz A postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $M(a, b) = 2^k$.

   Dokaži da postoji beskonačan $S \subset \mathbb{N}$ takav da je skup suma parova različitih elemenata S neprijateljski.

5.13. M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na ovom predavanju vidjet ćemo neke klasične ideje koje se pojavljuju na natjecanjima. Fokus predavanja biti će dodavanje točaka, pravaca ili kružnica: što treba uvesti da bismo riješili zadatak?

Lakši zadaci

1. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABLK$ i $ACMN$. Dokaži da vrijedi $|KN| = 2|AP|$, gdje je P polovište dužine $\overline{BC}$.

2. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki E. Točka F je centralno simetrična slika točke C obzirom na točku E. Dokaži da su pravci AF i BD okomiti ako i samo ako su pravci AB i CD okomiti.

3. U šiljastokutnom trokutu ABC koji nije jednakostraničan, točka P je nožište visine iz vrha C. Neka je H ortocentar tog trokuta, a O središte opisane kružnice. Neka je D presjek pravaca CO i AB, a E polovište dužine $\overline{CD}$. Dokaži da pravac EP prolazi kroz polovište dužine $\overline{OH}$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|\angle BAC| > 45°$ sa središtem opisane kružnice O. Točka P leži u unutrašnjosti trokuta tako da su točke A, P, O, B konciklične i pravac BP je okomit na CP. Točka Q se nalazi na dužini BP tako da je AQ paralelan s PO.

   Dokaži da je $|\angle QCB| = |\angle PCO|$.

5. Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H. Neka je točka G odabrana tako da je četverokut $ABGH$ paralelogram. Neka je I točka na pravcu GH takva da AC raspolavlja HI. Neka pravac AC siječe opisanu kružnicu trokuta GCI u točkama C i J. Dokaži da je $IJ = AH$.

6. Točke P i Q odabrane su na stranici BC šiljastokutnog trokuta ABC tako da $\angle PAB = \angle ACB$ i $\angle QAC = \angle CBA$. Točke M i N su odabrane na polupravcima AP i AQ, redom, tako da je $AP = PM$ i $AQ = QN$. Dokaži da se pravci BM i CN sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Dio II

Zadaci s predavanja na drugom terminu

6. Poglavlje

Zadaci za prvu grupu

6.1. A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćemo se s nekim metodama i trikovima faktorizacija i rješavanja sustava jednadžbi. Faktorizacija je zapisivanje izraza u obliku umnoška više faktora. U ovom predavanju koristit ćemo ju primarno za rješavanje sustava jednadžbi.
Za faktorizaciju obično koristimo sljedeće metode:

- Izlučivanje zajedničkog faktora (svojstvo distributivnosti)
- Grupiranje, zapisivanje izraza u drugom obliku - zbroj, razlika (svojstva komutativnosti i asocijativnosti)
- Algebarski identiteti (formule)

Neki od korisnih identiteta (formula) su:

- Kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Kub binoma: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- Razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Zbroj/razlika kubova: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- *Potencija binoma: $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

Neke ideje koje se mogu koristiti za rješavanje sustava jednadžbi:

- Faktorizacija, posebno kad se jedna strana jednadžbe izjednači s nulom
- Zbrajanje, oduzimanje i množenje jednadžbi
- Supstitucije

Lakši zadaci

1. Dokažite algebarske identitete iz uvoda.
2. Dokažite da je razlika kvadrata dva neparna prirodna broja djeljiva sa 8.
3. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 9.
4. Dokažite identitet:
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$
5. Nađite sve realne brojeve x takve da je
$$x^3 + 3x^2 - 5x = 15$$
6. (*Identitet Sophie Germain*) Faktorizirajte izraz $a^4 + 4b^4$.

Umjereni zadaci

7. Nađite sve realne brojeve x takve da je

$$x^5 + 10x^3 + 11x = 0$$

8. Riješite sustav jednandžbi:

$$x_2 = \frac{1 + x_1}{1 - x_1}$$
$$x_3 = \frac{1 + x_2}{1 - x_2}$$
$$\dots$$
$$x_{2015} = \frac{1 + x_{2014}}{1 - x_{2014}}$$
$$x_{2015} = \frac{1}{5}$$

9. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

   Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

10. Odredite sve uređene trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da vrijedi

$$ab = c, ac = b, bc = a.$$

11. Kada bi se u pravokutnom trokutu duljina jedne katete povećala za 7 cm, a druga ostala ista, hipotenuza novog trokuta bila bi 5 cm dulja od hipotenuze početnog trokuta. Ako bi se duljina iste katete u početnom trokutu smanjila za 4 cm, a druga ostala ista, hipotenuza novog trokuta bila bi 2 cm kraća od hipotenuze početnog trokuta.

    Odredite duljine kateta.

    (*Pitagorin poučak:* $a^2 + b^2 = c^2$, *a i b katete, c hipotenuza*)

12. Ako je $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 14$, odredite $a^3 + b^3$.

13. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 = 8$ i $a^6 + b^6 = 416$. Odredite ab.

Teži zadaci

14. Riješite sustav jednadžbi:

$$(x + y)^2 - z^2 = 1$$
$$(y + z)^2 - x^2 = 5$$
$$(z + x)^2 - y^2 = 10$$

15. Odredite sva realna rješenja sustava

$$x^2 - y^2 = 2(xz + yz + x + y)$$
$$y^2 - z^2 = 2(yx + zx + y + z)$$
$$z^2 - x^2 = 2(zy + xy + z + x)$$

16. Odredite sve trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y + z} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z + x} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x + y} = \frac{1}{7}$$

17. Riješite sustav jednadžbi:

$$2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$$
$$\dots$$
$$2x_{1994} - 5x_1 + 3x_2 = 0$$

18. Odredite sve trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje vrijedi

$$(x^2 + 1)y = z^2 + 1$$
$$(y^2 + 1)z = x^2 + 1$$
$$(z^2 + 1)x = y^2 + 1$$

6.2. C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Dirichletov princip je pravilo koje u svom najjednostavnijem obliku kaže da ako $n+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dvije kuglice.

Ime je dobio po njemačkom matematičaru Johannu Dirichletu koji ju je prvi formalizirao. Često se izriče pomoću kaveza i zečeva ili pak kutija i golubova, pa se možete susresti s Dirichletovim principom i pod imenom *princip golubinjaka (pigeonhole principle)*.

Primijetimo da tvrdnja pogotovo vrijedi ako je broj kuglica veći od $n+1$. Može u više kutija biti po dvije kuglice, može u jednoj (ili nekoliko) kutija biti po tri i više kuglica, ili neka kombinacija toga, ali ono što je sigurno je da postoji *barem* jedna kutija s *barem* dvije kuglice.

Malo kompliciraniji, ali puno korisniji oblik glasi ovako: ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

Dokaz. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga.
Intuitivno: koliko god se mi trudili rasporediti sve kuglice tako da ne postoji bar jedna kutija s bar $k+1$ kuglicom, ne možemo to postići.

I u ovom obliku tvrdnja vrijedi i kada je broj kuglica veći od $nk+1$, tj. kad je jednak $nk+l$ za neki l veći od 1. Primijetite da je jednostavniji oblik s početka zapravo poseban slučaj kompliciranijeg oblika za $k=1$.

Zbog preglednosti, u ostatku predavanja koristim sljedeće oznake:

- n - ukupan broj kutija
- m - ukupan broj kuglica koji je jednak $nk+l$ za neke prirodne brojeve k i l.

U našim će zadacima neki drugi pojmovi zamijeniti kutije i kuglice, ali ideja je ista - samo treba prepoznati što nam u zadatku predstavlja kutije, a što kuglice. Kuglice su uglavnom očite, a za kutije nekad moramo biti malo kreativniji, pogotovo u geometrijskim zadacima gdje često sami moramo podijeliti neki geometrijski lik na manje dijelove koji onda predstavljaju kutije.

Primjer 1. Dokažite da u skupini od 5 ljudi postoji dvoje ljudi koji su rođeni u istom godišnjem dobu.

Rješenje. Ljudi su kuglice, a godišnja doba su kutije, tj. $n=4$, $m=5$, pa po Dirichletovom principu zbog $m=n+1=n\cdot 1+1$ slijedi tvrdnja zadatka.

Primjer 2. U učionici ima 15 računala, a u razredu ima 35 učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.

Rješenje. Kutije su računala, a učenici su kuglice, tj. $n=15$, $m=35$. Uočimo da vrijedi $15\cdot 2+5=35$, pa možemo iskoristiti Dirichletov princip za $k=2$ i $l=5$. Odatle slijedi da postoji računalo s barem $k+1$, odnosno troje učenika.
Vrijedi, naravno, i da je $15\cdot 1+20=35$. Tada bi, u našim oznakama, vrijedilo $k=1$ i $l=20$, no Dirichletovim principom tada dobijemo da postoji računalo s barem dvoje učenika, što nam je premalo - mi želimo dokazati da postoji računalo s barem troje. Obično je u zadacima najbolje odmah tražiti najveći mogući k, a da l bude "ono što ostane". U ovom zadatku najveći mogući k bio je upravo $k=2$, točno onoliko koliko nam treba da dokažemo tvrdnju za troje učenika.

Primjer 3. Na prozoru oblika kvadrata duljine stranice 1 m nalazi se 51 komarac. Dokažite da Luka mlatilicom oblika kruga polumjera $\frac{1}{7}$ m jednim udarcem može ubiti 3 komarca.

Rješenje. Ideja je podijeliti prozor na više manjih jednakih komada koji bi nam glumili kutije i koji se mogu prekriti mlatilicom. Komarci su onda kuglice koje se nalaze u njima. Pitanje je kako podijeliti prozor.
Znamo $m=51$, i bilo bi nam taman kad bismo imali $k=2$, jer je tada $k+1=3$ i po Dirichletovom principu imali bismo da je za taj neki broj kutija u bar jednoj od njih tri komarca. Probajmo!
Za $m=51$ i $k=2$ je $n=25$ i $l=1$ zbog $25\cdot 2+1=51$. To znači da želimo podijeliti prozor na 25 jednakih komada, a to su kvadratići duljine stranice 0.2m. Po Dirichletovom principu postoji bar jedan kvadratić s bar tri

komarca, pa promatrajmo baš taj kvadratić. Radijus opisane kružnice mu je manji od radijusa Lukine mlatilice, pa njome možemo u potpunosti prekriti naš kvadratić i Luka može ubiti ta 3 komarca jednim udarcem.

Oprez! U ovakvim zadacima često je najlakše razmišljati o "najgorem slučaju", ali to nije matematički pojam! Takvo objašnjenje samo po sebi nije rješenje, iako može pomoći da dođete do točnog zaključka. Zbog toga pazite da detaljno obrazložite svoje tvrdnje i izbjegavate nematematičke izraze poput "najgori slučaj".

Lakši zadaci

1. Dokažite da u skupini od 367 ljudi postoje bar dvije osobe koje dijele rođendan.
2. U Paulinoj ladici nalazi se 15 pari čarapa. Koliko čarapa Paula mora bez gledanja izvaditi iz ladice da bi bila sigurna da ima jedan par, a koliko da bi bila sigurna da ima dvije različite čarape?
3. Kad je Nena položila vozački ispit, njen nećak kupio joj je neobičan poklon. Radilo se o kutiji s 4 zelene, 4 plave i 4 crvene pikule. Rekao joj je da će pravi dar dobiti ako bez gledanja izvadi što manji broj pikula, a da pritom bude sigurna da je izvukla tri pikule iste boje. Nena je u tome uspjela i dobila Kinder jaje od ponosnog nećaka. Koji je bio njen odgovor?
4. Dokažite da je među 37 ljudi barem četvero istog horoskopskog znaka.
5. Među 77 ljudi barem je 7 rođeno u istom mjesecu. Dokažite!

Umjereni zadaci

6. U svako polje 5x5 tablice upišemo jedan od brojeva -1, 0, 1 i izračunamo zbrojeve po retcima, stupcima, i dvije glavne dijagonale. Dokažite da će uvijek dvije od tih suma biti jednake.
7. Dano je 27 točaka raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Borna, vrli umjetnik, svaku je od točaka obojao crveno ili plavo. Dokažite da postoji pravokutnik kojem su vrhovi iste boje.
8. U stara vremena na nekoj svadbi bilo je 500 ljudi. Neki od njih međusobno su se rukovali. Dokažite da su postojale dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
9. Otvorenje *Centra za zaštitu i istraživanje velikih pandi* posjetilo je n ljudi. Dokažite da među njima postoje bar dvije osobe koje imaju isti broj poznanika. Poznanstva su uzajamna.
10. Lucija je odabrala svojih 20 omiljenih prirodnih brojeva. Dokažite da se, bez obzira na njen ukus u brojevima, između njih mogu odabrati 2 broja čija je razlika djeljiva s 19.
11. Dokažite da u sumi bilo kojih 51 prirodnih brojeva manjih od 100 postoje dva broja čija je suma 100.
12. Al je na ploči napisao 21 različit prirodan broj od 1 do 100, uključivo. Dokažite da među njima postoje dva para brojeva čiji su zbrojevi isti.
13. Yusuf i njegov đedo su nakon susreta sa zaraženim zabijačem dugova u prodavnici Game završili u samoizolaciji pa sada krate vrijeme smišljajući razne kartaške zagonetke. Đedo je na jednu kartu napisao broj 1, na dvije karte broj 2, na tri karte broj 3, ..., i na 50 karata broj 50 (ukupno ima $1+2+3+\ldots+50 = 1275$ karata u špilu). Yusuf ima dobar osjećaj. Ide ućoravo naslijepo i neće karte ni gledat. Koliko karata Yusuf mora izvući iz špila da bi bio siguran da ima 10 karata na kojima piše isti broj?
14. U pravokutnom koordinatnom sustavu Ivan je odabrao 5 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da među njima postoje dvije takve da polovište dužine koja ih spaja ima cjelobrojne koordinate.

Teži zadaci

15. Nika se preko ljeta zaposlila kao čuvarica kvoka te pazi na kvoke unutar dijela šume oblika kvadrata stranice 1 km. Ona zna da se tu nalazi 110 kvoka i želi nezadovoljnom turistu koji ih ne može pronaći, a očajnički ih želi fotografirati, dokazati da postoji dio šume u obliku kruga polumjera samo $\frac{1}{8}$ km u kojem se nalaze čak 4 kvoke. Pomozite joj!
16. Sedam točaka je smješteno unutar pravilnog šesterokuta stranice duljine 1. Dokažite da su najmanje dvije točke na udaljenosti najviše 1.
17. Dokažite da među bilo kojih 7 kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 10.
18. Dokažite da za svaki prirodan broj n postoji njegov višekratnik kojem su jedine znamenke nule i jedinice.

19. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Poznanstva su uzajamna.

20. Šesnaest mentora bilo je na MNM sastanku za okruglim stolom, sjedeći na istoj udaljenosti jedan od drugoga. Zbog epidemioloških mjera je mjesto svakog mentora bilo na stolu označeno karticom s njegovim imenom. Nakon kratke pauze za kavu mentori su se vratili u dvoranu i zbog umora nepažljivo posjedali oko stola ne obazirući se na kartice. Ubrzo se ustanovilo da ni jedan od njih ne sjedi na svojem mjestu. Može li se okretanjem stol dovesti u takav položaj da ispred bar dva mentora stoje kartice s njihovim imenima?

21. Dokažite da među bilo koja tri cijela broja možemo odabrati dva tako da je $a^3b - ab^3$ djeljivo s 10.

22. Gladni (i sve više okrugli) tuljan Tuljko svaki dan pojede bar 1 kilogram ribe (i broj pojedenih kilograma u danu uvijek je prirodan). Tijekom 365 dana pojeo je čak 700 kilograma ribe. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je Tuljko ukupno pojeo 29 kilograma ribe.

6.3. G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na ovom predavanju rješavat ćemo geometrijske zadatke u kojima je glavni dio određivanje veličina raznih kutova. U svakom geometrijskom zadatku, neovisno o tome što zadatak traži, dobro je da u svakom koraku odredite sve kutove koje možete, jer možda se baš u njima krije nešto što će vas dovesti do rješenja. Teško je pobjeći od angle chaseanja i zbog toga je cilj ovog predavanja da bolje savladate razne načine određivanja kutova kroz primjenu u raznim primjerima i da uvijek držite na umu što sve možete koristiti.

Najprije ćemo se prisjetiti pravila iz osnovne škole. Oni će biti naši alati u lovu na kuteve i bitno je da njima jako dobro baratate. Srednjoškolcima će vjerojatno biti zanimljiviji zadaci s tetivnim četverokutima. S njima se neki od vas možda nisu uopće sreli pa ćemo u drugom dijelu predavanja detaljno objasniti o čemu se radi. Do tada, evo kratki podsjetnik što sve možete koristiti u zadacima:

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je $180°$), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni
- zbroj unutarnjih kutova u trokutu je $180°$, u četverokutu $360°$, a u općenitom mnogokutu s n stranica $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$)
- zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je $360°$
- u jednakostraničnom trokutu svi kutovi su jednaki, a u jednakokračnom su kutovi uz osnovicu jednaki
- poučci o sukladnosti (SSS, SKS, KSK, SSK - dvije stranice i kut nasuprot veće) i sličnosti (KK, SKS, SSS) trokuta
- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta (objasnite zašto!)
- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta
- u pravokutnom trokutu je središte opisane kružnice polovište hipotenuze, a u jednakostraničnom trokutu se središte opisane i upisane kružnice poklapaju (zajedno s ortocentrom i težištem)
- paralelogram: dijagonale se raspolavljaju, nasuprotni kutovi su jednaki, a susjedni su suplementarni; za romb još vrijedi da se dijagonale sijeku pod pravim kutem
- trapez: kutovi uz isti krak su suplementarni, srednjica je paralelna s osnovicama; u jednakokračnom trapezu su još kutovi uz istu osnovicu jednaki te su dijagonale jednake duljine i raspolavljaju se
- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni (objasnite zašto vrijedi posljednja tvrdnja!)
- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)
- u pravokutnom trokutu je zbroj kvadrata duljina stranica kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze (Pitagorin poučak), vrijedi obrat (ako ta jednakost vrijedi za stranice trokuta, tada je taj trokut pravokutan - ovo je korisno za uočiti prave kutove)
- itd.

Lakši zadaci

1. Neka je dan trokut ABC u ravnini i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B. Treba dokazati da je tada kut između tangente i tetive BC jednak obodnom kutu $\angle BAC$. Ovaj rezultat možete ubuduće koristiti u zadacima.
2. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je $MN \perp AB$.

3. U raznostraničnom trokutu ABC simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka je M točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|BM| = |BD|$, a N točka na produžetku stranice $\overline{AC}$, preko vrha C, takva da je $|CN| = |CD|$. Dokažite da su kutovi $\angle DMA$ i $\angle NDA$ jednaki.

4. Zadan je tupokutni trokut ABC s tupim kutom u vrhu B. Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C siječe pravac AB u točki D, a simetrala vanjskog kuta pri vrhu A siječe pravac BC u točki E. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako vrijedi da je $|AE| = |AC| = |CD|$.

5. Neka su točke A i B sjecišta kružnica k_1 i k_2. Neka su pravci a i b kroz točku A takvi da a siječe k_1 i u točki C, a k_2 i u točki D i b siječe k_1 i u točki E, a k_2 i u točki F, pri čemu točke C, D, E, F pripadaju istoj poluravnini u odnosu na pravac AB i točka E se nalazi unutar kuta $\angle BAC$. Dokaži da je $\triangle BEC \sim \triangle BFD$.

Umjereni zadaci

6. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

7. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

8. Neka je točka D sjecište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta ABC ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC?

9. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta BCD u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokažite da je pravac BD simetrala kuta $\angle CBA$.

10. U trokutu ABC je $\angle ABC = 45°$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka D tako da je $|CD| = 2|BD|$ i $\angle BDA = 120°$. Odredite veličine kutova trokuta ABC.

11. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredite kutove danog trokuta.

12. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

Uvod u tetivne četverokute

Znamo otprije da svakom trokutu možemo opisati kružnicu, no isto ne vrijedi i za četverokute. Četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut. Drugim riječima, tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Vrlo često pokaže se korisnim u zadacima prepoznati tetivne četverokute i koristiti njihova svojstva vezana uz kutove.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne (dakle, ako vrijedi bilo koja od njih, tada vrijede i sve ostale):

- četverokut $ABCD$ je tetivan
- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\angle ABC + \angle ADC = 180°$
- $\angle BCD + \angle DAB = 180°$
- $\angle ABD = \angle ACD$
- $\angle ADB = \angle ACB$
- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle CAD = \angle CBD$.

Sad već znamo odrediti jako puno kutova ako se u zadatku pojavi bilo koji četverokut upisan u kružnicu. Iskoristite to u sljedećim zadacima:

13. Neka se simetrale kutova četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama E, F, G i H. Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.

14. Točke A, B, C, D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.

15. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

16. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe dužinu AB u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

17. U trokutu ABC kut $\angle CAB = 50°$ i $\angle ABC = 60°$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30°$. Izračunajte mjeru kuta $\angle CDE$.

18. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka M nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je F polovište $\overline{BC}$, te H na $\overline{AF}$ tako da su MH i AF međusobno okomiti. Dokažite da je $\angle BHF = \angle ABC$.

6.4. N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Korisno je znati kod rješavanja zadataka sa znamenkama:

- Zapis prirodnog broja $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$
- Kriteriji djeljivosti
  - $2|n$ ako i samo ako je zadnja znamenka broja n 0, 2, 4, 6 ili 8
  - $3|n$ ako i samo ako je zbroj znamenaka broja n djeljiv s 3
  - $4|n$ ako i samo je dvoznamenkasti završetak broja n djeljiv s 4
  - $5|n$ ako i samo ako je zadnja znamenka broja n 0 ili 5
  - $8|n$ ako i samo ako je troznamenkasti završetak broja n djeljiv s 8
  - $9|n$ ako i samo ako je zbroj znamenaka broja n djeljiv s 9
  - $11|n$ ako i samo ako je razlika zbroja znamenaka na parnim mjestima i zbroja znamenaka na neparnim mjestima djeljiva s 11
- Kvadrat prirodnog broja n, $n^2 = n \cdot n$ završava znamenkama 0, 1, 4, 5, 6 ili 9.
- n-ta potencija broja a je broj $a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ i završne znamenke potencija se periodički ponavljaju

Lakši zadaci

1. Ako sve prirodne brojeve redom pišemo jedan pored drugog, koja će se znamenka naći na 2020. mjestu?
2. Dokaži: ako su u troznamenkastom prirodnom broju dvije posljednje znamenke jednake, a zbroj njegovih znamenaka djeljiv sa 7, onda je i sam broj djeljiv sa 7.
3. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od umnoška svojih znamenaka.
4. Dokaži da je zbroj $1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998}$ djeljiv s 10.
5. Odredi sve prirodne brojeve djeljive s 8 kojima je zbroj znamenaka manji od 10, a umnožak znamenaka je jednak 12.
6. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $0, 1, 2, 3, 4, 5$ i djeljivi su s 5?
7. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$.
8. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još 12 brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.
9. Odredi sve troznamenkaste brojeve sa zbrojem znamenaka 11 od kojih se zamjenom znamenki jedinica i stotica dobiva za 594 veći broj.
10. Odredi posljednjih 2019 znamenaka broja $2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017}$
11. Neka su a, b i c međusobno različite znamenke različite od nule. Može li zbroj
$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$$
biti jednak kvadratu nekog prirodnog broja?

Teži zadaci

12. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m, n, p takvi da je
$$m^2 + n^2 + p^2 = mn + np + pm + 50.$$

13. Ako su a i b prirodni brojevi, onda je $\overline{\overline{a.b}}$ decimalni broj dobiven tako da iza broja a zapišemo decimalnu točku i nakon toga broj b. Na primjer, ako je $a = 20$ i $b = 17$, onda je $\overline{\overline{a.b}} = 20.17$ i $\overline{\overline{b.a}} = 17.2$.Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $\overline{\overline{a.b}} \cdot \overline{\overline{b.a}} = 13$.

14. Dokažite da je broj 111...11222...225, koji ima 1997 jedinica i 1998 dvojki u svom zapisu, potpuni kvadrat.

15. Dan je prirodan broj n. Broj A ima $2n$ znamenka 4, a broj B ima n znamenka 8. Dokažite da je $A+2B+4$ potpuni kvadrat.

16. Svaka znamenka prirodnog broja n (osim prve) strogo je veća od znamenke koja se nalazi neposredno lijevo od nje. Odredi zbroj svih znamenaka broja $9n$.

17. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$S(a) = S(b) = S(a + b) = n,$$

pri čemu $S(a)$ označava zbroj znamenaka broja a.

6.5. C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Matematička indukcija je metoda dokazivanja koja funkcionira tako što za najmanji mogući slučaj dokažemo da vrijedi, te dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za neki slučaj, vrijedi i za sljedeći. Ovo radimo na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima.
Vizualizirati je možemo dominama: dokažemo li da će u nizu domina prva pasti te da će, ako neka domina padne, pasti i sljedeća, po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da će pasti sve domine.
Provodi se u 3 dijela:

1. **BAZA:** u ovom dijelu dokazujemo da tvrdnja vrijedi za najmanji slučaj, najčešće $n = 1$.
2. **PRETPOSTAVKA:** u ovom dijelu pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki n.
3. **KORAK:** u ovom dijelu koristeći pretpostavku dokazujemo da tvrdnja vrijedi za neki $n + 1$.

Lakši zadaci

1. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost:
$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
.
2. . Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$5 + 8 + 11 + ... + (3n + 2) = \frac{n(3n+7)}{2}$$
.
3. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
.
4. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$(n + 1)(n + 2)...2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)$$

Umjereni zadaci

5. Dokažite da se, za proizvoljan prirodni broj n, $2n \times 2n$ ploča može popločati tako da ostane točno jedno prazno mjesto, koristeći samo tromine oblika slova L s jednakim krakovima (dakle kao 2×2 kvadrat, samo bez jednog vrha).
6. Dokaži da $3^{n+1} | 2^{3^n} + 1$ za sve prirodne brojeve.
7. Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$
8. Dokažite nejednakost za prirodne $n \geqslant 3$:
$$3^n > 2^n + 3n$$
9. Je li broj $1^{4n} + 2^{4n} + 3^{4n} + 4^{4n}$ djeljiv s 5?
10. Je li broj $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ za sve n djeljiv sa 33?
11. Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn naviše.
12. Dokažite da vrijedi $3^n > n^4$ za sve $n \geqslant 7$

Teži zadaci

13. dokažite AG nejednakost indukcijom!

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$$

14. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokažimo da možemo odabrati $n+1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

15. U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, ..., n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?

16. Neka su prirodni brojevi od 1 do n poredani u niz u nekom poretku. Na nizu vršimo sljedeću operaciju: ako je k prvi broj u nizu, obrnemo poredak prvih k brojeva u nizu. Dokaži da se nakon konačno mnogo primjena ove operacije broj 1 pojavi na prvom mjestu.

17. Može li se ploču dimenzija 3×99 popločati L-trominama (pločicama od 3 kvadratića u obliku slova L)?

18. Dokažite da je moguće brojeve $1, 2, ..., n$ poredati u niz tako da aritmetička sredina niti jedna dva broja ne bude između njih.

19. Dokažite da se za svaki $n \geqslant 6$ kvadrat može razrezati na n manjih kvadrata.

7. Poglavlje

Zadaci za drugu grupu

7.1. A22: Nejednakosti - Al Depope

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Nejednakosti sredina (KAGH)

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada definiramo harmonijsku (H), geometrijsku (G), aritmetičku (A) te kvadratnu (K) sredinu brojeva $x_1, \ldots, x_n$ pomoću

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \quad A = \frac{x_1 + \ldots x_n}{n} \text{ te } \quad K = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Vrijedi kako je $K \geq A \geq G \geq H$ te se jednakost između bilo koji dvije od ovih sredina postiže ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$.

Cauchy-Schwartzova nejednakost (CSB)

Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Također,uz iste oznake kao i gore, ali uz uvjet da su $b_1, \ldots, b_n$ pozitivni, vrijedi i tzv. Engelova forma CSB nejednakosti:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Lakši zadaci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1 \leqslant \frac{2}{3}(a+b+c).$$

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a + 2b - c}{4}.$$

4. Neka su x, y, z nenegativni realni brojevi takvi da je $x + y + z = 1$. Odredite maksimalnu vrijednost izraza $xy^2 + xz^2 + 2xyz$.

5. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \leq 2(x+y+z).$$

6. Dokažite da vrijedi Cauchy-Schwartzova nejednakost te Engelova forma Cauchy-Schwartzove nejednakosti.

Umjereni zadaci

7. Neka su a, b, c, d, e pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geq 0.$$

9. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Dokaži nejednakost:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4} + ... + \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1} + \frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2} \geq \frac{1}{2}.$$

10. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi:

(a) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$ (b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$

Teži zadaci

11. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

12. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy+yz+zx = x+y+z$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq 1.$$

13. Za $a, b, c \in \mathbb{R}$, takve da je $a+b+c \geq abc$, dokaži da vrijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

7.2. C22: Invarijante - Luka Banović

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Počnimo s 2 primjera:

Primjer 1. Na stolu je 100 čaša, od kojih je jedna postavljena otvorom prema dolje, a ostale otvorom prema gore. U jednom potezu dozvoljeno je istovremeno preokrenuti dvije čaše. Može li se, ponavljanjem ovog postupka, postići da sve čaše budu postavljene otvorom prema gore.

Primjer 2. Na ploči su na početku napisana 3 broja a, b, c. U svakom koraku obrišemo ta 3 broja i umjesto njih napišemo brojeve $2a-b, 2b-c, 2c-a$. Ako su na početku bili napisani brojevi 6, 10 i 18, možemo li uzastopnim ponavljanjem ove operacije doći do trojki 2, 14, 20 i 5, 12, 17?

Ovo su primjeri zadataka kojima ćemo se danas baviti. U prvom primjeru nakon malo isprobavanja vidimo da nikako ne uspijevamo postići cilj, pa nam to daje naslutiti da ipak u navedenom zadatku nećemo uspjeti. Kad malo bolje proučimo što se događa, vidimo da pri okretanju čaša imamo 3 mogućnosti (okrećemo 2 okrenute prema dolje, 2 okrenute prema gore ili 2 različito okrenute), i kod sve tri mogućnosti parnost broja čaša okrenutih prema dolje se ne mijenja (ili onih okrenutih prema gore). Zaključujemo stoga da ne možemo postići da sve čaše budu okrenute prema gore.

U ovom primjeru, dakle, parnost broja čaša okrenutih prema dolje se nije mijenjala što god napravili. Stoga ćemo reći da je ta veličina (ili to svojstvo) bila **invarijanta**. Uočiti invarijantu u kombinatornim zadatcima često je od ključne važnosti, jer na taj način možemo precizno objasniti zašto zadani cilj u zadatku ne možemo postići.

Slična stvar se događa i u drugom primjeru. Odmah možemo uočiti da će zbroj brojeva biti invarijantan (tj. ne mijenja se prilikom provođenja koraka). Kako je $6+10+18 \neq 2+14+20$, vidimo da ne možemo doći do prve trojke. Uz ovu, možemo uočiti i drugu invarijantu: kako krećemo s 3 parna broja, u svakom sljedećem koraku ponovno ćemo na ploči imati 3 parna broja. Iz ovoga slijedi da ne možemo dobiti ni drugu trojku.

Dakle, u svakom zadatku u kojem se spominje neki postupak izuzetno je korisno naći veličinu koja se ne mijenja. No, to često nije nimalo jednostavno, i potrebno je dosta iskustva, a nerijetko i kreativnosti da bi se riješili iole teži zadatci. Stoga je cilj ovog predavanja da postanete bolji u oba ta aspekta.

