

Ljetni kamp mladih matematičara

2019
17.08. - 24.08.



Zadar



Mladi nadareni matematičari
Marin Getaldić

Sadržaj

1	Predgovor	7
2	Uvod	8
2.1	O udruzi	8
2.2	Povijest kampova	9
2.3	Ovaj kamp	9
2.4	Aktivnosti na kampu	10
2.5	Popis mentora	11
2.6	O predavanjima	11
2.7	Raspored aktivnosti	12
3	Zadaci s predavanja	13
3.1	Zadaci za smeđu grupu	13
3.1.1	C1: Logika i dokazi - Lana Frkin	13
3.1.2	N1: Znamenke - Patricija Dovijanić	15
3.1.3	G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad	17
3.1.4	A1: Jednadžbe - Vinko Dragušica	19
3.1.5	C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola	20
3.2	Zadaci za crvenu grupu	22
3.2.1	C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić	22
3.2.2	N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček	24
3.2.3	G2: Površine - Nikola Sole	25
3.2.4	A2: Faktorizacije - Nena Vukšić	26
3.2.5	C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad	28
3.3	Zadaci za narančastu grupu	31
3.3.1	C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš	31
3.3.2	N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar	33
3.3.3	G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara	35
3.3.4	A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić	36
3.3.5	C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak	38
3.4	Zadaci za žutu grupu	40
3.4.1	C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić	40
3.4.2	N4: Faktorizacije i djelitelji - Ivan Čulin	42
3.4.3	G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić	44
3.4.4	A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj	46
3.4.5	C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar	48
3.5	Zadaci za zelenu grupu	49
3.5.1	C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kukan	49
3.5.2	N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj	51
3.5.3	G5: Angle chasing - Tea Arvaj	53
3.5.4	A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola	55
3.5.5	C15: Prebrojavanja - Lucija Relić	56
3.6	Zadaci za cijan grupu	59
3.6.1	C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić	59
3.6.2	N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić	60

3.6.3	G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip Pupić	63
3.6.4	A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić	65
3.6.5	C16: Ploče - Juraj Marušić	68
3.7	Zadaci za plavu grupu	70
3.7.1	C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj	70
3.7.2	N7: Diofantske jednačbe - Ivan Sinčić	72
3.7.3	G7: Fantomiranje - Katja Varjačić	74
3.7.4	A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić	75
3.7.5	C17: Teorija igara - Petra Brčić	76
3.8	Zadaci za ljubičastu grupu	79
3.8.1	C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić	79
3.8.2	N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević	80
3.8.3	G8: Kolinearnost i konpunktalnost - Luka Kraljević	81
3.8.4	A8: Uvod u funkcijske jednačbe - Krunoslav Ivanović	83
3.8.5	C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš	85
3.9	Zadaci za magenta grupu	86
3.9.1	C9: Indukcija (turbo) - Josip Pupić	86
3.9.2	N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak	87
3.9.3	G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović	89
3.9.4	A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak	93
3.9.5	C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić	95
3.10	Zadaci za crnu grupu	96
3.10.1	C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić	96
3.10.2	G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić	97
3.10.3	C20: Teorija grafova - Leon Starešinić	98
3.10.4	A11: Funkcijske jednačbe - Petar Orlić	99
3.10.5	G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara	100
3.10.6	N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac	101
4	Hintovi s predavanja	102
4.1	Hintovi za smeđu grupu	102
4.1.1	C1: Logika i dokazi - Lana Frkin	102
4.1.2	N1: Znamenke - Patricija Dovijanić	103
4.1.3	G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad	104
4.1.4	A1: Jednačbe - Vinko Dragušica	105
4.1.5	C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola	106
4.2	Hintovi za crvenu grupu	107
4.2.1	C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić	107
4.2.2	N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček	108
4.2.3	G2: Površine - Nikola Sole	109
4.2.4	A2: FaktORIZACIJE - Nena Vukšić	110
4.2.5	C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad	111
4.3	Hintovi za narančastu grupu	112
4.3.1	C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš	112
4.3.2	N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar	113
4.3.3	G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara	114
4.3.4	A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić	115
4.3.5	C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak	116
4.4	Hintovi za žutu grupu	117
4.4.1	C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić	117
4.4.2	N4: FaktORIZACIJE i djelitelji - Ivan Čulin	118
4.4.3	G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić	119
4.4.4	A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj	120
4.4.5	C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar	121
4.5	Hintovi za zelenu grupu	122
4.5.1	C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kokan	122
4.5.2	N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj	123

4.5.3	G5: Angle chasing - Tea Arvaj	124
4.5.4	A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola	125
4.5.5	C15: Prebrojavanja - Lucija Relić	126
4.6	Hintovi za cijan grupu	127
4.6.1	C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić	127
4.6.2	N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić	128
4.6.3	G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip Pupiće	129
4.6.4	A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić	130
4.6.5	C16: Ploče - Juraj Marušić	132
4.7	Hintovi za plavu grupu	133
4.7.1	C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj	133
4.7.2	N7: Diofantske jednačbe - Ivan Sinčić	134
4.7.3	G7: Fantomiranje - Katja Varjačić	135
4.7.4	A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić	136
4.7.5	C17: Teorija igara - Petra Brčić	137
4.8	Hintovi za ljubičastu grupu	138
4.8.1	C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić	138
4.8.2	N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević	139
4.8.3	G8: Kolinearnost i konpuktalnost - Luka Kraljević	140
4.8.4	A8: Uvod u funkcijske jednačbe - Krunoslav Ivanović	141
4.8.5	C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš	142
4.9	Hintovi za magenta grupu	143
4.9.1	C9: Indukcija (turbo) - Josip Pupiće	143
4.9.2	N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak	144
4.9.3	G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović	145
4.9.4	A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak	146
4.9.5	C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić	147
4.10	Hintovi za crnu grupu	148
4.10.1	C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić	148
4.10.2	G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić	149
4.10.3	C20: Teorija grafova - Leon Starešinić	150
4.10.4	A11: Funkcijske jednačbe - Petar Orlić	151
4.10.5	G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara	152
4.10.6	N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac	153

5 Rješenja s predavanja 154

5.1	Rješenja za smeđu grupu	154
5.1.1	C1: Logika i dokazi - Lana Frkin	154
5.1.2	N1: Znamenke - Patricija Dovijanić	156
5.1.3	G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad	157
5.1.4	A1: Jednačbe - Vinko Dragušica	158
5.1.5	C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola	159
5.2	Rješenja za crvenu grupu	160
5.2.1	C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić	160
5.2.2	N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček	161
5.2.3	G2: Površine - Nikola Sole	162
5.2.4	A2: FaktORIZACIJE - Nena Vukšić	163
5.2.5	C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad	164
5.3	Rješenja za narančastu grupu	166
5.3.1	C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš	166
5.3.2	N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar	167
5.3.3	G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara	169
5.3.4	A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić	170
5.3.5	C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak	171
5.4	Rješenja za žutu grupu	172
5.4.1	C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić	172
5.4.2	N4: FaktORIZACIJE i djelitelji - Ivan Čulin	174

5.4.3	G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić	175
5.4.4	A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj	176
5.4.5	C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar	180
5.5	Rješenja za zelenu grupu	181
5.5.1	C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kokan	181
5.5.2	N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj	182
5.5.3	G5: Angle chasing - Tea Arvaj	183
5.5.4	A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola	185
5.5.5	C15: Prebrojavanja - Lucija Relić	186
5.6	Rješenja za cijan grupu	190
5.6.1	C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić	190
5.6.2	N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić	191
5.6.3	G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip Pupiće	193
5.6.4	A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić	194
5.6.5	C16: Ploče - Juraj Marušić	195
5.7	Rješenja za plavu grupu	196
5.7.1	C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj	196
5.7.2	N7: Diofantske jednačbe - Ivan Sinčić	198
5.7.3	G7: Fantomiranje - Katja Varjačić	202
5.7.4	A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić	203
5.7.5	C17: Teorija igara - Petra Brčić	204
5.8	Rješenja za ljubičastu grupu	207
5.8.1	C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić	207
5.8.2	N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević	208
5.8.3	G8: Kolinearnost i konpuktalnost - Luka Kraljević	209
5.8.4	A8: Uvod u funkcijske jednačbe - Krunoslav Ivanović	210
5.8.5	C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš	211
5.9	Rješenja za magenta grupu	212
5.9.1	C9: Indukcija (turbo) - Josip Pupiće	212
5.9.2	N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak	213
5.9.3	G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović	216
5.9.4	A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak	217
5.9.5	C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić	219
5.10	Rješenja za crnu grupu	220
5.10.1	C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić	220
5.10.2	G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić	221
5.10.3	C20: Teorija grafova - Leon Starešinić	222
5.10.4	A11: Funkcijske jednačbe - Petar Orlić	223
5.10.5	G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara	224
5.10.6	N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac	225

6 Projekti 226

6.1	O projektima	226
6.2	Popis projekata	226
6.2.1	Linearna algebra	226
6.2.2	Vizualna teorija grupa	227
6.2.3	Cauchyeva funkcijska jednačba broken down	227
6.2.4	P-adaska dolina	227
6.2.5	Nejednakosti (od A do G)	228
6.2.6	Uvod u logiku	228
6.2.7	Natj. prog. - linearna algebra u natj prog	228
6.2.8	Teorija igara	229
6.2.9	Geometrija za ljude koji ne vole geometriju	229
6.2.10	"OMG, E Koji dobar projekt"	229
6.2.11	Uvod u natjecateljsko programiranje	229
6.2.12	Kako smjestiti Beethovena na torus	230
6.2.13	Uvod u vjerojatnost i statistiku	230

6.2.14	Matematika i fizika u sportu	230
6.2.15	Matematika žongliranja	230
6.2.16	"Platonova tijela" u n dimenzija	231
6.2.17	Kriptografija	231
7	Natjecanje ELMO	232
7.1	Zadaci	232
7.2	Rješenja	233
8	Završno	242
8.1	Zahvale	242
8.2	Kontakt	243

Poglavlje 1

Predgovor

U ovoj knjizi je moguće pronaći skoro sva predavanja koja su se održala na 10. ljetnom kampu mladih nadarenih matematičara, zajedno s hintovima i rješenjima.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi. Trenutno je ovo jedan od najvećih natjecateljskih materijala na hrvatskom jeziku, pa se nadamo da će učenicima pružiti dovoljno zanimljivih tema na odabir.

Dodatno knjiga sadrži opis kampa te projekata koji su se održali na njemu kako bi zainteresirali bilo kojeg čitatelja ove knjige da možda i sam sudjeluje na istome.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na sljedeću e-mail adresu: mnm@mnmm.hr

Autori,
25. rujna 2019.

Poglavlje 2

Uvod

2.1 O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.

Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dvaju gimnazija u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Ta udruga prvotno se bavila organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara, no tokom vremena djelatnost udruge proširila se i na druge aktivnosti poput zimske škole, organiziranih predavanja subotom na zagrebačkom PMF-u, gostovanjima udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama...



Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Danas je udruga jedna od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina. Tomu svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama učenika, mentora i predavača popularno - znanstvenih predavanja.

2.2 Povijest kampova

Ljetni kamp je najveća i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koje nastoje ostvariti sve njihove matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te se udruga može pohvaliti time da je ovo, jubilarno deseto, izdanje kampa dovedeno gotovo do savršenstva. Godine iskustva starijih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Jedan od ciljeva kampa jest i povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampu možemo sresti i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.



Slika 2.2: Ljetni kamp 2015.



Slika 2.3: Ljetni kamp 2017.

2.3 Ovaj kamp

Ovo je bio jubilarni 10. ljetni kamp. Kao i prethodna dva ljetna kampa, održavao se u gradu Zadru. Učenici i mentori bili su smješteni u Srednjoškolskom đачkom domu Zadar u kojem su se odvijali i projekti, a predavanja su se održavala u Medicinskoj školi Ante Kuzmanića.



Slika 2.4: Srednjoškolski đачki dom Zadar¹



Slika 2.5: Medicinska škola Ante Kuzmanića¹

¹Izvor fotografija: Zadarski list

2.4 Aktivnosti na kampu

Glavne su aktivnosti na kampu jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata, te popodnevni projekti. Svako jutro, nakon doručka, učenici slušaju detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Nakon predavanja, učenici se uz ručak imaju priliku odmoriti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analize određenih tema vezanih uz natjecateljsku, primjenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki polaznik kampa na početku kampa odabire jedan od ponuđenih projekata iz raznovrsnih područja matematike, te radi na njemu do kraja kampa učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije iz odabrane teme.

Jedno popodne, umjesto projekata, manje iskusni učenici okušali su se u već tradicionalnom ekipnom natjecanju "reli", a oni iskusniji imali su priliku rješavati ELMO, natjecanje koje su organizirali i sastavili mentori Borna Šimić i Ivan Novak, i doživjeti kako izgleda ozbiljnije matematičko natjecanje.

Nakon projekata slijedi kratak odmor, a zatim večera nakon koje se odvijaju raznovrsne aktivnosti. Ove godine organizirali smo kviz općeg znanja i dva popularno - znanstvena predavanja koja ugošćuju razne uspješne matematičare i bivše natjecatelje nudeći tako otvaranje vidika glede mogućnosti primjene matematike u raznim karijerama i zanimanjima.