Lakši zadatci

1. Ploča 8x8 obojena je kao šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svim poljima u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu i obrnuto. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

2. U kutiji je m crvenih i n plavih kuglica. U svakom koraku Anica uzima nasumce dvije kuglice iz kutije. Potom ukoliko je izvukla dvije kuglice iste boje, u kutiju stavlja jednu crvenu kuglicu, a u suprotnom u kutiju stavlja jednu plavu kuglicu. Odredite koje će boje biti zadnja preostala kuglica u kutiji ako je na početku:

   a) $m = n = 2020$, b) $m = 2020, n = 2021$.

3. U svako polje ploče 3x3 napisan je po jedan cijeli broj. Anica u svakom koraku odabire 2 susjedna polja ploče (tj. 2 polja sa zajedničkom stranicom) i svakom od brojeva na tim poljima isti cijeli broj. Ako su na početku na ploči pisali redom brojevi od 1 do 9, može li Anica u konačno mnogo koraka dobiti ploču u kojoj su u odnosu na početnu zamijenjeni brojevi u 1. i 2. retku?

4. Na ploči su napisani brojevi $1, \sqrt{2}$ i $1+\sqrt{2}$. U svakom koraku 2 broja na ploči, neka su to a i b, brišemo i umjesto njih pišemo $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Možemo li nakon konačno mnogo koraka dobiti na ploči trojku $\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

5. Anica se kreće po koordinatnoj mreži po sljedećem pravilu: u svakom koraku iz točke (x, y) ona se pomiče u bilo koju od točaka (y, x), $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x+1, y+4)$ i $(x-1, y-4)$. Može li Anica doći do ishodišta koordinatnog sustava ako je krenula iz točke $(0, 1)$?

6. Na stolu su 3 hrpe s po n kamenčića. U svakom koraku Anica bira dvije hrpe s kojih uzima po jedan kamenčić, te potom jedan kamenčić stavlja na treću hrpu. Može li Anici naposljetku ostati samo jedan kamenčić na stolu?

7. Na zabačenom otoku živi 600 kameleona: 100 zelenih, 200 plavih i 300 crvenih. Kad se susretnu 2 kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije konačno mnogo susreta, svi kameleoni budu iste boje?

Teži zadatci

8. 3 skakavca sjede u 3 vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala 2 te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo vremena stići u četvrti vrh kvadrata?

9. Na beskonačnoj ploči sastavljenoj od jediničnih kvadratića, konačan broj polja obojen je crnom bojom (ostala su polja bijela). U svako polje bijele boje upisan je broj susjednih polja (polja sa zajedničkom stranicom) crne boje, a u svako polje crne boje upisan je broj susjednih polja bijele boje. Dokažite da je zbroj svih brojeva na ploči uvijek djeljiv s 4.

10. Zadana je ploča 5x5 na čijem je svakom polju postavljen po jedan žeton. Ako u svakom koraku pomaknemo s 2 polja (ne nužno različita) po jedan žeton u neko od susjednih polja (pri čemu su 2 polja susjedna ako imaju zajedničku stranicu), možemo li sve žetone premjestiti u sljedeća polja:

    a) polje u 1. retku i 2. stupcu, b) polje u 1. retku i 3. stupcu?

11. Brojevi 1 i -1 su upisani u vrhovima pravilnog dvanaesterokuta tako da -1 piše u samo jednom vrhu, a u ostalima piše 1. U svakom koraku Anica smije zamijeniti predznake brojeva u 4 uzastopna vrha. Može li Anica ponavljanjem postupka postići da se broj u kojem je pisalo -1 pomakne na susjedni vrh, a da u svim ostalim vrhovima piše 1?

12. Anica i Božica igraju igru. Najprije Božica napiše 9 brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku Anica odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Božica odabrati takve brojeve da Anica ne može ostvariti svoj naum ili pak Anica može ostvariti svoj naum bez obzira koje brojeve Božica odabere?

13. Anica je na ploči napisala brojeve $1^2, 3^2, 5^2, ..., 2017^2$. U svakom koraku ona odabire 3 broja a, b, c, izbriše ih i umjesto njih napiše broj $1 + |a - b| + |b - c| + |c - a|$. Anica ponavlja postupak dok god ne ostanu samo 3 broja na ploči. Dokažite da zbroj zadnja 3 broja na ploči ne može biti jednak nijednom od brojeva koji su na početku bili napisani na ploči.

Ako vam je baš bilo lagano...

14. Na ploči je napisano prvih 2020 prirodnih brojeva. U svakom potezu Anica obriše brojeve a, b s ploče i umjesto njih napiše broj $\frac{ab}{a+b+1}$. Odredite zadnji broj koji će ostati na ploči.

15. Prvih 100 prirodnih brojeva je napisano na ploču, i to svaki točno jednom. Anica u svakom koraku bira dva broja a i b s ploče, briše ih i umjesto njih na ploču napiše najveći zajednički djelitelj brojeva a^2+b^2+2 i a^2b^2+3. Naposljetku na ploči ostane jedan broj. Dokažite da taj broj ne može biti potpun kvadrat.

7.3. G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Bitne točke trokuta:

1. središte opisane kružnice O - sjecište simetrala stranica
2. središte upisane kružnice I - sjecište simetrala kutova
3. ortocentar H - sjecište visina
4. težište G - sjecište težišnica
5. središte pripisane kružnice I_a (nasuprot vrha A) - sjecište dvije vanjske i jedne unutarnje simetrale kuta.

Zadaci

1. Neka je X presjek simetrale kuta u vrhu A i stranice $\overline{BC}$, te Y presjek pravca BC te tangente u točki A na opisanu kružnicu. Dokaži $|AY| = |XY|$
2. Dokaži da bitne točke trokuta postoje.
3. Dokaži $\angle ACO = \angle BCH$.
4. Neka je točka N nožište visine iz vrha C te točka M sjecište opisane kružnice trokuta ABC te pravca CN. Dokaži $|MN| = |NH|$.
5. Neka je točka M polovište $\overline{BC}$. Dokaži da se sjecište pravaca HM i AO nalazi na opisanoj kružnici ABC.
6. Dokažite da je $BCII_a$ tetivan te mu odredite središte.
7. Neka su točke X i Y dirališta redom upisane i pripisane kružnice s obzirom na vrh A sa $\overline{BC}$. Dokaži $|BX| = |CY|$.
8. Neka su točke D_a, D_b i D_c dirališta pripisanih kružnica te dužina nasuprot vrhova A, B i C. Dokaži da su pravci I_aD_a, I_bD_b i I_cD_c konkurentni.
9. Dokaži da je moguće formirati trokut od težišnica trokuta.
10. Dokaži ili opovrgni: postoji točka X unutar trokuta ABC takva da vrijedi $|\angle XAB| = |\angle XBC| = |\angle XCA|$.
11. Neka je točka M polovište $\overline{BC}$. Dokaži $|AH| = 2|OM|$
12. Dokaži da su polovišta $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, nožišta visina te polovišta stranica trokuta ABC. (*Feuerbachova kružnica*)
13. Dokaži da su točke H, G i O kolinearne. (*Eulerov pravac*)
14. Neka su točke D, E i F dirališta upisane kružnice trokuta ABC te M polovište $\overline{BC}$. Dokaži da su pravci AM, EF i ID konkurentni.
15. Dan je trokut s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O. Ako je mjera jednog kuta trokuta $60°$, dokaži da je simetrala tog kuta okomita na pravac OH. (*Državno 2012.*)
16. Neka su točke D, E i F na stranicama trokuta redom nasuprot vrhova A, B i C. Dokaži da su AD, BE i CF konkurentni ako i samo ako vrijedi $BD \cdot CE \cdot AF = CD \cdot AE \cdot BF$. (*Ceva*)
17. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$. (*Državno 2009.*)
18. U trokutu ABC točke O i I predstavljaju centar opisane i upisane kružnice, redom. Neka je O_1 centralnosimetrična slika točke O u odnosu na točku I, i neka je I_1 centralnosimetrična slika točke I u odnosu na točku O. Ako O_1 leži na visini iz vrha A a I_1 leži na visini iz vrha B, dokazati da je trokut ABC jednakostraničan. (*Republičko 2019.*)

19. Dan je trokut ABC u kojem simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu BC u točki X. Pravac kroz X okomit na AX siječe pravac AB u točki Y , a pravac kroz Y okomit na AB siječe polupravac AX u točki R. Ako pravac XY siječe težišnicu trokuta ABC iz vrha A u točki S, dokaži da su pravci BC i RS međusobno okomiti.

20. Upisana kružnica dodiruje $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama M i N. Neka je P točka presjeka simetrale kuta u vrhu B i pravca MN. Dokaži $P(ABC) = 2P(ABP)$ (*Republičko 2003.*)

21. U trokutu ABC vrijedi $|AB| > |BC|$, a točke M i N redom se nalaze na AB i BC tako da je $|AM| = |CN|$. Pravci MN i AC sijeku se u točki K. Neka je P središte kružnice upisane trokutu AMK, a Q središte kružnice pripisane trokutu CNK nasuprot vrha K. Dokaži da je polovište luka AC (na kojem leži B) kružnice opisane trokutu ABC jednako udaljeno od točaka P i Q.

7.4. N22: Diofantske - Al Depope

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

1. **Promatranje ostataka**

   Ukoliko želimo pokazati da zadana diofantska jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, ponekad je korisno promatrati ostatke pri dijeljenju lijeve i desne strane s nekim brojem. Ako ne postoji slučaj u kojem lijeva i desna strana daju iste ostatke, tada polazna jednadžba nema rješenja. Korisno je promatrati kvadratne ostatke pri dijeljenju s $3, 4, 7, 8$ i 9 te kubne ostatke pri dijeljenju sa 7.

2. **Faktorizacija**

   Na jednoj strani želimo dobiti nešto što znamo faktorirati, a na drugoj produkt nepoznanica.

3. **Korištenje nejednakosti**

   U prirodnim brojevima riješite sljedeću jednadžbu:

$$x^2y + y^2z + z^2x = 3xyz.$$

Lakši zadaci

1. Nađite sve cijele brojeve x i y takve da je $x(y+1)^2 = 243y$.
2. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.
3. Odredite sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2.$$

4. Nađite sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 - y! = 2001.$$

5. Dokažite da jednadžba

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004},$$

   pri čemu vrijedi da je $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$, ima točno 2 rješenja u skupu cijelih brojeva.

6. U prirodnim brojevima riješite jednadžbu:

$$5(yz + xz + xy) = 3xyz$$

   .

7. Označimo s $s(n)$ broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

   Nađite sve prirodne brojeve n za koje je $s(n) = 5$.

Umjereni zadaci

8. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

9. Dokažite da za sve $n \geq 6$ jednadžba

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

ima rješenja u skupu prirodnih brojeva.

10. Odredite sve pozitivne brojeve $n, k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ takve da je:

$$k_1 + \cdots + k_n = 5n - 4$$

i

$$\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

11. Neka su m, n, x i y prirodni brojevi za koje vrijedi

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

Dokažite da je tada $x = y$.

Teži zadaci

12. Dokažite da jednadžba $y^2 = x^5 - 4$ nema cjelobrojnih rješenja.

13. Nađite sve trojke (x, y, p) gdje su x i y prirodni brojevi te p prost broj takve da zadovoljavaju

$$x^5 + x^4 + 1 = p^y.$$

14. Nađite sve prirodne brojeve x i y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$3^x = 2^x y + 1.$$

7.5. C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

U ovom predavanju upoznat ćemo osnovne principe prebrojavanja.
Neki od osnovnih principa prebrojavanja su:

1. Princip zbroja - broj elemenata unije dva disjunktna konačna skupa je suma brojeva elemenata tih skupova - ako imamo x predmeta tipa A i y predmeta tipa B ukupno imamo $x + y$ predmeta
2. Princip umnoška - broj elemenata Kartezijevog umnoška konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata tih skupova - ako na raspolaganju imamo x hlača i y majica, tada se možemo odjenuti na $x \cdot y$ načina
3. Princip bijekcije - dva skupa su ekvipotentna (imaju jednak broj elemenata) ako i samo ako postoji bijekcija između njih
4. Matematička indukcija
5. Dirichletov princip - ako $k \cdot x + 1$ predmeta smještamo u x kutija, u barem jednoj će biti $k + 1$ predmet

Kod rješavanja zadataka s prebrojavanjem, korisno se zapitati sljedeće:

1. Što želim prebrojati?
2. Koja svojstva ima to što želim prebrojati?
3. Mogu li prebrojati sve osim onoga što želim prebrojati?
4. Mogu li riješiti zadatak za male primjere "na prste"?

Binomni poučak

$\binom{n}{k}$ - broj načina za odabrati k-člani podskup iz n-članog skupa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$$

Npr. ako od 10 učenika biramo 3 učenika koja će biti u istoj grupi, to možemo napraviti na $\binom{10}{3}$ načina.

Formula uključivanja - isključivanja (FUI)

Ukoliko želimo odrediti broj elemenata više skupova koja nisu nužno disjunktna, korisno je tu situaciju vizualizirati pomoću Vennovih dijagrama. Za dva skupa lako se zaključuje i dokazuje da je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Isto se može primijeniti i za bilo koji broj skupova (*kako?*).
Dvostruko prebrojavanje je metoda kojom se ista stvar broji na dva načina.

Lakši zadaci

1. Na koliko načina je moguće složiti sendvič ako su na raspolaganju 3 vrste peciva, 5 vrsta šunke i 4 vrste sira (sendvič ima jedno pecivo, a može imati jednu vrstu šunke i/ili jednu vrstu sira)?
2. Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?
3. Na koliko načina možemo izabrati osobu koja će osvojiti kekse i dvije osobe koje će osvojiti sok među 15 osoba?
4. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 3 ili sa 7?
5. Kombinatorno dokažite da vrijedi:
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\sum_0^n \binom{n}{i} = 2^n$

(c) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

6. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5?

7. Stazu pravokutnog oblika širine 1.5 m i duljine 20 m treba popločati jednakim pločama oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta s katetama duljine 50 cm, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravokutnika. Odredi broj načina na koji je to moguće napraviti.

Umjereni zadaci

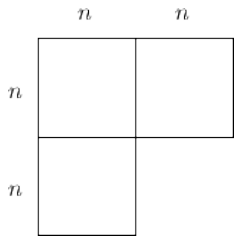
8. Na ploči se nalaze svi šesteroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri čemu se u brojevima svaka znamenka pojavljuje točno jedanput. Brojevi su napisani u rastućem poretku, odnosno od manjeg prema većem. Koji se broj nalazi na 500. mjestu?

9. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

10. Učenici 6 razreda odlaze na izlet te mogu birati između tri destinacije, A, B i C pri čemu na svaku destinaciju mora otići barem jedan razred. Na koliko načina to mogu učiniti?

11. Koliko anagrama ima riječ $MATEMATIKA$?

12. Neka je n prirodan broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 kvadratića. Koliko je pravokutnika na slici?



13. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju dijeli ravninu (svaka dva pravca se međusobno sijeku i nijedna tri pravca se ne sijeku u istoj točki)?

14. Neka su n i k prirodni brojevi te $S = \{1, 2, ..., n\}$.

    (a) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ pri čemu su A_i, $i = 1, \ldots, k$ u parovima disjunktni podskupovi od S takvi da je $\cup_{i=1}^k A_i = S$.

    (b) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ pri čemu su A_i, $i = 1, \ldots, k$ podskupovi (ne nužno disjunktni) od S takvi da je $\cup_{i=1}^k A_i = S$.

15. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu umnožak upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

16. Na koliko načina se može parkirati 10 vozila na 40 parkirnih mjesta tako da je između svaka dva vozila barem jedno prazno parkirno mjesto?

8. Poglavlje

Zadaci za treću grupu

8.1. A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Niz u skupu S je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to S$. Ona prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S. Element a_n nazivamo općim ili n-tim članom niza, a sam niz označavamo simbolom (a_n). Niz ima beskonačno mnogo članova:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Aritmetički niz - ako je $a_n - a_{n-1} = d$, $n \geq 2$, d je konstanta
Suma prvih n članova aritmetičkog niza je: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.
Geometrijski niz - ako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$, $n \geq 2$, q je konstanta
Suma prvih n članova geometrijskog niza s kvocijentom $q \neq 1$: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$.
Teleskopiranje je metoda koju koristimo da bismo izračunali sumu kompliciranih članova niza. Članove niza zapišemo na drugi način koji nam olakšava izračun sume.
Primjer: Izračunajte sumu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

Rješenje: Član niza $\frac{1}{(k-1) \cdot k}$ možemo zapisati kao $\frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Lakši zadaci

1. Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, ...$ takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \ a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \ za \ n \geq 1.$$

   Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_0 a_1 ... a_n (\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}) = 1.$$

2. Izračunaj:

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + ... + \frac{2020}{2018! + 2019! + 2020!}.$$

3. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ članovi aritmetičkog i $b_1, b_2, ..., b_n$ članovi geometrijskog niza s pozitivnim članovima. Ako je $a_1 = b_1$ i $a_n = b_n$, dokažite da je suma članova aritmetičkog niza veća ili jednaka sumi članova geometrijskog niza.

4. Odredite postoji li beskonačan niz $a_1, a_2, a_3, ...$ prirodnih brojeva takav da jednakost

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

vrijedi za svaki prirodan broj n.

5. Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Dokaži da postoji točno jedan prirodan broj n takav da je

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

6. Neka su n, k, M i $a_1, a_2, ..., a_n$ prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = k \ i \ a_1 a_2 ... a_n = M.$$

Ako je $M > 1$, dokaži da ne postoji pozitivan realni broj x takav da vrijedi

$$M(x+1)^k = (x + a_1)(x + a_2)...(x + a_n).$$

Teži zadaci

7. Dan je prirodan broj n i niz $a_0, a_1, ..., a_n$ za koji vrijedi $a_0 = \frac{1}{2}$ i

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n},$$

za $k = 1, 2, ..., n$. Dokažite da je:

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

8. Niz $a_1, a_2, ...$ pozitivnih realnih brojeva zadovoljava uvjet

$$a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}$$

za svaki prirodan broj k. Dokaži da je

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n$$

za svaki $n \geq 2$.

9. Zadan je niz realnih brojeva:

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_n = \sqrt{\frac{n}{2} + x_{n-1} x_{n-2}} \ za \ n \geq 2.$$

Postoji li realni broj A takav da je $An < x_n < An + 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?

10. Neka je $m > 1$ prirodan broj. Niz $a_1, a_2, a_3, ...$ definiran je s $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 4$, te za sve $n \geq 4$:

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Odredi sve prirodne brojeve m za koje su članovi tog niza potpuni kvadrati.

8.2. C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Bojanje u ovom kontekstu znači dijeljenje nekog skupa na više podskupova, primjerice ploče na crna i bijela polja. Ovu metodu često koristimo kad želimo doći do kontradikcije: prebrojavanjem elemenata po podskupovima zaključujemo da ih je u nekom podskupu neodgovarajući broj elemenata.

Uvodni zadaci

1. Može li se šahovska ploča bez gornjeg lijevog i donjeg desnog polja prekriti s 31 dominom?
2. Pravokutni pod prekriven je pločama 2×2 i 1×4. Jedna se ploča razbila, no dostupna nam je ploča drugog oblika. Dokažite da se pod ne može prekriti prerazmještajem ovih ploča.
3. Je li moguće ploču dimenzije 10×10 popločati pločicama dimenzija 4×1?
4. A L-tetrominama?
5. Je li moguće posložiti po jedan primjerak svake vrste tetromina u pravokutnik?

Lakši zadaci

6. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima. Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.
7. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Na ploči dimenzija $n \times n$ postavljen je neki broj domina, tako da svaka domina pokriva točno dva polja ploče i ne postoje dvije domine koje se preklapaju. *Vrijednost* retka ili stupca je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje tog retka ili stupca. Konfiguraciju ploče zovemo *balansiranom* ako postoji prirodan broj k takav da svaki redak i svaki stupac ima vrijednost k. Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ i odrediti minimalan broj domina potrebnih za tu konfiguraciju.
8. Prirodni brojevi su crni i bijeli. Suma 2 broja različite boje je crna, a njihov produkt je bijele boje. Koje je boje produkt 2 bijela broja? Pronađi sva takva bojanja!

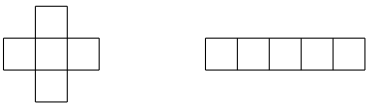
Umjereni zadaci

9. Ploča dimenzija 6×6 popločana je dominama. Pokaži da uvijek možemo pronaći pravac duž kojeg ćemo prelomiti ploču tako da ne prelomimo niti jednu dominu!
10. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.

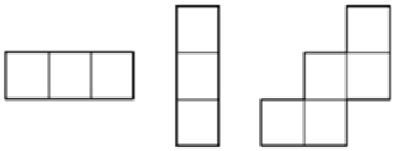
    Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.
11. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak. Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.
12. Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju.

    Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica.

13. Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjeg stupcu te ploče tako da dobiveno ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici? Pločice je dozvoljeno rotirati.



14. Je li moguće ploču dimenzija 1000×1000 prekriti koristeći isključivo likove prikazane na slikama:



Likove nije dozvoljeno rotirati niti zrcaliti.

15. *Ludi lovac* je figura koja može biti okrenuta prema jednom od četiri dijagonalno susjedna polja i napada sva polja ravno ispred sebe te ravno lijevo i desno od sebe (poput šahovskog lovca koji ne vidi iza sebe). Za dva polja igraće ploče kažemo da su dijagonalno susjedna ako imaju točno jedan zajednički vrh. Odredi najveći prirodni broj N za koji je na igraću ploču 8×8 moguće postaviti N ludih lovaca tako da nijedan od njih ne napada nekog od ostalih.

Teži zadaci

16. Ove dvije figure prikazane na slici zovemo *stubišta*.

Promotrimo 2018×2018 ploču kojoj su uklonjena 2 polja iz istog retka. Dokaži da se ostatak ploče ne može izrezati u stubišta. Stubišta se mogu rotirati.

17. Na svakom polju 2017×2017 ploče nalazi se svjetiljka. Svaka svjetiljka je ili upaljena ili ugašena. Svjetiljka je *zločesta* ako ima parni broj upaljenih susjeda. Koji je najmanji broj zločestih svjetiljki na ploči?

18. Zemljište kvadratnog oblika dimenzija 8×8, čije su stranice orijentirane sjever–jug i istok–zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija 1×1. Na svakoj od tih parcela može se nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne 1×1 parcele. Za kuću kažemo da je u sjeni ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća. Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni. Napomena: Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

19. Neka je $n > 2$ prirodni broj. Dana je šahovska ploča $n \times n$ koja se sastoji od n^2 polja. Raspored n topova na toj ploči je miroljubiv ako se u svakom retku i u svakom stupcu nalazi točno jedan top. Odredi najveći prirodni broj k sa svojstvom da, za svaki miroljubivi raspored n topova, postoji kvadrat $k \times k$ na čijih se k^2 polja ne nalazi niti jedan top.

8.3. G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović

Link na hintove. Link na rješenja.

Potencija točke

Primjer. Neka je k kružnica i T točka izvan kružnice. Pravci p i q neka prolaze točkom T, pri čemu pravac p siječe kružnicu k u točkama A i B, a pravac q u točkama C i D. (Uzmimo da je $|TA| < |TB|$ i $|TC| < |TD|$.)

a) Dokažite da je $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

b) Ako je E točka na kružnici k takva da pravac TE dira tu kružnicu, dokažite da je $|TE|^2 = |TA| \cdot |TB|$.

Tvrdnja a) iz primjera slijedi iz sličnosti trokuta $\triangle TAD$ i $\triangle TBC$ po K-K poučku, a ta sličnost pak slijedi iz tetivnosti četverokuta $ABCD$. Na sličan način se pokaže i tvrdnja pod b).

Ono što vidimo iz primjera je da za danu točku T i kružnicu k, koju god sekantu kroz točku T odaberemo, umnožak udaljenosti točke T do sjecišta sekante i kružnice je uvijek isti. Uočimo još i sljedeće: neka je O središte kružnice k i r polumjer te kružnice. Iz tvrdnje b) i Pitagorinog poučka odmah slijedi $|TE|^2 = |TO|^2 - r^2$. Sada smo spremni uvesti sljedeću definiciju.

Definicija. Za danu točku T i kružnicu k čije je središte točka O i polumjer r definiramo *potenciju točke T na kružnicu k*: to je vrijednost izraza $|TO|^2 - r^2$.

Uočite da definicija ima smisla i za točke unutar kružnice (po definiciji potencija točke za takvu točku je negativna, no u praksi to nije značajno, budući se da znatno češće koriste izrazi iz primjera), kao i za točku na samoj kružnici; potencija točke na kružnicu na kojoj se točka nalazi je po definiciji jednak 0. Važnost ovog pojma je što vrijedi i svojevrstan obrat početnog primjera: ako bi za točke T, A, B, C, D u ravnini vrijedilo da je $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$, odmah smijemo zaključiti da točke A, B, C, D leže na istoj kružnici.

Zapravo, potencija točke nije ništa drugo nego drugi pogled na jedan specijalni odnos sličnosti trokuta i tetivnosti. S te strane to nije potpuno novi koncept, no on će nam olakšati uočavanje nekih uzoraka u zadatcima te skratiti vrijeme njhova rješavanja. Da biste ju mogli iskoristiti često ćete pojedine dužine produljivati da dobijete sjecišta s kružnicom, koristiti potencije iste točke na različite kružnice ili čak i dodavati nove kružnice i točke da ju možete primijeniti. To su u načelu glavni trikovi kod zadataka ovakvog tipa.

Zadatci

1. Dana je kružnica sa središtem u točki O. Neka je A točka na kružnici, B točka na tangenti na kružnicu u točki A, a D točka unutar kružnice takva da dužina $\overline{BD}$ siječe kružnicu u točki C. Ako je $|BC| = |DC| = 3$, $|OD| = 2$ i $|AB| = 6$, koliko iznosi površina zadanog kruga?

2. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan. Visina iz vrha B siječe kružnicu s promjerom $\overline{AC}$ u točkama P i Q, dok visina iz vrha C siječe kružnicu s promjerom $\overline{AB}$ u točkama R i S. Pokažite da su točke P, Q, R i S konciklične (tj. da leže na istoj kružnici).

3. Neka je $ABCD$ četverokut upisan u kružnicu sa središtem u točki O. Neka su točke M i N redom polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, te neka je S sjecište dijagonala. (Točke O, M, N i S su međusobno različite.) Dokažite da su točke O, M, B, D konciklične ako i samo ako su točke O, N, A, C konciklične.

4. Neka je dužina $\overline{AB}$ promjer kružnice k, i neka su C i D bilo koje dvije točke na toj kružnici. Označimo sjecište pravaca AD i BC s E. Dokažite da je vrijednost izraza $|AE| \cdot |AD| - |BE| \cdot |BC|$ neovisna o izboru točaka C i D. (*Napomena:* ukoliko znate trigonometriju, pokušajte prvo riješiti zadatak uz pomoć trigonometrije.)

5. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut u kojem je $|AD| = |BD|$. Neka je M presjek njegovih dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, I središte kružnice upisane trokutu $\triangle BCM$, te N drugo sjecište pravca AC i kružnice opisane trokutu BMI. Dokažite da je $|AN| \cdot |CN| = |BN| \cdot |CD|$.

6. U šiljastokutnom $\triangle ABC$ (pri čemu je $|BC| > |AC|$) nožišta visina iz vrhova A i B su redom točke D i E. Težišnica iz vrha A siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točki N. Kružnica opisana trokutu $\triangle ADN$ siječe pravac BC u točkama D i G. Neka je F točka u ravnini takva da je četverokut $EBFC$ pravokutnik. Dokažite da točke G, C, N i F leže na istoj kružnici.

Radikalna os

Definicija. Dane su 2 nekoncentrične kružnice u ravnini. Njihova *radikalna os* je skup točaka koje imaju istu potenciju točke na obje kružnice.

Osnovna svojstva:

- radikalna os je pravac
- ako se kružnice sijeku, prolazi sjecištima tih kružnica (u slučaju da se kružnice diraju radikalna os im je zajednička tangenta u točki dirališta)
- okomita je na spojnicu središta kružnica
- raspolavlja zajedničku tangentu danih kružnica (no ne i spojnicu središta tih kružnica!)

Svojstva 2 i 4 lako slijede ako znamo svojstvo 1. Svojstva 1 i 3 su znatno teža za dokazati, pa se nećemo time baviti. Ukoliko nekog zanima skica dokaza, može pogledati [1] (https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Radical_axis)

Iz raznolikosti svojstava razumno je pretpostaviti da će se radikalne osi kružnica pojavljivati u raznolikim zadatcima. Nije na odmet ni napomenuti da ukoliko imamo 3 kružnice u ravnini i promatramo njihove 3 radikalne osi (za svaki par kružnica po jednu), one će se sjeći u istoj točki (*pokažite to!*). Tu točku zovemo radikalno središte.

Zadatci

7. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan s ortocentrom H. M i N su proizvoljne točke redom na dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kružnice s promjerima $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$ sijeku se u točkama P i Q. Pokažite da su točke P, Q i H kolinearne (tj. da leže na istom pravcu).

8. Dana je kružnica k sa središtem u točki O. Neka je P proizvoljna točka unutar kružnice, a Q proizvoljna točka na radikalnoj osi kružnice k i kružnice kojoj je promjer dužina $\overline{OP}$. Pokažite da je zbroj potencije točke P na kružnicu k i potencije točke Q na kružnicu k jednak $|PQ|^2$.

9. Neka je C točka na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$, D polovište luka $\widehat{AC}$, E nožište okomice iz točke D na pravac BC, te F presjek pravca AE i polukružnice. Dokažite da pravac BF raspolavlja dužinu $\overline{DE}$.

10. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ sa središtem u točki I dira stranice $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ redom u točkama D, E, F. Neka pravac AI siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točkama A i M. Tangenta na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ u točki M siječe pravce AC i AB redom u točkama K i L. Dokažite da točka D leži na radikalnoj osi kružnica opisanim trokutima $\triangle EIK$ i $\triangle FIL$.

11. Neka su A, B, C, D 4 različite točke na pravcu p, u tom poretku. Kružnice s promjerima $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Pravci XY i BC sijeku se u točki Z. Neka je P točka na pravcu XY različita od točke Z. Pravac CP siječe kružnicu s promjerom $\overline{AC}$ u točkama C i M, a pravac BP siječe kružnicu s promjerom $\overline{BD}$ u točkama B i N. Dokažite da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

12. Neka su A, B, C točke na kružnici takve da je $|AB| = |BC|$. Neka se tangente na tu kružnicu u točkama A i B sijeku u točki D. Drugo sjecište pravca CD i kružnice označimo s E. Dokažite da pravac AE raspolavlja dužinu $\overline{BD}$.

8.4. N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$, d je kvadratno slobodan, $x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$
CRT p_1, p_2, ... , p_n međusobno relativno prosti, sustav:

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1(\cdot p_1) \\ x &\equiv a_2(\cdot p_2) \\ &\cdots \\ x &\equiv a_n(\cdot p_n) \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje *mod* $p_1p_2...p_n$.

Zadaci

1. Dokaži da ako je jedan član aritmetičkog niza prirodnih brojeva potpun kvadrat, tada taj niz sadrži beskonačno mnogo potpunih kvadrata.

2. Pokažite da brojevi $x^2 + x + 1$ i $x + 1$ ne mogu istodobno biti potpuni kubovi prirodnih brojeva, ni za koji prirodan x.

3. Parametriziraj $a^2 + b^2 = c^2$.

4. Neka su p_1 i q_1 cijeli brojevi takvi da jednadžba $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo brojeve p_{n+1} i q_{n+1} formulama $p_{n+1} = p_n + 1, \quad q_{n+1} = q_n + \frac{1}{2}p_n$.

   Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednadžba $x^2 + p_nx + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

5. Dokazite da postoji tocno jedan prirodan broj koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima 2005 znamenaka i djeljiv je s 2^{2005}.

6. Dokaži da za svaki prirodan $k > 1$ postoji beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je $a^2 - kab + b^2 = 1$.

7. Promatramo jednadžbu $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, pri čemu su a, b, c prirodni brojevi. Dokažite:

   (a) Ne postoji rješenje (a, b, c) za $n = 2017$.

   (b) Za $n = 2016$, a mora biti djeljiv s 3 za svako rješenje (a, b, c).

   (c) Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja (a, b, c) za $n = 2016$.

8. Cijeli broj n zovemo *šleskim* ako postoje positivni cijeli brojevi a, b, c takvi da n = $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

   a) Dokaži da postoji beskonačno mnogo *šleskih* cijelih brojeva.

   b) Dokaži da nisu svi cijeli brojevi *šleski*.

9. Dokaži da za svaki prirodan broj n, postoje u parovima relativno prosti cijeli brojevi $k_0, k_1, ..., k_n$, svi strogo veći od 1, takvi da $k_0k_1...k_n - 1$ je produkt dva uzastopna cijela broja.

10. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

    (a) $f(m)$ i $f(n)$ su relativno prosti ako m i n su relativno prosti.

    (b) $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2012$ za svaki n.

    Dokaži da za svaki n i prosti p, ako p dijeli $f(n)$ onda p dijeli i n.

8.5. C26: Princip ekstrema - David Mikulčić

Link na hintove. Link na rješenja.

Uvod

Na korona zabavi se nalazi 20000 ljudi. Neki su se rukovali. Rukovanje se smatra uzajamno. Dokaži da postoje dvije osobe sa istim brojem rukovanja.

Zadaci

1. U ravini se nalazi konačan broj crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini s krajevima istih boja nalazi se točka druge. Dokaži da se sve date točke nalaze na pravcu.

2. Nakon rukovanja svih 20000 učesnika na zabavi sjelo je za okrugli stol te svatko napisao neki realan broj na salvetu. Između svaka dva broja a i b sa salveta, nalazi se broj $\frac{a+b}{2}$. Dokaži da se svi brojevi sa salveta jednaki.

3. Riješite sustav u skupu R:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= z\\ (y+z)^3 &= x\\ (x+z)^3 &= y\end{aligned}$$

4. Svaka cesta u Sikiniji je jednosmjerna. Svaki par gradova je povezano točno jednom direktonom cestom. Dokaži da postoji grad iz kojeg se može doći u svaki drugi koristeći najviše dvije ceste.

5. Dokaži da je u svakom konveksnom peterokutu moguće odabrati tri dijagonale koje čine trokut.

6. Brojevi od 1 do n^2 upisani su na ploču n x n. Dokaži da postoje susjedna polja takva da se brojevi na njima razlikuju više od n. Susjedna polja su polja koja dijele zajednički vrh.

7. Neka je S skup točaka u ravnini. Svaka od točaka iz S ujedno je i polovište dužine koja spaja neke druge dvije točke iz S. Dokažite da je skup S beskonačan.

8. U ravnini je dano n točaka tako da svake tri čine vrhove trokuta površine manje od 1. Dokažite da sve točke leže unutar trokuta površine manje od 4.

9. Neparan broj ljudi stoji u ravnini tako da su sve međusobne udaljenosti različite. Istovremeno svatko upuca svog najbližeg susjeda. Dokažite da
(a) barem jedna osoba preživi, tj. postoji osoba koju nitko nije upucao.
(b) svaku osobu je upucalo najviše 5 ljudi.
(c) putanje metaka se međusobno ne sijeku.
(d) skup dužina koje čine putanje metaka ne sadrži zatvorenu liniju tj. poligon

10. U Sikinijskom Parlamentu svaki zastupnik ima najviše tri neprijatelja. Dokaži da je zastupnike moguće podijeliti u dvije sobe tako da svaki ima najviše jednog neprijatelja u svojoj sobi. Neprijateljstva su uzajamna.

11. Možeš li odabrati 1983 u parovima različitih pozitivnih cijelih brojeva < 100000, tako da nikoja tri ne čine aritmetički niz?

12. U sveminu, dan je određen broj planeta sa jediničnim radijusom. Obilježimo površinu svakog planeta koja se ne može vidjeti ni sa kojeg drugog. Dokaži da suma obilježenih površina je jednaka površini jednog planeta.

Dio III

Hintovi s predavanja na prvom terminu

9. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

9.1. A11: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Izmnoži obje strane s x jer $x > 0$.
2. Svedi na potpun kvadrat.
3. Hint je 2. zadatak.
4. Svedi na sumu kvadrata od tri člana.
5. Hint je 4. zadatak.
6. Hint je 5. zadatak.
7. Pokušaj primijeniti 4. zadatak.
8. Izraz je ekvivalentan izrazu $(a - \frac{1}{b})(b - \frac{1}{c})(c - \frac{1}{a}) > 0$.
9. Ideja je svođenje na potpun kvadrat.
10. Ideja kao u prethodnom zadatku.
11. Da bi se mogao primijeniti A-G na dva člana, napravi od 3 člana, 6 članova.
12. Definiraj nazivnike kao $a = y + z$, $b = z + x$ i $c = x + y$ pa izrazi cijeli izraz u terminima a, b i c.
13. Primijeni A-G unutar svake od zagrada.
14. Primijeni A-H nejednakost tako da svaki nazivnik razbijes na sumu dva člana, npr. $a + b + 2c = (a + c) + (b + c)$.
15. Pomnoži izraz s $1 = x + y + z$ pa primijeni A-G nejedakost na svaku od zagrada.
16. Najprije A-H nejednakost, a zatim iskoristi 5. zadatak.
17. Najprije primijeni A-G nejednakost s 3 člana, a zatim 3 puta primijeni A-G nejednakost za 2 člana.
18. Uoči $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} = \frac{2}{\sqrt{yz}}$.
19. Primijeni A-G nejednakost za 2 člana na brojnike.
20. Uoči $\frac{1}{a^2+1} = \frac{a^2+1-a^2}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geqslant 1 - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2}} = 1 - \frac{a}{2}$.
21. Iskoristi formulu za kvadrat trinoma. Pokušaj pametno primijeniti A-G.
22. Iskoristi A-G tako da svaki od sumanada kombiniras s drugim izrazima da se u produktu geometrijske sredine pokrate izrazi.
23. Uoči da je $a^3 + b^3 \geqslant ab(a + b)$.

9.2. C11: Prebrojavanja - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Iskoristite princip produkta.
2. Prvu osobu možemo odabrati na 10 načina. Na koliko načina možemo odabrati drugu osobu? A treću?
3. (a) Prva znamenka može biti bilo koja osim 0, znači da imamo 9 različitih znamenki na raspolaganju za odabrati znamenku tisućica. Na koliko načina možemo odabrati znamenku stotica? Pokušajte iskoristiti princip produkta.
   (b) Prvu znamenku ponovno možemo odabrati na 9 načina (sve osim 0), a koliko imamo izbora za drugu znamenku? Sada ne smijemo odabrati onu koju smo odabrali na prvo mjesto!
   (c) Budući da sada ne želimo da naš broj sadrži znamenku 3, imamo po 1 manje izbor na svakom mjestu!
   (d) Znamenka 5 može stajati na točno jednom od 4 mjesta u broju. Rastavite na slučajeve po tome na kojem mjestu se nalazi 5, a zatim iskoristite princip sume (slučajevi kada je 5 na prvom i npr. drugom mjestu su disjunktni)!
   (e) Iskoristite a i c dijelove zadatka.
4. Koja je najveća moguća duljina stranica kvadrata?
5. (a) Što nam govori $100 = 33 \cdot 3 + 1$?
   (b) Koliko ih ima koji su djeljivi samo s 3? A samo sa 4? Jesmo li nešto brojali više puta?
6. Budući da tražimo palindrome nije potrebno zasebno odabirati svaku znamenku.
7. Kreni redom po znamenkama slijeva nadesno i broji koliko ima brojeva s određenom znamenkom na prvom mjestu, pa na prva dva...
8. (a) Možemo bez smanjenja općenitosti fiksirati jednu osobu. Tada, gledajući u jednom smjeru (recimo smjeru kazaljke na satu), biramo po jednu osobu koja će sjediti na sljedećem mjestu.
   (b) Petra i Anu možemo shvatiti kao jednu osobu pa tako sada trebamo smjestiti 14 ljudi u krug. Kako sve Petar i Ana mogu zajedno sjesti?
9. Odvojeno promatraj brojeve kojima je prva znamenka parna i one kojima je prva znamenka neparna.
10. Za svaku od olovaka imamo 2 izbora, možemo ju odabrati ili ne.
11. Kockice iste boje ne razlikujemo. Iskoristiti binomni koeficijent.
12. Promotrite običnu ploču (bez odstranjenih polja) i slučajeve kad se figurica nalazi na nekom od tih odstranjenih polja.
13. Rastavite broj na proste faktore.
14. (a) Najkraći putevi sastoje se samo od pomaka desno i gore, a cijeli put možemo shvatiti kao niz takvih pomaka.
    (b) Princip sume! Koliko je puteva koji prolaze tom točkom? Koliko ih je bez restrikcija?
15. Prvo smjestimo putnike s izraženom željom mjesta sjedenja, a na kraju one kojima je svejedno. Na kojim mjestima mogu sjediti osobe koje žele sjediti s licem okrenutim u smjeru vožnje vlaka?
16. Različita slova koja imamo na raspolaganju su $\{M, A, T, E, I, K\}$. Oprez, 2 slova M međusobno nisu različita. Ne smijemo previše puta brojati istu "riječ".
17. Neka su omotnice označene brojevima tako da je najveća označena brojem 1, a najmanja 100. Na koliko načina možemo staviti omotnicu 2? A k?
18. Koristi sličnu ideju kao zadatak 12.
19. Provjeriti za male n (2, 3, 4) i izvesti opću formulu pomoću rekurzije.

9.3. C13: Invarijante - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Što se u svakom potezu može dogodit s brojem crnih točaka?
2. Što se u svakom potezu događa s brojem crnih polja?
3. Za jedan od ponuđenih treba konstrukcija. Nove koordinate imaju neke slične elemente u sebi.
4. Možemo zamisliti da je umjesto slova M na ploči broj -1, a umjesto F broj 1.
5. 0.8 i 0.6 se pojavljuju uz a i b, ali s drukčijim predznacima, možda treba probati dobiti svugdje + nekom operacijom...
6. Postoje dvije invarijante. Korisna je činjenica da je riječ o *jednakostraničnom trokutu i kvadratu.*
7. Za koliko se mijenja zbroj brojeva u svakom potezu?
8. Za koliko se mijenja suma brojeva na ploči nakon promjene? S čime je ta razlika djeljiva?
9. Zbroj dva prirodna broja je veći od svakog od njih.
10. Ovdje je riječ o monovarijanti. Skiciraj sve moguće scenarije pretvaranja čestice u korov.
11. Postoji li neka funkcija $f(x, y)$ za koju vrijedi $f(x, y) = f(y, x) = f(x + y, y) = f(x - y, y)$?
12. Ostatci pri dijeljenju s nekim brojevima ovise o zbroju znamenki...
13. Koje su sve ključne/korisne vrijednosti koje vežemo uz polinome 2. stupnja?
14. Postoji invarijanta koja ograničava monovarijantu.
15. Dodijeli svakom kamenčiću neki broj koji nakon promjene ostaje konstantan. Koja sve polja spadaju u uvjet $a, b \in \mathbb{Z}$ i $a + b \leqslant 3$?
16. Svakom bijelom žetonu dodijelite neki broj koji ovisi o broju crnih žetona.

9.4. G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Kosinusov poučak
2. Talesov poučak.
3. Nađi sličnost trokuta koja je ekvivalentna s tvrdnjom zadatka.
4. Dodaj točku i nađi četverokut takav da je tvrdnja zadatka ekvivalentna s tvrdnjom da je taj četverokut paralelogram.
5. Dodaj polovišta stranica.
6. Korisno je promatrati zrcalne slike nekih točaka preko AC ili D.
7. Pokušaj dokazati da su točke D, K i L kolinearne.

9.5. N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Nema hinta...
2. Modulo 3.
3. Nakon nekog vremena se ostatci ponavljaju.
4. Modulo 2.
5. Modulo 10.
6. Modulo 9.
7. Modulo 3, više puta.
8. Preoblikuj izraz tako da je u potencijama samo n. Kongruencije kod potencija istih eksponenata.
9. Koje sve ostatke daje 3^k pri dijeljenju sa 7?
10. Raspiši broj $\overline{a_k a_{k-1} ... a_0}$ kao sumu $a_i \cdot 10^i$. Promatraj ostatke 10^i pri dijeljenju s 11.
11. a) Mali Fermatov b) Eulerov teorem
12. Eulerov teorem.
13. Prouči neke određene članove niza.
14. Dokaži da za prirodni broj n, $n^2 + 1$ u rastavu nema faktor oblika $4k + 3$ za prirodni broj k.
15. Jednadžba je homogena, dakle možemo množiti jednadžbu da dobijemo cjelobrojna rješenja...
16. Što vrijedi za decimale racionalnog broja?
17. Broj elemenata u reduciranom sustavu ostataka modulo m je $\phi(m)$.

10. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

10.1. A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Indukcija
2. Indukcija
3. Pretpostavi suprotno
4. Indukcija
5. Pokušaj dobiti a_n u ovisnosti o a_{n-1} i a_{n-2} bez dijeljenja
6. Mogu li 3 prosta broja biti u istom geometrijskom nizu?
7. Indukcija
8. a) Neka je b^k član tog niza i d razlika niza. Postoji li neki oblik broja $q \in N$ takav da je $(b+q)^k$ isto član niza? b) Konstrukcija
9. U traženom izrazu rastavi k i M po uvjetima.
10. Indukcija
11. Indukcija
12. Promatraj recipročne vrijednosti
13. Indukcija
14. Rastavi na slučajeve + indukcija.
15. Ako su a i b kvadrati, onda je i k^2ab kvadrat za svaki $k \in \mathbb{N}$.

10.2. C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Podijeli ploču u kvadrate 2×2.
2. Obojaj ploču kako je obojana šahovska ploča i pokušaj popločati svaki od oblika.
3. Obojaj ploču kako je šahovska ploča i pokušaj popločati svaku vrstu T-tetromina.
4. Dosta slično kao prethodni zadatak.
5. Obojaj ploču dijagonalno u 4 boje.
6. Pokušaj popločati za neke n, npr $n = 10$.
7. Ovo je samo poopćenje 5. zadatka.
8. Obojaj gradove tako da nikoja dva susjeda nisu iste boje.
9. Pretpostavi da postoji linija koja siječe svaki segment točno jednom. Mora li svaka linija koja ulazi u pravokutnik, ujedno i izlaziti iz njega?
10. Obojaj ploču tako da jedino srednji stupac bude u bijeloj, a ostali u crnoj boji. Koliko je brojeva -1 u svakom koraku, ako krenemo tako da je -1 na početku na crnoj boji?
11. Pretpostavi da crvene točke nemaju udaljenost a, a plave b. Pokušaj konstruirati neki geometrijski lik koji vodi na kontradikciju.
12. Pokušaj konstruirati neki geometrijski lik s odgovarajućim duljinama stranica koji vodi na kontradikciju.
13. Kako bi bio obojen pravokutnik da ispunjava kriterije zadatka?
14. Refleksijama se uvijek ostaje na istoj boji.
15. Pretpostavi da su P_1, P_2 i P_3 odgovarajući skupovi točaka po bojama. Pretpostavimo suprotno, da ne postoje 2 točke udaljenosti a_1 u P_1, a_2 u P_2, a_3 u P_3. Pokušaj konstruirati geometrijski lik koji vodi na kontradikciju.
16. Pokušaj dijagonalno obojati ploču u tri boje. Što se događa ako ploču zarotiramo za $90°$?
17. Jasno je $a_1a_2 \ldots a_25 = b_1b_2 \ldots b_25 =$ produkt svih elemenata u matrici. Pretpostavi suprotno, $\sum_i (a_i + b_i) = 0$.

10.3. C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

U uvodnim zadatcima hintovi su redom Dirichlet, princip ekstrema, konveksna ljuska i indukcija.

1. Koja dužina ti je $\sqrt{13}$? Ne zaboravi na Dirichleta.
2. Pretpostavi suprotno.
3. Konveksna ljuska.
4. Općenito, želimo naći invarijante da pokažemo da se takvim potezom ne može postići ovo stanje
5. Indukcija.
6. Počni s konveksnom ljuskom. Kad imaš kružnicu i dvije točke A i B na njoj, koji je kriterij za određivanje je li T unutar, izvan ili na kružnici ?
7. Konveksna ljuska. Pokušaj nekako urediti neke točke.
8. a) Nejednakost trokuta. b) Mali primjeri i princip ekstrema. c) prisjeti se da je nasuprot najkraće stranice najmanji kut u trokutu
9. Princip ekstrema; 9.a)
10. Mali primjeri i indukcija.
11. Nejednakost trokuta.
12. Konveksna ljuska, počni od točaka na rubu.
13. a) pomoćni zadatak: U nekoj državi s n je svaki grad povezan s 1,3 ili 5 drugih gradova. Što sve može biti n. (ne zaboravi na male primjere). b) Uoči da ako postoji dobar skup s m i dobar skup s n kružnica, onda postoji dobar skup s $m + n$ kružnica, trebat će naći neke male primjere.
14. Pretpostavi suprotno. Promatraj što se sve može dogoditi ako (slijeva na desno) jedna dužina počne prije i završi poslije neke druge dužine. Dokaži da se to mora jednom dogoditi.

10.4. G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uvedi sjecište tangenata.
2. Uvedi sjecište kružnice i pravca visine u a), te sjecište kružnice i pravca paralelnog s BH kroz A u b).
3. Prvo dokaži da lijeva strana povlači desnu, onda fantomiraj i prisjeti se dokaza tetivnosti.
4. Uvedi sjesište kružnice i simetrale stranice.
5. Neka D bude sjecište AO i BC, preostaje dokazati paralelnost.
6. Fantomiraj D i E i dokaži da su na kružnici s promjerom $\overline{BC}$. Što je ekvivalentno s tom tvrdnjom ?
7. Dokaži da se sjecište dviju tih kružnica nalazi na Eulerovom pravcu (središte opisane, ortocentar H, težište, no ovdje težište nije bitno).
8. Neka T bude presjek AQ i kružnice, kolinearnst M, T i N ćemo dokazati jednakosti vržnih kutova. Bit će tetivnosti i angle-chasinga.
9. Razmisli malo izvan okvira. Što bi mogla biti točka M ?
10. K neće biti samo na simetrali $\overline{AT}$, nego i na simetralama $\overline{MX}$ i $\overline{NY}$ (AT, MX i NY će biti paralelni pravci). Fantomiraj X' kao sjecište kružnice i pravca kroz M paralelnog s AT (AT je simetrala kuta u A). Želimo dokazati da je X' na simetrali $\overline{AC}$, tj. $|AX'| = |X'C|$.
11. Čemu još pripada sjecište AD i CQ ? Definiraj ga kao presjek toga i k, zatim kreni length-chaseati (u ovom zadatku ima lijepih stvari za to, uključujući neke sličnosti).

10.5. N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. HINT 1: Želimo cijeli izraz svesti na nešto jednako konstanti.
   HINT 2: Uočavamo dvicu pa nas to podsjeća na potpun kvadrat.
2. HINT 1: Želimo konstantu s jedne, faktorizirani izraz s druge strane.
   HINT 2: Riješi se nazivnika.
   HINT 3: Faktorizacija je oblika $(x\dots)(y\dots) = \dots$ pa namjestimo $(x-pq)(y-pq) = p^2q^2$.
3. HINT 1: x^2+y^2 neodoljivo želi $2xy$.
   HINT 2: Nakon toga ćemo imati 2 potpuna kvadrata kojih ćemo razlikom kvadrata moći faktorizirati.
4. HINT 1: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
   HINT 2: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}$
   HINT 3: $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$.
5. HINT 1: Podijeli s $x+y$, lako ćeš riješiti slučaj kada je $x+y=0$.
   HINT 2: Faktoriziraj u $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$.
6. HINT: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$.
7. HINT: Smještanje među kvadrate.
8. HINT: Uoči da je $(2x+7)^3 < P(x) < (2x+10)^3$?
9. HINT: Iskoristi A-H nejednakost.
10. HINT: x prikažemo preko z zato što želimo riješiti jednadžbu, a ne želimo se mučiti s kubnom jednadžbom pa namjestimo izraz da sve podijelimo sa z^2.
11. HINT: Definirajmo $d = \gcd(x,y)$ jer nemamo čim drugim se baviti što ima smisla promatrati nego ovim.
12. Iskoristi sljedeću lemu: Ako su A i B relativno prosti prirodni brojevi, onda postoje prirodni u, v takvi da $Au - Bv = 1$.
13. Dovoljno je dokazati da 3^k dijeli $2^{3^k}+1$ za sve $k \geqslant 0$.
14. HINT 1: Probaj pokratiti neke članove.
    HINT 2: Pokušaj pogoditi *mod* za koji jednadžba nema rješenja.
15. HINT 1: Želimo *mod* tako da sustav ostataka od desne strane različit od lijeve.
    HINT 2: Pokušajmo s *mod* 3.
16. HINT: Modulo 11 rješava zadatak
17. HINT: Pokušaj izraze nadopuniti do istog izraza, kao da supstituiras umjesto x nešto i y nešto drugo.
18. HINT: Zadatak se rješava slično kao 13. zadatak.

11. Poglavlje

Hintovi za olimpijske grupe

11.1. I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Ako $x \notin X$, onda ili $j \notin X$ ili $x - j \notin X$.
2. Pretpostavimo suprotno. Promotrimo maksimalni b_j.
3. Promotrimo niz $|a_n - b_n|$. Kako se taj niz ponaša?
4. Stavimo $m = f(n)$. Probajmo 'iterirati' dobivenu nejednakost.
5. Dokaži da je $a_i = 0$ ili je $b_i = 0$. Pretpostavi suprotno i promotri neki takav indeks koji je na neki način maksimalan.
6. Pretpostavi suprotno, i probaj pronaći puno najzad konstantnih nizova.

11.2. I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koristite Ptolomejev teorem.
2. U ovom zadatku treba nam potencija točke. Dokažite da je $CDEF$ tetivan četverokut.
3. Izrazite $(\frac{AB}{AT})^2$
4. Dokažite da su $AEDG$ i $HEDB$ tetivni četverokuti. Koristi Cevin teorem i poučak o simetrali kuta.
5. AB i AD su unutarnja i vanjska simetrala kuta $\angle PAD$. Treba pokazati da je PQ vanjska simetrala kuta $\angle BQD$.
6. Iskoristi sinusni Cevin teorem.
7. Neka je I središte upisane kružnice i neka su E, F, G i H dirališta s AB, BC, CD i DA redom. Dokažite $\frac{sin\angle HPD}{\angle GPD} = \frac{\angle EPB}{\angle FPB}$

11.3. I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koristiti kriterij za $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.
2. Svi prosti faktori desne strane daju ostatak $+-1$ pri dijeljenju s 12.
3. Indukcija.
4. CRT+Dirichletov teorem o aritmetičkim nizovima
5. Napišimo $c = -(a+b)$ i raspišimo (supstitucija $a+b=u$, $ab=v$ može skratiti posao)
6. Pretpostavimo da a generira lanac duljine 3. Promotrimo $\left(\frac{2^{2a+1}}{4a+3}\right)$.
7. Pronaći ćemo beskonačno x takvih da između x^2+1007^2 i x^2+1008^2 nema prostih brojeva.
8. Ako raspišemo, dobijemo da tražimo p za koji postoji a takav da $p \mid a^3-3a+1$ i da $12-3a^2$ nije kvadratni ostatak.

11.4. I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Promotrimo zapis broja u bazi 3.
2. Neka je maknut neki skup brojeva. Te je brojeve moguće upariti tako da suma uparenih brojeva nije u tom skupu.
3. Promatramo sume brojeva modulo 20.
4. Trebamo upariti sve brojeve tako da je za svaki par (a, b) broj $a^2 + b^2$ prost.
5. Kad dodamo neki broj u skup B, time ne utječemo na to koliko brojeva dijele brojevi iz A koji su veći od njega.
6. Promotrimo graf G u kojem vrhovi G_i odgovaraju brojevima a_i. Neka su G_i i G_j povezani bridom ako je $gcd(a_i, a_j) > 1$.
7. Uzmimo prost broj p veći od svih brojeva iz A oblika $3k - 1$. Neka je $S = \{k, k + 1, ..., 2k - 1\}$. Vrijedi: $\forall a, b \in ta, tb \in S \implies$ ta+tb$\notin S$.
8. Rješenje je $\dfrac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$

11.5. I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. DA, indukcija
2. DA, iskoristiti Eulerov kriterij
3. DA, primijeti da su 2^{2n}, $2^{2n}+1$, $2^{2n}+2$ dobri za svaki n, sada još
4. NE, iskoristi LTE na neki prosti djelitelj od $p-1$
5. NE, pretpostavi suprotno i iskoristi Eulerov teorem
6. DA, indukcija
7. DA, pogledaj stvari mod 2003 (2003 je prost)
8. NE, pretpostavi suprotno, dokaži da ako postoje barem dva različita broja mod p da tada postoji i broj koji je nula mod p
9. NE, pretpostavi suprotno i preko LTE ograniči ν_5 od razlike
10. DA, možda Vieta formule mogu pomoći.

11.6. I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1.

11.7. MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.

1. Školjka
2. eliminirati rješenje $f(x) = 0$ za sve x, surjektivnost, promotriti nultočku.
   $f(t) = 0 \implies f(t^2) = 0$ te iskoristiti da je nultočka period
3. Uvrsti $x - y$ umjesto x, pokrati LHS sa prvim članom desne strane.
4. AoPS
5. Iran 2014.
   Pokrati izraze unutar f-a za nejednakost za $yf(y)$, dobij suprotnu nejednakost za $y > 1$, nađi $f(1)$, proširi na $x < 1$ indukcijom
6. Razdvoji ovisno o $f(0)$, jedan slucaj se lako riješi, u drugom u izraz za $f(-x)$ uvrsti polaznu jednadžbu.
7. $f(0) = 0$ jedan, $f(0) \neq 0$ drugi slučaj. U drugom izračunaj $f^k(0)$ i iskoristi $f^k(x) = f^y(x) \implies k = y$, u prvom indukcijom $|f(n)| = n$, neparnost i podjela na slučajeve.
8. AoPS
9. IMO shortlist 2007 A4
10. IMO shortlist 2011 A6
11. AoPS

11.8. M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Što možemo raditi ploči, a da se postojanje pravokutnog trokuta ne promijeni ?
2. Koji potezi su "superiorni"?
3. Mali primjeri će dati tko pobjeđuje, ostatak je tipična teorija igara u kojoj (SPOILER) drugi igrač pobjeđuje.
4. Iskoristi "simetriju". U što Sully može biti siguran nakon svog poteza? U što Mike može biti siguran nakon svog poteza?
5. M A L I P R I M J E R I
6. Koliko stepenica treba ? Bojanja i invarijante.
7. Bojanje.
8. Nemoj komplicirati. Sve autoomobile bi trebalo pomaknuti izvan nekog "okvira". Ne zaboravi na bojanja.
9. M A L I P R I M J E R I
10. Teorija grafova
11. Za prvi dio hint je indukcija, za drugi dio pretpostavi suprotno.
12. Bojanje s m različitih boja.
13. Promatraj neki par redaka ili 2x2 kvadrate. Što je invarijanta?
14. Kad promatraš male primjere, uoči da se ideja optimizacije ne mijenja.
15. Mali primjeri i 11. zadatak.
16. Da nađeš taj broj, radi s jednim poplavljenim poljem na početku. Bit će puno tvrdnji tipa "Ako hefest može pobijediti za ovaj raspored, onda može i za onaj zato jer..."

11.9. M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.Samo angle chase. Pripisana ACD dira u E. USAMO 1999 IMO shortlist 2012 G1 https://www.skoljka.org/task/3157/ IMO shortlist 2005 G1 U i V definiraj kao sjecišta I_AB, I_AC sa YZ, traži tetivnost IMO shortlist 2017 G4 Primjena leme sa A, P, M. IMO shortlist 2010 G4

11.10. M8: Diofantske - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Promotrimo rješenje jednadžbe koje ima minimalni w.
2. Zamijenimo najmanju varijablu s x i promatrajmo ju u x. Što znamo o rješenjima te kvadratne jednadžbe?
3. Označimo $a^2 + b^2 - abc = d$ i promotrimo tu jednadžbu u a ili b za fiksne c i d.
4. Možemo li par (n, m) zamijeniti s parom $(\frac{n^2-1}{m}, n)$?
5. Možemo li dobiti $4ab - 1 \mid (a - b)^2$?
6. Za fiksni n promatrajmo rješenje koje ima minimalni b.

11.11. M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Za koje brojeve se postiže maksimalna vrijednost? Koristi AG nejednakost.
2. Kada se postiže slučaj jednakosti? Kreiraj polinom u jednoj varijabli čije su nultočke brojevi za koje se postižu slučajevi jednakosti i čiji je predznak poznat u svakoj točki iz domene varijabli.
3. Koja je najveća moguća vrijednost varijabli? Koji je slučaj jednakosti?
4. Jedna strana je trivijalna pogodnom supstitucijom. Kada se postiže slučaj jednakosti u drugoj nejednakosti?
5. Izraz $(x - y)$ ne mijenja vrijednost ako x i y jednoliko smanjujemo ili povećavamo.
6. Namjesti CSB u Engel formi.
7. Koristi $\sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{a+b} = 0$ i namjesti CSB u Engel formi.
8. Izraz $(x-y)$ ne mijenja vrijednost ako x i y jednoliko smanjujemo ili povećavamo. Koristi $\sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{a+b} = 0$.

11.12. M10: Euler, CRT - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na rješenja.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.

1. Poznato. (Wikipedia)
2. $n = p - 2$.
3. Indukcija.
4. IMO shortlist 2006
5. Promotri $n = kp(p-1)$ i namjesti sumu na 2020 biranjem k.
6. AoPS
7. Uzmi km različitih prostih brojeva i CRTom...
8. Indukcija.
9. HMO 2020

11.13. M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Odaberimo točku D tako da je $ABCD$ paralelogram.
2. Ako središte opisane kružnice leži na težišnici trokuta, taj trokut mora biti jednakokračan.
3. Neka je M polovište AB. Dokažite sljedeću lemu: $CH = 2OM$.
4. Dodajmo sjecište pravca PB s opisanom kružnicom $\triangle ABC$
5. Dodajmo paralelogram $AHDI$
6. Dokažite da je $BQKN$ tetivan četverokut.

Dio IV

Hintovi s predavanja na drugom terminu

12. Poglavlje

Hintovi za prvu grupu

12.1. A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Raspisati stranu prikazanu pomoću umnoška. Za potenciju binoma pokušajte na manjim primjerima pa kombinatorno dokažite tvrdnju.
2. Koristite identitete iz uvoda.
3. Zapišite brojeve kao n-1, n, n+1 i koristite identitete iz uvoda.
4. Izračunajte lijevu i desnu stranu.
5. Faktorizirajte izraz i izjednačite s 0.
6. Koristite identitete iz uvoda.
7. Faktorizirajte izraz.
8. Pronađite periodičnost.
9. Postavite sustav jednadžbi.
10. Uvrstite vrijednost c u prvu jednadžbu i odredite moguće vrijednosti a.
11. Postavite sustav jednadžbi te ih međusobno oduzmite.
12. Odredite ab.
13. Koristite identitete iz uvoda.
14. Zbrojite jednadžbe.
15. Faktorizirajte i izjednačite sa 0.
16. Zapišite u obliku bez razlomaka.
17. Dokažite da je jedino rješenje $x_1 = x_2 = ... = x_{1994} = 1$.
18. Pomnožite jednadžbe, dokažite da je x=y=z=1

12.2. C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Ljudi su kuglice, a datumi u godini su kutije.
2. Čarape su kuglice, a parovi su kutije.
3. Pikule su kuglice, a boje su kutije.
4. Ljudi su kuglice, a horoskopski znakovi su kutije.
5. Ljudi su kuglice, a mjeseci su kutije.
6. Retci, stupci i dijagonale su kuglice, a moguće sume su kutije.
7. Postoji 8 načina za obojati jedan stupac, a stupaca ima 9.
8. Pazite na to da osoba koja se rukovala s 0 ljudi i osoba koja se rukovala s 499 ljudi ne mogu postojati u isto vrijeme.
9. Slično kao prethodni zadatak.
10. Oduzmemo li dva broja s istim ostatkom pri dijeljenju s 19 dobijemo broj djeljiv s 19. Iskoristite to da biste odredili što bi bile kutije.
11. Koliko ima parova prirodnih brojeva koji u sumi daju 100?
12. Koliko ima različitih mogućih zbrojeva prirodnih brojeva od 1 do 100, a koliko ima mogućih parova među brojevima na ploči?
13. Što bi se dogodilo u "najgorem slučaju"?
14. Kada sve polovište dužine može imati cjelobrojne koordinate u odnosu na parnosti koordinata rubnih točaka dužine?
15. Podijelite kvadrat na manje kvadratiće duljine stranice $\frac{1}{6}$.
16. Podijelite šesterokut na 6 trokuta koje čine njegove dijagonale.
17. Kojim znamenkama mogu završavati potpuni kvadrati?
18. Promatrajte niz 1, 11, 111, 1111, ...
19. Vizualizirajte dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut.
20. Na koliko načina (različitih od početnog) možemo okrenuti stol?
21. Faktorizirajte izraz!
22. Promatrajte brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_3 + 29$ (razmislite zašto).