Kroz kamp smo organizirali turnire u beli i trešeti te karaoke. Također, u domu na raspolaganju imamo stol za stolni tenis, a pokraj doma igralište za nogomet i košarku. Nakon organiziranih i zajedničkih aktivnosti polaznici imaju slobodno vrijeme tokom kojeg se mogu družiti međusobno, igrati nogomet, košarku, stolni tenis i društvene igre, sudjelovati u obilasku Zadra u pratnji mentora i sl.

2.5 Popis mentora

Tea Arvaj	Luka Kraljević	Nikola Sole
Dorotea Bošnjak	Andrija Mandić	Leon Starešinić
Petra Brčić	Juraj Marušić	Nikola Šalgaj
Ivan Čulin	Petar Nizić-Nikolac (typesetting)	Borna Šimić
Patricija Dovijanić	Ivan Novak	Daniel Širola
Vinko Dragušica	Petar Orlić	Andrija Tomorad
Mateo Dujić	Daniel Paleka	Tadej Petar Tukara
Lana Frkin	Mate Peroš	Ilja Uzelac Bujišić
Matej Ivaniček	Josip Pupiće (potpredsjednik udruge)	Katja Varjačić
Krunoslav Ivanović (typesetting)	Marko Prološćić	Vlatka Vazdar
Kristin Kokan	Lucija Relić (predsjednik udruge)	Borna Vukorepa
Ema Kompar	Navid Safaei	Nena Vukšić
	Ivan Sinčić	

2.6 O predavanjima

Predavanja su glavni dio kampa i u pravilu traju po četiri sata s pauzom od dvadesetak minuta u sredini. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u 10 skupina (označenim bojama) ovisno o njihovoj starosti te dosadašnjim postignućima.

Među grupama posebno se ističe crna grupa kojoj pripadaju sudionici seniorskih međunarodnih natjecanja. Predavanja za crnu grupu namijenjena su prvenstveno članovima hrvatske MEMO ekipe kojima je kamp zadnja priprema za natjecanje pa zbog toga imaju predavanja i prijedodne i poslijepodne, a osim predavanja imaju i simulacije. Izuzev crne grupe, sve ostale grupe imaju predavanja isključivo prijedodne.

Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja pripremljeni su i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

2.7 Raspored aktivnosti

	Grupa	Nedjelja 18.	Ponedjeljak 19.	Utorak 20.	Srijeda 21.	Četvrtak 22.	Petak 23.
UJUTRO	Smeđa	PROJEKTI	Logika i dokazi Lana Frkin	Znamenke Patricija Dovijanić	Određivanje kuteva Andrija Tomorad	Jednadžbe Vinko Dragušica	Uvod u prebrojavanja Daniel Širola
	Crvena		Dirichletov princip Nena Vuksić	Prosti brojevi i kanonski zapis Matej Ivaniček	Površine Nikola Sole	Faktorizacije Nena Vuksić	Uvod u invarijante Andrija Tomorad
	Narančasta		Uvod u princip ekstrema Mate Peroš	Euklidov alg. + Kvadratni ostaci Vlatka Vazdar	Karakteristične točke u trokutu Tadej P. Tukara	Uvod u nejednakosti Ilja Uzelac-Bujišić	Uvod u indukciju Dorothea Bošnjak
	Žuta		Invarijante i monovarijante Marko Prološić	Faktorizacije i djelitelji Ivan Čulin	Tetivni četverokuti Patricija Dovijanić	KAGH (osnovno) Tea Arvaj	Konstrukcija i dokaz Ema Kompar
	Zelena		Indukcija (osnovno) Kristin Kokan	Modularna aritmetika Nikola Šalgaj	Angle chasing Tea Arvaj	Uvod u nestand. algebru Daniel Širola	Prebrojavanja Lucija Relić
	Cijan		Dvostruka prebrojavanja Katja Varjačić	Mali Fermatov i Eulerov Lucija Relić	Upisana i pripisana kružnica Josip Pupić	CSB (osnovno) Mateo Dujčić	Ploče Juraj Marušić
	Plava		Indukcija (napredno) Nikola Šalgaj	Diofantske jednadžbe Ivan Sinčić	Fantomiranje Katja Varjačić	KAGH i CSB (napredno) Andrija Mandić	Teorija igara Petra Brčić
	Ljubičasta		Princip ekstrema Andrija Mandić	Kineski teorem o ostacima Luka Kraljević	Kolinearnost i kompunktalnost Luka Kraljević	Uvod u funkcijske jednadžbe Krunoslav Ivanović	Posebna bojanja i invarijante Mate Peroš
	Magenta		Indukcija (turbo) Josip Pupić	Nezgrapna teorija brojeva Ivan Novak	Homotetija i spiralna sličnost Krunoslav Ivanović	Kombinatorna algebra Ivan Novak	Kombinatorna geometrija Borna Šimić
	Crna	Pojedin. simulacija / PROJEKTI MEMO men. / ostali	Algoritmi i procesi Leon Starešinić	Orderi Navid Safaei	Geometrije iz ruske zbirčice Petar Orlić	Polinomi Navid Safaei	Teorija grafova Leon Starešinić
POPODNE	Sve grupe osim crne	PROJEKTI	PROJEKTI	Slobodno	RELI / ELMO	PROJEKTI	PROJEKTI
	Crna	Funkcijske jednadžbe Petar Orlić	Bashanje Tadej P. Tukara		Ekipna simulacija MEMO mentori	TB nizovi Petar Nizić-Nikolac	Komentiranje simulacija MEMO mentori
VEČER	Svi	Slobodno	PZ predavanje Navid Safaei	Pub kviz B. Vukorepa i PNN	Obilazak Zadra	PZ predavanje Borna Vukorepa	Prezentacije

Poglavlje 3

Zadaci s predavanja

3.1 Zadaci za smeđu grupu

3.1.1 C1: Logika i dokazi - Lana Frkin

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Logika je osnovan alat za rješavanje svih matematičkih zadataka. Logički zadaci su takvi zadaci za koje nije potrebno puno predznanja iz raznih matematičkih područja da se rješe, već je dovoljno osnovno znanje i logičko razmišljanje. Čisto logički zadaci se uglavnom javljaju na nekim grupnim natjecanjima iz matematike u osnovnoj školi i natjecanjima poput Klokana, dok je za više razine natjecanja (županijska i državna) potrebno kombinirati logičko razmišljanje sa nekim osnovnim matematičkim pojmovima.

Dokazi su zapravo najbitniji dio matematike, a u ovom predavanju tek uvodimo koncept dokazivanja i objašnjavamo neke osnovne načine kako se to radi. Redom: dokazivanje samo po sebi, dokaz protuprimjerom i dokaz po kontrapoziciji (postoji i indukcija, no to nije u sklopu ovog predavanja). Reći ćemo što uopće znači dokazati nešto, kako to dokazati, te kako znati da smo dokazali.

Logika

1. U sobi se nalazi nekoliko ljudi koji znaju bar jedan od tri jezika. Šestorica od njih znaju engleski, šestorica njemački, sedmorica francuski, četvorica znaju engleski i njemački, trojica znaju njemački i francuski, dvojica francuski i engleski, a jedan sva tri spomenuta jezika. Koliko ljudi ima u sobi?
2. Boca i čaša zajedno mogu primiti tekućine koliko i posuda. Boca može primiti koliko čaša i vrč. Tri vrča primaju koliko i dvije posude. Koliko čaša može primiti jedan vrč?
3. Jedan od mjeseci u godini ima 5 ponedjeljaka, 5 utoraka i 5 srijeda. Prethodni mjesec ima samo 4 nedjelje. Ima li sljedeći mjesec: točno 4 petka, točno 4 subote, 5 nedjelja ili 5 ponedjeljka?
4. Zrakoplov je bez slijetanja letio iz grada A u grad B brzinom od 360 km na sat, a u povratku je iz B u A letio brzinom od 400 km na sat. Za povratak je utrošio pola sata manje. Kolika je udaljenost između grada A i grada B?
5. Brod je iz luke isplovio pravocrtno na sjever brzinom od 36 km/h. Nakon sat vremena brod se okrenuo prema istoku i pravocrtno nastavio ploviti dvostruko većom brzinom. Nakon što je prešao isti put kao od luke do prvog skretanja, brod se vratio na staru putanju prema sjeveru. Ne mijenjajući brzinu plovio je tako još 10 minuta. Koliko je u tom trenutku brod bio udaljen od luke i kojom je prosječnom brzinom plovio do tog mjesta?
6. Rano ujutro Ana je automobilom krenula iz mjesta A u mjesto B, a Branka motociklom u isto vrijeme iz mjesta B u A, svaka svojom stalnom brzinom. Susrele su se točno u podne i nastavile voziti bez zaustavljanja. Ana je u mjesto B stigla u 16 sati, a Branka u mjesto A u 21 sat. U koliko su sati krenule na put?

7. Zorica se upravo probudila i sanjivo protrljala oči. Uočila je da je tek prošlo 5 sati i da su se kazaljke na njenoj uri poklopile. U koliko se sati probudila Zorica? Točno vrijeme napiši u satima, minutama i sekundama.
8. Imamo na raspolaganju tri legure nastale stapanjem bakra i cinka. U jednoj su leguri bakar i cink u omjeru 2:1, u drugoj 3:2, a u trećoj 5:3. Od te tri legure načinili smo jednu novu leguru mase 15 kg, u kojoj je omjer bakra i cinka 19:11. Koliku masu ima svaka od početne tri legure ako je masa druge legure 2.5 puta veća od mase treće legure?
9. Jedan traktor može sam preorati neku njivu za 7 sati, a drugi traktor za 5 sati. Ako bi oba traktora zajedno orala tu njivu, drugi bi traktor preorao sedam hektara više od prvog traktora. Koliko hektara ima ta njiva?
10. Bazen se puni vodom s 3 cijevi. Ako ga pune samo prva i druga cijev, bazen se napuni za 20 minuta, ako ga pune druga i treća cijev, bazen se napuni za 15 minuta, a ako ga pune prva i treća cijev, bazen se napuni za 12 minuta. Za koliko se vremena napuni bazen ako se puni sa sve 3 cijevi?

Dokazi

11. (a) Dokaži da je zbroj parnog i neparnog broja uvijek neparan broj.
(b) Dokaži da je razlika dva neparna broja uvijek paran broj.
(c) Dokaži da je umnožak dva parna broja uvijek paran broj.
(d) Dokaži da je umnožak dva neparna broja uvijek neparan broj.
(e) Dokaži da je umnožak parnog i neparnog broja uvijek paran broj.
12. Dokaži da je peteroznamenasti broj djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4.
13. Dokaži da je četveroznamenasti broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
14. Dokaži da ne vrijedi: $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.
15. Dokaži da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

3.1.2 N1: Znamenke - Patricija Dovijanić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Budući da su jako česti na natjecanjima još od nižih razreda, sigurno ste se već susreli sa zadacima u kojima je bilo potrebno baratati znamenkama broja, primjerice, odrediti nepoznate znamenke, odrediti brojeve čije znamenke zadovoljavaju određene uvjete, i slično. No, koliko god takvi zadaci bili česti i raznoliki, u gotovo svima pomoći će vam bar jedna od sljedećih ideja:

- koristiti pravila o djeljivosti, jer njih već znamo povezati sa znamenkama
Ponavljjanje: Navedite sva pravila djeljivosti kojih se sjećate!
- promatrati djeljivost lijeve i desne strane jednakosti s istim brojem (ako je s njim djeljiva jedna strana jednakosti, mora biti i druga)
- promatrati ponavljaju li se završne znamenke nekih potencija (tada kažemo da se *periodički* ponavljaju, a potenciranje ćemo uskoro objasniti)
- zapisati brojeve u obliku $\overline{a_1a_2...a_n}$, jer tako svodimo zadatak na rješavanje sustava
- baviti se raznim slučajevima, jer nam činjenica da su znamenke cijeli brojevi od 0 do 9 (ako smo u sustavu s bazom 10) omogućava jednostavnu podjelu na slučajeve.

Koristit ćemo neke dijelove gradiva koji će nekima od vas, pogotovo sedmašima, biti novi. Ne brinite, brzo ćete pohvatati. Radi se o potenciranju i faktorijelima:

- **Potenciranje:** a^n je broj a pomnožen sa samim sobom n puta, tj. $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$. Broj a zove se baza, a n eksponent. Čitamo kao "a na n-tu potenciju" ili najčešće samo "a na n-tu". Tako je npr. $3^2 = 9$, $10^3 = 1000$, $2^{10} = 1024$, itd. Druge potencije često nazivamo kvadratima, a treće kubovima (razmislite zašto). Slijedi par osnovnih pravila potenciranja koja će nam biti više nego dovoljna za današnje predavanje:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^1 = a$, za svaki a
5. $1^n = 1$, za svaki n
6. $a^0 = 1$, za svaki a

Oprez! Npr. $2^3 = 8 \neq 2 \cdot 3 = 6$.

- **Faktorijeli:** $n!$ čitamo kao "n faktorijela", a jednako je umnošku svih prirodnih brojeva do n , tj. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Tako je npr. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 120$, itd. Također vrijedi $0! = 1$.

Lakši zadaci

1. Ako sve prirodne brojeve redom pišemo jedan pored drugog, koja će se znamenka naći na 2019. mjestu? Kako biste sličnim postupkom našli 2020. znamenku?
2. Dokažite da je broj $1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998}$ djeljiv s 10.
3. Koja je znamenka jedinica broja $44^{91} \cdot 73^{37}$?
4. Koja je posljednja znamenka umnoška $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99$?
5. Koji je ostatak pri dijeljenju broja $3^1 + 3^2 + \dots + 3^{101}$ s 10?
6. Koja je posljednja znamenka broja $1! + 2! + 3! + \dots + 25!$?