12.3. G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Prisjetite se teorema o obodnom i središnjem kutu. Kakav je trokut CSB?
2. Talesov teorem.
3. Promatrajte trokute CDN i DMB.
4. Uočite sve jednakokračne trokute
5. Iskoristite da su obodni kutevi nad suprotnim lukovima suplementarni.
6. Promotrite trokut AOC.
7. Neka je E sjecište AC i BD. Promatrajte trokut AED.
8. Iskoristite svojstva simetrala i povežite ih s upisanom kružnicom.
9. Označite središte kružnice i iskoristite sve što znate o obodnim i središnjim kutevima te tangenti.
10. Spustite okomicu iz vrha C na AD i iskoristite što znate o jednakostraničnom trokutu (jedan od novonastalih trokuta je pola jednakostraničnog).
11. Prvo dokažite da je trokut ABA_0 jednakokračan.
12. Dokažite $\angle APB = \angle CPD$ i $\angle BAP = \angle DCP$.
13. Promotrite unutarnje kuteve tog četverokuta.
14. Prisjetite se Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom. Također, pronađite dva tetivna četverokuta i iskoristite što vrijedi za njihove kuteve.
15. Koji kutevi moraju biti jednaki da bismo dokazali tvrdnju zadatka? Pronađite ih promatrajući unutarnje i vanjske kutove dvaju tetivnih četverokuta.
16. Neka je H sjecište pravaca AD i FG. Koja dva četverokuta su tetivna? Promotrite trokut HDG.
17. Opišite kružnicu trokutu ABC. Gdje se nalazi njezino središte?
18. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.

12.4. N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koliko ima jednoznamenkastih, dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva?
2. Kako zapisati taj broj?
3. Što možemo zaključiti o djeljivosti s 5?
4. Odredite završne znamenke tih potencija.
5. Koja je posljednja znamenka traženog broja?
6. Koje su posljednje znamenke traženih brojeva?
7. Rastavite brojeve 105 i 147 na proste faktore.
8. Promatrajte što se događa za svaku od znamenaka 0, 2, 4, 6 i 8.
9. Koji je odnos znamenke jedinice i znamenke stotice?
10. Prvo odredite s koliko nula završava broj.
11. Kako biste drukčije zapisali te brojeve?
12. Promatrajte parnost tih brojeva.
13. Pretpostavimo da je $a \geq 10$.
14. Kako biste drukčije zapisali taj broj?
15. Kako biste drukčije zapisali brojeve A i B?
16. Drukčije zapišite broj n, $9n = (10 - 1)n$.
17. Promatrajte djeljivost s 9.

12.5. C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Provesti indukciju po n.
2. Provesti indukciju po n.
3. Provesti indukciju po n.
4. Provesti indukciju po n.
5. Podijelite ploču $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ na ploče $2^n \times 2^n$!
6. Dokaži da je izraz za $n+1$ djeljiv s $2^{3n}+1$.
7. pokušajte pogledati što se dogodi ako "dodamo" vrh.
8. indukcija s bazom $n = 3$
9. odgovor je da nije. dokažite da je razlika 2 takva broja djeljiva s 5, ali da prvi takav nije.
10. Odgovor je da je. Provedite indukciju po n.
11. Možete li neke marke od 5 kuna zamijeniti s onima od 3 tako da se plaćeni iznos poveća za 1?
12. provedite indukciju po n!
13. dokažite da ako vrijedi za n vrijedi za $2n$, a onda dokažite da ako vrijedi za n vrijedi za $n-1$. Ova se tehnika zove Cauchyjeva indukcija.
14. Koliki bi broj pobjeda svaki igrač trebao imati da bi tvdnja bila lažna?
15. Odredi rješenje promatrajući male slučajeve, pa ga dokaži matematičkom indukcijom.
16. Promotri što se događa s najvećim brojem u nizu! Odvojit ćeš 2 slučaja: kad je "izabran" i kad nije!
17. Dokaži da se $3 \times n$ može popločati za sve parne, ali ne za neparne n.
18. provedite jaku indukciju (pretpostavite da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake n)
19. indukcija s korakom 3

13. Poglavlje

Hintovi za drugu grupu

13.1. A22: Nejednakosti - Al Depope

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pokušaj primijeniti AG direktno.
2. S lijeve strane imamo treći korijen umnoška dvaju pozitivnih brojeva. Da bi direktno primijenili AG trebamo umnožak triju pozitivnih brojeva pod korijenom.
3. Zadatak jako podsjeća na Engelovu formu CSB nejednakosti.
4. Iskoristi uvjet iz teksta zadatka da izraz $xy^2 + xz^2 + 2xyz$ ovisi samo o jednoj varijabli.
5. Primijeni CSB nejednakost.
6. Što znamo o diskriminanti kvadratne funkcije koja je fiksnog predznaka?
7. Može li se lijeva strana svesti na Engelovu formu CSBa?
8. Riješi se minusa iz brojnika!
9. Pametno primijeni AG nejednakost.
10. (a)Primijeni AG nejednakost.
    (b)Primijeni AH nejednakost.
11. Možeš li lijevu stranu svesti na izraz na koji se potom može primijeniti Engelova forma CSBa? Jesi li siguran? :)
12. CSB nejednakost
13. Uoči kako je dovoljno dokazati nejednakost $ab + bc + ca \geq abc\sqrt{3}$.

13.2. C22: Invarijante - Luka Banović

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Uočiti sličnosti s Primjerom 1.
2. Kako se mijenja broj plavih kuglica tijekom jednog koraka?
3. Doživite ploču kao šahovsku, pa zaključite što se događa s brojevima na različito obojenim poljima.
4. Kako se ponaša zbroj kvadrata brojeva na ploči?
5. Gledajte djeljivost s 5 zbroja dviju koordinata.
6. Promotrite kako se mijenja parnost broja kamenčića na hrpama.
7. Gledajte ostatke broja kameleona svake boje pri dijeljenju s 3.
8. Postavite skakavce u koordinatni sustav te promotrite kako se mijenjaju koordinate prilikom skoka.
9. U ovom zadatku nedostaje postupak koji ponavljamo konačno mnogo puta: stvorite ga!
10. Doživite ploču kao šahovsku.
11. Numerirajte vrhove i pomoću toga nađite invarijantu.
12. Promotrite što se događa s brojem najvećih brojeva. Možete li konstruirati nekih početnih 9 brojeva tako da neko svojstvo broja najvećih brojeva bude invarijantno.
13. Možete li se riješiti apsolutnih vrijednosti? Koje ostatke pri dijeljenju s 4 mogu imati kvadrati prirodnih brojeva?
14. Promotrite umnožak svih brojeva oblika $\frac{1}{x} + 1$, gdje se množe takvi faktori međusobno za sve x koji trenutno pišu na ploči.
15. Dokažite tvrdnju tako što ćete pokazati da je zadnji broj koji ostane na ploči djeljiv s 3 i nije djeljiv s 9.

13.3. G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. angle chase, tangenta i tetiva
2. presjeci dvije simetrale ili visine i dokaži da treća prolazi sjecištem
3. angle chase
4. angle chase
5. angle chase (centralno simetriraj točku H preko M)
6. angle chase
7. kad imamo tangente neke dužine su jedanke duljine
8. angle chase
9. translacija (druga mogućnost: ružno raspisivanje)
10. konstruiraj neke kružnice (kut između tangente i tetive)
11. angle chase (vidi zadatak 5.)
12. homotetija ili angle chase
13. sličnost, presjeci OH sa težišnicom te dokaži da je sjecište težište
14. presjeci EF i ID i povuci pravac paralelan sa BC kroz to sjecište i dokaži da je ta točka na polovištu te paralele
15. angle chase (vidi zadatak 3.)
16. sinusov poučak
17. tetivan četverokut
18. angle chase (vidi zadatak 3.)
19. ista konfiguracija kao i u zadatku 14. (moguće fantomiranje)
20. gledaj visine na stranicu koju dijele (neka lemma)
21. sličnost (spiralna)

13.4. N22: Diofantske - Al Depope

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. y i $y+1$ su relativno prosti.
2. Razlika kvadrata. Faktoriziraj. Rastavi na slučajeve.
3. Ograniči skup potencijalnih rješenja.
4. Promatraj ostatke modulo 7.
5. Nađite dva spomenuta rješenja. Kakva mora biti parnost od a, b, c i d?
6. Ograniči skup potencijalnih rješenja.
7. Faktoriziraj.
8. Smještanje među kvadrate.
9. Matematička indukcija.
10. CSB nejednakost.
11. AG nejednakost.
12. Pažljivo odaberi n te gledaj jednadžbu modulo n (sjeti se malog Fermatovog teorema).
13. Faktorizacija.
14. Koji bi mogao biti intuitivni razlog zašto ova jednadžba potencijalno nema beskonačno rješenja?

13.5. C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Primijenite princip umnoška.
2. Primijetite da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top.
3. Primijenite princip umnoška i primijetite da ne postoji razlika između osoba koje osvajaju sok.
4. Primijenite FUI.
5. Odredite što znače lijeva i desna strana (dvostruko prebrojavanje).
6. Promatrajte brojeve koji nemaju nijednu znamenku 5.
7. Podijelite put na kvadrate i promatrajte mogućnosti za svaki kvadrat.
8. Primijetite da se prvo pojavljuju brojevi koji počinju znamenkom 1, zatim 2... te ih prebrojite
9. Promotrite dva slučaja za položaj u rubnom retku/stupcu.
10. Promotrite prvo koliko razreda će ići na koje odredište.
11. Prvo odredite broj permutacija cijele riječi, a zatim slova koja se ponavljaju.
12. Primijenite FUI ili promatrajte više vrsta pravokutnika ovisno o vrhovima.
13. Promatrajte male primjere.
14. Promotrite na koliko se načina može rasporediti elemente u podskupove.
15. Promatrajte faktorizaciju broja 270.
16. Fiksirajte vozila i rasporedite parkirna mjesta.

14. Poglavlje

Hintovi za treću grupu

14.1. A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Indukcija
2. Teleskopiranje
3. Dokazati da je opći član aritmetičkog niza veći ili jednak općem članu geometrijskog niza
4. Definirajte $b_n = a_{n+1} - a_n$ i promatrajte $b_{n+1}^2 - b_n^2$
5. Definirajte $d_n = (a_0 + a_1 + ... + a_n) - na_n$ i promatrajte odnos između d_n i d_{n+1}
6. Želimo dokazati da za svaki prirodan broj a vrijedi $a(x+1)^{\frac{1}{a}} \leq x + a$
7. Teleskopiranje
8. $a_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}$, teleskopiranje i indukcija
9. Zbrojimo nejednakosti koje dobivamo za $x_n, x_{n-1}, ..., x_3, x_2$ i gledamo što bi vrijedilo za broj A da postoji, dokazujemo da je $A = \frac{\sqrt{6}}{6}$ rješenje
10. Dokažite da je $m - 1$ potencija broja 3

14.2. C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koliko crnih, a koliko bijelih polja zauzima domina?
2. Možeš li smisliti bojanje poda gdje jedna od pločica prekriva parno, a druga neparno crnih polja?
3. Smisli bojanje gdje svaka pločica zauzima točno jedno crno polje!
4. Može li se ploča popločati sa parno L-tetromina? Podijeli L-tetromine u 2 kategorije!
5. pronađi bojanje gdje će 4 vrste tetromina pokrivati parno crnih polja, a samo jedna neparno.
6. Možeš li obojati nešto osim polja?
7. Riješi male slučajeve! Što uočavaš?
8. Prvi dio: trebaš nešto saznati o brojevima iste boje, a znaš dosta o brojevima različite boje. Možeš li dodati pomoćni broj?
   Drugi dio: ako je k bijele boje, što možeš zaključiti o njegovim višekratnicima? A o brojevima koji mu to nisu?
9. Pretpostavi suprotno. Koliko je najmanje domina na pravcu koji prelama dominu?
10. Možeš li saznati koliko točno treba biti crvenih bridova?
11. Možeš li obojiti ploču na način da, ako je bubamara na početku bila na polju X, sa sigurnošću znaš da je nakon određenog broja koraka bubamara završila na polju Y?
12. Možeš li ploču podijeliti na segmente u kojima mora biti zauzeto barem pola pločica?
13. Označiš li boje brojevima, možeš ih i zbrajati!
14. Ovaj zadatak je sličan prethodnom!
15. prikaži strelicama u kojim smjerovima ludi lovac napada. Kada 2 luda lovca smiju biti na istoj dijagonali?
16. Pokušaj obojiti ploču tako da prva dva reda budu bijela, druga dva crna, treća dva bijela, i tako dalje. Razmisli kako ti to pomaže.
17. Pokušaj obojiti ploču šahovski. Vidi možeš li riješiti posebno za crna, posebno za bijela polja.
18. Na kojim poljima se čini da sigurno može biti kuća? Probaj prvo dokazati da ona moraju biti popunjena u idealnoj konfiguraciji. Onda nešto zaključi za ostatak polja.
19. Odgovor je $k = \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$. Dokaži da u svakoj mirnoj konfiguraciji postoji $k \times k$ dobri kvadrat, i da postoji mirna konfiguracija koja nema $(k+1) \times (k+1)$ dobri kvadrat.

14.3. G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Koje dužine bi bilo dobro produžiti da možemo primijeniti potenciju točke (i koje točke bismo onda pritom koristili)?
2. Povucite i treću visinu. Što možemo reći o nožištu te visine?
3. Točku za koju ćemo koristiti potenciju točke na kružnicu $(OMBD)$ treba docrtati. Nađite takvu da prikažete njenu potenciju točke kao umnožak dvije dužine koje imaju vrh u točki O.
4. Docrtajte točku kojom ćete stvoriti još 2 tetivna četverokuta. Time ćete dobiti puno više mogućnosti za primijeniti potenciju točke.
5. Preformulirajte tvrdnju zadatka korištenjem potencije točke. Što zapravo treba dokazati u zadatku? Izrazite što više kuteva preko kuta $\angle BAD$.
6. Odredite pogodnu točku za primjenu potencije točke. Na taj način nađite još neke tetivne četverokute.
7. Uočite da je pravac PQ radikalna os dviju kružnica. Dakle, pokažite da točka H ima jednaku potenciju točke na obje kružnice.
8. Nakon što odredite gdje bi otprilike radikalna os trebala biti, iskoristite svojstva točaka na njoj da raspišete potencije točaka koje se spominju u zadatku.
9. Pokažite da je pravac BF radikalna os dviju kružnica, pri čemu im je DE zajednička tangenta.
10. Ako je D na radikalnoj osi tih kružnica, to znači da im je radikalna os pravac DI, a ona mora biti okomita na spojnicu središta tih dviju kružnica. Odredite što je sve međusobno paralelno, a što okomito. Kojom točkom na kružnici opisanoj trokutu $\triangle ABC$ prolazi simetrala dužine $\overline{BC}$.
11. Pokažite da su navedena 3 pravca radikalne osi triju kružnica.
12. Pokažite da je pravac AE radikalna os dviju kružnica sa zajedničkom tangentom BD: dane kružnice i kružnice opisane trokutu $\triangle ADE$.

14.4. N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. konstrukcija
2. smještanje između kubova
3. faktorizacija
4. diskriminanta
5. indukcija
6. vietta
7. (a) mod 2 (b) pretp suprotno (c) nađi jedno rješenje, Vietta jumping ili Pellova
8. (a) $a = nbc + x$ (b) 4
9. crt
10. konstrukcija, crt

14.5. C26: Princip ekstrema - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na rješenja.

1. Pretpostavi suprotno i promatraj neki minimum
2. Promatraj najvećeg broja
3. BSO $x \geqslant y \geqslant z$
4. max
5. max
6. Pretpostavi suprotno, promatraj put od polja s brojem 1 do polja s brojem n^2
7. Definiraj koordinatni te promatraj neki ekstrem
8. Promatraj trokut najveće površine.
9. (a) Promatraj najdulju dužinu u skupu ubojstava
   (b) Pretpostavi suprotno, šesterokut
   (c) Pretpostavi suprotno, četverokut, nejednakost trokuta
   (d) Pretpostavi suprotno
10. monovarijanta
11. greedy (pa baza 3)
12. točke $\rightarrow$ površina

Dio V

Rješenja s predavanja na prvom terminu

15. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

15.1. A11: Nejednakosti - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Rješenja svih zadataka osim posljednja tri nalaze se u knjizi na prvom linku. Posljednja tri zadatka nalaze se u iz knjige na drugom linku.

1. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.1, str. 1
2. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.2, str. 2
3. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.3, str. 2
4. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.4, str. 2
5. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.5, str. 3
6. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.6, str. 3
7. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.7, str. 3
8. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.9, str. 4
9. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.13, str. 6
10. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 1.14, str. 6
11. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.1, str. 11
12. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.2, str. 11
13. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.3, str. 12
14. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.4, str. 12
15. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.5, str. 13
16. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.6, str. 13
17. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.7, str. 13
18. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.8, str. 14
19. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.9, str. 14
20. Z. Cvetkovski, Inequalities Theorems -Techniques and Selected Problems: Exercise 2.16, str. str. 18
21. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.1, str. 17
22. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.2, str. 18
23. Pham Kim Hung, Secrets in Inequalities (volume 1): Example 1.1.7, str. 20

15.2. C11: Prebrojavanja - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Pecivo možemo odabrati na 2 načina, sir na 4, šunku na 3. Rješenje je $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

2. Prvu osobu u redu možemo odabrati na 10, drugu na 9 (bilo tko osim osobe na prvom mjestu), treću na 8 (bilo tko osim osoba na prvom i drugom mjestu)... Koristimo princip produkta i dobijemo rješenje 10!. Ovo još zovemo i permutacijom skupa.

3. (a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, na prvom mjestu može stajati sve osim znamenke 0, a na ostalima može biti bilo koja od 10 znamenki.

   (b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, na prvom mjestu bilo što osim 0, na drugom bilo što osim znamenke koju smo odabrali na prvo mjesto...

   (c) $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, slično kao *a* dio zadatka, ali sada nam znamenka 3 nije dozvoljena znamenka.

   (d) Znamenka 5 može stajati na točno jednom od 4 mjesta u broju. To znači da na jednom mjestu nemamo izbora nego staviti znamenku 5, a na ostala mjesta ne smijemo staviti znamenku 5 (pazite, na prvom mjestu ne smije biti ni 0). Budući da su slučajevi disjunktni koristimo princip sume.

$$\underbrace{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{5 na prvom mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{5 na drugom mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 9}_{\text{5 na trećem mjestu}} + \underbrace{8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}_{\text{5 na četvrtom mjestu}}$$

   (e) Po *a* dijelu zadatka različitih četveroznamenkastih brojeva ima 9000, a onih koji ne sadrže znamenku 1 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ (isto kao u *c* dijelu, samo nam sada 1 nije dozvoljena znamenka). Iskoristimo princip sume i dobijemo da brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1 ima $9000 - 5832 = 3168$.

4. županijsko 2009, SŠ1A, 5

5. (a) 100 možemo podijeliti na 33 grupe oblika $\{3k+1, 3k+2, 3k\}$ i ostat će nam jedan broj koji nismo nigdje smjestili (100). Svaka ta grupa ima točno jedan broj djeljiv s 3, a to je $3k$. Zato je broj traženih brojeva jednak 33. Primijetimo da je to cjelobrojni rezultat dijeljenja 100 sa 3.

   (b) Prirodnih brojeva manjih od 100 djeljivih sa 3 ima 33, a djeljivih sa 4 ima $25 = \frac{100}{4}$. Ukupno je to $33 + 25 = 58$. Međutim, još ne možemo koristiti princip sume jer nemamo disjunktne skupove, brojeve djeljive sa 12 (njih ima $\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 8$) ubrojali smo i u one djeljive sa 3 i u one djeljive sa 4. Zato je rješenje $33 + 25 - 8 = 50$.

6. Na prvom mjestu ne može biti znamenka 0 što znači da niti na zadnjem mjestu peteroznamenkastog parnog palindroma ne smije biti znamenka 0. S druge strane, budući da želimo parni palindrom, prva i zadnja znamenka moraju biti parne. Nadalje, druga i četvrta znamenka mogu biti bilo kakve, ali iste, a za treću znamenku nemamo restrikcije. Iz toga nam slijedi da za prvu znamenku imamo 4 izbora (2, 4, 6 ili 8), za drugu i treću po 10 izbora (bilo koje znamenke), a za četvrtu i petu znamenku samo po 1 opciju (moraju biti jednake drugoj i prvoj). Rješenje je $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

7. državno 2009, 8. razred, 3. zadatak

8. (a) Fiksirajmo jednu osobu (Ne moramo ju birati, inače ćemo kao različite rasporede brojati rasporede nastale rotacijom!). Osobu koja sjedi kraj fiksirane osobe možemo odabrati na 14 načina (bilo tko od ostatka igrača), i tako redom za svako sljedeće mjesto imamo po 1 igrača manje na izbor. Rješenje je zato $(15-1)!$. Alternativno, mogli smo ispermutirati sve igrače i posjesti ih u krug (15!), ali podijeliti s brojem rotacija koje čine isti raspored sjedenja (takvih je po 15).

   (b) Petra i Anu možemo shvatiti kao jednu osobu pa takvih rasporeda sjedenja ima $(14-1)!$, ali Petar i Ana mogu zajedno sjesti na $2! = 2$ načina (Petar lijevo, a Ana desno ili obratno). Zato je sada rješenje $13! \cdot 2!$.

9. županijsko 2003, SŠ4A, 2

10. Budući da svaku olovku možemo i ne moramo staviti u podskup odabranih olovaka, imamo točno 2 mogućnosti za svaku. Ako svaki podskup olovaka shvatimo kao niz 0 i 1 (pri čemu 0 označava da ta olovka nije odabrana, a 1 da je) trebamo samo naći broj svih takvih uređenih nizova. Za svako od 7 mjesta (imamo 7 olovaka na raspolaganju) imamo 2 opcije (0 ili 1) pa je broj takvih nizova 2^7. Analogno, ako imamo na raspolaganju n olovaka, odgovor je 2^n.

11. Ukupno imamo $7+13=20$ kockica, dakle 20 različitih pozicija za kockice u tornju. Pozicije za narančaste kockice možemo odabrati na $\binom{20}{7}$ načina (ne razlikujemo narančaste kockice međusobno), a ostatak mjesta (njih 13) popunimo sivim kockicama. Zato je rješenje $\binom{20}{7}$.

12. županijsko 2019, SŠ4A, 3

13. Primijetimo da vrijedi $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$. Svaki djelitelj broja 600 možemo konstruirati tako da prostim faktorima 2, 3 i 5 pridružimo neku potenciju s kojom će ući u rastav djelitelja na proste faktore. Neka je α potencija prostog faktora p u rastavu broja 600. Tada za potenciju k od p u djelitelju kojeg konstruiramo mora vrijediti $0 \leqslant k \leqslant \alpha$, što je $\alpha+1$ mogućnost. Koristeći princip produkta (svaki djelitelj je uređena trojka potencija prostih faktora) dobivamo da broj 600 ima $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 4\cdot 2\cdot 3 = 24$ djelitelja.

14. (a) Promotrimo najkraće puteve od točke (a,b) do točke (c,d), pri čemu je $a \leqslant c$ i $b \leqslant d$. Najkraći putevi u tom slučaju sastoje se samo od pomaka gore i desno, i to točno $(c-a)$ desno i $(d-b)$ gore. Shvatimo li cijeli put kao niz određenog broja znakova G (gore) i D (desno), broj različitih puteva dobit ćemo kao broj različitih takvih nizova. Niz dobijemo odabirom mjesta za znakove (recimo) G, a to možemo učiniti na $\binom{\text{ukupno pomaka}}{\text{pomaka gore}} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$ načina.
Sada uz $a=-1$, $b=0$, $c=5$ i $d=7$ dobivamo rješenje

$$\binom{(5-(-1))+(7-0)}{7-0} = \binom{13}{7}.$$

(b) Da bismo pronašli odgovor na ovo pitanje potrebno je prebrojati puteve koji prolaze točkom $(2,3)$ i taj broj oduzeti od ukupnog broja puteva od $(-1,0)$ do $(5,7)$.
Da bi put prolazio zadanom točkom moramo pronaći broj najkraćih puteva od početne točke do usputne zadane točke i od zadane točke do završne točke (i tada primijenimo princip produkta jer zapravo imamo uređen par dva puta). Tako dobivamo da je rješenje

$$\underbrace{\binom{13}{7}}_{\text{svi putevi}} - \underbrace{\binom{2-(-1)+3-0}{3-0}}_{\text{prvi dio puta}} \cdot \underbrace{\binom{5-2+7-3}{7-3}}_{\text{drugi dio puta}} = \binom{13}{7} - \binom{6}{3}\cdot\binom{7}{4}.$$

15. Odaberimo prvo mjesta na kojima će sjediti 3 putnika u smjeru vožnje, to možemo na $\binom{4}{3}$ jer imamo 4 takva mjesta na raspolaganja. Oni mogu sjediti na tim mjestima u bilo kojem poretku pa imamo 3! (na koliko načina ih možemo posložiti u niz i tim redom im pridružiti mjesto za sjedenje). Slično napravimo i s 2 putnika koji žele sjediti suprotno od smjera vožnje: $\binom{4}{2}\cdot 2!$.
Za kraj nam je još preostalo smjestiti 3 putnika kojima je svejedno gdje sjede na 3 preostala slobodna mjesta. Za prvo mjesto putnika možemo odabrati na 3 načina, za drugo na 2 i za treće na 3. Tako dobivamo konačno rješenje:

$$\underbrace{\binom{4}{3}\cdot 3!}_{\text{smjer vožnje}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}\cdot 2!}_{\text{suprotan smjer}} \cdot \underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{\text{ostali}}$$

16. *I. način*
Permutacija slova ima 10!, ali računajući da ista slova razlikujemo. Koristeći ideju iz zadatka 14, trebamo "ubiti permutacije" istih slova (npr. za M to je 2!). Tako dobivamo rješenje $\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$.

II. način
Budući da tražimo anagrame imamo 10 mjesta koje trebamo popuniti slovima riječi *MATEMATIKA*. Za slovo M trebamo odabrati 2 od tih 10 mjesta na koje ćemo ih staviti, za slovo A trebamo 3 mjesta od ostatka $(10-2=8)$ itd. Dakle, rješenje je

$$\underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{M}}\cdot\underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{A}}\cdot\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{T}}\cdot\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{E}}\cdot\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{I}}\cdot\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{K}} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$$

17. državno 2014, SŠ2A, 5

18. općinsko 2017, SŠ4A, 5

19. Opću formulu izvest ćemo pomoću rekurzije. Označimo s a_n broj dijelova na koji n pravaca dijeli ravninu. Promotrimo prvo $n-1$ pravaca. Dodamo li tom skupu još jedan (n-ti) pravac, on siječe svaki od početnih $n-1$ u jednoj točki, tj. početni pravci sijeku dodani pravac u $n-1$ različitih točaka. Sada vidimo da smo dobili još n novih dijelova ravnine (točno n starih područja podijelili smo na 2 dijela) pa imamo rekurziju:

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

Još nam fali početni uvjet da bismo mogli naći formulu za rješenje. Lako vidimo da je $a_1 = 2$, jedan pravac dijeli ravninu na 2 različita dijela. Raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-k} + (n-k+1) + (n-k+2) + \ldots + (n-k+k) = a_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\ &= 2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

15.3. C13: Invarijante - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Promatramo crne točke. Svakim potezom njihov se broj poveća za 2, smanji za 2 ili ostaje isti. Dakle, invarijanta je *parnost broja crnih točaka*. Kako počinjemo s parnim brojem crnih točaka, a trebali bi završiti s neparnim (201), ne možemo to postići.
2. Županijsko A 2014. - SŠ1, 5. zad.
3. Problem Solving Strategies - E1, 13. str. (nije potpuno isto, uočite da u ovom zadatku umjesto 2 stoji n, ali ista fora)
4. Ako napravimo "supstituciju" $M = 1$ i $F = -1$, možemo promatrati umnožak svih brojeva na ploči. Umnožak 2 ista broja je $1 = M$, a različita $-1 = F$, dakle umnožak brojeva se ne mijenja potezom. To znači da bez obzira na odabir redoslijeda poteza, zadnje slovo ovisi o početnom umnošku. Konkretno u ovom zadatku, početni umnožak je $(-1)^{2010} \cdot 1^{2010} = 1$, dakle ostat će slovo M i Matko pobjeđuje.
5. Uočimo da je $(0.8a + 0.6b)^2 + (0.8b - 0.6a)^2 = a^2 + b^2$, dakle suma kvadrata elemenata je konstanta. $3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$, $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196 \rightarrow$ Hana ne može doći do traženog skupa.
6. Ni opseg ni površina se nakon rezanja i lijepljenja ne mijenjaju. Ako je opseg konstantan, dobivamo da bi stranica kvadrata trebala biti $\frac{3}{4}$ stranice jednakostraničnog trokuta, ali onda se površina kvadrata i površina kvadrata ne podudaraju, dakle nije moguće dobiti kvadrat.
7. Svakim potezom se suma brojeva povećava za 3, dakle ostatak sume pri dijeljenju s 3 se ne mijenja. Početna suma daje ostatak 2, a završna 0 (jer je $2019x$ djeljivo s 3). Dakle, Antonio ne može postići da svi brojevi budu jednaki.
8. Državno A 2012. - SŠ3, 5. zad.
9. Promatramo što se događa s brojem maksimalnih vrijednosti na ploči. Nakon što izvršimo potez, broj maksimalnih vrijednosti ili ostaje isti ili se povećava za 2, dakle parnost tog broja je konstantna. Kako bi Fabijan pobijedio, mora na početku zapisati niz brojeva koji sadrži paran broj maksimalnih vrijednosti (npr. 2 dvojke i 25 jedinica), jer onda broj maksimalnih vrijednosti ne može postati 27.
10. Skiciranjem svih mogućih slučajeva obrastanja korova dolazimo do zaključka da se opseg lika omeđenog korovom smanjuje ili ostaje isti. Opseg zemljišta je $4 \cdot 10 = 40$, a kako će početni opseg čestica pod korovom biti maksimiziran ako nijedna čestica ne dijeli stranicu s nekom drugom, slijedi da nam treba najmanje 10 obraslih čestica. Konstrukcija: razmjestiti čestice na glavnu dijagonalu.
11. Transformacije koje Paula radi podsjećaju na Euklidov algoritam, odnosno invarijanta je $\gcd(x, y)$. Eva samo mora odabrati brojeve tako da $\gcd(z, w) \neq \gcd(x, y)$.
12. Znamo da je ostatak broja pri dijeljenju s 9 jednak ostatku koji daje njegov zbroj znamenaka, dakle pri svakom koraku se ne mijenja ostatak svakog broja pri dijeljenju s 9. Kako je $10^6 \equiv 1 \pmod 9$, bit će više jedinica na kraju.
13. Državno A 2018. - SŠ2, 2. zad.
14. MEMO 2016. - I2
15. India IMO Training Camp 2004 - Day 1, Problem 3
16. IMO Shortlist 2005. - Problem 10. (C5)

15.4. G11: Karakteristične točke trokuta - Lucija Relić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
2. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
3. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
4. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
5. Neka je O središte opisane kružnice, P polovište stranice $\overline{AB}$ i S sjecište simetrale stranice $\overline{AB}$ (to je pravac OP budući da je središte opisane kružnice na simetrali stranice) sa opisanom kružnicom. Želimo pokazati $\angle ACS = \angle SCB$.
   Odmah vidimo da je četverokut $ASBC$ tetivan. Budući da su $\angle ACS$ i $\angle ABS$ kutevi nad (istom) tetivom $\overline{AS}$, vrijedi $\angle ACS = \angle ABS$. Simetrala stranice okomita je na tu stranicu, pa po SKS poučku o sukladnosti trokuta znamo da su trokuti ΔASP i ΔBSP sukladni ($\overline{SP}$ je zajednička stranica, $|AP| = |PB|$ po definiciji točke P i kut između njih je pravi). Iz toga slijedi $\angle ABS = \angle BAS$.
   Sada opet primijenimo isti trik s obodnim kutevima, ovaj puta nad tetivom $\overline{BS}$, i dobivamo $\angle SCB = \angle SAB = \angle ABS = \angle ACS$, što je i trebalo pokazati.
6. Po SSS poučku o sukladnosti trokuta, trokuti ΔABD i ΔBCD su sukladni. Budući da se dijagonale paralelograma raspolavljaju, dužina $\overline{AC}$ siječe $\overline{BD}$ u polovištu, označimo ga sa S. Zato dobivamo da je sjecište dužina $\overline{DP}$ i $\overline{AS}$ težište trokuta ΔABD (označimo ga sa T_1), a sjecište dužina $\overline{BQ}$ i $\overline{SC}$ je težište trokuta ΔBCD (označimo ga sa T_2).
   Težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha. Iz sukladnosti koju smo pokazali na početku imamo $\overline{AT_1} = \overline{T_2C}$ i $\overline{T_1S} = \overline{ST_2}$. Sada možemo zaključiti $\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2C}$.
7. MNM online predavanje Karakteristične točke trokuta - video rješenje
8. županijsko 2015., A2, 4. zadatak
9. školsko 2012., A2, 8. zadatak
10. MNM online predavanje Tetivni četverokuti - video rješenje
11. Ilišević, Dijana; Bombardelli, Mea. Elementarna geometrija (skripta), Teorem 4.9.
12. Ilišević, Dijana; Bombardelli, Mea. Elementarna geometrija (skripta), Teorem 5.8.
13. školsko 2017., A3, 5. zadatak
14. državno 2010., A2, 4. zadatak

15.5. N11: Modularna aritmetika - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

1. $(3k)^2 = 9k^2 = 0 \pmod 3$, $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 1 \pmod 3$, $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 1 \pmod 3$. Analogno ide za mod 4.

2. Kvadrat prirodnog broja je kongruentan ili 0 ili 1 modulo 3. Ako je $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, izraz $8p^2 + 1$ je kongruentan 0 modulo 3, a s obzirom da je strogo veći od 3 ne može biti prost broj pa nema rješenja. Preostaje jedino da je p^2 djeljivo s 3, a jedini prost broj koji ima to svojstvo je 3. Uvrštavanjem dobivamo $8p^2 + 1 = 73$ što je uistinu prost broj, tako da je jedino rješenje $p = 3$.

3. Isprobavanjem se dobiva $3^1 \equiv 3 \pmod{10}$, $3^2 \equiv 9 \pmod{10}$, $3^3 \equiv 7 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, $3^5 \equiv 3 \pmod{10}$... To znači da je $3^{33} \equiv 3 \cdot (3^4)^8 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{10}$.

4. Lijeva strana mora biti parna, iz čega slijedi da je $13p$ parno pa je jedini mogući $p = 2$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo $x = \pm 19$.

5. Promatramo ostatke pri dijeljenju s 10. x^2 može dati ostatak $0, 1, 4, 5, 6, 9$, a $5y$ 0 ili 5. Nijedna kombinacija ne daje zajedno ostatak 3 (što je ostatak pri dijeljenju 123 sa 10) pa nema rješenja u cijelim brojevima.

6. Školjka - Kongruencije, 5. zadatak

7. Iz jednadžbe slijedi: $y = 3y_1 \to 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \to x = 3x_1 \to 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1 \to y_1^2 \equiv 2 \pmod 3$ što nema rješenja.

8. $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n = (-3) \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 0 \pmod 7$ pa je izraz djeljiv sa 7.

9. Lako se izračuna da iz $3^m \equiv 3^n \pmod 7$ slijedi $m \equiv n \pmod 6$. Kako je $4 \equiv 4^2 \pmod 6$, stalnim množenjem s 4 dobivamo $4 \equiv 4^2 \equiv 4^3 \equiv ... \equiv 4^n \pmod 6$.

10. Art of Problem Solving. Ima više rješenja, od kojih neka ne koriste modularnu aritmetiku.

11. a) Očito $p = 2$ nije rješenje pa neka je $p > 2$. Uvjet zadatka možemo napisati kao $2^p \equiv 1 \pmod p$. Ali iz malog Fermatovog teorema slijedi $2^p \equiv 2 \pmod p$, kontradikcija. Ne postoji takav prost broj.
b) Očito je da za svaki n je $2^n - 1$ neparno pa m ne može biti paran. Neka je m onda neparan broj, dakle $\gcd(m, 2) = 1$. Uočimo da je uvjet zadatka pronalaženje broja n takvog da $2^n \equiv 1 \pmod m$. Prisjetimo li se Eulerovog teorema, vidimo da za $n = \phi(m)$ vrijedi uvjet zadatka, a kako je $\phi(m) < m$ onda je sigurno uvijek $n \leqslant 1000$. Znači da za svaki neparni broj manji ili jednak 1000 postoji takav broj n, a neparnih brojeva manjih ili jednakih 1000 ima 500.

12. Kako je $\gcd(3, 100) = 1$, vrijedi $3^{\phi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$. Korištenjem svojstva multiplikativnosti dobivamo $\phi(100) = 40$, odnosno $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. Kako je $2041 = 51 \cdot 40 + 1$, to je $3^{2041} = 3 \cdot (3^{40})^{51} \equiv 3 \cdot 1^{51} \equiv 3 \pmod{100}$, znači da su zadnje dvije znamenke broja 3^{2041} 0 i 3.

13. MEMO 2017. - T7

14. MEMO pripreme 2015., 3. stranica, 6. zadatak

15. 13. stranica, Example 4.1 (1983 Kuerschak Competition)

16. IMO Shortlist 2006. - N2

17. Uočimo da je broj elemenata u reduciranom sustavu ostataka modulo m jednak $\phi(m)$. Prvo dokazujemo lemu: ako je $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m i a cijeli broj relativno prost sa m, tada je $S' = \{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(m)}\}$ također reducirani sustav ostataka modulo m.
Budući da je svaki r_i relativno prost sa m, kao i a, vrijedi i da je svaki član skupa S' relativno prost sa m. Uzmimo $x, y \in S$. Tada postoje $1 \leqslant x' \leqslant m$ i $1 \leqslant y' \leqslant m$ takvi da $x \equiv x' \pmod m$ i $y \equiv y' \pmod m$. Pretpostavimo da S' nije reducirani sustav ostataka jer vrijedi $xa \equiv ya \pmod m$. Tada je i $x'a \equiv y'a \pmod m$, odnosno $(x' - y')a \equiv 0 \pmod m$. Jer su a i m relativno prosti i zbog činjenice da je $x' - y' < m$ dobivamo $x' = y'$ pa x i y daju isti ostatak pri dijeljenju sa m, a budući da su elementi reduciranog sustava ostataka vrijedi $x = y$. Dakle, S' je isto reducirani sustav ostataka modulo m.
Nazad na Eulerov teorem. Neka je $\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m. Kako je po

prethodno dokazanoj lemi $\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m., zaključujemo da je

$$\prod_{j=1}^{\varphi(m)} (ar_j) \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(m)} r_i \pmod{m}$$

$$a^{\varphi(m)} \prod_{j=1}^{\varphi(m)} r_j \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(m)} r_i \pmod{m}$$

Kako je $\gcd(r_i, m) = 1$ i iz svojstava kongruencija, dobivamo tvrdnju teorema.

16. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

16.1. A12: Razni zadaci s nizovima - Maja Drmač

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Zadatak A - 4.2
2. A. Engel - Problem Solving Strategies, 234. str., E4
3. Zadatak A - 4.5
4. Prvo uočimo da za $|a| < 1$, ako je $b > c$ onda je $a^b < a^c$. Također, $a^k < 1$ za bilo koji $k \in \mathbb{R}^+$.
   Tvrdimo da je za prirodni n poredak članova ovog niza $a_1 < a_3 < ... < a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n-2} < ... < a_4 < a_2$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom.
   Za $n = 1$, imamo $a_1 = a^1$ i $a_2 = a^a$. Kako je $1 > a$, a $|a| = 0.2020 < 1$, onda je $a_1 < a_2$.
   Pretpostavimo da za neki prirodan n vrijedi $a_1 < a_3 < ... < a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n-2} < ... < a_4 < a_2$. Promatramo dodavanje a_{2n+1} i a_{2n+2}.
   Znamo da je $a_{2n+1} = a^{a_{2n}}$, a kako je po pretpostavci $a_{2n} > a_{2n-1}$, to je $a_{2n+1} = a^{a_{2n}} < a^{a_{2n-1}} = a_{2n}$. Isto tako, kako je po pretpostavci $a_{2n-2} > a_{2n}$, onda je $a_{2n-1} = a^{a_{2n-2}} < a^{a_{2n}} = a_{2n+1}$. Sada znamo da vrijedi $a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n}$ i na sličan način dobivamo $a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}$. Ubacivanjem toga u pretpostavku indukcije dobivamo $a_1 < a_3 < ... < a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n} < a_{2n-2} < ... < a_4 < a_2$. Time smo dokazali tvrdnju indukcije.
   Primjenom ovoga na pitanje zadatka, traženi poredak je $a_1 < a_3 < ... < a_{2019} < a_{2020} < a_{2018} < ... < a_4 < a_2$.
5. A. Engel - Problem Solving Strategies, 240. str., 3. zadatak
6. A. Engel - Problem Solving Strategies, 253. str., 53. zadatak
7. Zadatak A - 4.3
8. Zadatak A - 4.1
9. HMO - MEMO test, 1. zadatak
10. IMO 2006. Shortlist - A2
11. A. Engel - Problem Solving Strategies, 253. str., 54. zadatak
12. IMO Shortlist 2015. - A1
13. MEMO 2008. - I1
14. IMO Shortlist 2010. - A4
15. EGMO 2020. - Problem 6.

16.2. C12: Bojanja i popločavanja - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Svi zadatci ovoga predavanja dio su knjige Problem Solving Strategies koju je napisao Arthur Engel. Zadatci su iz poglavlja Coloring proofs. Knjiga se može pronaći na sljedećem linku. Zadatci se mogu pronaći na stranicama $26-28$, a rješenja na $28-37$. U nastavku je popis u obliku $x./y.$ pri čemu je $x.$ redni broj zadatka s predavanja, a $y.$ redni broj zadatka iz knjige.

1. /1.
2. /2.
3. /3.
4. /4.
5. /5.
6. /6.
7. /7.
8. /11.
9. /15.
10. /16.
11. /17.
12. /18.
13. /20.
14. /23.
15. /24.
16. /26.
17. /29.

16.3. C14: Kombinatorna geometrija - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Podijelimo kvadrat na šest 2x3 pravokutnika. Po Dirichletu postoji pravokutnik u kojem su barem dvije točke. Te dvije točke su udaljene za manje od $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (duljina dijagonale). Nejednakost je stroga jer bi jednakost povlačila da se točke nalaze u vrhovima manjeg pravokutnika (dijagonala), a navedeno je da moraju biti strogo unutar kvadrata.

2. Neka je bez smanjenja općenitosti A crna točka, a B bijela. Nacrtamo (BSO) crnu točku C koja nije na AB. Dalje ćemo u svakom koraku nacrtati novu točku između nove točke u prethodnom koraku (počevši od C) te A ili B (ovisno o boji točke), i doći ćemo do zaključka da svaka nova točka je bliže pravcu AB od prethodne, ali nije na AB što daje kontradikciju s uvjetom da je konačno mnogo točaka. Slično riješimo slučaj kad počinjemo s tri nekolinearne istobojne točke.

3. Za tri točke promatramo konveksnu ljusku. Ako je ona pravac, onda povučemo okomice na taj pravac kroz tri njegove točke i sjecišta odgovarajuće okomice s kružnicom će biti A, B i C. Ako je konveksna ljuska mnogokut, onda odaberemo tri bilo koja njegova vrha. Za svaki od njih povučemo polupravac s početkom u središtu kružnice koji prolazi tim vrhom. Sjedišta odgovarajućeg polupravca s kružnicom će biti A, B, C. Za četiri točke kontraprimjer će biti središte kružnice S i tri točke koje formiraju jednakostranični trokut čije je središte S.

4. Ne. Opseg i površina su invarijante (kao i njihov omjer).

5. Riješenje indukcijom. Baza je trivijalna (jedan pravac). Korak s n na $n+1$ provodimo tako da nacrtamo pravac na već obojanu ravninu s n pravaca pa s jedne strane pravca promijenimo boju svakom području, a s druge niti jednom.

6. Da. Nacrtamo konveksnu ljusku, odaberimo dvije susjedne točke A i B na rubu ljuske. Zatim promatramo kut $\angle ATB$ za svaku $T \in S$ i odaberemo onu točku za koju je taj kut najveći (nazovimo ju X). Unutar kružnog odsječka ABXA nema crnih točaka jer bi postojanje crne točke dalo kontradikciju s tvrdnjom da je $\angle AXB$ najveći među opisanim kutovima. Unutar drugog kružnog odsječka također nema crnih točaka (to bi dalo kontradikciju sa svojstvima konveksne ljuske).

7. Promotrimo konveksnu ljusku i nacrtamo sve dužine na rubu konveksne ljuske ljuske, tako dobijemo mnogokut čiji su vrhovi sve točke ako nema točaka u unutrašnjosti. Ako ima točaka u unutrašnjosti, onda i njima pronađemo konveksnu ljusku i učinimo istu stvar i ponavljamo taj postupak sve dok ne iskoristimo sve točke. I tako dobijemo nekoliko konveksnih mnogokuta, svaki sljedeći je unutar prethodnoga (a zadnji je možda dužina, a možda i točka). Povezat ćemo jednu točku najvećeg mnogokuta (onog koji sadrži sve) s jednom točkom najmanjeg mnogokuta, zatim obrisati sve dužine koje ta dužina siječe. Dalje nastavite za DZ.

8. a) Pretpostavimo da se sijeku i pomoću nejednakosti trokuta dobijemo kontradikciju.

   b) Za parne ne možemo biti sigurni. Kontraprimjer je $2k$ nogometaša na istom pravcu s koordinatama $3, 4, 6, 7, ...3k, 3k+1$. Znam da u zadatku piše da su udaljenosti različite, ali ideja j Za neparne možemo biti sigurni. Neka je S skup svih nogometaša. Počnimo od dva najbliža nogometaša, za njih znamo da će dodati loptu jedan drugom, izbacujemo ih iz S. Zatim ponavljamo sljedeću petlju: Nađemo najkraću udaljenost između dva nogometaša A i B tako da je A nužno u S. Ako B nije u S, to znači da je B razmijenio loptu s nekim (dodali su jedan drugome) i još će primiti loptu od A, dakle B prima barem dvije lopte. To znači da neki nogometaš ne prima loptu, tvrdnja dokazana (i izlazimo iz petlje). Ako B jest u S, onda A i B dodaju loptu jedan drugome i izbacujemo ih iz S.

   Budući da nogometaša ima neparno mnogo, (a ako ne izađemo iz petlje broj nogometaša u S se smanji za dva), sigurni smo da će se jednom dogoditi da B nije u S, pa makar u zadnjem koraku kad je u S samo jedan nogometaš.

   c) Odgovor je 5, konstrukcija će biti za šest nogometaša u vrhovima pravilnog peterokuta i njegovom središtu. Pretpostavimo da je neki nogometaš primio šest lopti, nazovimo ga S, a one koji su mu dodali nazovimo A, B, C, D, E, F

9. Spojimo tako da ukupna duljina svih cesti bude minimizirana. 9. a) zadatak je lema. Ako se ceste iz dviju kuća sijeku, zamijenimo im mlinove pa se neće sijeći i zbroj njihovih duljina će biti manji (znači da prije nije bio minimiziran - kontradikcija).

10. Riješenje indukcijom. Baza za $n = 1$ je trivijalna (bilo koji trokut). Promotrimo nekonveksan mnogokut $XA_1...A_nY$ kojem su svi vrhovi osim X i Y na kružnom luku male kutne mjere na kružnici k, a točke X i Y izvan k i dovoljno daleko da su dijagonale koje spajaju X ili Y sa svakim A_m, $1 \leqslant m \leqslant n$ unutar mnogokuta (za DZ razmisliti kako to preciznije zapisati), štoviše, to su jedine dijagonale izvan mnogokuta. Dokazat ćemo da on ima n triangulacija. Uočimo da treba biti povučena dijagonala $\overline{XA_n}$ ili dijagonala $\overline{A_(n-1)Y}$ jer inače triangulacija nije potpuna. Ako je povučena $\overline{XA_n}$, onda će biti samo jedna triangulacija (ona u kojoj su povučene sve dijagonale iz X jer bi bilo koja dijagonala iz Y presjekla $\overline{XA_n}$). Ako je povučena $\overline{A_(n-1)Y}$, onda imamo $n-1$ triangulaciju po pretpostavci indukcije.

11. Izvor.

12. Izvor.

13. Izvor.

14. Izvor.

16.4. G12: Fantomiranje; 'ako i samo ako' zadaci - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Izvor.
2. U a) dijelu fantomiramo H' kao sjecište kružnice i pravca kroz C paralelnog s BH (H je ortocentar). Želimo dokazati $H'B||CH$, tj. da je $BHCH'$ paralelogram što povlači tvrdnju zadatka. Dokaz slijedi iz $\angle BHC = \angle BH'C = 180ř - \alpha$ Jedna jednakost slijedi iz tetivnosti, a druga iz svojstava visina. Slično i u b) dijelu, samo što tamo definiramo H' kao sjecište pravca AH i kružnice, te dokazujemo da su H i H' jednako udaljene od nožišta visine N. Dokaže se da su trokuti HCN i H'CN sukladni KSK poučkom, jednakosti kutova slijede iz tetivnosti i okomitosti krakova ($\angle NCH = \angle BAH' = \angle NCH'$, a stranica je zajednička.
3. Prve smjerove (raspored točaka => jednakost) dokažite za DZ.

   a) Neka je k kružnica koja dira $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$, neka je D' sjecište druge tangente na k iz A i pravca CD. Kao i u uvodnom zadatku, iskoristit ćemo odgovarajuću jednakost za ABCD i ABCD' (za ABCD' slijedi iz prvog smjera zadatka, a za ABCD iz pretpostavke zadatka). Oduzmimo te jednakosti i uredimo tako da dobijemo $|AD| = |AD'| + |DD'|$ iz čega slijedi $D = D'$.

   b) Prvi smjer se dokazuje raspisivanjem pitagore. Neka je T' nožište okomice iz B, a T" nožište okomice iz D na dijagonalu AC. Sličnim raspisom pitagore kao u prvom smjeru dobit ćemo da je $|T'T''| = 0$, tj. $T' = T''$ iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
4. Neka su A, B i C vrhovi trokuta, a D sjesište simetrale kuta i kružnice. Slijedi $\angle DBC = \angle DAC = \angle BAD = \angle BCD$ (tetivnost i simetrala kuta AD) iz čega slijedi jednakokračnost trokuta BCD, dakle $|BD| = |CD|$, D je na simetrali stranice $\overline{BC}$
5. Neka D bude sjecište AO i BC, preostaje dokazati $KD||AB$. ADBK je tetivan (dva nasuprotna prava kuta). Vrijedi $\angle CDK = \angle CAK = \angle CBA$ (prva jednakost slijedi iz tetivnosti, a druga iz leme o tetivi i tangenti). Iz $\angle CDK = \angle CBA$ slijedi da su DK i AB paralelni.
6. Izvor.(2.4.)
7. Izvor.
8. Izvor. (4.4.)
9. Izvor. (1. dan, 3. zadatak)
10. Izvor
11. Izvor.

16.5. N12: Diofantske jednadžbe - Mateo Dujić

Link na zadatke. Link na hintove.

Svi zadatci dio su knjige "Andreescu T., Andrica D., Cucurezeanu I. An introduction to Diophantine equations.. A problem-based approach (Birkhauser, 2010)". Ona se može pronaći na sljedećem linku.

1. Example 1, str. 4
2. Example 2, str. 5
3. Example 3, str. 6
4. Example 5, str. 8
5. Example 1, str. 13
6. Example 2, str. 14
7. Example 3, str. 14
8. Example 4, str. 15
9. Example 6, str. 16
10. Example 1, str. 20
11. Example 3, str. 22
12. Example 5, str. 23
13. Example 6, str. 26
14. Example 1, str. 29
15. Example 2, str. 29
16. Example 3, str. 30
17. Example 5, str. 31
18. Example 6, str. 32

17. Poglavlje

Rješenja za olimpijske grupe

17.1. I1: Nestandardna algebra - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Neka je Y skup svih prirodnih brojeva koji nisu elementi X. Poredajmo brojeve po veličini, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Dovoljno je dokazati $a_k \leqslant 2k - 1$.
   Promotrimo sljedeće uređene parove: $(1, a_k - 1), (2, a_k - 2), \ldots (\lfloor a_k/2 \rfloor, \lceil a_k/2 \rceil)$. Iz svakog od parova mora barem jedan član biti u Y, u suprotnom bi a_k bio u X.
   To implicira da je $\lfloor a_k/2 \rfloor \leqslant k - 1$, iz čega direktno slijedi $a_k \leqslant 2k - 1$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
2. Netherlands TST 2017
3. ELMO 2012, P4
4. Japan MO 2020
5. RMM 2020, P2
6. Skica rješenja: pretpostavimo suprotno. Dokažemo metodom 'ograničen monoton niz je eventually constant' da eventually vrijedi $a_n + a_{2n} = 1$, $a_n + a_{2n} + a_{3n} + a_{4n} = 2$, ... $a_n + a_{2n} + \ldots + a_{8n} = 4$. Međutim, onda $a_n = 1 \implies a_{4n} = a_{6n} = a_{7n} = a_{9n} = a_{10n} = 1$, što je kontradikcija.

17.2. I2: Nježno korištenje grube sile - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Neka je $PQ = QRRS = x$ i $PR = QS = y$. Tada po Ptolomejevom teoremu na $APQR$ i $AQRS$ dobivamo
$$\frac{AP + AR}{AQ} = \frac{y}{x} = \frac{AQ + AS}{AR}$$
.
2. USAMO 1998
3. CGMO 2012
4. SMO 2014
5. Singapur 2014
6. Sjeverna Koreja TST 2012
7. Bugarska TST 2003

17.3. I8: Kvadratni ortaci - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Za p koji daje ostatak 7 (mod 8) vrijedi $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ i $\left(\frac{2^n}{p}\right) = 1$, pa ne može vrijediti $2^n \equiv -1 \pmod{p}$.

2. Pretpostavimo suprotno. Uzmimo prost broj p koji dijeli $2^m - 1$. Tada dijeli i $3^n - 1$, pa vrijedi $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. Tada se lako izračuna da je ili $p \equiv 1 \pmod{12}$ ili $p \equiv -1 \pmod{12}$, pa je nužno i $2^m - 1 \equiv 1$ ili $-1 \pmod{12}$, ali to nije moguće za $m > 2$.

3. Nepoznat izvor

4. Bez smanjenja općenitosti, neka je $n = p_1 p_2 \dots p_k$, gdje su p_i različiti prosti brojevi. Sada ćemo konstruirati beskonačan niz brojeva $(q_n)_n$ takvih da je $\left(\frac{p_1}{q_n}\right) = -1$ i $\left(\frac{p_j}{q_n}\right) = 1$ za $j > 1$. Ako je $p_1 = 2$, uzmimo $q_n \equiv 5 \pmod{8}$. Inače, uzmimo $q_n \equiv 1 \pmod{8}$. Nadalje, uzmimo da je q_n kongruentan nekom kvadratnom neostatku modulo p_1, te nekim kvadratnim ostacima modulo $p_2, \dots, p_k$. Skup ovakvih q_n je po CRT-u neki aritmetički niz sa relativno prostima razlikom i početnim članom, pa po Dirichletovom teoremu sadrži beskonačno prostih brojeva.

5. Baltic Way 2009, P7

6. RMM 2013, P1

7. 2015 Iran TST

8. IMC 2020, P6

17.4. I9: Aditivna kombinatorika - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

1. AIME 1986
2. Vijetnam 1990
3. ISL 1998 N3
4. Vijetnam 2004
5. Konstruiramo skup B. Počevši od najvećeg člana skupa X dodajemo elemente iz X u B tako da, ako je $x \in A$ i x trenutno dijeli parno mnogo brojeva iz B, dodajemo ga u skup B, u suprotnom ga ne dodajemo. Ako $x \notin A$ onda radimo obrnuto.
6. Vietnam TST 2004
7. USA TST 2001
8. IMO 1995 Problem 6

17.5. I10: TB konstrukcije, LTE - Ivan Novak

Link na zadatke. Link na hintove.

1. PEN
2. Baltic way 2019, P17
3. ELMO SL
4. Prema Wilsonovom teoremu, nužno je $(p-1)!+1=p^n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Očito je $n<p$ za dovoljno velike p. Kako $2 \mid p-1$, po LTE imamo

$$\nu_2(p^n-1)=\nu_2(p-1)+\nu_2(p+1)-1+\nu_2(n),$$

   a lako se uvjeriti da je to za sve osim konačno p manje od $\nu_p((p-1)!)$.
5. Brazil Undergrad MO
6. Romania TST 2013
7. Bulgaria TST 2003
8. ELMO 2019, P5
9. IMO SL 2013, N4
10. Rješenje

17.6. I12: Sawayama-Thebault i još neki teoremi - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na hintove.

Definicija Primjer Lema Zadatak
Teorem
Zadatak Zadatak
Dokaz Napomena

Rješenja

1. https://artofproblemsolving.com/community/c6h170192p943936.]

3. Neka je K diralište ω i opisane kružnice trokuta ABC. Neka su M i N presjeci pravaca KE i KF i opisane kružnice trokuta ABC. Tada je $MN||EF$ jer su ω i opisana kružnica trokuta ABC homotetični sa središtem u K. Zbog te homotetije također slijedi da je M polovište luka BC koje ne sadrži K. Dakle AM je simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ pa prolazi kroz I.
Neka je $J \in AM \cap EF$. Koristeći dobivenu paralelnost i obodne kuteve nad lukom AN u točkama M i K lagano dobivamo $\sphericalangle FJA = \sphericalangle FKA$ (ili $\sphericalangle FJA = 180 - \sphericalangle FKA$ ovisno o skici) što implicira da su A, K, F, J konciklične.
Pokažimo da je opisana kružnica trokuta JEK tangentna pravcu AJ. Prema kutu između tetive i tangente, dovoljno je pokazati $\sphericalangle EJM = \sphericalangle JKE$. Zbog tetivnosti četverokuta $AJFK$ slijedi $\sphericalangle EJM = \sphericalangle AKF$, pa želimo pokazati $\sphericalangle AKJ = \sphericalangle FKE$. Imamo $\sphericalangle AKJ = \sphericalangle JFA = \sphericalangle DFE = \sphericalangle FKE$ gdje zadnja jednakost slijedi zbog kuta između tetive i tangente u točki F s obzirom na kružnicu ω pa smo pokazali da je AJ tangenta na kružnicu opisanu JEK.
Promotrimo kružnicu sa središtem u M koja prolazi kroz B. Prema lemi o trozupcu ona prolazi kroz I te zbog $\sphericalangle BKE = \sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$ slijedi da je ta kružnica ortogonalna na kružnicu opisanu trokutu BKE u B, a zbog upravo dokazanog ona je ortogonalna i na kružnicu opisanu JEK u J. Dakle $|MB| = |MJ|$ pa J mora biti središte upisane kružnice trokuta ABC te slijedi da EF prolazi kroz I.

Dokaz (Sawayama Thebault) Neka su E, F dirališta kružnice ω_1 i DC odnosno AD. Neka su G, H dirališta kružnice ω_2 i BD odnosno AD. Prema dokazanoj lemi, $I \in GH \cap EF$. jasno je da vrijedi $QG \perp BC \perp PE$ te kako su QD i PD simetrale kuteva $\sphericalangle GDH$ i $\sphericalangle EDF$ slijedi $\sphericalangle QDP = 90$. Konačno, zbog $GH \perp QD$ i $EF \perp DP$ dobivamo tri para parelelnih dužina (QG i PE, GI i DP, DQ i EI). Tvrdnja sada slijedi iz obrata Papusovog teorema na šesterokut $QGIEPD$ (tvrdnja dokazana u 4. zadatku).

4. Neka je $T \in GJ \cap QD, R \in DP" \cap JE, x = |TD| = |JR|, y = |DR| = |TJ|$. Neka je $\alpha = \sphericalangle TQG = \sphericalangle TGD = \sphericalangle RDE$, $\beta = 90 - \alpha = \sphericalangle RED$ i $\varphi = \sphericalangle JQT = \sphericalangle P"JR$. Iz trokuta GTD imamo $|GT| = \frac{x}{tg\alpha}$, iz QTG imamo $|QT| = \frac{x}{tg^2\alpha}$ te iz QJT imamo $y = \frac{x \cdot tg\varphi}{tg^2\alpha}$. Iz trokuta $P"DQ$ slijedi $|QP"| = \dfrac{x(1 + \frac{1}{tg^2\alpha})}{\cos\varphi}$. Nadalje iz trokuta DRE zaključujemo $|DE| = \frac{y}{\sin\beta}$ te iz trapeza $QGEP'$ zaključujemo $|QP'| = \dfrac{\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha}}{\cos(\varphi - \beta)}$. Sada kad smo dobili formule za $|QP"|$ i $|QP'|$ pokažimo da su te duljine jednake:

$$\frac{\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{y}{\cos\alpha}}{\cos(\varphi - \beta)} = \frac{x(1 + \frac{1}{tg^2\alpha})}{\cos\varphi}$$

$$\overset{y=\ldots}{\iff} \left(\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{x \cdot tg\varphi \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}\right)\cos\varphi = x\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cos(\varphi - 90 + \alpha)$$

$$\iff \frac{x \cdot \cos\varphi}{\sin\alpha} + \frac{x\cos\alpha\sin\varphi}{\sin^2\alpha} = \frac{x \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\sin^2\alpha}$$

Zadnja jednakost je očita nakon raspisivanja izraza $\sin(\alpha + \varphi)$ pa je tvrdnja zadatka dokazana.