7. Odredite zadnje tri znamenke broja $2^{2015} - 2^{2013} + 2^{2010}$.
8. Lucija je morala pomnožiti 78 s dvoznamenkastim brojem kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. Zbunivši se, Lucija je zamijenila znamenke drugog faktora i dobila produkt koji je za 2808 manji od traženog. Pomozite Luciji i otkrijte s kojim je brojem morala pomnožiti broj 78.
9. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od umnoška svojih znamenaka.
10. Koje sve vrijednosti mogu poprimiti znamenke a i b tako da zbroj brojeva $\overline{29a8}$ i $\overline{342b}$ bude djeljiv s 18?
11. Odredite broj $\overline{abcd}$ takav da vrijedi $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$, $a + b + c = 23$.

Teži zadaci

12. Borna i Ivan, nakon duge i uspješne karijere u badmintonu, po prvi puta sudjeluju na turniru kao gledatelji. Na putu prema sportskoj dvorani Borna je upitao Ivana za broj njegovog sjedala. Želeći smanjiti napetost zbog važnog turnira i zabaviti Borna, Ivan je zagonetno odgovorio: "Sve znamenke tog broja su različite. Ako zbrojiš svih šest dvoznamenkastih brojeva koji se mogu formirati od znamenki tog broja, tako da su svakom od tih dvoznamenkastih brojeva znamenke također različite, a zatim dobiveni zbroj podijeliš s dva, dobit ćeš upravo broj moga sjedala." Koji broj sjedala ima Ivan?
13. Odredite posljednju znamenku broja $(4 + 3)(4^2 + 3^2)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8) \cdot \dots \cdot (4^{100} + 3^{100})$.
14. Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?
15. S koliko nula završava broj $2016!$?
16. Ako su a i b prirodni brojevi, onda je $\overline{a.b}$ decimalni broj dobiven tako da iza broja a zapišemo decimalnu točku i nakon toga broj b . Na primjer, ako je $a = 20$ i $b = 17$, onda je $b = 20.17$ i $\overline{a.b} = 17.2$. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $\overline{a.b} \cdot \overline{b.a} = 13$.
17. Nena je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.
18. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji imaju točno tri jednake znamenke? Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.
19. Tea je čekajući u redu za ulaznice za turnir u badmintonu kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999. Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Tea takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

3.1.3 G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Konačno geometrija... Evo za početak nekoliko uputa koje vrijede za gotovo svaki geometrijski zadatak, pogotovo osnovnoškolske. Ako to već radite, odlično.

1. Nacrtaj urednu skicu s priborom, može i više njih ako je neka točka nasumično odabrana. To ne daje samo više prostora za označavanje elemenata skice, nego i mogućnost za uočiti i zatim dokazati neku tvrdnju koja je korak prema rješenju (npr. jednakost dužina/kutova, paralelnost pravaca, kolinearnost točaka...).
2. Uvijek odredi sve kutove koje možeš (ako nema poznatih brojeva, onda algebarski, tzv. angle-chasing), To, ako nije ono što se traži, često vodi nečim složenijem (npr. sukladnost, sličnost, tetivnost...).
3. Pazi na to da iskoristiš svaki uvjet zadatka.
4. Nekad ako se zapne, dobro je i krenuti od kraja, tj. od tvrdnje zadatka da se pronađe korak koji nedostaje.

Alati za određivanje kutova: paralelni/okomiti kraci, zbroj kutova u n-terokutu, središnji i obodni kutovi, prepoznavanje jednakokračnih trokuta, prepoznavanje pravih kutova (obrat Pitagorinog poučka, Talesov poučak...), docrtavanje (dobro je ako se nadovezuje na više od jednog uvjeta zadatka, o tome više u težim zadacima)

Sukladnost

1. poučak SSS - Dokaži da se težišnica na osnovicu jednakokračnog trokuta nalazi na simetrali kuta.
2. poučak SKS - Dokaži da je svaki četverokutu u kojem se dijagonale raspolavljaju paralelogram.
3. poučak KSK - Dokaži da u trokutu u kojem su dva kuta jednaka, njihove nasuprotne stranice su jednake.
4. poučak SSK - Zadana je kružnica, točka T izvan nje i dvije tangente na kružnicu iz T. Dokaži da su dirališta jednako udaljena od T.

BONUS PITANJE: Kako dokazati poučke o sukladnosti?

Sličnost - poučak KK, poučak SKS, poučak SSS

Lakši zadaci

1. Zadan je pravilni mnogokut $A_1A_2A_3 \dots A_n$ kome je vanjski kut 9 puta manji od unutarnjeg kuta. Izračunaj veličinu kuta između dijagonala A_1A_3 i A_1A_4 .
2. Neka je dužina AD promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine AC i BD sijeku unutar kružnice pod kutom od 60° . Ako je točka S središte kružnice, dokaži da je trokut $\triangle BCS$ jednakokraničan.
3. U jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ visina na osnovicu AB i visina na krak BC sijeku se u točki E tako da je $|CE| = |AB|$. Odredi kutove trokuta $\triangle ABC$.
4. U jednakokračnom trokutu $\triangle ABC$ simetrala kraka AC i simetrala kuta BAC sijeku se u točki D koja pripada kraku BC. Odredi veličinu kuta CDA.
5. Zadan je jednakokračni trokut $\triangle ABC$. Nad krakom AC nacrtan je kvadrat ACDE, a nad krakom BC jednakokraničan trokut $\triangle BFC$. Dijagonale kvadrata EC i AD sijeku se u točki S, a pravac AF siječe krak BC u točki G. Pravac SG siječe krak AC u točki H. Ako je $\angle DAF = 85^\circ$, kolika je veličina kuta $\angle AHS$?
6. Zadan je tupokutni trokut $\triangle ABC$ s tupim kutom u vrhu B. Simetrala vanjskog kuta pri vrhu C siječe pravac AB u točki D, a simetrala vanjskog kuta pri vrhu A siječe pravac BC u točki E. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako vrijedi $|AE| = |AC| = |CD|$.
7. U tupokutnom trokutu $\triangle ABC$ s tupim kutom u vrhu A, kut γ u vrhu C je dvostruko veći od kuta β . Pravac p, koji prolazi vrhom A i okomit je na pravac AB, siječe pravac BC u točki D. Pravac s, koji je usporedan s pravcem p, prolazi polovištem P stranice AB i siječe pravac BC u točki E. Dokaži da su dužine BE, ED i AC jednakih duljina.

8. Zadan je jednakostranični trokut $\triangle ABC$. Na produžetku stranice AB preko vrha B odabrana je točka D, a na produžetku stranice CB preko vrha B odabrana je točka E tako da je $|CD| = |DE|$. Dokaži da je $|AD| = |BE|$.
9. U trokutu $\triangle ABC$, gdje je kut $\angle BAC$ dvostruko veći od kuta $\angle ABC$, simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu BC u točki D, tako da je $|BD| = 5\text{ cm}$ i $|DC| = 4\text{ cm}$. Izračunaj opseg tog trokuta.
10. Zadana je kružnica k i njene tetive AB, BE, EC, BD. Ako je $AB \parallel EC$ i BE simetrala kuta $\angle ABD$, dokaži da je $|EC| = |BD|$.

Teži zadaci

11. Zadan je pravilan šesterokut ABCDEF kome je S središte opisane kružnice. Točka M polovište je dužine BS, a točka N polovište je dužine DE. Dokaži da je $\triangle NFM$ jednakostraničan.
12. Neka je D točka na stranici AC trokuta $\triangle ABC$ takva da pravac AB dira opisanu kružnicu trokuta $\triangle BCD$ u točki B i neka pritom vrijedi $|BD| = |CD|$. Dokaži da je pravac BD simetrala kuta CBA.
13. Zadan je trokut $\triangle ABC$ takav da je kut kod vrha B jednak 45° , a na stranici BC se nalazi točka D takva da je $|CD| = 2|BD|$, a kut $\angle ADB$ iznosi 120° . Odredi kutove trokuta $\triangle ABC$.
14. Neka su r i r' polumjeri opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ odnosno $\triangle A'B'C'$ i neka je $r \neq r'$. Ako je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s koeficijentom sličnosti $k = \frac{|AB|}{|A'B'|}$, onda je $\frac{r}{r'} = k$. Dokaži.
15. Neka je točka D sjecište stranice AB trokuta ABC i simetrale kuta trokuta u vrhu C. Kolike su veličine kutova trokuta $\triangle ABC$ ako se podudaraju središte upisane kružnice trokuta $\triangle ADC$ i središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$?
16. Zadan je trokut ABC i točke E i F redom na stranicama AC, AB. Poznati su sljedeći kutovi: $|\angle ACF| = 30^\circ$, $|\angle FCB| = 50^\circ$, $|\angle EBA| = 20^\circ$, $|\angle CBE| = 60^\circ$. Izračunaj veličinu kuta $\angle FEB$.
17. Zadana je kružnica sa središtem O i promjerom $|AB| = 4\text{ cm}$. Nacrta tri tangente te kružnice, dvije u točkama A i B, a treću u točki tako da joj odsječak CD između prve dvije tangente, bude dug 5 cm. Objasni i opiši postupak.

3.1.4 A1: Jednadžbe - Vinko Dragušica

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Jednadžba je matematički pojam koji izražava vezu između poznatih i nepoznatih veličina posredstvom znaka jednakosti koji izjednačava lijevu i desnu stranu jednadžbe. Mi ćemo u ovom predavanju obraditi samo dvije vrste jednadžbi, iako ih postoji mnogo više.

Naučit ćemo ponešto o kvadratnim i diofantskim jednadžbama. Glavni pojmovi koji bi trebali biti usvojeni su **vodeći koeficijent**, **linearni koeficijent**, **slobodni član**, **bikvadratna jednadžba** i **diskriminanta**. Sve ovo bit će onima koji nauče od velike pomoći u životu, natjecanjima i u daljnjem školovanju.

Također ćemo izvesti općenitu formulu za rješavanje kvadratnih jednadžbi i pokazati metodu faktorizacije za rješavanje kvadratnih jednadžbi.

Kvadratne jednadžbe

1. Izvedite općenitu formulu za rješenje x kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

2. Pronađite sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$41x^2 + 42 = 1 - 82x.$$

3. Pronađite sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$x^4 + 4 = 5x^2.$$

4. Riješite prethodni zadatak faktorizacijom.

Diofantske jednadžbe

5. Na koliko načina možemo kovanice od 5kn i 1kn složiti tako da njihov zbroj daje 40kn? (Ukupan broj kovanica nije ograničen.)
6. Odredite sve dvoznamenkaste prirodne brojeve n takve da je broj

$$\sqrt{\frac{n+36}{n-36}}$$

također prirodan broj.

7. Pronađite sve prirodne brojeve m i n takve da vrijedi:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

8. Odredite duljine bridova pravilne uspravne četverostrane prizme ako su one prirodni brojevi, a oplošje prizme je numerički jednako zbroju duljina svih bridova.

3.1.5 C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju baviti ćemo se upoznavanjem sa osnovnim metodama prebrojavanja i primjenom istih u kombinatornim zadacima na natjecanjima za osnovnu školu. Mnogo zadataka iz područja kombinatorike s kojima ste se već susreli, ali i s kojima ćete se u budućnosti sretati koriste metode prebrojavanja kao jednu od svojih glavnih ideja. Cilj ovih zadataka jest primjena tih ideja. Prije svega par koraka, odnosno pitanja koje možete sebi postaviti kako bi lakše riješili kombinatorni zadatak:

1. Što želim prebrojati?
2. Koja svojstva ima to što želim brojati, ima li neko pravilo pojavljivanja/ponavljanja?
3. Ako ne mogu izbrojati ono što tražim, možda mogu prebrojati sve ono što me "ne zanima", pa oduzeti od ukupnog broja predmeta.
4. Mogu probati brojati male primjere "na prste", možda uočim neko pravilo!

Osnovni zadatci korisni u daljnjem rješavanju

1. Koliko ima brojeva djeljivih sa 7, manjih od 100?
2. Koliko ima brojeva djeljivih sa 3 ili s 5, manjih od 100?
3. Koliko ima brojeva koji nisu djeljivi niti s 5 niti sa 7, a manji su od 100?
4. Koliko dijagonala ima sedmerokut?
5. Koliko dužina ima između vrhova osmerokuta?

Lakši zadatci

6. Lucija ima crvenu, plavu i zelenu majicu, te ima traperice s rupama na koljenima i traperice bez rupa. Na koliko načina Lucija može odabrati odjevnu kombinaciju, ako oblači točno jednu majicu i točno jedne traperice?
7. Marin slaže sendvič za popodnevnu marendu. U hladnjaku majka mu je ostavila 2 različita peciva, 4 vrste sira, te 3 različite šunke. Na koliko načina Marin može složiti svoju marendu, ako je sendvič jelo u kojemu se između dvije polovice peciva nalazi točno jedna vrsta sira i točno jedna vrsta šunke?
8. Kraljević na bijelom konju kreće osloboditi princezu koja će mu za nagradu zadati zadatak iz geometrije. Kraljevićeva oprema sastoji se od po jednog štita, mača, ravnala i šestara. Kraljević na raspolaganju ima štit sa crvenim i štit sa plavim grbom, pozlaćeni, posrebreni i brončani mač, te drveno i plastično ravnalo. Šestar nažalost nema, pa će posuditi šestar od nekoga od vas. Na koliko načina opremljen Kraljević na bijelom konju može ići spasiti princezu?
9. Krunoslav se nalazi na matematičkom natjecanju. Pred sobom vidi 5 zadataka. Pošto su Krunoslavu svi zadatci lagani svejedno mu je kojim redoslijedom će ih rješavati. Na koliko načina Krunoslav može odabrati redoslijed rješavanja zadataka.
10. Andrija telefonom poziva prijatelje na druženje. Planira pozvati šestoricu prijatelja. Na koliko načina on može odabrati redoslijed kojim će nazvati prijatelje?