17.7. MI4: Funkcijske jednadžbe - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.

1. Školjka
2. AoPS
3. Uvrsti $x - y$ umjesto x, pokrati LHS sa prvim članom desne strane, dobij i iskoristi injektivnost u 0.
4. AoPS
5. AoPS
6. AoPS
7. $f(0) = 0$ jedan, $f(0) \neq 0$ drugi slučaj. U drugom izračunaj $f^k(0) = kf(0)$ i iskoristi $f^k(x) = f^y(x) \implies k = y$, u prvom indukcijom $|f(n)| = n$, neparnost f i podjela na slučajeve ovisno o parnosti.
8. AoPS
9. IMO shortlist 2007 A4
10. IMO shortlist 2011 A6
11. AoPS

17.8. M1: Komba na ploči i bojanja - Andrija Tomorad

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Izvor.
2. Izvor.
3. Izvor.
4. Obojimo jednu glavnu dijagonalu i dvije dijagonale neposredno iznad nje u bijelo, a ostala polja u crno. Sully može osigurati da se u svakom retku s najviše tri crna polja crno polje oboji u zeleno. Strategija je uvijek upisivati u isti redak i suprotnu boju od prethodnog Mikeovog poteza tako da u crnom polju broj bude veći. Sully pobjeđuje jer su crna polja podijeljena u dva skupa koja nisu povezana, te u svakom bude barem jedno zeleno polje.
5. Izvor.
6. k će biti $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$ zaokruženo na gore. Dovoljno je pokazati konstrukciju za $n = a^2$ i $k = a - 1$ (postavimo topa u gornji lijevi kut, te na svako polje koje je jedno polje desno i a polja dolje ili a polja desno i jedno polje dolje od već postojećeg topa) i dokazati da za $n = a^2 + 1$ postoji kvadrat s barem a polja bez topova. Pretp. da ne postoji. Podijelimo ploču bez najdesnijeg stupca i najdonjeg retka na $a \times a$ kvadrate (ima ih a^2, u svakom treba biti jedan top po prethodnoj pretpostavci, što znači da će top biti u donjem desnom kutu jer nakon postavljanja svih osim jednog topa, samo jedan redak i jedan stupac nemaju svog topa, što znači da top treba biti u njihovom zajedničkom polju. Analogno dobijemo da top treba biti u donjem lijevom kutu što daje kontradikciju.
7. (ovo riješenje nije sasvim detaljno) Obojimo pravokutnik šahovski sa crnim poljem u kutovima (svi kutovi su iste boje jer su stranice neparne). Uočimo da cijela ploča ima jedno crno polje više nego bijelo. Po Dirichletu postoji pločica koja ima jedno crno polje više nego bijelo. Nije teško zaključiti da su toj pločici svi kutovi crni te da su joj udaljenosti od rubova originalne ploče iste parnosti.
8. Obojimo ploču u crno i bijelo tako da su svaka dva polja u istom stupcu iste boje i da su susjedni stupci različite boje. Neka je P neki pravokutnik koji obuhvaća sva polja na kojima su automobili na početku. Cilj nam je pomaknuti svaki automobil izvan P. Prvo pomaknemo sve automobile koji su okrenuti lijevo ili desno i nalaze se na crnom polju. Tada će svi automobili na crnim poljima biti okrenuti prema gore ili dolje što znači da ih možemo pomaknuti izvan P jednog po jednog. Sada pomaknemo sve automobile okrenute lijevo ili desno za jedno polje (s crnog na bijelo) kako bismo poslije toga mogli i automobile okrenute prema gore/dolje na bijelim poljima pomaknuti izvan P. Nakon toga nam ostaju unutar P samo auti okrenuti lijevo/desno, pa i njih možemo pomaknuti izvan P.
9. Izvor.
10. Izvor.
11. Izvor.
12. Ako $m|n$, onda se za svaki redak posebno može postići da sve žarulje u njemu svijetle, pa tako i za cijelu ploču. Ako $m \nmid n$, onda obojimo ploču u m boja tako da svaki $1 \times m$ pravokutnik ima polje svake boje (napišemo 1 u gornji lijevi kut pa u smjerovima dolje i desno periodično ponavljamo niz $1, 2, ..., m$). Uočimo da se na svakoj dijagonali (kad piše dijagonala, misli se na dijagonalu u smjeru "SW - NE") nalazi samo jedan broj. Reći ćemo da je ta dijagonala *pridružena* tom broju (boji). Dokazat ćemo da postoji $a \in 1, 2, ..., k$ takva da je i boji a i boji $a + 1$ pridruženo neparno mnogo (i međusobno jednako) dijagonala. Iz toga će slijedi da su broj polja boje a i broj polja boje $a + 1$ različite parnosti iz čega slijedi tvrdnja zadatka jer u potezu uvijek mijenjamo jednu žarulju boje a i jednu boje $a + 1$ (na početku i nakon poteza će brojevi upaljenih žarulja na a i $a + 1$ biti ili oba parni ili oba neparni, na kraju trebaju biti različite parnosti) NAPOMENA: Svaka dijagonala boje $a + 1$ se nalazi odmah nakon dijagonale boje a pa se brojevi polja tih dviju dijagonala razlikuju za jedan. Zato će razlika polja a i $a + 1$ biti neparna. Neka je $n = qk + r$ (Tm. o dijeljenju s ostatkom), $0 < r < k$ jer $m \nmid n$. Ukupno ima $2n - 1 = 2qk + 2r - 1$ dijagonala. Među prvih $2qk$ dijagonala, svakoj boji je pridruženo $2q$ dijagonala (parno). Ostalih $2r - 1$ (vrijedi $1 \leqslant 2r - 1 \leqslant 2k - 3$), se boji na sljedeći način: to će biti prvih $2r - 1$ elemenata uređenog skupa $(1, 2, ..., k, 1, 2, ..., k - 3)$. Ako je $1 < 2r - 1 \geqslant k$, onda je $a = 1$. Ako je $2r - 1 > k, ondajea = k - 2$. Poseban slučaj je $r = 1$, tada recimo da postoji još jedna dijagonala pridružena boji 2 koja ima 0 polja i nju uparimo s zadnjom dijagonali pridruženoj boji 1.

13. Uočimo da ako su dva retka potpuno isti ili potpuno suprotni na početku, onda će biti ili potpuno isti ili potpuno suprotni nakon svakog poteza. Dakle zaključujemo da se na početku trebaju pojaviti samo dva različita bojanja retka. Dalje se zadatak svodi na rastavljanje na slučajeve i zaključke tipa "Ako se oba bojanja retka pojave bar dva puta, ima barem 2n crnih polja (računajući kutove)". Odgovor je $2n - 4$.

14. Izvor.

15. Izvor.

16. Izvor.

17.9. M2: Upisane i pripisane - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.

1. Samo angle chase. Iranska geometrijska olimpijada, seniori, prvi zadatak, 2017.
2. Pripisana ACD dira u E. USAMO 1999
3. IMO shortlist 2012 G1
4. https://www.skoljka.org/task/3157/
5. IMO shortlist 2005 G1
6. U i V definiraj kao sjecišta I_AB, I_AC sa YZ, invertiraj oko pripisane, pokaži da su U', X, Z kolinearne.

   Ekvivalentno, trivijalno su $XCZI_AU$, $XBYI_AV$ tetivni ($|\angle BYI_A| = |\angle BXI_A| = 90°$, a lako se izračuna $|\angle I_AVY| = |\angle I_ABY|$
7. IMO shortlist 2017 G4
8. Primjena leme sa A, P, M. Dodaj tangentu na ω paralelnu na tangentu kroz T. Tada je pravac kroz P i sjecište AB i ST upravo težišnica velikog, pa tako i malog trokuta.
9. IMO shortlist 2010 G4

17.10. M8: Diofantske - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na hintove.

Teorem Definicija Primjer Lema Zadatak
Zadatak Zadatak
Rješenje Napomena

Zadatak 5. *Dokaži da jednadžba $x^4 + y^4 = w^2$ nema cjelobrojnih rješenja osim $(x, y, w) = (0, 0, 0)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji netrivijalno rješenje i promatrajmo ono s najmanjim w. Vidimo da je (x^2, y^2, w) primitivna Pitagorina trojka jer inače možemo podijeliti svaku varijablu sa zajedničkim prostim faktorom. BSO pretpostavimo da je x^2 neparan i y^2 paran. Iz karakterizacije primitivnih Pitagorinih trojki slijedi da postoje relativno prosti $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da je $u > v$ i

$$x^2 = u^2 - v^2, \quad y^2 = 2uv, \quad w = u^2 + v^2$$

Promatrajući prvu jednadžbu modulo 4 dobivamo da je u neparan i v paran. Kako su u i v relativno prosti, iz druge jednadžbe slijedi da su u i $2v$ potpuni kvadrati odnosno $u = a^2, v = 2b^2$ gdje su a, b relativno prosti. Sada je $x^2 = a^4 - 4b^4 \to x^2 + (2b^2)^2 = (a^2)^2$ gdje je $(x, 2b^2, a^2)$ primitivna Pitagorina trojka. Zato postoje relativno prosti $c, d \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x = c^2 - d^2, \quad 2b^2 = 2cd, \quad a^2 = c^2 + d^2$$

Zbog $b^2 = cd$ slijedi $c = r^2, d = s^2$ za neke $r, s \in \mathbb{N}$ pa je $a^2 = r^4 + s^4$ i vrijedi $a \leqslant a^2 = u \leqslant u^2 < w$ što je kontradikcija s minimalnošću od w.

Zadatak 6. *Dokaži da za svaki realan broj N jednadžba*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

ima rješenje gdje su a, b, c, d cijeli brojevi veći od N.

Dokaz. Jedno rješenje jednadžbe je $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$. Promatrajmo sada općenito rješenje gdje je BSO $a = \min(a, b, c, d) > 0$ te jednadžbu

$$x^2 - (bc + cd + bd)x + b^2 + c^2 + d^2 - bcd = 0$$

Znamo da je jedno rješenje ove jednadžbe $x_1 = a$, a za drugo rješenje iz Vieteovih formula vrijedi $x_2 = bc + cd + bd - a \geqslant cd + bd > a$. Dobili smo novo rješenje $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (x_2, b, c, d)$ te ovim postupkom možemo nastaviti povećavati najmanji broj u četvorci dok svi brojevi nisu veći od N počevši od $(1, 1, 1, 1)$.

Zadatak 7. (Crux Mathematicorum) *Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Dokaži da je $a^2 + b^2 - abc$ potpuni kvadrat.*

Dokaz. Označimo $d = a^2 + b^2 - abc$ i pretpostavimo da d nije potpuni kvadrat za neke $a, b, c \in \mathbb{N}$. Za fiksne c i d označimo skup svih uređenih parova (a, b) koji zadovoljavaju uvjete zadatka sa S te promatrajmo uređeni par koji ima minimalnu sumu $a + b$ i označimo ga s (A, B). Kada bi bilo $A = B$, imali bi $d = A^2(2 - c)$ iz čega zbog uvjeta zadatka slijedi $c = 1$ i $d = A^2$, što je kontradikcija s našom pretpostavkom da d nije potpuni kvadrat. Kako su svi uvjeti simetrični u A i B BSO pretpostavimo $A > B$. Promatrajmo sada jednadžbu

$$x^2 - Bcx + B^2 - d = 0.$$

Znamo da je jedno njeno rješenje $x_1 = A$, a za drugo rješenje iz Vieteovih formula vrijedi $x_2 = Bc - A = \frac{B^2 - d}{A}$. Prva jednakost implicira da je $x_2 \in \mathbb{Z}$, a druga $x_2 < \frac{B^2}{A} < A$. Primijetimo i da kada bi x_2 bio negativan, imali bi

$$0 = x_2^2 - Bcx_2 + B^2 - d > x_2^2 - Bcx_2 + B^2 - c \geqslant x_2^2 + Bc + B^2 - c > 0$$

što je kontradikcija. Također, kako d nije potpuni kvadrat, $B^2 - d$ ne može biti 0 pa je $x_2 > 0$. Sada slijedi da je uređeni par $(B, \frac{B^2 - d}{A}) \in S$ te da ima manju sumu elemenata od (A, B) što je kontradikcija s odabirom uređenog para (A, B) pa d mora biti potpuni kvadrat.

Zadatak 8. *Odredi broj uređenih parova prirodnih brojeva (n, m) takvih da vrijedi $1 \leqslant n < m \leqslant 100$, $n \mid m^2 - 1$ i $m \mid n^2 - 1$.*

Dokaz. Neka je (n, m) proizvoljni par prirodnih brojeva koji zadovoljava uvjete zadatka. Tada postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$na = m^2 - 1$$
$$mb = n^2 - 1$$

Primijetimo da je $(m,n)=1$. Pokažimo da ako je $n>1$, uređeni par $(b,n)=(\frac{n^2-1}{m},n)$ također zadovoljava uvjete zadatka. Prva dva uvjeta su trivijalna te zbog $m^2\equiv 1 \pmod n$ i $mb\equiv -1 \pmod n$ slijedi $m^2b^2\equiv 1 \pmod n$, odnosno $b^2\equiv 1 \pmod n$. Sada znamo da ovim postupkom možemo iz svakog para (n,m) doći do para $(1,i)$ gdje je $i>0$ te kako postupak ima jedinstveni inverzni postupak (par (n,m) možemo dobiti iz (b,n) koristeći $m=\frac{n^2-1}{b}$) ovako možemo generirati sva rješenja počevši s parovima $(1,i)$ za $2\leqslant i\leqslant 100$. Dobivamo rješenja:
$(1,2)\to(2,3)\to\ldots\to(n,n+1)\to\ldots\to(99,100)$
$(1,3)\to(3,8)\to(8,21)\to(21,55)$
$(1,4)\to(4,15)\to(15,56)$
$(1,5)\to(5,24)$
$(1,6)\to(6,35)$
$\vdots$
$(1,10)\to(10,99)$
$(1,11)$
$\vdots$
$(1,100)$
kojih ima ukupno 208.

Zadatak 9. (IMO 2007. problem 5.) *Neka su a,b prirodni brojevi takvi da $4ab-1\mid(4a^2-1)^2$. Dokaži da je $a=b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji uređeni par različitih prirodnih brojeva (a,b) koji zadovoljava dani uvjet. Primijetimo da vrijedi

$$4ab-1\mid b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a^3b-2ab+a^2)=(a-b)^2$$

Fiksirajmo $k=\frac{(a-b)^2}{4ab-1}>0$ i neka je (A,B) uređeni par s minimalnim zbrojem $A+B$ takav da je $k=\frac{(A-B)^2}{4AB-1}$. BSO pretpostavimo $A>B$ i promatrajmo jednadžbu

$$x^2-(2B+4kB)x+B^2+k=0$$

Znamo da je jedno rješenje $x_1=A$, a za drugo rješenje vrijedi $x_2=2B+4kB-A=\frac{B^2+k}{A}$. Zbog minimalnosti $A+B$ mora vrijediti $x_2\geqslant A$ (inače bi dobili uređeni par (x_2,B) koji ima manju sumu) pa slijedi

$$\frac{B^2+k}{A}\geqslant A \iff \frac{(A-B)^2}{4AB-1}\geqslant (A-B)(A+B)$$

što je kontradikcija zbog $(A-B)(A+B)>(A-B)^2>\frac{(A-B)^2}{4AB-1}$. Dakle ne postoji rješenje gdje su a i b različiti prirodni brojevi.

Zadatak 10. *Neka su a,b prirodni brojevi takvi da je $\frac{a^2+b^2}{ab-1}=n$ prirodan broj. Dokaži da je $n=5$.*

Dokaz. Neka je (a,b) par prirodnih brojeva koji zadovoljava $\frac{a^2+b^2}{ab-1}=n$ za fiksan n i b je minimalan (slijedi $a\geqslant b$). Promotrimo jednadžbu

$$x^2-nbx+b^2+n=0$$

Znamo da je jedno njeno rješenje $x_1=a$ te iz Vieteovih formula vidimo da drugo rješenje zadovoljava $x_2=nb-a=\frac{b^2+n}{a}$. Iz prve jednakosti vidimo da je $x_2\in\mathbb{Z}$, a iz druge $x_2>0$, pa uređeni par $(b,\frac{b^2+n}{a})$ također zadovoljava uvjete zadatka. Zbog pretpostavljene minimalnosti b sada mora vrijediti $\frac{b^2+n}{a}\geqslant b$. Primijetimo da je $a=b$ nemoguće zbog $ab-1\mid a^2+b^2$ pa imamo $a>b$ te dobivamo da vrijedi

$$\frac{b^2+n}{a}<b \iff a+b<b^2(a-b).$$

Označavajući $t=a-b\in\mathbb{N}$ nejednakost postaje $2b+t<b^2t$ što ne vrijedi za $b\geqslant 3$ zbog $b^2t\geqslant 3bt=2bt+bt>2b+t$, pa slijedi da je slučaj $b\geqslant 3$ nemoguć. Sada je $b\in\{1,2\}$ te lako provjeravamo tvrdnju zadatka za sve moguće vrijednosti od a.

17.11. M9: Grubo korištenje nježne sile - Ivan Sinčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Koristeći AG na tri člana dobivamo:

$$xy^2 + xz^2 + 2xyz = \frac{1}{2} \cdot (2x)(1-x)(1-x) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Jednakost se postiže za npr. $x = y = z = \frac{1}{3}$.

2. Primijetimo da se jednakost postiže kada su dvije trećine članova jednaki $-\frac{1}{2}$ i jedna trećina članova jednaka 1. Cilj nam je naći izraz (polinom u x_i) koji će dati traženu nejednakost kada ga posumiramo po svim članovima. Najlakše ćemo ga naći ako promatramo vrijednosti koje se pojavljuju u slučaju jednakosti kao nultočke polinoma jer ćemo tada biti sigurni da se slučaj jednakosti može postići. Konkretno, taj polinom je $(x_i - 1)(2x_i + 1)$, no on je drugog stupnja, a u traženoj nejednakosti se pojavljuje treći stupanj. Budući da je $x_i - 1$ uvijek manje ili jednako nuli, kvadriramo li drugi član polinoma znat ćemo točno kojeg je polinom predznaka pa dobivamo:

$$(x_i - 1)(2x_i + 1)^2 \leqslant 0$$

Sumiranjem ove nejednakosti po svim članovima dobivamo traženu nejednakost.

3. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|x_1| \leqslant |x_2| \leqslant \ldots \leqslant |x_n|$. Vrijedi:

$$n(n-1) - x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \overset{\text{CSB}}{\geqslant} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^2}{n-1} = \frac{x_n^2}{n-1}$$

iz čega slijedi:

$$n(n-1) \geqslant \frac{n}{n-1}x_n^2 \quad \Rightarrow \quad n - 1 \geqslant |x_n| \geqslant x_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Sada za svaki indeks i vrijedi:

$$(n - 1 - x_i)(x_i + 1)^2 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow \ (n-3)x_i^2 + (2n-3)x_i + n - 1 \geqslant x_i^3$$

te sumirajući po svim $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dobivamo:

$$n(n-1)(n-2) \geqslant x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$$

Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = -1, \quad x_n = n - 1$.

4. Pokažimo najprije lijevu nejednakost. Uvedimo supstituciju $a = x + 1,\ b = y + 1,\ c = z + 1,\ d = w + 1$. Iz uvjeta dobivamo da vrijedi:

$$x + y + z + w = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4$$

te tvrdnja postaje $x^4 + y^4 + z^4 + w^4 \leqslant 16$, što je očito zbog $16 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$.
Pokažimo sada desnu nejednakost. Primijetimo da se jednakost postiže kada su tri varijable jednake 2 te jedna varijabla jednaka 0. Motivirani slučajem jednakosti, sastavljamo polinom $x^2(x-2)^2 \geqslant 0$ te sumirajući ga po svim varijablama dobivamo:

$$\sum_{cyc} a^2(a-2)^2 \geqslant 0$$

$$\iff 4\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^4 \leqslant 48$$

5. Nejednakost očito vrijedi ako su bilo koje dvije varijable jednake pa ostaje slučaj kada su sve različite. BSOMP $x > y > z$. Dana nejednakost se može zapisati kao:

$$(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2) \geqslant 6(x - y)(y - z)(x - z)$$

Zbog nejednakosti $(x - y)^2 + (y - z)^2 \geqslant \dfrac{1}{2}(x - z)^2$ i $(x - y)(y - z) \leqslant \frac{1}{4}(x - z)^2$ ostaje pokazati:

$$x + y + z \geqslant x - z$$

Što je očito.

Napomena. Kada smo nejednakost zapisali u obliku

$$(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2) \geqslant 6(x-y)(y-z)(x-z)$$

mogli smo primijetiti da ukoliko jednoliko smanjujemo sve tri varijable odjednom, desna strana ne mijenja vrijednost dok se lijeva smanjuje. Zato smo BSO mogli pretpostaviti $z=0$ (zbog $z=\min\{x,y,z\}$) jer ako tvrdnju dokažemo za trojku $(x_1,y_1,z_1)=(x-z,y-z,0)$, ona će vrijediti i za trojku (x,y,z). Korištenjem ovog trika zadatak bi se sveo na dokazivanje $(x+y)((x-y)^2+x^2+y^2) \geqslant 6xy(x-y)$ što je homogena nejednakost pa možemo BSO pretpostaviti $x=y+1$ i dovršiti raspisivanjem članova.

6. Dokazat ćemo malo strožu tvrdnju u kojoj je brojnik desne strane zamijenjen s $(\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\})^2$. BSOMP $(\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\})^2=(a-b)^2$. Nejednakost se može zapisati kao:

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(c-b)^2}{c}+\frac{(a-c)^2}{a} \geqslant \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Kako u Engel formi CSB nejednakosti nije bitno jesu li brojevi u brojnicima koje kvadriramo na većoj strani pozitivni ili negativni, primjenom te nejednakosti na sva tri člana ne moramo pisati apsolutnu vrijednost oko izraza $a-b, c-b, a-c$, već ih možemo same takve zbrojiti i to nam daje tvrdnju zadatka.

7. Primijetimo da zbog $\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a+b}=0$ vrijedi $\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}=\sum_{cyc}\frac{b^2}{a+b}$. Koristeći tu lemu vidimo da vrijedi

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}-\frac{1}{3}\sum_{cyc}\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{1}{3}\sum_{cyc}\frac{\frac{3}{2}(a^2+b^2)-(a^2+ab+b^2)}{a+b}=\frac{1}{6}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a+b}\overset{CSB}{\geqslant}\frac{1}{6}\frac{(2\max\{a,b,c\}-2\min\{a,b,c\})^2}{2a+2b+2c}$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja.

8. Koristeći lemu $\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+b}=\sum_{cyc}\frac{b^2}{a+b}$ vidimo da se dana nejednakost može zapisati kao

$$\frac{1}{6}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a+b} \geqslant k\cdot\frac{\prod_{cyc}(a-b)^{\frac{4}{3}}}{\prod_{cyc}(a+b)}$$

odnosno

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a+c)(b+c) \geqslant 6k\cdot\prod_{cyc}(a-b)^{\frac{4}{3}}$$

Nejednakost je simetrična pa BSOMP $c=\min\{a,b,c\}$. Nadalje uočimo da se jednolikim smanjivanjem svih varijabli odjednom desna strana ne mijenja dok se lijeva smanjuje, pa BSOMP $c=0$. Nejednakost postaje

$$\frac{a^2+b^2}{3} \geqslant k\sqrt[3]{ab(a-b)^4}$$

Koristeći AG nejednakost dobivamo

$$\sqrt[3]{ab(a-b)^4}=\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{ab\cdot\frac{(a-b)^2}{4}\cdot\frac{(a-b)^2}{4}} \leqslant \frac{\sqrt[3]{16}}{3}\left(ab+2\cdot\frac{(a-b)^2}{4}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}(a^2+b^2)$$

iz čega slijedi $k \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, a kako se jednakost postiže za $a=3+2\sqrt{2}, b=1, c=0$ (slučaj jednakosti iz primijenjene AG nejednakosti: $ab=\frac{(a-b)^2}{4}$), tvrdnja zadatka je dokazana.

17.12. M10: Euler, CRT - Borna Šimić

Link na zadatke. Link na hintove.

Sva spomenuta natjecanja, zadatke i rješenja možete naći na Contest Collections.

1. Poznato. (Wikipedia)
2. $n = p - 2$. Iskoristi $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$. IMO shortlist 2005 N1
3. Indukcija. Promotri skup prostih faktora koji dijele sve članove skupa s n članova i eksponent elementa koji dodaješ u skup uzmi φ njihovog umnoška. Ovako generiramo skupove $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ takve da $|S_k| = k$, a za beskonačan skup uzmi uniju S_i.
4. IMO shortlist 2006 N2
5. USEMO 2020 P4
6. AoPS
7. Uzmi km različitih prostih brojeva i CRTom uzmi x djeljiv sa prvih m, kongruentan sa -1 za drugih m...
8. Indukcija slična 3. zadatku. Za svaki podskup skupa sa n članova odaberi različit, velik prosti p i namjesti da je $x + s$ djeljivo sa p^2, gdje je s suma podskupa kojeg promatramo. Ovako opet dobivamo niz konačnih skupova, a za beskonačni uzmemo njihovu uniju.
9. HMO 2020

17.13. M12: Nježno korištenje nježne sile - Tadej Petar Tukara

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Odaberimo točku D tako da je $ABCD$ paralelogram. Tada je P polovište dijagonale AD i trokut ABD je sličan trokutu AKN.

2. Prvi smjer je jednostavan i ostavlja se kao vježba čitatelju. Pretpostavimo da je $AF \perp BD$. Neka je $K := BD \cap AF$. Tada je $\angle EAC = \angle BAC = \angle BDC = \angle KDF = 90^\circ - \angle KFD = 90^\circ - \angle AFC$. Iz ovoga vidimo da se središte opisane kružnice trokuta AFC nalazi na pravcu EA. EA je težišnica tog trokuta pa je AFC jednakokračan trokut i $AB \perp CD$

3. **1. rješenje** Poznato je da je središte Feuerbachove kružnice ujedno i polovište OH. Neka je F središte Feuerbachove kružnice, K polovište stranice AB i L polovište CH. KL je promjer Feuerbachove kružnice pa je F polovište ML. Sada se angle chasingom preko Feuerbachove kružnice dobije da su trokuti PKL i PCD slični.

   2. rješenje Lema: $CH = 2OM$. Vidimo da je $OMKC$ paralelogram pa je MK paralelno s CD i polovište OH je polovište MK. PE raspolavlja CD te stoga raspolavlja i MK pa raspolavlja i CD.

4. MEMO 2016 I3

5. Neka je D točka na AC takva da HI raspolavlja AD. Tada je $AHDI$ paralelogram. Sada angle chasingom dobivamo $\angle IDJ = 90^\circ - \angle ACB$. Nadalje, četverokut $CHBG$ je tetivan, pa je: $\angle CJI = \angle CGI = \angle CGH = \angle CBH = 90^\circ - \angle ACB = \angle IDJ$, pa je $|JI| = |ID| = |AH|$.

6. IMO 2014 problem 4

Dio VI

Rješenja s predavanja na drugom terminu

18. Poglavlje

Rješenja za prvu grupu

18.1. A21: Faktorizacije, sustavi jednadžbi - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. (a) MNM online predavanja - Algebarski izrazi
   (b) Potencija binoma - tijekom množenja izraza u zagradi, na $\binom{n}{i}$ može se izabrati i zagrada u kojima se množi prvi član, dok se u ostalima množi drugi član. Na taj način dobivamo da je koeficijent uz $a^i b^{n-i}$ upravo $\binom{n}{i}$
2. $$(2x+1)^2-(2y+1)^2=(2x+1-2y-1)(2x+1+2y+1)=2(x-y)2(x+y+1)$$
   Ako su x i y iste parnosti, x-y je parno, a ako su različite, x+y+1 je parno, dakle $x-y)(x+y+1)$ je djeljivo sa 2 pa je i cijeli izraz djeljiv sa 8.
3. MNM online predavanja - Algebarski izrazi
4. $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
   $$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$
   $$0=0$$
5. $$x^3+3x^2-5x=15$$
   $$x^2(x+3)-5(x+3)=0$$
   $$(x^2-5)(x+3)=0$$
   $$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x+3)=0$$
   $$x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}, x_3=-3$$
6. MNM online predavanja - Algebarski izrazi
7. $$x^5+10x^3+11x=0$$
   $$x((x^2)^2+10x^2+11)=0$$
   $$x((x^2)^2+10x^2+25-14)=0$$
   $$x((x^2+5)^2-14)=0$$
   $$x(x^2+5-\sqrt{14})(x^2+5+\sqrt{14})=0$$
   $$x=0$$
8. Državno natjecanje 2015., 7. razred, 3. zadatak
9. Državno natjecanje 2015., SŠ A, 1. razred, 1. zadatak
10. Državno natjecanje 2018., 8. razred, 1. zadatak

11. Državno natjecanje 2019., 8. razred, 1. zadatak
12. Školsko natjecanje 2012., SŠ A, 1. razred, 3. zadatak
13. Školsko natjecanje 2016., SŠ A, 1. razred, 3. zadatak
14. Državno natjecanje 2017., 8. razred, 2. zadatak
15. Državno natjecanje 2004., SŠ, 1. razred, 1. zadatak
16. Državno natjecanje 2016., SŠ A, 1. razred, 3. zadatak
17. Državno natjecanje 1994., SŠ, 1. razred, 3. zadatak
18. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 4. razred, 4. zadatak

18.2. C21: Dirichletov princip - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Za prijestupnu godinu imamo $n = 366$, $k = 1$, $366 \cdot 1 + 1 = 367$, a za godine koje nisu prijestupne imamo $n = 365$, $k = 1$, $365 \cdot 1 + 2 = 367$. U oba slučaja po Dirichletovom principu slijedi da dvoje ljudi dijeli rođendan. Kraće: datuma ima 365 (ili 366), a ljudi ima više od toga pa netko sigurno dijeli rođendan.

2. 16. Kad izvuče manje ili jednako 15 čarapa, moguće je da su sve različite. Ali, jednom kad izvuče šesnaestu, po Dirichletovom principu sigurno će bar dvije od tih 16 čarapa biti iste. Da bi imala dvije različite, slično zaključujemo da ih treba izvući barem 3.

3. 7. Kad izvuče 6 ili manje pikula, moguće je da nijedne tri nisu iste boje. Jednom kad izvuče sedmu, po Dirichletovom principu bar jednu boju (kutija) imat će bar tri pikule (kuglice).

4. $n = 12$, $k + 1 = 4$ pa je $k = 3$, i zbog $12 \cdot 3 + 1 = 37$ po Dirichletovom principu tvrdnja vrijedi.

5. 77 kuglica, 12 kutija, $n = 12$, $k = 6$, $12 \cdot 6 + 5 = 72 + 5 = 77$. $6 + 1 = 7$, pa ih je bar 7 rođeno u istom mjesecu.

6. Mogućih suma je 11 (-5, -4, ..., 4, 5), a stupaca, redaka i dijagonala je ukupno 12, pa će po Dirichletovom principu dvije sume biti jednake.

7. 2013. općinsko, 3A.5
   Postoji 8 načina za obojati jedan stupac: CCC, CCP, CPC, PCC, PPC, PCP, CPP, PPP. Kako je stupaca 9, po Dirichletovom principu sigurno postoje dva jednaka. Promatrajmo samo ta dva stupca. Ako su jednobojni, tvrdnja je dokazana. Ako nisu, po Dirichletovom principu dva retka su sigurno iste boje. Te 4 točke su vrhovi tog pravokutnika i tvrdnja je dokazana.

8. Za svaku osobu postoji 500 mogućnosti $(0, 1, 2, \ldots, 499)$. Osoba koja se rukovala s 0 ljudi i osoba koja se rukovala s 499 ljudi ne mogu postojati u isto vrijeme, pa ima 499 mogućnosti i 500 ljudi.

9. Za svaku osobu ima n mogućnosti (0, 1, ..., n), ali kako osobe koje imaju 0 poznanika i n poznanika ne mogu postojati istovremeno, zapravo ima $n - 1$ mogućnosti i n ljudi.

10. Pri dijeljenju nekog prirodnog broja s 19 dobiva se jedan od ostataka 0, 1, 2, ..., 18. Imamo 20 odabranih prirodnih brojeva i 19 ostataka. Prema tome, među odabranima postoje 2 prirodna broja koja pri dijeljenju s 19 daju isti ostatak. Njihova razlika djeljiva je s 19.

11. 50 je parova koji u sumi daju 100 (1 i 99, 2 i 98, ... 49 i 51, 50 i 50), a 51 broj, pa dva moraju biti iz istog para.

12. Najveći i najmanji mogući zbrojevi dvaju različitih prirodnih brojeva od 1 do 100 su 199 i 3 pa stoga postoji 197 različitih zbrojeva tj. parova. Među 21 odabranim brojem postoji $\frac{1}{2}(21 \cdot 20) = 210$ parova različitih brojeva. $n = 197$, $197 \cdot 1 + 13 = 210$, $k = 1$, $1 + 1 = 2$, pa postoje dva različita para čiji je zbroj isti.