Teži zadaci

11. Marin je zaključio da je jako gladan, te je odustao od ideje da za marendu jede jelo po imenu "sendvič", koje ima između dvije polovice peciva točno jednu vrstu šunke i jednu vrstu sira, te se odlučio za varijantu takozvanog "područnog sendviča" (ime dolazi od "Što god dođe pod ruku."). U "područni sendvič" može doći bilo koliko vrsti sira i šunke ili bilo koje namirnice, između dvije kriške istog peciva.
 - a) Na koliko načina Marin može od pronađenih namirnica složiti područni sendvič?
 - b) Marin se dao u detaljniju potragu i pronašao je još tri vrste salate i pet različitih teglica kiselih krastavaca. Na koliko načina Marin može spremiti "područni sendvič" sa tim novim namirnicama koje je pronašao i svim koje je već imao?
12. Luka se igra sa špilom za belu. Odlučio je izvući bilo koje 3 karte iz špila od 32 karte. Na koliko načina on to može učiniti?
13. Na kampu se u učioni nalazi 12 mladih matematičara. Svatko od njih pošalje jednu poruku točno šestorici svojih prijatelja. Koji je najmanji mogući broj parova učenika koji su poslali poruku jedan drugome?
14. Na proslavu mature stigli su bivši učenici jednog razreda. Svi su se muškarci međusobno rukovali, dame su se međusobno poljubile (jedna drugu u obraz), a svaki je muškarac jedanput poljubio svaku damu u ruku. Koliko je osoba stiglo na večeru ako je ukupno bilo 288 poljubaca i 78 rukovanja?
15. U donjem lijevom kutu ploče koja ima četiri retka i osam stupaca nalazi se figurica koja se može kretati ili jedno polje prema gore, ili jedno polje u desno.
 - a) Na koliko načina ta figurica može doći do gornjeg desnog polja?
 - b) Na koliko načina ta figurica može doći do gornjeg desnog polja ako prolazi kroz polje koje se nalazi u drugom retku i šestom stupcu?
 - c) Na koliko načina ta figurica može doći do gornjeg desnog polja, tako da ne prođe kroz polje koje se nalazi u trećem retku i četvrtom stupcu?

3.2 Zadaci za crvenu grupu

3.2.1 C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Dirichletov princip je pravilo koje kaže da ako $nk + 1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k + 1$ kuglica.

Dokaz Pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, a ima ih $nk + 1$ pa dolazimo do kontradikcije.

Ovu naizgled očitu tvrdnju (poznatu i kao princip kutija, princip golubinjaka, problem zečeva i kaveza i sl.) prvi je formalizirao njemački matematičar Johann Dirichlet 1834. godine. Često se javlja na državnim i županijskim natjecanjima. Na svu sreću već iz teksta zadatka može se naslutiti da je nužna primjena Dirichletova principa. Na to upućuju riječi kao što su *barem*, *najmanje*, *postoji* i dr. što ćemo vidjeti i u sljedećim primjerima.

Primjer 1. Dokažite da u skupini od 5 ljudi postoje barem 2 osobe koje su rođene u isto godišnje doba.

Primjer 2. Dokažite da u grupi od 37 ljudi postoje barem 4 osobe istog horoskopskog znaka.

Primjer 3. U ladici je 15 pari čarapa. Bez gledanja izvlačimo po 1 čarapu. Koliko čarapa moramo izvaditi iz ladice da bismo bili sigurni da imamo barem jedan par?

Lakši zadaci

1. U kutiji s pikulama 7 ih je zelene, 4 plave i 3 crvene boje. Koliko pikula, bez gledanja naravno, moramo izvaditi iz kutije da bismo bili sigurni da smo izvukli bar jednu crvenu?
2. U učionici ima 15 računala, a u razredu ima 35 učenika. Dokažite da postoji računalo za kojim će sjediti barem troje učenika.
3. Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju.
Napomena: Sva poznanstva su uzajamna.
4. Između 6 otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.
5. U pravokutnom koordinatnom sustavu odabrano je 5 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da među njima postoje dvije takve da polovište dužine koja ih spaja ima cjelobrojne koordinate.
6. Otvorenje neke izložbe posjetilo je točno 50 ljudi. Dokažite da među njima postoje bar dvije osobe koje imaju isti broj poznanika.
7. Dano je 20 prirodnih brojeva. Dokažite da se između njih mogu odabrati 2 broja čija je razlika djeljiva s 19.
8. Dokaži da u $n + 1$ brojeva uvijek postoje 2 čija je razlika djeljiva s n .
9. U svako polje 5×5 tablice upišemo jedan od brojeva -1, 0, 1 i izračunamo zbrojeve po retcima, stupcima, i dvije glavne dijagonale. Dokažite da će uvijek dvije od tih suma biti jednake.
10. Matko je na ploči napisao 21 različit prirodan broj od 1 do 100, uključivo. Dokažite da među njima postoje dva para brojeva čiji je zbroj isti.
11. Dokaži da među bilo kojih 7 kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva s 10.
12. Dokaži da među bilo koja tri cijela broja možemo odabrati dva tako da je $a^3b - ab^3$ djeljivo s 10.
13. Dano je 27 točaka raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Svaka točka obojena je crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su vrhovi iste boje.

Teži zadaci

14. Dokaži da postoji broj oblika $111 \dots 11$ koji je djeljiv sa 7777.
15. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji njegov višekratnik kojem su jedine znamenke nule i jedinice.
16. Dijete svaki dan popije bar 1 bocu mlijeka. Tijekom 365 dana popilo je 700 boca mlijeka. Dokaži da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima je dijete ukupno popilo 29 boca mlijeka.
17. Trgovac je u 100 uzastopnih dana prodao ukupno 150 auta, i svaki dan prodao je bar 1 auto. Dokaži da za svaki prirodan broj n od 1 do 49 uključivo postoji nekoliko uzastopnih dana tijekom kojih je trgovac prodao točno n auta.
18. Unutar kvadrata duljine stranice 1 nalazi se pet obojanih točaka. Dokažite da postoje 2 od tih 5 točaka takve da je udaljenost među njima manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
19. Unutar kvadrata stranice 1 nasumice je smješteno 9 točaka. Dokaži da postoje 3 točke od danih 9 koje su sadržane u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.
20. Unutar kvadrata stranice 1 nalazi se 110 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ u kojem se nalaze 4 točke.
21. Unutar jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2 označimo 5 točaka. Dokaži da je udaljenost neke 2 točke manja ili jednaka 1.
22. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 3 nalazi se 20 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{3}{5}$ koji prekriva bar 3 točke.
23. Sedam točaka je smješteno unutar pravilnog šesterokuta stranice duljine 1. Dokažite da su najmanje dvije točke na udaljenosti najviše 1.
24. Svaka točka ravnine obojana je jednom od 3 boje. Dokažite da postoji dužina duljine 1 kojoj su krajevi iste boje.
25. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokažite da među njima postoje barem 2 broja koja nisu relativno prosta.
26. Dano je 9 različitih prirodnih brojeva. Možemo li odabrati 4 različita broja a, b, c, d tako da zbrojevi $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

3.2.2 N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Korisne definicije, činjenice, teoremi, leme i algoritmi za ovo predavanje:

1. **Definicija:** Kažemo da je prirodan broj p prost broj ako ima točno dva (različita) djelitelja (konkretno, to su 1 i p). U suprotnom kažemo da je broj složen.
2. **Fundamentalni teorem aritmetike:** Svaki prirodan broj n ima jedinstvenu faktorizaciju na proste faktore.
3. 2 je jedini paran prost broj, ostali su neparni
4. Svaki prost broj veći od 3 se može zapisati u obliku $6k - 1$ ili $6k + 1$
5. **Euklidova lema:** Neka je p prost broj i neka $p|ab$. Tada $p|a$ ili $p|b$.
6. **Euklidov teorem:** Skup prostih brojeva je beskonačan.
7. **Najveća zajednička mjera:** oznaka za zajedničku mjeru brojeva a i b je $M(a, b) = m$ gdje je m najvći broj sa svojstvom $m|a$ i $m|b$.
8. **Euklidov algoritam:** $M(a, b) = M(b, a)$, $M(a, b) = M(a, b - a)$, $M(a, 1) = 1$
9. **Relativno prosti brojevi:** brojevi a i b sa svojstvom $M(a, b) = 1$
10. Dva uzastopna broja su relativno prosta
11. **Mali Fermatov teorem:** Neka je p prost broj i a prirodan broj relativno prost sa p , tada vrijedi $p|a^{p-1} - 1$

Lakši zadaci

1. Dokaži da za svaki prost broj p veći od 3 vrijedi $24|p^2 - 1$
2. Ako su brojevi p , $p + 10$ i $p + 14$ prosti, odredite p .
3. Odredi sve proste brojeve p takve da je $14p^2 + 1$ također prost.
4. Dokaži da ima beskonačno mnogo prostih brojeva.
5. Pokažite da postoji proizvoljan broj uzastopnih složenih brojeva.

Teži zadaci

6. Ako su $8p - 1$ i p prosti brojevi dokaži da je $8p + 1$ složen.
7. Nađite sve prirodne brojeve n takve da su $3n - 4$, $4n - 5$, $5n - 3$ prosti brojevi.
8. Dokažite da je razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ neskrativ za svaki prirodan broj n .
9. Iz skupa $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ odabrano je $n + 1$ brojeva. Dokažite da među njima postoji dva broja koja su relativno prosta.
10. Prost broj p brojeva podijeljen je u dvije vreće. Ako prebacimo broj 170 iz jedne vreće u drugu, prosjek brojeva u obje vreće povećat će se za jedan. Ako je ukupna suma svih brojeva 2004, pronađite broj brojeva p .
11. Ako su p i $p^2 + 2$ prosti, dokaži da je onda i $p^3 + 4$ prost.
12. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^4 + 4$ prost broj.
13. Neka su $a, b > 7$ prosti brojevi. Pokažite da $240|a^4 - b^4$
14. Dokažite da je najveća zajednička mjera brojeva $2n^2 + 3$ i $n^2 + n + 1$, 1 ili 7.

3.2.3 G2: Površine - Nikola Sole

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju zadatci se rješavaju računanjem površina i njihovih odnosa. Mogu se rješavati lakši zadatci koje traže izračun površine raznih likova do onih težih koji traže dokaz teorema gdje nije očito kako se koriste površine. Sve što je potrebno znati jesu osnovne formule za računanje površina.

- Paralelogram: $P = av$
- Trokut: $P = \frac{av_a}{2}$
- Kružnica: $P = r^2\pi$

Lakši zadaci

1. Zadan je trapez $ABCD$ takav je duljina baze $|AB| = 15$, duljina baze $|CD| = 9$, a visine 4. Krakovi $\overline{DA}$ i $\overline{CB}$ su produženi i sijeku se u točki E . Ako su F i G polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ redom, kolika je površina trokuta FGE ?
2. Koliki je omjer površina kvadrata upisanog u kružnicu i jednakostraničnog trokuta opisanog toj istoj kružnici?
3. Dokažite da je omjer površina dvaju sličnih trokuta jednak kvadratu omjera odgovarajućih stranica.
4. Dokažite da težišnica trokuta dijeli taj trokut na dva trokuta jednakih površina.
5. Dokažite da težišnice trokuta dijele taj trokut na šest trokuta međusobno jednakih površina.
6. Dokažite da je površina trokuta jednaka umnošku poluopsega i radijusa upisane kružnice tog trokuta.

Teži zadaci

7. Neka su P, Q, R, S polovišta stranica konveksnog četverokuta $ABCD$. Na pravcu PQ odabrane su međusobno različite točke K, L , dok su na pravcu RS odabrane međusobno različite točke M, N . Dokažite da trokuti KLN i KLM imaju jednake površine.
8. Dan je paralelogram $ABCD$. Na stranici AB odabrana je neka točka E . Neka je $\overline{GF}$ dužina takva da je točka C na toj stranici te $DEFG$ čini paralelogram. Dokažite da $ABCD$ i $DEFG$ imaju jednaku površinu.
9. Kružnica upisana u pravokutni trokut dodiruje hipotenuzu u točki koja ju dijeli na dva dijela duljina m i n . Kolika je površina trokuta
10. Dokažite teorem o simetrali kuta.
11. Zadan je konveksni četverokut $ABCD$. Točke M i N su redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, točka K je sjecište pravaca AN i DM , a točka L je sjecište pravaca BN i CM . Dokažite da je $P(MKNL) = P(AKD) + P(BLC)$.

3.2.4 A2: Faktorizacije - Nena Vukšić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Faktorizacija je metoda kojom izraz sa jedne strane jednadžbe zapišemo u obliku umnoška a sa druge fiksni broj. Izrazito je korisna u rješavanju diofantskih jednadžbi, ali i u mnogim drugim tipovima zadataka kao sredstvo za pojednostavljivanje izraza.

- izlučivanjem zajedničkog faktora
- grupiranjem članova
- prikazivanjem pojedinih članova u obliku zbroja, tj. razlike
- upotrebom formula (kvadrat i kub binoma, razlika kvadrata i kubova, zbroj kubova...)