13. 415. Izvuče li 414 karata može se dogoditi da nema 10 istih karata (45 karata s brojevima od 1 do 9 i po 9 karata od svih ostalih brojeva). Jednom kad izvučemo 415. kartu, po Dirichletovom principu Yusuf će sigurno imati bar jedan isti broj na bar 10 izvučenih karata.

14. Ako dvije točke imaju koordinate (a, b) i (c, d), onda polovište dužine koja ih spaja ima koordinate $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Stoga zaključujemo da polovište dužine koja spaja dvije točke cjelobrojnih koordinata ima cjelobrojne koordinate ako i samo ako su odgovarajuće koordinate tih dviju točaka jednake parnosti. Budući da različitih kombinacija parnosti koordinata točaka ima 4, među ovih 5 točaka postoje dvije jednakih kombinacija parnosti pa je i polovište dužine koja ih spaja točka cjelobrojnih koordinata.

15. 2013. državno, 8.3
    $m = 110$, $k + 1 = 4$, $k = 3$, $n \cdot 3 + l = 110$, $36 \cdot 3 + 2 = 110$, $l = 2$, $n = 36$. Podijelimo kvadrat na 36 kvadratića stranice $\frac{1}{6}$ i promatrajmo onaj u kojem se nalaze 4 točke. Njemu opisana kružnica ima radijus manji od $\frac{1}{8}$.

16. $m = 7$, $k + 1 = 2$, $k = 1$, $n \cdot 1 + 1 = 7$, $n = 6$. Spojimo dijagonale šesterokuta i podijelimo ga na 6 jednakostraničnih trokuta stranice 1. S obzirom da imamo 7 točaka, postoji trokut u kojem se nalaze bar dvije točke. Kako je stranica tog trokuta 1, udaljenost tih dviju točaka nije veća od 1.

17. 2014. općinsko, 3A.7
Potpuni kvadrati završavaju jednom od 6 različitih znamenaka (0, 1, 4, 5, 6, 9), pa dva sigurno imaju jednaku znamenku jedinica i njihova razlika je djeljiva s 10.

18. Promatrajmo prvih $n+1$ članova niza 1, 11, 111, 1111, ... Slično kao u 10. zadatku, po Dirichletovom principu među njima postoje dva broja s istim ostatkom pri dijeljenju s n, a njihova razlika oblika $111\ldots000$ djeljiva je s n.

19. Online predavanje
Prvo ćemo pretpostaviti da ne postoje takve tri osobe. Vizualizirajmo dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut. Fiksirajmo jednu točku (osobu) i promatrajmo dužine koje izlaze iz nje. Tih dužina ima 5 pa su barem 3 iste boje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je ta boja crvena. Sada gledamo te tri točke na drugim krajevima tih dužina. One međusobno ne smiju biti povezane crvenim dužinama jer smo onda odmah dobili crveni trokut što je suprotno našoj pretpostavci, pa su stoga sve međusobno povezane plavim dužinama, što čini plavi trokut. Zato postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne)poznaju. Ova tvrdnja je u suprotnosti s našom pretpostavkom pa to znači da nam je pretpostavka bila kriva, tj. da postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne) poznaju.

20. Stol se uvijek može okrenuti za kut $\frac{360k}{16}$, gdje je k prirodan broj od 1 do 15 uključivo, tako da ispred bilo kojeg mentora dođe kartica s njegovim imenom. Kako je broj mentora 16, a broj položaja stola različitih od početnog 15, to znači da postoji takav položaj stola kod kojeg ispred bar dva mentora dolaze kartice s njihovim imenima.

21. $D = a^3b - ab^3 = ab(a-b)(a+b)$. D je paran za bilo koje a i b (objasnite zašto!) pa još moramo dokazati djeljivost s 5. Ako je ili a ili b djeljiv s 5, tvrdnja je dokazana. Ako bilo koja dva od tri početna broja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 5, tvrdnja je dokazana. Ako sva tri imaju različite ostatke pri dijeljenju s 5, tj. 123, 234, 341 ili 412, uvijek možemo odabrati dva čiji je zbroj djeljiv s 5, tj. zbroj 2 i 3 ili 1 i 4, pa je tvrdnja dokazana.

22. Promatrajmo brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_{365} koji predstavljaju ukupan broj pojedenih kilograma ribe zaključno s odgovarajućim danom. Stoga vrijedi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{365}$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ jednak jednom od brojeva $a_1+29, a_2+29, \ldots, a_3+29$, jer ako je to slučaj, tj. ako za neke i i j vrijedi $a_i + 29 = a_j$, onda vrijedi $j < i$ te da je u danima između Tuljko pojeo točno 29 kilograma ribe. Brojevi $a_1, a_1+29, a_2, a_2+29, \ldots, a_{365}, a_{365}+29$ nalaze se između 1 i 394 uključivo. Kako tih brojeva ima 730 i $730 = 394 \cdot 1 + 336$, dva broja moraju biti jednaka. Kako su svi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_{365}$ međusobno različiti jer je Tuljko svaki dan pojeo bar 1 kilogram ribe, različiti su i svi brojevi $a_1+29, \ldots, a_{365}+29$. To znači da je neki broj a_i jednak nekom broju $a_j + 29$ i tvrdnja je dokazana.

18.3. G21: Hajka na kuteve (angle chase) - Patricija Dovijanić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 3.
2. Po Talesovom teoremu je $\angle BQA = \angle BPA = 90°$, pa je N ortocentar trokuta ABC, a kako je visina na $\overline{AB}$ na pravcu MN, MN je okomito na AB.
3. 2006. Ž7.3
4. 2016. Ž7.4
5. 2014. Ž8.5
6. 2015. O2A.2
7. 2017. D7.5
8. 2016. D7.5
9. 2015. D8.3
10. 2010. D8.5
11. 2014. O1A.7
12. 2010. O2A.7
13. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 8.
14. 2016. O2A.4
15. 2016. Ž3A.3
16. 2011. D1A.4
17. 2018. D4B.5
18. Izvor: staro predavanje.

    Skica rješenja. Neka je E nožište visine iz vrha C i neka je G sjecište CE i FH. Četverokut $EMGH$ je tetivan (razmislite zašto), i G je težište trokuta ABC, pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = \frac{1}{3}|BE|$. Po poučku SKS, trokuti BHF i EBC su slični, pa je $\angle EMG = \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta ABC, pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EMF = 180° - \angle EMG = 180° - \alpha$, pa je $EBHF$ tetivan, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

18.4. N21: Zadaci sa znamenkama - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Broj znamenaka u brojevima manjim od 100 je $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$. Broj znamenaka u brojevima manjim od 1000 je $189 + 900 \cdot 3 = 2889$. Dakle, tražena znamenka se nalazi među troznamenkastim brojevima. $2020 - 189 = 1831$ i $1831 = 610 \cdot 3 + 1$. 2019. znamenka je 9 u broju $99 + 610 = 709$, a s obzirom na to da imamo još ostatak 1, 2020. znamenka je 7 u broju 710.
2. Elementarna teorija brojeva, primjer 6.
3. Državno 1990., 7. razred
4. Županijsko 1998., 8. razred
5. Državno 2010., 7. razred
6. Školsko 2014., 1. razred
7. Školsko 2014., 2. razred
8. Školsko 2014., 4. razred
9. Školsko 2019., 1. razred
10. Školsko 2019., 3. razred
11. Županijsko 2017., 8. razred
12. Državno 2019., 8. razred
13. Državno 2017., 1. razred
14. JBMO 1998.
15. JBMO 2003.
16. Državno 2012., 1. razred
17. Državno 2018., 2. razred

18.5. C24: Uvod u princip matematičke indukcije - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. MNM predavanje, primjer 1
2. Vježbe iz indukcije - faks
3. Vježbe iz indukcije - faks
4. Problem solving strategies, The induction principle, 18. zadatak
5. MNM predavanje, primjer 1
6. Problem solving strategies, The induction principle, 25. zadatak
7. Članak iz Poučka
8. MNM predavanje, zadatak 4
9. Male teme iz matematike, princip potpune indukcije
10. Male teme iz matematike, princip potpune indukcije
11. MNM predavanje, zadatak 9.
12. MNM predavanje, zadatak 5.
13. MNM predavanje: napredna indukcija
14. Županijsko natjecanje 2012., 4. razred
15. Županijsko 4. razred, 2020.
16. Provodimo indukciju po n: pretpostavimo da za n vrijedi, i promatramo što se događa u permutaciji $n+1$ članova. ako ikad $n+1$ dođe na prvo mjesto, u idućem će koraku otići na zadnje te će se preostali koraci odviti kao u permutaciji n brojeva, koji će po pretpostavci otići do jedinice. Ako $n+1$ nikad ne dođe na prvo mjesto, možemo broju koji je na zadnjoj poziciji i njemu zamijeniti mjesta bez da se promjene koraci koje možemo napraviti. Kako se možemo ponašati kao da smo takvu zamjenu napravili, možemo napraviti iste korake kao u permutaciji prvih n brojeva, pa po pretpostavci indukcije slijedi korak.
17. MNM predavanje: napredna indukcija
18. MNM predavanje: napredna indukcija
19. Članak iz Poučka

19. Poglavlje

Rješenja za drugu grupu

19.1. A22: Nejednakosti - Al Depope

Link na zadatke. Link na hintove.

1.
$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{b+c}{\sqrt{bc}}\right)\left(\frac{c+a}{\sqrt{ca}}\right) \overset{\text{A-G}}{\geq} 2\cdot 2\cdot 2.$$

2. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a\cdot b\cdot 1} \overset{\text{A-G}}{\leq} \frac{a+b+1}{3}$. Odavde slijedi kako je $\sum \sqrt[3]{ab} \leq \frac{2}{3}(a+b+c)+1$.

3. $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \overset{\text{A-G}}{\geq} a+b$. Alternativno, može se iskoristiti CSB nejednakost u Engelovoj formi.

4.
$$xy^2 + xz^2 + 2xyz = \frac{1}{2}\cdot(2x)(1-x)(1-x) \overset{\text{A-G}}{\leqslant} \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Jednakost se postiže za npr. $x=y=z=\frac{1}{3}$.

5.
$$\begin{aligned}\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + &\sqrt{z(3z+x)}\\ &\overset{\text{CSB}}{\leq} \sqrt{\left((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2\right)\cdot\left((\sqrt{3x+y})^2+(\sqrt{3y+z})^2+(\sqrt{3z+x})^2\right)}\\ &= \sqrt{4(x+y+z)^2} = 2(x+y+z).\end{aligned}$$

6. Budući da je
$$0 \leq (a_1x+b_1)^2 + \ldots (a_nx+b_n)^2 = \left(\sum a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum a_ib_i\right) + \sum b_i^2$$
za svaki $x\in\mathbb{R}$, to zaključujemo kako je
$$4\cdot\left(\sum a_ib_i\right)^2 \leq 4\cdot\left(\sum a_i^2\right)\cdot\left(\sum b_i^2\right).$$
Engelova forma CSB nejednakosti slijedi iz
$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+\cdots+b_n) \geq (a_1+\cdots+a_n)^2.$$

7. Imamo
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b} &= \frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+a)}+\frac{e^2}{e(a+b)}\\ &\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{\sum ab}.\end{aligned}$$

Zbog $(a+b+c+d+e)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$, imamo kako je dovoljno dokazati da je

$$2\sum a^2 + 4\sum ab \geq 5\sum ab$$

što je ekvivalentno s

$$2\sum a^2 \geq \sum ab$$

odnosno s $\sum (a-b)^2 \geq 0$.

8. Dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq 3.$$

Iz CSB nejednakosti dobivamo

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2}.$$

Slijedi,

$$\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq \sum \frac{a^2}{a^2+c^2} + \sum \frac{b^2}{b^2+c^2} = 3.$$

9. HMO 2013

10. (a)

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \overset{\text{A-G}}{\leq} \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

(b)

$$1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1+1+\cdots+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \overset{\text{A-H}}{\leq} \sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdots 1\cdot 2\cdot 2} = \sqrt[n+1]{4} \leq \sqrt[n]{4}.$$

11. Znamo da je

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{ab+bc} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$
$$\overset{\text{CSB}}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Jer je $abc = 1$, to slijedi kako je

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{(ab+bc+ca)^2}{(abc)^2} = (ab+bc+ca)^2.$$

Dakle,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

12. Iz CSB nejednakosti primijenjene na trojke $(x, \sqrt{y}, 1)$ i $(1, \sqrt{y}, z)$ dobivamo:

$$\frac{1}{x^2+y+1} \leq \frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Analogno dobivamo:

$$\frac{1}{y^2+z+1} \leq \frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2}$$

i

$$\frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}.$$

Slijedi:

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq \frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2} = S.$$

Ostaje dokazati $S \leq 1$ što je ekvivalentno sa $3+x+y+z \leq 2(xy+yz+zx) = 2(x+y+z)$ tj. $x+y+z \geq 3$. To, međutim, slijedi iz $x+y+z = xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$. Jednakost se postiže za $x = y = z = 1$.

13. Vrijedi kako je

$$a+b+c \geq abc \iff \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq 1.$$

Dokazat ćemo (jaču) nejednakost

$$ab+bc+ca \geq abc\sqrt{3} \iff \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}.$$

Označimo s $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ te se polazni problem moze reformulirati na sljedeći način:

Ako su a,b,c tri nenegativna realna broja za koje vrijedi $ab+bc+ca \geq 1$, tada imamo $a+b+c \geq \sqrt{3}$. Ovo slijedi direktno iz nejednakosti $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

19.2. C22: Invarijante - Luka Banović

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Uočite da je broj bijelih (ili ekvivalentno) crnih polja uvijek paran: ako je u retku/stupcu bilo b bijelih polja, nakon poteza bit će ih $8-b$. Odmah vidimo da su b i $8-b$ iste parnosti, pa kad svaki od tih brojeva dodamo broju preostalih bijelih polja, ta 2 broja bit će iste parnosti. Kako krećemo s parnim brojem bijelih polja, ne možemo postići da ih bude neparno.

2. Promotrimo kako se mijenja broj plavih kuglica u jednom koraku. Pri izvlačenju kuglica mogu se dogoditi 3 različita slučaja: da budu izvučene dvije crvene, dvije plave ili jedna crvena i jedna plava kuglica. Analizom svih slučajeva odmah dolazimo do zaključka da se broj kuglica ili ne promijeni ili smanji za 2, tj. mijenja se uvijek za paran broj. U a) dijelu to znači da će broj plavih kuglica uvijek biti paran, pa kad ostane samo jedna kuglica u kutiji ona će morati biti crvena. U b) dijelu će pak broj plavih kuglica uvijek biti neparan, pa će upravo plava kuglica ostati zadnja u kutiji.

3. Obojimo ploču šahovski: inspiraciju za to dobijemo jer radimo postupak s 2 susjedna polja, pa ih na taj način među 2 susjedna polja mora biti jedno crno i jedno bijelo. Kad ovako postavimo stvari, odmah vidimo da razlika u zbroju brojeva na bijelim i crnim poljima uvijek ostaje ista. Na početku je ta razlika 5, a na kraju bi trebala biti 11, pa Anica ne može dobiti željene brojeve u tom rasporedu na ploči.

4. Potrebno je uočiti da je $(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 = a^2+b^2$. Dakle, zbroj kvadrata triju brojeva na ploči je invarijanta. Kako je $1^2+\sqrt{2}^2+(1+\sqrt{2})^2 = 6+2\sqrt{2}$, a $(\frac{3}{\sqrt{2}})^2+(2\sqrt{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 13$, ne možemo iz početne trojke dobiti ciljanu.

5. Promotrimo kako se mijenja zbroj koordinata kako se Anica kreće mrežom, točnije ostatak tog zbroja pri dijeljenju s 5. Budući da je npr. $3x-2y = 3(x+y)-5y$ i $x+1+y+4 = (x+y)+5$ (a sličan se raspis napravi i za ostale 3 mogućnosti), vidimo da, ako na početku $x+y$ nije bilo djeljivo s 5, nećemo moći postići da u nekom trenutku zbroj koordinata bude djeljiv s 5. To, naime, slijedi iz toga što je zbroj koordinata sljedeće točke višekratnik prethodnog zbroja (ali ne višekratnik koji bi bio djeljiv s 5) kojem još dodamo višekratnik od 5. Dakle, Anica ne može doći do ishodišta koordinatnog sustava.

6. Gledat ćemo kako se mijenja parnost broja kamenčića na hrpama. Vidimo da se u svakom koraku broj kamenčića na svim hrpama mijenja za 1, tj. svim hrpama se mijenja parnost broja kamenčića. Kako krećemo s 3 hrpe koje imaju jednako kamenčića, ili sve 3 hrpe na početku imaju neparno mnogo kamenčića, ili ih pak sve hrpe imaju parno mnogo, i to svojstvo se ne mijenja. Stoga je nemoguće da u bilo kojem trenutku imamo dvije hrpe s parno mnogo kamenčića i jednu s neparno mnogo.

7. Na početku vidimo da su među brojevima kameleona zastupljeni svi mogući ostatci nekog broja pri dijeljenju s 3. Ispitivanjem svih slučajeva lako se uvjerimo da je to svojstvo invarijanta. Dakle, nemoguće je da kameleona svake od boja bude po 200 jer bismo tada imali 3 broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3.

8. Postavimo skakavce u koordinatni sustav na način da skakavci na početku stoje u točkama $(0,0),(0,1)$ i $(1,0)$. Sada možemo uočiti da se skakavcu ne mijenja parnost pojedine koordinate nakon skoka. Prvo, jasno je da će skakavci skakati samo po točkama s cjelobrojnim koordinatama. Ako skakavac skače s točke (a,b) i preskače skakavca u točki (c,d), lako dobijemo da će skakavac doskočiti u točku $a+2(c-a), b+2(d-b)$. Kako nijedan skakavac ne kreće iz točke koja ima obje koordinate neparne, nijedan neće moći doskočiti u točku $(1,1)$.

9. Kako je konačan broj polja obojan crnom bojom, možemo postaviti zadatak na ovaj način: recimo da je Anica počevši od bijele ploče bojala jedno po jedno polje u crno. Na početku je zbroj svih brojeva na ploči bio 0, dakle bio je djeljiv s 4. Kada dodamo novo crno polje, ono može zamijeniti bijelo koje je imalo 0, 1, 2, 3 ili 4 susjeda. Raspisom tih 5 slučajeva vidimo da se dodavanjem crnog polja zbroj brojeva na ploči nužno mijenja za višekratnik od 4. Time smo dokazali tvrdnju zadatka.

10. Obojimo ploču šahovski. Tada (npr.) imamo 13 bijelih i 12 crnih polja. Uočimo da se parnost broja žetona na bijelim poljima tijekom izvođenja koraka ne mijenja, budući da se u svakom koraku pomiču po 2 žetona, a svaki će tijekom poteza promijeniti boju polja na kojem se dotad nalazio. Za a) dio zadatka to znači da želimo imati neparan broj žetona na crnom polju, a na početku ih je parno mnogo. Dakle, ne možemo sve žetone pomaknuti na polje u a) dijelu. No, za polje u b) dijelu to je moguće učiniti, i nije teško konstruirati algoritam kako to možemo napraviti.

11. Numerirajmo vrhove brojevima od 1 do 12 (koje ćemo nadalje zvati *oznake* da izbjegnemo zabunu), pri čemu uzmimo da na početku -1 piše u vrhu označenom s 1, i da želimo da na kraju -1 piše u vrhu označenom s 2. Promotrimo broj S koji definiramo kao zbroj oznaka vrhova u kojima piše -1; na početku je on 1, a želimo da na kraju bude 2. Primijetimo da se promjenom predznaka zbroj oznaka vrhova koji sadrže broj -1 promijeni za paran broj. Naime, uzmimo da smo u jednom koraku odabrali vrhove s oznakama $x, x+1, x+2, x+3$ (možemo gledati oznake modulo 12, tj. samo ostatke oznaka pri dijeljenju s 12). Ako su ta 4 vrha broju S pridonosila s T, poslije koraka pridonosit će s $4x+6-T$. To znači da će se S promijeniti za $T-(4x+6-T) = 2T-4x-6$, a to je paran broj. Dakle, kako je S na početku bio neparan, on će uvijek ostati neparan broj, pa Anica ne može postići ono što cilja. (Alternativno, mogle su oznake vrhova naizmjence biti 0 i 1; došli bismo do istog zaključka na analogan način.)

12. Isprobavanjem raznih mogućnosti možemo doći do sljedeće slutnje: ako Božica na početku napiše brojeve takve da se najveći među njima pojavljuje parno mnogo puta, to se neće promijeniti što god Anica napravi. I zaista, ispitivanjem svih mogućnosti (ovisno koje su veličine 2 broja koja Anica odabere) dobit ćemo da se broj najvećih brojeva u jednom koraku ili poveća za 2, ili ostane isti, ili postane točno 2. Stoga ako Božica odabere takvih 9 brojeva za koje to vrijedi, Anica neće moći pobijediti.

13. Rješenje pod #4, 3).

14. Rješenje pod #10. (postoji razlika u jednom zadanom broju, no način rješavanja je ostao potpuno isti)

15. Rješenje pod #2.

19.3. G22: Karakteristične točke trokuta - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. opća kultura zadaci 1-16.

17. državno 2009.

18. republičko 2019.

19. Izvor.

20. republičko 2003.

19.4. N22: Diofantske - Al Depope

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Jer su y i $y+1$ relativno prosti to mora biti kako $(y+1)^2|243 = 3^5$. Promatranjem svih mogućih faktorizacija dobivamo rješenja $(0,0), (-486,-2), (54,2), (-108,4), (24,8)$ i $(-30,-10)$.

2. Uočimo kako m ne može biti nenegativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj.

   Ako je $m = 0$, onda je $n = \pm 2$.

   Neka je $m > 0$. Ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći sva rješenja za koja je $n \geq 0$.

   Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

   $$(n-1)(n+1) = 3 \cdot 2^m.$$

   Brojevi $n-1$ i $n+1$ su iste parnosti pa oba moraju biti parna. Osim toga, kako je $n \geq 0$, oba moraju biti pozitivna.

   zato imamo dvije mogućnosti:

   (a) $n-1 = 2^k, n+1 = 3 \cdot 2^l$, pri čemu je $k, l \geq 1, k+l = m$. Iz $2 = (n+1) - (n-1)$ slijedi kako je $l = 1$ ili $k = 1$

   (b) $n-1 = 3 \cdot 2^k, n+1 = 2^l$. Na isti način ponovno slijedi kako je $l = 1$ ili $k = 1$.

   Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0,2), (0,-2), (4,7), (4,-7), (3,5), (3,-5)\}$.

3. Primjetimo da su parovi oblika $(k, -k), k \in Z$ rješenja. Ako je $x + y \neq 0$ imamo

   $$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

   što je ekvivalentno s

   $$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

   Slijedi da je $(x-1)^2 \leq 1$ i $(y-1)^2 \leq 1$. Dakle, $x, y \in [0, 2]$. Rješenja su: $(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)$.

4. Promatramo ostatke pri djeljenju s 7. kada je $y \geq 7$, tada je $y! \equiv 0 (\text{mod} 7)$, pa bi trebali imati $x^2 \equiv -1 (\text{mod} 7)$. Ipak, kvadratni ostatci pri djeljenju s 7 su $0, 1, 2, 4$. Dakle, $y < 7$.

   Sada promatramo slučajeve. Najmanji potpuni kvadrat veći od 2001 jest $2025 = 45^2$, i ovdje odmah uočavamo kako su $(x, y) = (45, 4)$ i $(x, y) = (-45, 4)$ dva rješenja. Uočimo kako ovo pokriva sve slučajeve za $y \leq 4$. Za $y = 5$ dobivamo $x^2 = 2001 + 5! = 2121$, ali ova jedndžba nema cjelobrojnih rješenja budući da je 2121 djeljiv s 3, ali ne i s 9. Ako je $y = 6$, tada je $x^2 = 2001 + 6! = 2721$, pa opet nemamo cjelobrojnih rjšenja iz istog razloga kao i maloprije. Dakle, jedina rješenja su $(x, y) = (45, 4)$ i $(x, y) = (-45, 4)$.

5. Jedina rješenja su $(0, 0, 0, 2^{1002})$ te $(2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001})$. Prisjetimo se da za neparni $a = 4n \pm 1$ znamo kako a^2 daje ostatak 1 pri djeljenju s 8.

   Dakle, mora vrijediti kako je $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, t = 2t_1$ za neke cijele brojeve x_1, y_1, z_1, t_1 za koje je $0 \leq x_1 \leq y_1 \leq z_1 \leq t_1$ te $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = 2^{2002}$. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do toga da mora biti $x = 2^{2001}a, y = 2^{2001}b, z = 2^{2001}c$ te $t = 2^{2001}d$ pri čemu su a, b, c, d cijeli brojevi za koje vrijedi $a \leq b \leq c \leq d$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

6. Zbog simetrije možemo pretpostaviti $2 \leq x \leq y \leq z$. Ovo povlači nejednakost $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$, dakle $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.

   $x = 2$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$ pri čemu je $y \in \{11, 12, \ldots, 20\}$. Slijedi da je $z = 10 + \frac{100}{y-10}$ pa su rješenja $(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)$.

   $x = 3$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{15}$ pri čemu je $y \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ i rješenja su $(3, 4, 60), (3, 5, 15), (3, 6, 10)$.

   $x = 4$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$ pri čemu je $y \in \{4, 5\}$ i rješenja su $(4, 4, 10)$.

   $x = 5$ povlači $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5}$ i $y = z = 5$ što daje rješenje $(5, 5, 5)$.

7. Jednadžba iz teksta zadatka ekvivalentna je s

$$(x-n)(y-n)=n^2.$$

Ukoliko zapišemo $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, pri čemu su $p_1,\ldots,p_k$ prosti brojevi, a $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ prirodni brojevi, dobivamo da je $n^2=p_1^{2\alpha_1}\cdots p_k^{2\alpha_k}$, a iz toga znamo da n^2 ima $(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)$ pozitivnih djelitelja. Uvjet $s(n)=5$ povlači da je $(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)=5$,a iz ovog dobivamo kako mora biti $k=1$ te $\alpha_1=2$. Dakle, rješenja su svi $n=p^2$ pri čemu je p prost broj.

8. Neka je (x,y) neko rješenje. Tada,

$$y^2=x(x+8)(x+1)(x+7)=(x^2+8x)(x^2+8x+7)=z^2+7z$$

gdje je $z=x^2+8x$.
Ako je $z>9$ imamo

$$(z+3)^2=z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16=(z+4)^2.$$

što je nemoguće.
Dakle, $x^2+8x=z\leq 9$ što implicira $-9\leq x\leq 1$.
Dolazimo do rješenja:
$(-9,-12),(-9,12),(-7,0),(-4,-12),(-4,12),(-1,0),(-8,0),(0,0),(1,12),(1,-12)$.

9. Uočimo kako je

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(2a)^2}.$$

Iz ovoga slijedi da, ukoliko je $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ rješenje od

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}=1$$

u skupu prirodnih brojeva, tada je $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3})=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},2a_n,2a_n,2a_n,2a_n)$ rješenje od

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_{n+3}^2}=1$$

u skupu prirodnih brojeva. Dakle, dovoljno je konstruirat rješenja za $n=6,7,8$. Ako je $n=6$ rješenj je $(2,2,2,3,3,6)$. Ako je $n=7$, rješenje je $(2,2,2,4,4,4,4)$, a ukoliko je $n=8$, rješenje je $(2,2,2,3,4,4,12,12)$.

10. Iz AH ili CSB nejednakosti imamo

$$(k_1+k_2+\cdots+k_n)\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}\right)\geq n^2.$$

Dakle, $5n-4\geq n^2$, odnosno $n\leq 4$. BSO: $k_1\leq\ldots k_n$.
Ako je $n=1$ mora biti $k_1=1$ što je rješenje.
Ako je $n=2$ imamo $(k_1,k_2)\in\{(2,4),(3,3)\}$ od kojih nijedno nije rješenje.
Ako je $n=3$ imamo $k_1+k_2+k_3=11$, dakle, $2\leq k_1\leq 3$. Slijedi $(k_1,k_2,k_3)\in\{(2,2,7),(2,3,6),(2,4,5),(3,3,5),(3,4,4)\}$ od kojih je samo $(2,3,6)$ rješenje. (kasnije dodati i permutacije!)
Ako je $n=4$ moramo imati slučaj jednakosti, tj. $k_1=k_2=k_3=k_4=4$.

11. Iz AG nejednakosti dobivamo kako je

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^m\geq(2xy)^m>(xy)^m,$$

dakle, mora vrijediti kako je $n>m$. Neka je p zajednički prosti djelitelj od x i y te neka je $p^\alpha||x,p^\beta||y$. Slijedi kako je $p^{(\alpha+\beta)n}||(xy)^n=(x^2+y^2)^m$. Pretpostavimo da je $a>b$. Zbog $p^{2\alpha}||x^2,p^{2\beta}||y^2$ tada mora vrijediti $p^{(2\alpha)n}||x^2+y^2$ te $p^{2am}||(x^2+y^2)^m$. Slijedi kako je $2am=(a+b)n>2an$ iz čega dobivamo kako je $m>n$ pa dolazimo do kontradikcije.

12. Promatramo jednadžbu modulo 11. Budući je $(x^5)^2\equiv 0$ ili $1 \pmod{11}$ za sve x.Dakle, desna strana je kongruentna $6,7$ ili 8 modulo 11. Ipak, kvadratni ostaci modulo 11 su $0,1,3,4,5,9$, pa zaključujemo kako jednadžba $y^2=x^5-4$ nema rješenja.

13. Očitu su $(x, y, p) = (1, 1, 3)$ te $(x, y, p) = (2, 2, 7)$ rješenja. Imamo

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - (x^3 - 1) = x^3(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

Stoga polaznu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = p^y.$$

Neka je $d = \gcd(x^2 + x + 1, x^3 - x + 1)$. Tada d dijeli

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x^3 - x + 1) = x - 2$$

. Nadalje, d dijeli $x^2 + x - 1 - (x - 2)(x + 3) = 7$. Dakle, $d = 7$ za $x > 1$ pa mora biti $p = 7$.

Slijedi kako za $x > 2$ imamo $x^2 + x + 1 = 7^a$ i $x^3 - x + 1 = 7^b$ za neke prirodne brojeve $a \geq 2$ i $b \geq 2$. Ovo znači da 49 dijeli $x^2 + x + 1$ i $x^3 - x + 1$, što je u kontradikciji s $d = 7$. Dakle, $(1, 1, 3)$ i $(2, 2, 7)$ su jedina rješenja.

14. Zapišimo danu jednadžbu kao $3^x - 1 = 2^x y$. Odmah zaključujemo kako je x manji ili jednak eksponentu od 2 u faktorizaciji na proste brojeve od y. Dajmo sada gornju ogradu na vrijednost od y.

Uočimo da je $3^n - 1$ kongruentno 2 ako je n neparan, odnosno kongruentno 0, ako je n paran. Stoga ima smisla faktorizirati $x = 2^m(2n + 1)$ pri čemu su m, n nenegativni cijeli brojevi. Tada imamo

$$3^x - 1 = 3^{2^m(2n+1)} - 1 = \left(3^{2n+1}\right)^{2^m} - 1 = (3^{2n+1} - 1)(3^{2n+1} + 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left((3^{2n+1})^{2^k} + 1\right)$$

Gledamo li modulo 8 dobivamo kako su prva dva faktora u gornjoj jednaka 2 odnosno 4. Dakle, doprinose s faktorom 2^3 produktu $3^x - 1$. Svi ostali izrazi doprinose s 2^1. Konačno dobivamo kako je eksponent od 2 u faktorizaciji od $3^x - 1$ upravo jednak $m + 2$. Iz nejednakosti $x \leq m + 2$ sada dobivamo kako je

$$2^m(2n + 1) \leq (m + 2).$$

Posebno je $2^m \leq m + 2$ što implicira kako je $m \in \{0, 1, 2\}$. Lako provjerom dolazi do toga da su jedina rješenja $(x, y) = (1, 1), (x, y) = (2, 2)$ i $(x, y) = (4, 5)$.