Korisne formule:

- Kvadrat zbroja: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Kvadrat razlike: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Razlika kubova: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- Zbroj kubova: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Lakši zadaci

1. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.
2. Ako je jedan od pribrojnika u izrazu $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ jednak nuli, tada je cijeli izraz jednak nuli. Dokažite.
3. (Identitet Sophie Germain) Faktorizirajte izraz $a^4 + 4b^4$
4. Faktorizirajte izraz $x^4 + x^2 + 1$
5. Dokazite da je za svaki prirodan broj n broj
 - a) $n^3 - n$
 - b) $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$
 djeljiv sa 6.
6. Nađite sve prirodne brojeve m i n takve da vrijedi: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$
7. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?
8. Odredite sve proste brojeve p , q i prirodan broj r tako da vrijedi: $p^2 + q^2 + pq = r^2$.
9. Odredite sve pravokutne trokute kojima su duljine stranica prirodni brojevi pritom je duljina jedne od njih jednaka 25.
10. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednadžbu.

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576$$
11. Nađite vrijednost razlomka $\frac{a+b}{a-b}$ ako je $2a^2 + 2b^2 = 5ab, 0 < a < b$

Teži zadaci

12. Faktorizirajte $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

13. Neka su x, y, z cijeli brojevi takvi da vrijedi $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz$. Dokažite da je izraz $x^3 + y^3 + z^3$ djeljiv sa $x + y + z + 6$
14. Rastavite izraz $(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3$ na faktore.
15. Postoje li brojevi a, b, c za koje je izraz $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}$ jednak nuli ako nijedan od pribrojnika nije jednak nuli i svi su pribrojnici definirani?
16. Neka su x, y pozitivni realni brojevi. Dokaži: $x^3 + 3xy(x+y) + y^3 \leq 1 \iff x^3 + 3xy + y^3 \leq 1$

3.2.5 C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Uvodni zadatci:

- 0.a) Na stolu je deset novčića u nizu. Pet ih je okrenuto na pismo, a ostali na glavu. Niz na početku izgleda ovako: PPGPGPGGGP. U potezu je dozvoljeno okrenuti dva susjedna novčića. Možemo li postići da nakon nekoliko poteza svi novčići budu okrenuti na istu stranu?
- 0.b) U ravlini je 2319 točaka. 2206 ih je crveno, a 113 ih je plavo. U potezu je dozvoljeno promijeniti boju dviju bilo kojih točaka iz crvene u plavu ili obratno. Možemo li postići da sve točke budu crvene?

Ovi zadatci nose istu ideju, ali prvi ima uvjete koji nas mogu usmjeriti prema tome da pokušamo izvoditi poteze i dobiti ono što se traži. U drugom zadatku je ideja očitija. Nakon jednog poteza broj crvenih točaka se može ili povećati za 2 ili smanjiti za 2 ili ostati jednak. To znači da broj crvenih točaka ostaje paran. Parnost broja pojedinih točaka je invarijanta.

INVARIJANTE = ona svojstva koja se nakon jednog poteza (ili skupa poteza) ne mijenjaju.

Tipični zadatci s invarijantama su "Možemo li određenim potezom nešto postići?" No gotovo nikad se ne isplati direktno primjenjivati te poteze. U takvim zadacima potrebno je promatrati neka svojstva npr. djeljivost nekim brojevima, parnost (tj. djeljivost s 2), ... ma nećemo sad spoilati... Uglavnom, potrebno je dobro analizirati početni slučaj i dobro analizirati konačni slučaj. Takvi zadaci bi se na natjecanju često nazivali binarni što znači da će većina natjecatelja dobiti ili nulu ili sve bodove. Problem često bude jedan ili dva manja povezana teška koraka nakon kojih se sve riješi samo. Riješimo još jedan uvodni zadatak:

- 0.c) Imamo šahovsku ploču 8cm x 8cm kojoj smo odrezali dva dijametralno suprotna polja (A1 i H8). Je li moguće opločiti tu ploču dominima dimenzija 2cm x 1cm?

Intuicija bi nas u ovom zadatku navela da prvo pretpostavimo da jest moguće, pokušavalo to učiniti te ne dobila ništa osim "Uh, možda se ipak ne može." Sve postaje lakše ako uočimo da jednim dominom uvijek pokrijemo jedno crno i jedno bijelo polje. Otuda dolazi ideja. Polja smo obojali na taj način ne samo zato što u zadatku piše da je to šahovska ploča, već zato što tako dijelimo ploču na dva skupa što nam daje mogućnost da nađemo invarijantu definiranu preko njih. U ovom slučaju to bi bila razlika broja crnih i bijelih polja koja trebamo pokriti. Na početku je 2, a na kraju bi trebala biti nula. Ovaj zadatak je zavravo demonstracija koraka koji često prethodi invarijantama, tj. **BOJANJA**. U sljedećim zadacima će najteži dio biti ili naći pravo bojanje ili naći invarijantu.

Lakši zadaci

- Na ploči su zapisani brojevi 41, 3, 22, 29, 15. Potez se sastoji od odabira tri broja x, y, z koja mijenjamo s $2x - y$, $2y - z$ i $2z - x$. Možemo li u konačno mnogo poteza dobiti sljedeće brojeve (ne nužno tim redoslijedom)?
 - 17, 12, 42, 9, 30
 - 23, 50, 7, 17, 15
- 6 novčića je složeno u krug redom 1kn, 2kn, 1kn, 2kn, 1kn, 1kn. U potezu možemo na dva susjedna staviti po 1 novčić od 1 kn. Možemo li postići da vrijednost svakog tornja od novčića bude jednaka?
- Zadana je ploča 10×10 . Možemo li ju opločiti oblicima 4×1 ?
- Isto kao prošli zadatak, samo s T-tetrominama.



T-tetromina

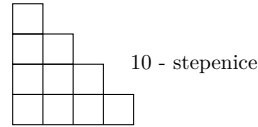
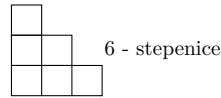
- Hercules se bori protiv hidre sa 100 glava. Može joj odsjeći neke glave, ali tada joj narastu nove. Ako joj odsječe 3 glave, naraste joj 12. Ako joj odsječe 5 glava, narastu joj 2 glave. Ako odsječe 9, nijedna ne naraste. Ako joj odsječe 13 glava, naraste 7 glava, a ako joj odsječe 11, naraste ih 17. Može li Hercules odsjeći sve hidrine glave?

6. Woody i Buzz su na ploču zapisali prvih n brojeva, zatim naizmjenice povlače poteze. Woody odabire dva broja, briše ih i piše njihov zbroj. Buzz odabire dva broja, briše ih i piše njihovu razliku. Woody pobjeđuje ako je zadnji broj paran, a Buzz ako je neparan. Za koje n Woody može pobijediti neovisno o Buzzovim potezima?
7. Na svakom polju 5×5 ploče je žeton. Možemo u potezu premijestiti dva bilo koja žetona u susjedno polje (polje sa zajedničkom stranicom). Želimo postići da svi žetoni budu na istom polju. Na kojim poljima mogu biti?
8. Na otoku živi p plavih, z zelenih i c crvenih kameleona. Kad se susretnu dva kameleona različite boje, oni mijenjaju boju u treću. Kakvi trebaju biti p, c i z da je moguće postići da nakon nekoliko susreta svi kameleoni budu istobojni.
9. Točno u podne sunčeva zraka, nakon odbijanja niza zrcala, dolazi u veliku mračnu sobu kroz malu rupu u jugozapadnom kutu. Soba je duga 49 m u smjeru sjever-jug i 78 m u smjeru istok-zapad. Zraka se normalno odbija od svakog zida. U koji će kut dospjeti zraka?
10. Dokaži da figura skakača u šahu ne može početi u kutu, običi svako polje ploče $m \times n$ točno jednom i vratiti se u početno polje ako su m i n neparni. BONUS ZADATAK - isto za 4×8 ploču (trebao bi biti među težim zadacima)
11. Ploča 8×8 je obojana šahovski. Možemo li potezima koji se sastoje od mijenjanja svih boja u istom retku ili stupcu postići da samo 1 polje na ploči bude crno?
12. Na svakom polju $n \times$ ploče je zapisan neki cijeli broj. U potezu odaberemo neke tri susjedne ćelije koje nisu sve u istom retku/stupcu (u obliku slova L, L-tromino, kakogod se to zove...) i povećamo brojeve za jedan. Broj n se naziva *savršen* ako ponavljanjem opisanog poteza možemo postići da su svi brojevi jednaki neovisno o početnom stanju. Je li broj
 - a) 6 *savršen*?
 - b) 2048 *savršen*?

Teži zadaci

13. Zadan je skup $\{2, 3, 4\}$. U jednom potezu biramo dva broja a, b i mijenjamo ih s $0.6a + 0.8b$, $0.8a - 0.6b$. Možemo li doći do sljedećih skupova?
 - a) $\{1, 3, 5\}$
 - b) $\{0, 2, 5\}$
14. Marin Getaldić je zapisao sve prirodne brojeve manje ili jednake 10^{2019} na ploču, zatim je brisao brojeve i pisao zbrojeve njihovih znamenaka. Sve dok nije dobio 10^{2019} jednoznamenkastih brojeva. Kojih brojeva ima najviše?
15. Na mnogokut u ravnini primjenjujemo sljedeću transformaciju: Odrežemo jedan njegov dio po dužini AB , i zaljepimo ga tako da se točka B odrezanog dijela poklapa s točkom A ostatka i obratno. (odrezani dio postaje zrcaljen na taj način). Možemo li od jednakostraničnog trokuta dobiti kvadrat? Koje pravilne mnogokute možemo tom transformacijom dobiti počevši od jednakostraničnog trokuta?
16. Imamo 5×10 zemljište na kojem je n polja obraslo u korov. Polja koja dijele stranicu s dvaju obraslih u korov, sama obrastu u korov za jedan dan. Nakon nekoliko dana znamo da je cijelo zemljište obraslo u korov. Odredi najmanju vrijednost broja n .
17. Na školskoj ploči zapisani su svi prirodni brojevi manji ili jednaki n . U potezu brišemo dva broja (a, b) i biramo proizvoljni k te pišemo $(a + k, b + k)$. Za koje n možemo postići da svi brojevi na ploči budu jednaki?
18. Ploča 6×6 je opločena dominima 2×1 . Dokaži da postoji pravac koji prolazi pločom kroz granice među poljima takav da ne siječe ni jednu domino pločicu.
19. Marin Getaldić je na ploču zapisao broj 2018^{2019} . Sada ponavlja sljedeći postupak dok ne dobije 10-znamenasti broj. Briše prvu znamenku i taj (jednoznamenasti) broj pribroji onome što ostane. Dokaži da su u dobivenom 10-znamenastom broju neke dvije znamenke iste.

20. U kvadratnoj mreži se nalazi 9 žetona smještenih u 3×3 kvadrat. U potezu je dozvoljeno jednim žetonom x "preskočiti" njemu susjedni žeton y , te maknuti žeton y s ploče i nikad ga više ne vratiti. Možemo li postići da ostane samo 1 žeton? BONUS ZADATAK - $n \times n$ ploča, za koje n je moguće? (IMO 1993.)
21. Ploči 10×10 smo uklonili dva polja iz istog retka. Dokaži da ju ne možemo opločiti stepenicama s 6 i 10 jediničnih kvadratića. Isti zadatak s 2018×2018 pločom je I-2 MEMO 2018.



22. Mike i Sully igraju igru sa šahovskom pločom i figurom skakača. Prvo Mike postavi skakača na bilo koje polje, zatim Sully ga pomakne kako se skakač inače kreće u šahu. Dalje igraju naizmjenice, svatko može pomaknuti skakača kako se inače kreće u šahu, ali ne na polje na kojem je skakač već bio. Igrač koji ne može odigrati potez gubi. Koji igrač može pobijediti neovisno o igri protivnika ?

3.3 Zadaci za narančastu grupu

3.3.1 C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Princip ekstrema je standardna ideja koju koristimo pri rješavanju matematičkih problema. Princip ekstrema koristimo kada želimo dokazati ne postojanje objekta sa određenim svojstvima, a ono što nam kaže je da odaberemo najveći ili najmanji takav objekt i pokažemo da bi promjenama na objektu dobili još veći, odnosno manji objekt. Iz ovoga zaključujemo da se pri korištenju principa ekstrema često prirodno pojavljuje kontradikcija kao način provođenja dokaza.

Prepoznati kada koristiti princip ekstrema je često vrlo teško, a neki indikatori su:

1. Skup vrijednosti koji možemo postići je ograničen.
2. Postoji monovarijanta.
3. Sve su vrijednosti različite.

Prije nego krenemo rješavati zadatke, podsjetiti ćemo se nekih dobro poznatih činjenica:

1. Svaki konačan neprazan skup prirodnih ili realnih brojeva ima (ne nužno jedinstveni) minimalan i maksimalan element.
2. Svaki neprazni podskup prirodnih brojeva ima najmanji element.
3. Beskonačni podskup realnih brojeva ne mora imati minimum i maksimum. Ako je skup ograničen odozgo onda mu najmanju gornju granicu zovemo supremum, a ako je ograničen odozdo, onda mu najveću donju granicu zovemo infimum.

Princip ekstrema jedan je od korisnijih alata svakog matematičara i može se koristiti pri rješavanju velikog spektra problema (od problema iz kombinatorne geometrije, teorije grafova pa sve do teorije brojeva). Princip ekstrema ovisi o očitoj, ali često korisnoj činjenici da svaki neprazan konačan uređen skup ima najmanji i najveći element.

Uvodni zadaci

1. 20 realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.
2. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.
3. U nekoj udruzi svaki član udruge ima točno tri neprijatelja (neprijateljstva su uzajamna). Dokaži da se udruge može podijeliti u dva skupa tako da svaki član udruge ima najviše jednog neprijatelja u domu čiji je član.

Lakši zadaci

4. Na beskonačnom pravcu označene su točke razmaknute po 1 cm. Svako od tih točaka pridružen je prirodan broj, a svaki je broj prosjek svojih susjeda. Dokažite da su svi brojevi na pravcu jednaki.
5. Riješite sustav u skupu $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (x+z)^3 = y \end{cases}$$

6. Na beskonačnoj šahovskoj ploči u svakom se polju nalazi jedan prirodan broj. Svaki je broj jednak aritmetičkoj sredini svojih susjeda. Dokažite da su svi brojevi na ploči jednaki.
7. Neka je G graf sa čvorovima crne ili bijele boje. Za bijeli čvor kažemo da je "dobar" ako ima više ili jednako crnih susjeda nego bijelih, a za crni čvor kažemo da je "dobar" ako ima više ili jednako bijelih susjeda nego crni. Za bojanje grafa kažemo da je "odlično" ako su svi čvorovi dobri. Dokaži da postoji "odlično" bojanje grafa, ako graf nema petlji.
8. Dokažite da svaki poliedar ima barem 2 stranice s jednakim brojem vrhova.
9. U $n \times n$ tablici, za $n > 1$ napisani su brojevi od 1 do n^2 . Dokažite da postoje 2 susjedna polja koja se razlikuju za barem $n + 1$. Susjednim poljima podrazumijevamo ona koja dijele barem 1 vrh.
10. Dano je n točaka u ravnini. Svake 3 točke u ravnini čine trokut površine ≤ 1 . Pokažite da svih n točaka leži u ravnini površine ≤ 4 .
11. U ravnini se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

Teži zadaci

12. Može li broj dobiven uzastopnim zapisivanjem brojeva od 1 do n ($n > 1$) biti palindrom?
13. Neka je dan konačan broj točaka u ravnini od kojih nisu sve kolinearne. Dokaži da postoji pravac koji prolazi kroz točno 2 od njih.
14. Dokaži da je nemoguće izrezati kocku u konačno mnogo manjih kocaka tako da nikoje dvije nisu iste veličine.

3.3.2 N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U natjecateljskim zadacima iz teorije brojeva najveći se broj argumenata odnosi na djeljivost određenog izraza nekim brojem, ili na ostatak pri dijeljenju tog izraza nekim brojem. U ovom predavanju naučit ćemo po jednu ideju za svaki od tih pristupa: Euklidov algoritam za traženje najvećeg zajedničkog djelitelja te promatranje ostataka koje potpuni kvadrati mogu davati s nekim brojevima. U uvodnim zadacima dokazat ćemo neke od navedenih tvrdnji i naučiti ih primjenjivati. U težim zadacima ideje navedene na predavanju bit će tek jedan dio rješenja.

Euklidov algoritam

Još u 6. razredu učili ste što je najveći zajednički djelitelj i kako ga pronaći. Standardni pristup je rastav brojeva na proste faktore i identificiranje onih zajedničkih. Kada to pokušamo primijeniti na izraze, lako možemo zaključiti da je, recimo $\gcd(a^2, a^3) = a^2$ ili $\gcd(ab, ac) = a \cdot \gcd(b, c)$. I dok su takvi zaključci također iznimno bitni, na taj način ne možemo izračunati recimo $\gcd(7a + 3, 5a + 4)$ ili reći nešto o $\gcd(a + b, 2a - b)$. Tu nam pomaže Euklidov algoritam, koji je zapravo tvrdnja navedena u prvom zadatku.

Cilj predavanja

Glavni ciljevi ovog predavanja su:

- Za dva dana izraza naučiti naći najveći zajednički djelitelj (ili barem saznati sve informacije koje se o njemu mogu saznati)
- Naučiti ideju promatranja ostataka (i za koje brojeve ih promatrati) u zadacima koji uključuju potpune kvadrate
- Usvojiti ideju promatranja najvećeg zajedničkog djelitelja izraza u diofantskim jednadžbama

Cilj predavanja **nije** riješiti sve zadatke. Za usvajanje predviđenog gradiva dovoljno je riješiti, odnosno razumjeti rješenja uvodnih primjera i nekoliko zadataka. Teži zadaci namijenjeni su za daljnje vježbanje (nakon kampa) ili izazov nakon što riješite sve "obične zadatke".

Napomena Rješenja zadataka nemojte izvikivati na glas, a ako vam je neki zadatak poznat, to se ne računa kao da ga znate riješiti.

Uvodni primjeri

1. Neka su a i b cijeli brojevi. Dokaži $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$ te $\gcd(a, b) = \gcd(a, b \bmod a)$
2. Pomoću Euklidovog algoritma odredi najveći zajednički djelitelj brojeva 6845 i 4477.
3. Dokaži da se razlomci $\frac{21n+4}{14n+3}$ i $\frac{12n+1}{30n+2}$ ne mogu skratiti ni za koji prirodan broj n .
4. Koje sve vrijednosti može poprimiti $\gcd(n - 1, 2n^2 + 5n + 6)$?
5. Dokaži $\gcd(k^2 - k + 1, k^2 + 3k + 3) = \gcd(2k + 1, k + 4)$ za bilo koji $k \geq 7$
6. Dokaži da potpuni kvadrati uvijek daju ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 3 ili 4. Koliko različitih ostataka daju kvadrati pri dijeljenju s nekim prostim brojem p ? Dokaži.
7. Dokaži da neparni potpuni kvadrati uvijek daju ostatak 1 pri dijeljenju s 8.
8. Postoji li prirodan broj x takav da je $x^2 - 31x + 34$ djeljiv s 37?

Zadaci

9. Dokaži da je za sve cijele brojeve x i y najveći zajednički djelitelj brojeva $13x + 4y$ i $29x + 9y$ jednak najvećem zajedničkom djelitelju brojeva x i y .

10. Brojevi u nizu 101, 104, 109, 116, ... dani su formulom $a_n = 100 + n^2$. Koja je maksimalna vrijednost najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju uzastopnih članova tog niza?
11. Izračunaj $\gcd(2002 + 2, 2002^2 + 2, 2002^3 + 2, \dots)$
12. Neka su a, m, n prirodni brojevi. Dokaži $\gcd(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\gcd(m, n)} - 1$
13. Neka je n prirodan broj. Odredite $\gcd(n! + 1, (n + 1)!)$. *Napomena* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
14. Dokaži da jednačbe $x^2 - 2y^2 = 10$ i $3x^4 - 2y^2 = 79$ nemaju rješenja u cijelim brojevima.
15. Neka su a, b, c, k prirodni brojevi $a, b, c \geq 3$ takvi da vrijedi $abc = k^2 + 1$. Dokaži da je barem jedan od brojeva $a - 1, b - 1, c - 1$ složen.
16. Neka je d prirodan broj koji nije jednak 2, 5 niti 13. Pokaži da u skupu $\{2, 5, 13, d\}$ postoje različiti a, b takvi da $ab - 1$ nije potpuni kvadrat.
17. Prirodni brojevi a, b i c su duljine stranice nekog pravokutnog trokuta. Dokažite da je abc djeljiv brojem 60.

Teži zadaci

18. Neka je $N = \overline{abcd}$ četveroznamenasti potpuni kvadrat takav da vrijedi $\overline{ab} = 3\overline{cd} + 1$ Odredite sve moguće vrijednosti N .
19. Odredi sve prirodne brojeve x i y takve da vrijedi

$$x(x^2 + 19) = y(y^2 - 10)$$

20. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da vrijedi

$$3 \cdot 5^m - 2 \cdot 6^n = 3$$

21. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi

$$(n^2 + 2)^a = (2n - 1)^b$$

22. Nađi sve prirodne brojeve $n > 1$ takve da je $2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = p^k$ za neki prost broj p i prirodan broj k .
Pomoć $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

23. Nađi sve $m, n \in \mathbb{N}$ i proste $p \geq 5$ koji zadovoljavaju:

$$m(4m^2 + m + 12) = 3(p^n - 1).$$

24. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$5m^3 = 27n^4 - 2n^2 + n$$

25. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$2^m = 7n^2 + 1$$

3.3.3 G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Mnogo se zadataka iz geometrije nakon manjih promjena svodi na neku od poznatih geometrijskih konstrukcija. Te se konstrukcije često baziraju na nekim točkama u trokutu koje su univerzalno definirane i nazivamo ih karakteristične točke trokuta. Na ovom predavanju bavit ćemo se nekim od tih točaka i njihovim svojstvima.

Osnovne činjenice

1. Dokaži da sve simetrale stranica prolaze istom točkom i da je ta točka središte opisane kružnice trokuta.
2. Dokaži da sve simetrale kuteva prolaze istom točkom i da je ta točka središte upisane kružnice trokuta.
3. Dokaži da pravci na kojima leže visine trokuta prolaze istom točkom.
4. Dokaži da sve težišnice prolaze istom točkom.

Zadaci

5. Dokažite da u šiljastokutnom trokutu ABC s ortocentrom H vrijedi $\angle ACO = \angle BCH$.
6. Neka su N_A , N_B i N_C nožišta visina trokuta ABC . Dokaži da je ortocentar trokuta ABC središte upisane kružnice $\triangle N_A N_B N_C$.
7. Neka je H nožište visine iz C šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC .
8. Neka je P presjek simetrale kuta $\angle BCA$ i simetrale stranice $\overline{AB}$, a I središte upisane kružnice $\triangle ABC$. Tada vrijedi $|AP| = |IP| = |BP|$.
9. Neka je I središte upisane kružnice te neka su E i F dirališta upisane kružnice sa stranicama AC i AB trokuta ABC redom. Neka je točka T presjek pravaca CI i EF . Dokažite da je $\angle BTC = 90^\circ$.

Teži zadaci

10. Dokažite da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta s ortocentrom leže na istoj kružnici. Ta se kružnica naziva **Feuerbachova kružnica** ili **kružnica devet točaka**.
11. Dokažite da je udaljenost vrha A od ortocentra trokuta ABC jednaka dvostrukoj udaljenosti središta opisane kružnice od stranice $\overline{BC}$.
12. Dokažite da ortocentar, težište i središte opisane kružnice trokuta leže na istom pravcu. Taj se pravac naziva **Eulerov pravac trokuta**.
13. Neka su D , E i F dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama BC , AC i AB redom. Dokaži da se pravci AD , BE i CF sijeku u jednoj točki.
14. Neka su A , B , C i D redom četiri različite točke na pravcu. Kružnice polumjera AC i BD sijeku se u X i Y . Pravac XY siječe BC u Z . Neka je P točka na pravcu XY različita od Z . Pravac CP siječe kružnicu s promjerom AC u C i M , a pravac BP siječe kružnicu s promjerom BD u B i N . Dokaži da su pravci AM , DN i XY konkurentni.

3.3.4 A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

Za sve pozitivne realne $a_1, \dots, a_n$ vrijedi da je

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunyakovskog

Za sve realne $a_1, \dots, a_n$ vrijedi da je

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Lakši zadaci

1. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

2. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$$

3. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+, ab \geq 1$

$$\left(a + 2b + \frac{2}{b+1}\right) \left(2a + b + \frac{2}{a+1}\right) \geq 16$$

5. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+, abc = 1$

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

6. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

7. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$$\frac{a^2 + bc}{a^2 + bc + 1} + \frac{b^2 + ac}{b^2 + ac + 1} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ab + 1} \leq 2$$

Teži zadaci

8. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $abc = 1$

$$\frac{a}{a+b^4+c^4} + \frac{b}{b+c^4+a^4} + \frac{c}{c+a^4+b^4} \leq 1$$

9. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{2a}{bc+a^2} + \frac{2b}{ac+b^2} + \frac{2c}{ab+c^2} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

10. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{ac+1}{(a+c)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} \geq 3$$

11. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a+b+c=4$

$$\frac{1}{2ab+ac+bc} + \frac{1}{ab+2ac+bc} + \frac{1}{ab+ac+2bc} \leq \frac{1}{abc}$$

12. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$$

13. Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ $a, b, c \geq 1$

$$\min \left(\frac{10a^2 - 5a + 1}{b^2 - 5b + 10}, \frac{10b^2 - 5b + 1}{c^2 - 5c + 10}, \frac{10c^2 - 5c + 1}{a^2 - 5a + 10} \right) \leq abc$$

14. Naći minimalnu vrijednost izraza S za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{abc}}$$

3.3.5 C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Treba dokazati da neka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n . U tu svrhu, prema principu matematičke indukcije, dovoljno je napraviti sljedeća tri koraka:

- (i) baza indukcije ($n = 1$): Pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,
- (ii) induktivna pretpostavka ($n = k$): Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj k ,
- (iii) korak indukcije ($n = k + 1$): Koristeći induktivnu pretpostavku treba pokazati da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Tada tvrdnja T_n vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjetite da u koraku možemo koristiti da tvrdnja T_n vrijedi za $1, 2, \dots, k$. U tom slučaju koristimo tzv. jaki princip matematičke indukcije.

Lagani zadaci

1. Dokaži matematičkom indukcijom da vrijedi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. Dokaži da je broj $2^{3n} - 7n - 1$ djeljiv s 49 za svaki prirodni broj n .
3. Dokaži da je broj $3^n - 2n^2 - 1$ djeljiv s 8 za svaki prirodni broj n .
4. Dokaži da je $2^n \geq n^2$ za sve prirodne brojeve $n \geq 4$.

Malo teži zadaci

5. Dokaži da je $2^{2^{n+2}} + 4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n .
6. Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki cijeli broj $n \geq 0$ broj

$$13^{n+2} + 14^{2n+1}$$

djeljiv sa 183.

7. Matematičkom indukcijom dokažite da je $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ paran prirodan broj za svaki prirodni broj n .
8. Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj

$$\underbrace{2 \dots 2}_{n \text{ puta}} - 3^n + 1$$

djeljiv brojem 7.