19.5. C25: Prebrojavanja - Mislav Brnetić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Pecivo se može izabrati na 3 načina, šunka na 6 načina (bez šunke ili sa jednom od vrsta), a sir na 5 načina. Dakle rješenje je $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

2. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje 8!.

3. Prvu osobu možemo izabrati na 15 načina, a drugu na 14 načina, a treću na 13 načina, no s obzirom da nije bitan poredak druge i treće osobe to dijelimo sa 2. Dakle rješenje je $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2}$.

4. Brojeva manjih od 1000 i djeljivih sa 3 je 333, a djeljivih sa 7 je 142. Broj je djeljiv i sa 3 i sa 7 ako i samo ako je djeljiv sa 21, a takvih manjih od 1000 ima 47 pa je po FUI rješenje $333 + 142 - 47 = 428$.

5. (a) Jednak je broj načina na koji biramo k predmeta koje želimo kao i $n - k$ koje ne želimo.
   (b) Zbroj načina za izabrati $0, 1, ..., n$-člani podskup je jednak ukupnom broju podskupova, što je upravo desna strana (svaki element može ili biti ili ne biti u poskupu).
   (c) Lijeva strana prikazuje broj načina za odabrati k predmeta među $n+1$ predmetom. Ukoliko podijelimo $n + 1$ predmet na n predmeta i na 1 fiksan predmet, izabrati k predmeta među njima možemo tako da izaberemo ovaj 1 predmet pa još $k - 1$ među preostalima ili tako da odaberemo k predmeta među preostalima, što i prikazuje desna strana. Dakle, obje strane broje broj načina za odabrati k predmeta među $n + 1$ predmetom.

6. Svih peteroznamenkastih brojeva ima 90000, a onih koji nemaju znamenku 5 ima $8 \cdot 9^4$. Dakle, rješenje je $90000 - 8 \cdot 9^4$.

7. Školsko natjecanje 2010., SŠ A, 4. razred, 5. zadatak

8. Državno natjecanje 2009., 8. razred, 3. zadatak

9. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A, 4. razred, 3. zadatak

10. Županijsko natjecanje 1999., SŠ A, 4. razred, 3. zadatak

11. Ukupno permutacija ima 10!. S obzirom da se slovo M ponavlja dvaput, slovo A 3 puta i slovo T 2 puta, moramo podijeliti broj svih permutacija s $2 \cdot 3 \cdot 2$ koliko ima permutacija tih slova.

12. Županijsko natjecanje 2013., SŠ A, 4. razred, 3. zadatak

13. Prvo zamijetimo da 1 pravac dijeli ravninu na dva dijela. Ako je a_{n-1} broj dijelova ravnine na koji ju dijeli $n - 1$ pravac, dodavanjem još jednog pravca koji će postojeće sijeći u $n - 1$ točki se broj dijelova ravnine povećava za n odnosno vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Kako vrijedi $a_1 = 2$, indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

14. Županijsko natjecanje 2010., SŠ A, 4. razred, 4. zadatak

15. Državno natjecanje 2006., SŠ A, 1. razred, 4. zadatak

16. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!. Fiksirajmo redoslijed vozila te njima pridružimo parkirna mjesta. Prvo između svaka dva vozila postavimo po jedno parkirno mjesto. Preostalo je još 21 neupotrijebljenih parkirnih mjesta od kojih svako možemo postaviti na 11 lokacija u odnosu na automobile, a to možemo promatrati kao kombinaciju s ponavljanjem napraviti na $\binom{31}{10}$. Zato je traženi broj načina $\binom{31}{10} \cdot 10!$

20. Poglavlje

Rješenja za treću grupu

20.1. A23: Razni zadaci s nizovima - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Ž2017 4.razred 3. zadatak
2. 101 problems in algebra (str. 54)
3. Ž1999 4. razred 4. zadatak (str. 15, 2.rj)
4. EGMO 2015., 4. zadatak (str. 6)
5. IMO 2014., 1. zadatak (str.11)
6. HMO 2018., MEMO test, 1. zadatak
7. 101 problems in algebra (str.129, Solution 90, Alternative 2)
8. HMO 2016., 1. dan, 1. zadatak
9. HMO 2012., 2. dan, 1. zadatak
10. EGMO 2020., 6. zadatak

20.2. C23: Bojanja i popločavanja - Nika Utrobičić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. MNM online predavanje, primjer 1
2. MNM online predavanje, zadatak 1
3. MNM online predavanje, zadatak 3
4. Obojimo stupce naizmjence crno bijelo. Svaki L zauzima jedno crno i tri bijela ili jedno bijelo i tri crna polja. Dakle, ima ih jednako jednog i drugog tipa, dakle ima paran broj figura, dakle broj polja je djeljiv s 8, ali 100 nije djeljivo s 8.
5. "Problem solving strategies", Coloring proofs, zadatak 2.
6. Državno 2019., 3. razred, A
7. EGMO 2018. zadatak 4
8. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 38.
9. "Problem solving strategies", poglavlje "Coloring proofs", zadatak 28.
10. Državno 2018. , 2. razred, A
11. Državno 2017. , 4. razred, A
12. Državno 2015. , 4. razred, A
13. Državno 2016. , 2. i 3. razred, A
14. HMO 2019., MEMO test
15. HMO 2017., MEMO test
16. MEMO 2018., I2
17. MEMO 2017., T3
18. MEMO 2016., T3
19. IMO 2014., 2. zadatak

20.3. G23: Potencija točke, radikalna os - Luka Banović

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Označimo drugo sjecište pravca BD s kružnicom s E, a sjecišta pravca OD s kružnicom s F i G. Koristit ćemo potencije točaka B i D na kružnicu da dobijemo polumjer kružnice r:

$$|BC||BE| = |BA|^2 \Rightarrow |BE| = 12 \Rightarrow |DE| = 6$$

$$|DC||DE| = |DF||DG| \Rightarrow 18 = (r-2)(r+2) \Rightarrow r^2 = 22$$

Dakle, površina danog kruga je 22π.

2. Povucimo visinu u trokutu $\triangle ABC$ iz vrha A i označimo nožište te visine s A'. Po obratu Talesovog poučka zaključujemo da se A' nalazi i na kružnici s promjerom $\overline{AB}$ i na kružnici s promjerom $\overline{AC}$. Sada kada primijenimo potenciju točke H - ortocentra trokuta $\triangle ABC$ na obje kružnice dobit ćemo $|HP||HQ| = |HA||HA'| = |HR||HS|$, jer su A i A' sjecišta dviju danih kružnica. Ovime smo dokazali tvrdnju zadatka.

3. Rješenje pod #3

4. *(1. način: uz pomoć trigonometrije)* Iskoristit ćemo potenciju točke E na kružnicu i primijeniti poučak o kosinusima na trokut $\triangle ABE$:

$$|AE||DE| = |BE||CE| \quad \Rightarrow \quad |AE|(|AE| - |AD|) = |BE|(|BE| + |BC|) \quad \Rightarrow$$
$$|AE|^2 - |BE|^2 = |AE||AD| + |BE||BC| \quad \Rightarrow \quad |AB|^2 - 2|AB||BE| \cdot \cos\angle ABE = |AE||AD| + |BE||BC| \quad \Rightarrow$$
$$|AB|^2 + 2|AB||BE| \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = |AE||AD| + |BE||BC| \quad \Rightarrow \quad |AB|^2 = |AE||AD| - |BE||BC|,$$

pa dani izraz zaista ne ovisi o izboru točaka C i D.

(2. način) Neka je točka K nožište okomice iz E na pravac AB. Uočimo da su sada četverokuti $BDEK$ i $AEKC$ tetivni, pa vrijedi $|AB||AK| = |AD||AE|$ i $|BA||BK| = |BE||BC|$. Oduzimanjem ovih jednakosti dobijemo isti rezultat kao u 1. načinu.

5. Uočimo da će tvrdnja biti dokazana ukoliko dokažemo da je četverokut $ENCD$ paralelogram, gdje je E drugo sjecište pravca BN i kružnice opisane četverokutu $ABCD$. Označimo kut $\angle BED$ s α. Tada vrijede sljedeće relacije za kuteve:

$$\begin{aligned}
\angle BAD =& \alpha \quad \text{(obodni kutevi)}\\
\angle ABD =& \alpha \quad (\triangle ABD \text{ je jednakokračan})\\
\angle ACD =& \alpha \quad \text{(obodni kutevi)}\\
\angle ADB =& 180^\circ - 2\alpha \quad \text{(kutevi u } \triangle ABD)\\
\angle ACB =& 180^\circ - 2\alpha \quad \text{(obodni kutevi)}\\
\angle MIB =& 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \alpha \quad \text{(kut u središtu upisane kružnice u } \triangle MCB)\\
\angle MNB =& \alpha \quad \text{(četverokut IBNM je tetivan)}
\end{aligned}$$

Dakle, $\angle NED = \angle BNC = \angle NCD = \alpha$, pa je četverokut ENCD zaista paralelogram, što je i trebalo dokazati.

6. Neka je M polovište $\overline{BC}$. Zato što je četverokut $EBFC$ pravokutnik, te budući da su četverokuti $ABNC$ i $AGND$ tetivni, vrijedi $|ME||MF| = |MB||MC| = |MA||MN| = |MD||MG|$, pa zaključujemo da su četverokuti $EAFN$ i $EGFD$ tetivni. Sada korištenjem tetivnosti tih četiriju četverokuta, uz oznaku $\angle BAC = \alpha$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\angle NCG =& \angle NCB = \alpha - \angle NAC = \alpha - \angle NAE = \alpha - \angle NFE = \alpha - \angle NFG + \angle GFE\\
=& \alpha - \angle NFG - \angle GDE = \alpha - \angle NFG - \angle BDE = \alpha - \angle NFG + 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - \angle NFG.
\end{aligned}$$

7. Označimo s B', C' redom nožišta visina iz vrhova B, C u trokutu $\triangle ABC$. Odmah vidimo da je četverokut $BCB'C'$ tetivan te vrijedi $|HB||HB'| = |HC||HC'|$. Sada kako je s lijeve strane jednakosti potencija točke H na kružnicu s promjerom $\overline{BN}$, a s desne strane na kružnicu s promjerom $\overline{CM}$, H je na radikalnoj osi tih dviju kružnica. No, njihova radikalna os je upravo pravac PQ, pa slijedi tvrdnja zadatka.

8. Rješenje #2.

9. Prvo ćemo pokazati da je kružnici opisanoj trokutu $\triangle BFE$ pravac DE tangenta. Po Talesovom poučku je kut $\angle AFB$ pravi, pa je i kut $\angle BFE$ pravi. Stoga je po obratu istog poučka dužina $\overline{BE}$ promjer kružnice opisane trokutu $\triangle BFE$. Kako su pravci BE i DE okomiti, DE je zaista tangenta na tu kružnicu. Ovime smo našli dvije kružnice (početnu i ovu promatranu) čija je radikalna os upravo pravac BF. Da bismo pokazali tvrdnju zadatka, ostaje pokazati da je DE tangenta na danu polukružnicu. I zaista, vrijedi $\angle SDE = \angle SDB + \angle EDB = \angle SBD + 90^\circ - \angle EBD = 90^\circ$, jer su kutovi $\angle SBD = \angle ABD$ i $\angle EBD = \angle CBD$ obodni kutevi nad tetivama iste duljine. Sada iz četvrtog svojstva radikalne osi slijedi tvrdnja.

10. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} DI \text{ radikalna os navedenih kružnica} &\iff DI \text{ okomit na spojnicu središta tih kružnica } (I \text{ je sigurno na osi}) \\ &\iff \text{spojnica središta tih kružnica paralelna s } BC \\ &\iff BC \| KL \text{ (spojnica središta tih kružnica je srednjica u } \triangle IKL) \end{aligned}$$

Budući da je pravac BC okomit na svoju simetralu dužine (koja prolazi točkom M), a na toj simetrali leži dužina koja spaja M i središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$, zbog čega je na nju okomita tangenta KL, zaista vrijedi $BC \| KL$. Dakle, vrijedi tvrdnja zadatka.

11. Izvor.

12. Neka je O središte kružnice opisane trokutu $\triangle ADE$, F sjecište pravaca AE i BD, a G nožište okomice iz O na AD. Pokažimo da je kut $\angle ODB$ pravi; tada će pravac AE biti radikalna os kružnica opisanih oko $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, pri čemu će pravac BD dirati obje kružnice. Neka je $\angle ASB = \alpha$. Tada je i $\angle BSC = \alpha$, pa je $\angle BEC = \frac{\alpha}{2}$. Usto je zbog tetivnosti $\angle AEC = 180^\circ - \alpha$, pa je $\angle AED = \alpha$. Računanjem kutova uz vrh O dobijemo da je i $\angle GOD = \alpha$. Iz $OG \| AS$ i $\angle ASB = \angle GOD$ slijedi $BS \| OD$, tj. $OD \perp BD$, što smo i htjeli pokazati.

20.4. N23: TB konstrukcije, CRT - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. Neka je x element niza te potpun kvadrat, slijedeći član niza je $x+d$, pa $x+2d$... općenito $x+kd$ za k prirodan broj. Sada je dovoljno konstruirati takav k da $x+kd$ bude isto potpun kvadrat. Lako se vidi da $k=d+2\sqrt{x}$ radi buduci da je onda $x+kd=(\sqrt{x}+d)^2$ a to je prirodan broj budući da je x kvadrat.
2. Izvor.
3. Izvor.
4. Državno 2012 4.raz A P2.
5. Državno 2005 4.raz. A P3.
6. Za $k=2$ očito da $(a+1,a)$ radi za svaki a prirodan broj. Za $k>2$ jedno rješenje je $(k,1)$. Neka je (x_1,y_1) najveće rješenje koje smo našli dosad. Neka je $x_1<y_1$, fiksirajmo y_1 te promotrimo jednadžbu kao kvadratnu po y. Očito ima dva rješenja te je jedno od njih x_1, neka je drugo x_2. Iz Viettovih formula dobivamo $x_1+x_2=ky_1>2y_1>2x_1$ te konačno $x_2>x_1$. Dobili smo novo rješenje (x_2,y_1) koje je veće od prošloga te tako dokazali tvrdnju zadatka.
7. MEMO 2016 ekipno P8.
8. Izvor.
9. USAMO 2008/1
10. TSTST 2012/3

20.5. C26: Princip ekstrema - David Mikulčić

Link na zadatke. Link na hintove.

1. opća kultura.
2. opca kultura.
3. Izvor.
4. PSS AE.
5. PSS AE.
6. PSS AE.
7. PSS AE.
8. PSS AE.
9. Izvor.
10. PSS AE.
11. PSS AE.

Dio VII

Projekti na Ljetnom kampu

21. Poglavlje

Projekti

21.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 2 do 6 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz par popodneva detaljnije neku temu. Na ovogodišnjem je kampu bilo ponuđeno sveukupno 8 projekata - 3 na prvom i 5 na drugom terminu.
Većina projekata može se svrstati u sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema.

21.2. Popis projekata

21.2.1 Kriptografija

Vrsta: primjena **Predavač:** Lucija Relić

Na ovom projektu, kao što mu i samo ime kaže, bavili smo se kriptografijom i pomalo kriptoanalizom, a u tome nam je pomoglo poznavanje kongruencija.

Kriptografija je znanstvena disciplina koja proučava metode za slanje poruka u takvom obliku da ih samo onaj kome su namijenjene može pročitati, odnosno metode šifriranja poruke koristeći ključ kako bismo dobili šifrat (poruku namijenjenu određenoj osobi koja ju pomoću svog ključa može dešifrirati). Kriptoaliza proučava postupke za otkrivanje izvorne poruke iz šifrata bez poznavanja konkretnog načina kako je iz izvornog teksta nastao šifrat, tj. bez poznavanja ključa.

Da bi mogli lakše razumijeti neke metode šifriranja prvo smo se pozabavili kongruencijama. Kongruencije su usko vezane uz pojam djeljivosti; neka dva cijela broja a i b su kongruentna modulo n (za n prirodan broj) ako n dijeli $a - b$, što vrijedi ako i samo ako a i b daju isti ostatak pri dijeljenju sa n. Piše se $a \equiv b \pmod{n}$.
Upoznali smo se i s osnovnim svojstvima kongruencija, kao i sa Malim Fermatovim teoremom koji kaže da za a cijeli broj, p prost i takvi da p ne dijeli a vrijedi $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Nakon nekoliko različitih zadataka bili smo spremni za šifre. Svakom slovu abecede (uglavnom smo koristili englesku abecedu koja ima 26 slova) pridružili smo broj između 0 i 25 uključivo.

Pročili smo nekoliko šifri, način šifriranja i dešifriranja te prednosti i mane u usporedbi s ostalim šiframa. Šifriranje i dešifriranje su zapravo funkcije e_K i d_K koje svakom broju koje je pridruženo slovu izvorne poruke daju neki drugi broj (koristeći ključ, odnosno ključeve) koji onda natrag prevedemo u pripadajuće slovo. Šifre koje smo promatrali su sljedeće:

- Cezarova šifra - ona je najjednostavnija i znali smo ju već od prije, a zahtijeva samo jedan ključ K
  $e_K(x) = x + K \pmod{26}$

- afina šifra - slična Cezarovoj, koristi ključeve A i B pri čemu A i 26 moraju biti relativno prosti, inače ju ne možemo dešifrirati
  $e_{A,B}(x) = Ax + B \pmod{26}$

- Vigenerova šifra - ova šifra sastoji se od m Cezarovih šifri; svako m-to slovo šifrira se s istim ključem, ali ključevi su općenito međusobno različiti

- općenita supstitucijska šifra - ključ je cijela permutacija i svakom slovu se bijektivno pridruži slovo u šifratu, općenito bez određenog pravila

- transpozicijska šifra - tu nema zamjene slova, samo se radi anagram po određenom pravilu, izvorna poruka zapiše se u pravokutnik po redcima, a zatim se poruka čita po stupcima, ali s promijenjenim poretkom stupaca

Spomenuli smo još i Hillovu i Playfairovu šifru, ali nismo se njima puno bavili.

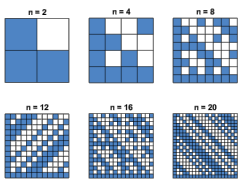
Malo smo se igrali i s kriptoanalizom. Uz poznavanje samo načina šifriranja, ali ne i konkretnog ključa, pokušali smo dešifrirati neke pojmove. Koristili smo razne alate, ali najzanimljivija nam je bila analiza frekvencije slova. Npr. ako smo u šifratu imali puno jednakih slova isprobavali smo ključeve koji su nam dali da je to slovo neko od najčešćih u hrvatskom jeziku (to su a, i, o, e, n...). Nekada nam je pomogla i analiza bigrama i trigrama.

Budući da je projekt djelomično inspiriran filmom Imitation game, napravili smo malo natjecanje u kojemu smo primjenjivali šifriranje i dešifriranje pomoću nekih šifri koje smo prije radili i tako na zabavan način zaokružili projekt. Napravili smo podjelu na Britance, Berlin i podmornice i naučili raditi razmjenu ključa (naravno, tu smo opet koristili kongruencije). Igrali smo 3 kruga koristeći različite šifre (Cezarovu, afinu i Vigenerovu), a pobjedu su odnijeli Britanci.

21.2.2 Hadamardove matrice

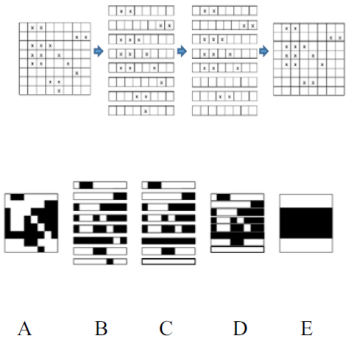
Vrsta: fakultetski/natjecateljski **Predavač:** Maja Drmač

Na ovom projektu smo se bavili matricama i operacijama s matricama, Hadamardovim matricama i njihovim svojstvima te njihovom primjenom u *error correctingu* i enkripciji.
Naučili smo što su matrice, kako ih označavamo, operacije s njima (zbrajanje, množenje, Kroneckerov produkt) i svojstva nekih karakterističnih matrica poput jedinične, transponirane, inverzne i nul matrice.
Hadamardova matrica reda m je $(m \times m)$ matrica $H_m = [h_{ij}]$ gdje je $h_{ij} \in \{-1, 1\}$ i za koju vrijedi $H^T H = HH^T = mI_m$, gdje je I_m $(m \times m)$ jedinična matrica.



Dokazali smo da ako za prirodan m postoji Hadamardova matrica reda m, onda je $m = 1$, $m = 2$ ili $m \equiv 0 \pmod 4$, ali još nije dokazano da za svaki $m \equiv 0 \pmod 4$ postoji Hadamardova matrica. Vrijednosti za koje se trenutno pokušava naći su 668, 716, 892, 1004, ...
Postoje razni načini kako konstruirati Hadamardove matrice. Mi smo promatrali Sylvesterove konstrukcije: ako su H_m i H_n Hadamardove matrice, onda je $H_m \otimes H_n$ isto Hadamardova matrica.

Veći dio projekta smo se bavili proučavanjem primjene ovih matrica u enkripciji i ispravljanju grešaka u prijenosu binarnih kodova na velikoj udaljenosti. Najviše nas je zanimao kod korišten 1970-ih koji je koristila letjelica Mariner 9 da bi mogla slati crno bijele slike Marsove atmosfere na TV prijenosu uživo. Put od Marsa do Zemlje je dugačak i nesiguran te signal nije uvijek jak, još može doći do svakakvih elektroničkih smetnji, pa je za očekivati da će doći do grešaka u prijenosu. Trebalo je uzeti u obzir i činjenicu da je Mariner 9 mala letjelica koja ne može držati puno podataka. Korišten je kod sačinjen od matrica H_{32} i $-H_{32}$ i uz pomoć njega smo dešifrirali dolazeći signal i ispravljali greške ukoliko je to bilo moguće. Osim ovoga, naučili smo nešto o teoriji binarnih kodova (što je binarni kod, Hammingova udaljenost i težina) te smo promatrali jednostavne optimizacijske algoritme pri šifriranju matrica, tzv. *osnovnih slika*.



21.2.3 Teorija grafova

Vrsta: natjecateljski **Predavač:** Andrija Tomorad

Sadržaj ovog projekta je područje kombinatorike, teorija grafova. Projekt bi se mogao podijeliti na dva dijela, teoriju i zadatke. Prvo smo se bavili značajnim pojmovima i teoremima. Najosnovni pojam nam je graf, tj. skup objekata (vrhova) i veza između njih (bridova), npr. gradovi i ceste između njih, osobe i njihova poznanstva ili točke u ravnini i dužine između njih... Ostali važni pojmovi su npr. planarni graf (koji možemo nacrtati u ravnini tako da se bridovi ne sijeku), stupanj vrha, šetnja, put, ciklus, staza, stablo,... Osim dokazivanja nekih lema o osnovnim pojmovima, riješili smo poznati problem s mostovima u Königsbergu, zatim smo definirali dualni graf te dokazali i primjenjivali Eulerovu formulu na planarnom grafu (za to su nam motivacija bili poliedri, posebno Platonova tijela). Nakon toga smo definirali bipartitnost (motivacija su crna i bijela polja šahovske ploče i kretanje skakača, istobojna polja, tj. vrhovi grafa, nisu povezana), te smo proučavali kako bi bilo da imamo više od dvije boje na planarnom grafu, te uz pomoć Eulerove formule dokazali teorem o pet boja. Riješavali smo i natjecateljske zadatke (na razini državnog natjecanja i teže), npr. drž. 2017 2.A, 5. zad. (jedan od najslabije riješenih zadataka na državnom natjecanju). Cilj tih zadataka, osim proučavanja samog područja teorije grafova, je i razvoj kreativnosti u rješavanju zadataka (npr. često bude teško započeti zadatak ili iz promatranja jednostavnih primjera uočiti nešto važno i tako odrediti cilj) jer se često riješavaju dinamički, npr. dodavanje i brisanje bridova, promatranje vrha s ekstremnim brojem bridova, itd.

21.2.4 Fleksagoni

Vrsta: primjena **Predavač:** Patricija Dovijanić

Na ovom projektu bavili smo se proučavanjem fleksagona. Fleksagoni su papirnate igračke u obliku pravilnih mnogokuta koje se mogu presavijati tako da osim prednje i stražnje strane postanu vidljive i one skrivene.

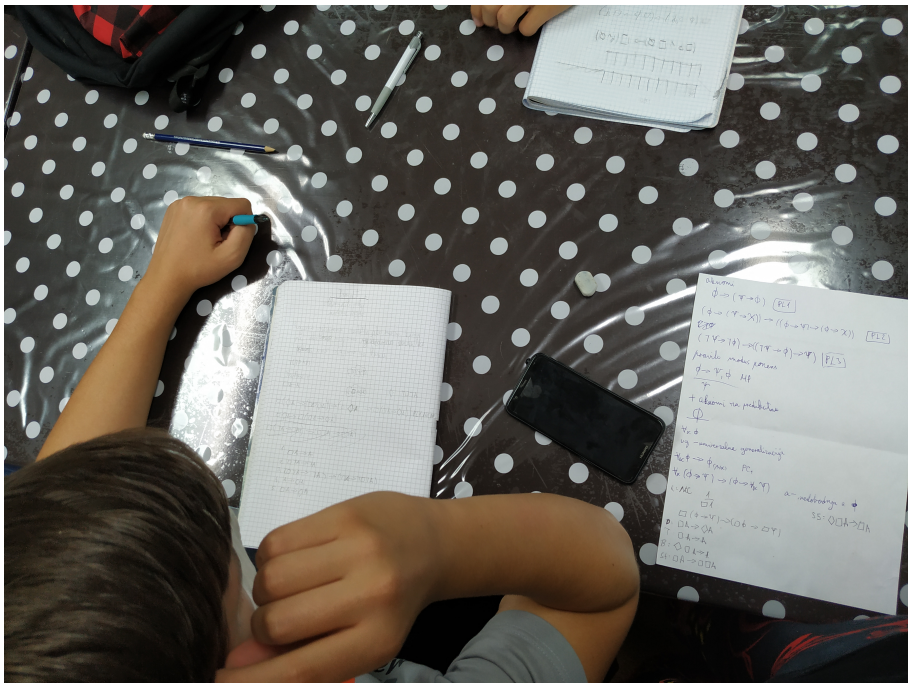
Na početku projekta učili smo o grafovima te smo pomoću njih prikazali odnose među različitim stranama fleksagona. Zatim smo promatrali okretanje i presavijanje fleskagona kao funkcije te koristeći osnovno znanje o funkcijama uočavali neke pravilnosti. Na kraju smo učili o grupama i zaključili da, označimo li određene strane fleksagona, one s operacijom presavijanja čine grupu.

Fleksagoni su se pokazali kao odlično pomagalo pri učenju o grafovima, funkcijama i grupama, a za uspomenu su nam ostali brojni fleksagoni i patlidžani.

21.2.5 Modalna logika

Vrsta: fakultetski/primjena **Predavač:** Nika Utrobičić

Na ovom smo se projektu upoznali s logikama prvog reda te modalnim logikama, naučili smo dokazivati metodom prirodne dedukcije, upoznali smo se s aksiomatskim sustavima logika prvog reda te aksiomatskim sustavima u modalnim logikama te smo ih primjenjivali na zadatke. Na projektu su sudjelovali Andrija Adamović, Borna Banjanin, Matej Cvitković i Petra Grubišić, a vodila ga je Nika Utrobičić.
Prvi dan projekta smo se upoznali s osnovama propozicijske, predikatne i modalne logike (naučili smo što znače veznici, prevodili smo rečenice i naučili semantiku mogućih svjetova), te smo učili prirodnu dedukciju.
Drugi smo dan vježbali zadatke iz prirodne dedukcije.
Treći smo se dan upoznali s aksiomatskim sustavom propozicijske i predikatne logike te dokazivali tvrdnje koristeći samo pravila i aksiome: pola smo dana dokazivali da iz A slijedi A.
Četvrti smo dan proučili razne aksiomatske sustave u modalnoj logici: K, D, T, B, S4 i S5, te u njima dokazivali tvrdnje.
Logično, logika nema smisla.



21.2.6 Primjena vjerojatnosti u (netipičnim) igrama

Vrsta: primjena **Predavač:** Luka Banović

Cilj ovog projekta bio je naučiti osnove vjerojatnosti.

Kao uvod u projekt smo obradili osnove prebrojavanja, nakon čega smo se upoznali s vjerojatnošću u par točaka. Započeli smo s jednostavnim primjerima, a zatim smo se upoznali sa zahtjevnijim zadatcima koji koriste uvjetnu vjerojatnost, formulu potpune vjerojatnosti i Bayesovu formulu. Stečeno znanje primijenili smo pri igranju Rizika i *Liar's Dicea*. Za kraj smo obradili podatke dobivene tijekom igranja i usporedili ih s već izračunatim rezultatima pokusa.

21.2.7 Funkcijske

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Mislav Brnetić, David Mikulčić

Cilj našeg projekta bio je obraditi i uvježbati funkcijske jednadžbe.
Krenuli smo s osnovnim tehnikama, a zatim neke specifične funkcijske jednadžbe poput Cauchyeve i Jensenove.
Došli smo do težih funkcijskih jednadžbi koje se rješavaju zahtjevnijim tehnikama.
Prvi dan smo definirali funkciju i osnovne pojmove vezane za funkciju, poput injekcije, surjekcije i bijekcije.
Zatim smo počeli rješavati lakše zadatke uvrštavanjem vrijednosti.
Drugi dan smo obradili Cauchyevu i Jensenovu funkcijsku jednadžbu, odredili njihova rješenja i rješavali zadatke koji se svode na njih.
Posebno smo promatrali funkcijske jednadžbe u prebrojivim skupovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.
Rješavali smo izazovne zadatke s raznih nacionalnih i međunarodnih natjecanja i olimpijada (primjerice IMO, USAMO, ELMO).

21.2.8 PCA

Vrsta: primjena **Predavač:** Al Depope

Cilj projekta bio je razumjeti matematičku podlogu metode glavnih komponenata (PCA) i primjeniti je za komprimiranje slike.
Upoznali smo se s osnovama linearne algebre i statistike. Iz linearne algebre naučili smo što su matrice, vektori, definiciju skalarnog produkta i norme, što su svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori te determinanta matrice.
Zatim smo iz statistike obradili pojmove poput srednje vrijednosti, standardne devijacije, kovarijance i varijance.
Potom smo kombinirajući znanja iz tih područja izveli PCA metodu koju smo implementacijom u pythonu primjenili za komprimiranje slika rukom pisanih znamenki. Radili smo na MNIST datasetu (http://yann.lecun.com/exdb/mnist/)

Dio VIII

Završne riječi

22. Poglavlje

Završno

22.1. Zahvale

U okolnostima koje su nas sve snašle ove godine, organizacija Ljetnog kampa bila je zahtjevnija i više nepredvidljiva nego inače. Zbog toga smo iznimno zahvalni svima koji su nam u tome pomogli na bilo koji način. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jednog nešto drugačijeg, ali ništa manje uspješnog Ljetnog kampa.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Učeničkom domu Ogulin i Pučkom otvorenom učilištu Ogulin, koji su nam, unatoč otežanim uvjetima zbog pandemije koronavirusa, odlučili izaći u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Ogulinu. Zahvaljujemo i Gradu Ogulinu te gradonačelniku Daliboru Domitroviću koji su nam uvelike pomogli u organizaciji prostora za održavanje naših aktivnosti.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti Ministarstvu znanosti i obrazovanja, našem sponzoru. Omogućili ste da se kamp održi, ali i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše udruge.

Naravno, kamp ne bi bio moguć bez svih mentora koji su organizirali i održali još jedan Ljetni kamp. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i kada kamp završi.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem bez obzira na okolnosti. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Vaš velik odaziv unatoč pandemiji potvrđuje da ono što radimo u MNM-u i na Ljetnom kampu zaista čini razliku.

Veliko vam hvala na svemu!

22.2. Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **adresa**: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.