9. Neka je n prirodan broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1)$. Izračunaj $\frac{S_{n+1}}{(n+1)!}$.

10. Dokažite tzv. Bernoullijevu nejednakost:
Za svaki realan broj $x > -1$, $x \neq 0$, i za $n \in \mathbb{N}$, vrijedi:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

11. Matematičkom indukcijom dokažite $3^{2019} > 2^{2019} + 3 \cdot 2019$.

12. Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

13. Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

vrijedi za sve prirodne brojeve n .

14. Dokaži da n kružnica, od kojih nikoje tri ne prolaze istom točkom i svake dvije se sijeku u dvije različite točke, dijele ravninu na $n^2 - n + 2$ područja.
15. U ravnini je dano n pravaca od kojih nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Dokažite da oni dijele ravninu na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ dijelova.

3.4 Zadaci za žutu grupu

3.4.1 C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Invarijanta je, kao što ime govori, neko svojstvo koje se uopće ne mijenja u zadatku, na primjer zbroj nekih zadanih brojeva. Slično tome, monovarijanta je svojstvo koje se mijenja ali na vrlo predvidljiv način, najčešće kada neka varijabla isključivo pada ili raste. Zadaci u ovome dokumentu će se oslanjati na takva rješenja, dakle pokušajte promatrati zbroj svih brojeva, njihove ostatke pod nekim modulom, njihove kvadrate i tako dalje.

Lakši zadaci

1. Neka je n prirodan neparni broj. Brojevi od 1 do $2n$ su napisani na ploči. Janko odabire dva broja s ploče, briše ih i zapisuje njihovu razliku. Ponavlja to dok na ploči ne ostane jedan broj. Dokaži da je taj zadnji broj paran.
2. Zadana je šahovska ploča. U jednom potezu dozvoljeno je odabrati bilo koji redak, stupac ili kvadrat 2×2 te obrnuti boje svih polja u istome. Može li nakon nekog broja poteza ostati samo jedno crno polje?
3. U nekoj državi ne postoje dva para grada s jednakim međusobnim udaljenostima. Putnik počinje u gradu A odakle putuje u najdalji mogući grad, B. Iz grada B putuje u najdalji mogući grad C. Nakon toga nastavlja putovanje po istom principu. Dokaži da se putnik nikada neće vratiti u grad A.
4. Na određenom otoku ima 14 zelenih, 16 plavih i 23 crvenih kameleona. Isključivo kameleoni različitih boja se mogu pariti, čije će dijete biti treće boje. Nakon što se dijete rodi oba roditelja pojede sokol. Ako na kraju ostane samo jedan kameleon, koje će on biti boje?
5. Na određenom otoku ima 13 zelenih, 15 plavih i 17 crvenih kameleona. Isključivo kameleoni različitih boja se mogu pariti, nakon čega se rodi dvoje djece treće boje. Nakon što se djeca rode roditelje pojede sokol. Mogu li nakon nekog vremena svi kameleoni biti iste boje?

Zadaci

6. Zadan je set $\{3, 4, 12\}$. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati dva broja iz seta, nazovi ih a i b te ih zamijeniti sa $0.6a - 0.8b$ i $0.8a + 0.6b$. Može li se nakon konačnog broja koraka doći do seta $\{4, 6, 12\}$?
7. Svaka od n država je ili demokracija ili monarhija. Svake godine jedna od država može promijeniti svoj oblik vladavine ako ima više susjeda sa suprotnim oblikom. Dokaži da će nakon konačnog broja godina države prestati mijenjati vlast.
8. Svaki mentor u MNMu ima maksimalno 3 neprijatelja unutar udruge. Može li se MNM podijeliti u dvije grupe tako da svaki mentor ima maksimalno jednog neprijatelja u udruzi?
9. Na vrhovima šesterokuta zapisani su redom brojevi 1, 0, 1, 0, 0, 0. U svakom koraku odabiru se dva susjedna broja te se oba povećavaju za 1. Može li se postići da svi brojevi budu jednaki?
10. Djeca sjede u krugu. Svako dijete ima paran broj slatkiša. U svakom koraku svako dijete istovremeno da pola svojih slatkiša djetetu na desno. Ukoliko nakon toga neko dijete ima neparan broj slatkiša, njegov roditelj mu da još jedan. Dokaži da će nakon određenog broja koraka sva djeca imati jednak broj slatkiša.

Teži zadaci

11. U svakom polju 4×4 matrice stoji broj 1 osim u prvom retku drugog stupca gdje stoji -1 . U svakom koraku se mogu u bilo kojem stupcu retku i dijagonali (ne nužno najdužoj dijagonali, dakle moguće je odabrati samo jedan kut) promijeniti predznaci svim brojevima. Dokaži da će u matrici uvijek ostati barem jedna jedinica.
12. Broju 7^{1996} uklonimo prvu znamenku i zbrojimo ju preostalom broju. Ovaj postupak ponavljamo dok ne dobijemo desteroznamenasti broj. Dokaži da će taj broj imati barem dvije jednake znamenke.

13. Tablica s m redaka i n stupaca je popunjena cijelim brojevima. U svakom koraku je dozvoljeno svim brojevima nekog retka ili stupca promijeniti predznak. Dokaži da se može postići da je zbroj brojeva u bilo kojem retku ili stupcu pozitivan.
14. Svaki od brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je ili 1 ili -1 . Zadano je:

$$S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$$

Dokaži da je n djeljiv s 4.

15. Cijeli brojevi od 1 do n so poredani u bilo kojem redu. U jednom koraku dozvoljeno je zamijeniti dva susjedna broja. Dokaži da je nemoguće vratiti se u početnu poziciju nakon neparnog broja poteza.

3.4.2 N4: Faktorizacije i djelitelji - Ivan Čulin

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Na ovom predavanju rješavat ćemo zadatke vezanu uz djeljivost i faktorizaciju algebarskih izraza. Faktorizirati znači neki zbroj ili razliku napisati u obliku umnoška, što znači da pribrojnice odnosno članove trebamo napisati kao faktore. Za početak ponovimo neke osnovne algebarske izraze.

Osnovni algebarski izrazi

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Posljednje dvije formule možemo primjeniti $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots b^{n-1})$$

Faktorizacija algebarskih izraza je vrlo bitna jer se njome izrazi bitno mogu pojednostavniti. Kako sve možemo faktorizirati algebarske izraze?

- izlučivanjem zajedničkog faktora
- grupiranjem članova
- prikazivanjem pojedinih članova u obliku zbroja, tj. razlike
- upotrebom formula (kvadrat i kub binoma, razlika kvadrata i kubova, zbroj kubova . . .)

Vrlo često je potrebno faktorizirati kvadratne trinome, tj. izraze oblika $ax^2 + bx + c$, pri čemu su a , b , c neke konstante. Ukoliko je faktorizacija moguća, ona se provodi tako da srednji član prikažemo u obliku zbroja (razlike) dvaju izraza čiji je umnožak jednak umnošku prvog i posljednjeg člana trinoma. Novonastali članovi zatim se pogodno grupiraju i izluče se zajednički faktori.

Mali Fermatov teorem

Neka je p prost broj i $a \in \mathbb{N}$ takav da $p \nmid a$. Tada $p \mid a^{p-1} - 1$.

Lakši zadaci

1. Rastavite sljedeće izraze na faktore:
 - a) $x^5 - 5x^3 + 4x$
 - b) $(x^2 + 2x)^4 - (x^3 + 2x^2)^2 - (3x^2 + 6x)^2 + 9x^2$
2. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.
3. Dokažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) Ukoliko je razlika kvadrata dvaju prirodnih brojeva djeljiva s 2, onda je ona djeljiva i s 4
 - (b) Izrazi $n^3 - n$ i $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$ su djeljivi sa 6 za svaki prirodni broj n
4. Dokažite da je izraz $n^4 + 7(7 + 2n^2)$ djeljiv sa 64 za svaki neparni broj n .

5. Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3 - 2a^2 - 3a$. Dokažite da je broj N djeljiv s 540.

Teži zadaci

6. a) Ako su p i $8p - 1$ prosti brojevi onda je $8p + 1$ složen broj.
b) Ako su p i $8p^2 + 1$ prosti brojevi onda je $8p^2 - 1$ prost broj.
7. Dokažite da je za svaki prirodan broj n izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.
8. Neka je a cijeli broj relativno prost s 35. Dokažite da je broj $(a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1)$ djeljiv s 35.
9. U skupu prostih brojeva rješite jednadžbu $2p^3 - q^2 = 2(p + q)^2$.
10. Odredite sve proste brojeve p, q i prirodan broj r tako da vrijedi: $p^2 + q^2 + pq = r^2$.
11. Za koje proste brojeve p je i $2^p + p^2$ prost broj?
12. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost i da vrijedi $2^m p^2 + 1 = n^5$
13. Za prirodan broj m neka je $m?$ umnožak prvih m prostih brojeva. Odredite postoje li prirodni brojevi m i n takvi da je $m? = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)?$
14. Neka su x, y, z, a, b, c cijeli brojevi za koje vrijedi:
 $x^2 + y^2 = a^2$
 $x^2 + z^2 = b^2$
 $y^2 + z^2 = c^2$
Dokažite da je broj xyz djeljiv s:
a) 5
b) 55
15. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $5m^3 = n(27n^3 - 2n + 1)$

3.4.3 G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Znamo otprije da svakom trokutu možemo opisati kružnicu, no isto ne vrijedi i za četverokute. Četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut. Drugim riječima, tetivni četverokuti su konveksni četverokuti čija sva četiri vrha leže na istoj kružnici, tj. njihove stranice ujedno su tetive iste kružnice. Vrlo često pokaže se korisnim u zadacima prepoznati tetivne četverokute i koristiti njihova svojstva s kojima ćemo se danas upoznati. Prisjetimo se najprije nekih važnih teorema vezanih za kružnicu:

Teorem. (o obodnom i središnjem kutu) Središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta.

Teorem. Obodni kutovi nad istim lukom kružnice su jednaki. Obodni lukovi nad suprotnim lukovima su suplementarni.

Teorem. (Tales) Svaki obodni kut nad promjerom je pravi.

Vrijedi i obrat Talesovog teorema: ako je AB proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom AB .

Također, vrijede ove (vrlo) korisne tvrdnje:

1. Kut između tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.
2. Simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku se na opisanoj kružnici tog trokuta.
3. Polovišta stranica trokuta i nožišta visina trokuta leže na istoj kružnici. (Na toj kružnici još leže i polovišta dužina AH , BH i CH , gdje je H ortocentar trokuta ABC . Ta kružnica zove se Feuerbachova kružnica ili kružnica 9 točaka.).
4. Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.
5. Centralnosimetrične slike ortocentra s obzirom na polovišta stranica trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.

Na današnjem predavanju dokazat ćemo samo prvu, a za domaću zadaću (kad se vratite s kampa, naravno) pokušajte sami dokazati i preostale. Ako zapnete, dokazi su jako lijepo objašnjeni u obliku videa u sklopu MNM on-line predavanja *Tetivni četverokuti*, zadaci 4, 5, 6 i 7. Znam da nitko ne voli zadaće, ali zaista vam toplo savjetujem da ih proučite jer vam neće oduzeti puno vremena, a znaju se koristiti u zadacima.

Sada smo spremni krenuti s tetivnim četverokutima!

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne (dakle, ako vrijedi bilo koja od njih, tada vrijede i sve ostale):

- četverokut $ABCD$ je tetivan
- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
- $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$
- $\angle ABD = \angle ACD$
- $\angle ADB = \angle ACB$
- $\angle BAC = \angle BDC$
- $\angle CAD = \angle CBD$.

Za tetivne četverokute vrijedi i sljedeći poučak:

Teorem. (Ptolomejev poučak) U tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.

Sada ćemo zajedničkim snagama riješiti par uvodnih zadataka, a onda se bacamo na posao :)

1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su D i E nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tim redom. Dokažite da je četverokut $IECD$ tetivan.
2. Neka je S središte kružnice k , a $\overline{AB}$ jedan njen promjer. Neka su P i Q točke na istom luku AB . Označimo s M sjecište pravaca AP i BQ , te s N sjecište pravaca AQ i BP . Dokažite $MN \perp AB$.
Hint: Talesov teorem o obodnom kutu.
3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da je trokut ABD jednakostraničan. Dokažite da je $|AC| = |BC| + |CD|$.
Hint: Ptolomejev poučak.

Lakši zadaci

1. Dokažite prvu korisnu tvrdnju koju smo naveli u uvodu: neka je dan trokut ABC u ravnini i tangenta na njegovu opisanu kružnicu u točki B . Treba dokazati da je tada kut između tangente i tetive BC jednak obodnom kutu $\angle BAC$.
2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC , te neka je N nožište visine iz vrha A . Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.
3. Neka se simetrale kutova četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama E , F , G i H . Dokažite da je četverokut $EFGH$ tetivan.
4. Točke A , B , C , D i E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredite $\angle ABC + \angle CDE$.
5. Neka je D nožište visine iz vrha A trokuta ABC te neka su E i F nožišta iz D na stranice $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AC}$. Dokažite da je četverokut $BCFE$ tetivan.
6. Jednakokrani trokut ABC , $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k . Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD , i E točka na kružnici k_1 . Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E . Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G , dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

Teži zadaci

7. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine BC siječe dužinu AB u točki E . Kružnica koja prolazi točkom E , vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G . Dokažite da su pravci AD i FG međusobno okomiti.
8. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D . Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E . Dokažite da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici, tj. te točke su *koncikličke*.
9. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokažite da pravac TH prolazi polovištem dužine BC .
10. U trokutu ABC kut $\angle CAB = 50^\circ$ i $\angle ABC = 60^\circ$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D , a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30^\circ$. Izračunajte mjeru kuta $\angle CDE$.
11. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P , a pravac AC u točki Q . Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC . Dokažite da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.
12. Točka M dana je kao sjecište dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$, pri čemu je kut $\angle AMB$ šiljast. Neka je točka K izvan četverokuta $ABCD$ takva da je trokut BCK jednakokraničan s osnovicom $\overline{BC}$, i da vrijedi $\angle KBC + \angle AMB = 90^\circ$. Dokažite da su pravci KM i AD međusobno okomiti.
13. U trokutu ABC vrijedi $|AB| < |BC| = |CA|$. Točka M nalazi se na $\overline{AB}$ tako da je $|AM| = 2|BM|$. Neka je F polovište $\overline{BC}$, te H na $\overline{AF}$ tako da su MH i AF međusobno okomiti. Dokažite da je $\angle BHF = \angle ABC$.
14. U trokutu ABC , udaljenost vrha A od ortocentra H jednaka je udaljenosti vrha A od središta trokuta opisane kružnice O . Odredite veličinu kuta u vrhu A .

3.4.4 A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada su njihova kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina redom:

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \quad A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

i vrijedi $K \geq A \geq G \geq H$.

Jednakost između bilo koje dvije od njih se postiže samo u slučaju kada je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Lakši zadaci

1. Ako je $x + y + z = 6$, $x, y, z \geq 0$, dokažite da je onda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.
2. Dokažite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

3. Dokažite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

4. Dokažite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

5. Dokažite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

6. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \geq 6$$

7. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ vrijedi:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

8. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$ vrijedi:

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4$$

9. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, a + b + c \leq 3$ vrijedi:

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geq 2$$

10. Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4$$

odredi najveću moguću vrijednost izraza $x + y + z + w$.

Teži zadaci

11. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, abc = 1$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

12. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ vrijedi:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$$

13. Dokažite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:

$$\frac{3}{2} < \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < 9$$

14. Neka su $a, b, c > 0$. Dokažite sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \geq \frac{3}{a^3 + b^3 + c^3} \\ \text{b)} \quad & \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

15. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, abc = 1$ vrijedi:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

16. Dokažite da za sve $a, b, c > 0, a + b + c = 3$ vrijedi:

$$\frac{a}{b^2c^2 + 1} + \frac{b}{c^2a^2 + 1} + \frac{c}{a^2b^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

3.4.5 C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Predavanje *Konstrukcija i dokaz* bavi se problemima u kojima se traži minimalan ili maksimalan broj pojava u okviru zadanih uvjeta. Zadatke rješavamo u dva koraka: prvo postavimo konstrukciju, tj. ponudimo rješenje te dokazujemo jedinstvenost, pokazujemo da traženi broj ne može biti ni veći ni manji od naše tvrdnje.

Lakši zadaci

1. Za koji najmanji n zbroj $1+3^2+3^3+\dots+3^n$ veći od 1 000 000?
2. Izaberite n brojeva iz skupa $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ tako da zbroj tih n brojeva dijeli 700. Koja je najveća vrijednost n za koju je to moguće?
3. Za koji najmanji n je broj 2^n+1 djeljiv s 11, i 3^n-1 djeljiv s 13?
4. U vreći se nalazilo 255 kuglica označenih brojevima 1, 2, ..., 255, a onda je svaki od n učenika uzeo je iz vreće po jednu kuglicu. Pokazalo se da nijedan od izvučenih brojeva nije točno dvostruko veći od nekog drugog izvučenog broja. Odredi najveći mogući n .
5. Grupa djece se natjecala tko će pojesti više jagoda. Pobjednik je pojeo n jagoda, a svaki sljedeći po dvije jagode manje i tako sve do posljednjeg djeteta na k -tom mjestu, koje je pojelo $n + 2 - 2k$ jagoda. Ukupan broj pojedenih jagoda na natjecanju iznosi 2014. Koliko je najmanje jagoda pojeo pobjednik?

Teži zadaci

6. U utrci je sudjelovalo 100 ljudi i nikoje dvoje nije utrku završilo s istim vremenom. Svakom je natjecatelju na kraju utrke postavljeno pitanje na kojem je mjestu završio utrku i svi su odgovorili brojem između 1 i 100. Zbroj svih odgovora iznosi 4000. Koji je najmanji broj krivih odgovora koje su trkači mogli dati?
7. Neka je n prirodni broj. Niz od $2n$ realnih brojeva je dobar ako za svaki prirodni broj $1 \leq m \leq 2n$ vrijedi da je zbroj prvih m ili zbroj zadnjih m članova niza cijeli broj. Odredi najmanji mogući broj cijelih brojeva u dobrom nizu.
8. Toni i Lana igraju sljedeću igru. Toni prvo bira cijeli broj između 0 i 999, uključujući te brojeve, a zatim ga udvostruči i prosljedi Lani. Lana dobivenom broju doda 50 i prosljedi rezultat Toniju. Kad god Toni dobije broj, on ga udvostruči i prosljedi Lani, a Lana doda 50 i prosljedi Toniju. Pobjednik je onaj tko zadnji prosljedi broj manji od 1000. Odredite najmanji početni broj koji Tonija vodi do pobjede.
9. Ivo i Mate pronašli su tri kartice. Na prvoj kartici s jedne strane piše broj 1, a s druge broj 4. Na drugoj kartici s jedne strane piše broj 2, a s druge strane broj 4. Na trećoj kartici s jedne strane piše broj 3, a s druge opet broj 4. Mate je slagao te tri kartice u niz, a Ivo je trebao zapisivati troznamenkaste brojeve koje Mate slaganjem kartica dobiva i na kraju još izračunati zbroj svih zapisanih brojeva. Pri tome Mate slučajno bira karticu i njezinu stranu. Koliko najviše različitih troznamenkastih brojeva može Ivo zapisati i koliko iznosi njihov zbroj?
10. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni ili vertikalni. Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak. Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

3.5 Zadaci za zelenu grupu

3.5.1 C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kokan

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Matematička indukcija je vrlo korisna i česta metoda dokazivanja koja se tipično koristi za dokazivanje raznoraznih svojstava prirodnih brojeva.

Princip matematičke indukcije

1. *Baza indukcije.* Tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n = 1$.
2. *Pretpostavka indukcije.* Pretpostavljamo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.
3. *Korak indukcije.* Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi i za broj $k + 1$, onda navedena tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n .

Pogledajmo na primjeru kako se provodi dokaz matematičkom indukcijom.

Primjer.

Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju n .

1. *Baza indukcije.*
Trebamo dokazati da navedena jednakost vrijedi za broj $n = 1$. Lijeva strana jednakosti zapravo predstavlja zbroj svih brojeva od 1 do n pa je u ovom slučaju jednaka 1, dok je desna strana jednaka $\frac{1+1}{2} = 1$. Dakle, imamo jednakost $1 = 1$ koja očito vrijedi, pa je baza dokazana.
2. *Pretpostavka indukcije.*
Pretpostavimo da jednakost $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.
3. *Korak indukcije.*
Trebamo dokazati da jednakost vrijedi i za $k + 1$, odnosno da vrijedi $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Lijevu stranu možemo raspisati koristeći pretpostavku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) = \quad (\text{prema pretpostavci}) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Ovime je korak indukcije dokazan, pa tvrdnja zadatka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaze matematičkom indukcijom možemo koristiti i kod dokazivanja tvrdnji koje vrijede za sve prirodne brojeve koji su veći ili jednaki n_0 , gdje je n_0 neki prirodni broj. Tada se princip matematičke indukcije može izreći ovako:

Generalizirani princip matematičke indukcije

1. *Baza indukcije.* Tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n = n_0$.
2. *Pretpostavka indukcije.* Pretpostavljamo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.
3. *Korak indukcije.* Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi i za broj $k + 1$, onda navedena tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n > n_0$.

Lakši zadatci

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
2. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$.

3. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
5. Dokažite sljedeću nejednakost za svaki prirodni broj n veći od 2: $3^n > 2^n + 3n$.
6. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: $n! \geq 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}$
7. Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n -terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.
8. Dokažite formulu za sumu geometrijskog niza: $S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$, gdje je a_1 prvi član a r faktor geometrijskog niza.

Zadatci s faksa, natjecanja i malo teži zadatci

9. Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (2n - 1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

10. Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki nenegativan cijeli broj n broj $169 \cdot 13^n + 14 \cdot 196^n$ djeljiv sa 183.
11. Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. Dokažite da je za piramidu od n slojeva potrebno $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ loptica.
12. Dokaži da za svaki prirodan broj n veći od 2 vrijedi: $\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
13. Dokažite De Moivreovu formulu. (Neka je dan kompleksan broj u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Tada je $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.)
14. Dokažite binomnu formulu:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

15. Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekursivno:

- $x_1 = 3, y_1 = 1$;
- $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
- $y_{n+1} = 3y_n + x_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

16. Dokaži da je za svaki prirodni broj n , broj $\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ znamenki}} - 3^n + 1$ djeljiv brojem 7.
17. Odredite sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, takve da je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{Z}$
18. Na stolu su 2 neprazne hrpe graha. Dozvoljen potez je pojesti jednu cijelu hrpu i drugu rastaviti na dvije neprazne hrpe. Igru igraju 2 igrača naizmjenice a onaj koji ne može napraviti potez gubi. Dokaži da ako postoji hrpa s parno mnogo graha, prvi igrač ima pobjedničku strategiju.
19. Fibonaccijev niz je dan s $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Dokažite da za svake $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
20. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

3.5.2 N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Zanima nas što se događa s ostacima (pri dijeljenju s nekim prirodnim brojem) brojeva prilikom vršenja operacija nad brojevima, odnosno mijenjaju li se ostaci usklađeno s brojevima prilikom tih operacija? Odgovor je da, i zbog toga ima smisla govoriti o **modularnoj aritmetici**, aritmetici ostataka.

Pojam kongruencije omogućuje nam povezivanje operacija nad brojevima s operacijama nad njihovim ostacima, što se lijepo vidi iz svojstava modularne aritmetike koja ćemo kasnije navesti.

Reći ćemo da su dva cijela broja a i b kongruentna modulo n , (gdje je n prirodan broj) i pisati $a \equiv b \pmod{n}$ ako je $b - a$ djeljivo s n .

Ako je primjerice $n = 3$, svi cijeli brojevi oblika su $3k$, $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki cijeli broj k . Lako se uvjerimo da je $3k \equiv 0 \pmod{3}$, $3k + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ i $3k + 2 \equiv 2 \pmod{3}$, stoga je svaki broj kongruentan ostatku modulo 3 koji daje kada se podijeli s 3.

Općenitije, cijeli broj a kongruentan je ostatku koji daje pri dijeljenju s n , modulo n .

Iz toga lako slijedi da su dva broja kongruentna modulo n ako i samo daju isti ostatak pri dijeljenju s n .

Osnovna svojstva kongruencija

Za proizvoljne cijele brojeve a , b , c te proizvoljan prirodan broj n vrijedi:

- $a \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, tada $b \equiv a \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n}$, tada $a \equiv c \pmod{n}$

Osnovna svojstva modularne aritmetike

U kongruencijama možemo zbrajati, oduzimati, množiti, potencirati, a **ponekad** i dijeliti.

Naime, za proizvoljne cijele brojeve a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 te proizvoljan prirodan broj n vrijedi:

- ako $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ i $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, tada $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$
- ako $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ i $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, tada $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$
- ako $a \equiv b \pmod{n}$, tada $a^m \equiv b^m \pmod{n}$, $\forall m \in \mathbb{N}$
- ako $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $(n, c) = 1$, tada $a \equiv b \pmod{n}$ ((n, c) označava najveći zajednički djelitelj brojeva n i c)

Predvodni zadatak

- (a) Koje ostatke može imati potpuni kvadrat pri dijeljenju s 3, a koje pri dijeljenju s 4?
(b) Za koje proste brojeve p je i $8p^2 + 1$ prost broj?

Zadaci

- Riješi predvodni zadatak koristeći kongruencije.
- Odredi ostatak pri dijeljenju broja 234^{56} sa 7.
- (a) Pokaži da 4 ne dijeli $n^2 + 2n - 1$ za sve prirodne brojeve n .
(b) Pokaži da 7 dijeli $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ za sve prirodne brojeve n
- Dokaži navedena svojstva kongruencija.
- Dokaži navedena svojstva modularne aritmetike.

7. Koja je posljednja znamenka broja 3^{33} ?
8. Koji ostatak daje broj $2015^{2017^{2018}}$ pri dijeljenju s 22?
9. Pokažite da je broj djeljiv brojem 11 ako i samo ako mu je razlika zbroja znamenki na parnim mjestima i zbroja znamenki na neparnim mjestima djeljiva s 11.
10. Odredi rješenje diofantske jednadžbe $3x + 7y = 10$ (x i y su cijeli brojevi).
11. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi n i m takvi da je $n^2 - 7m^2 = 28$.
12. Koji parovi prirodnih brojeva (m, n) zadovoljavaju jednadžbu $2^m - 3^n = 1$?
13. Dokaži generalizaciju posljednjeg navedenog svojstva modularne aritmetike: $ac \equiv bc \pmod{n}$ ako i samo ako $a \equiv b \pmod{\frac{n}{(c,n)}}$.

3.5.3 G5: Angle chasing - Tea Arvaj

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Kut između tetive i tangente jednak je kutu and tom tetivom.

Središnji kut dvostruko je veći od obodnog.

Četverokut je tetivan akko su kutevi nad istom tetivom jednaki.

Četverokut je tetivan akko mu je zbroj nasuprotnih kuteva 180° .

Srednjica je paralelna stranici.

Polovište hipotenuze je centar pravokutnom trokutu opisane kružnice.

Lakši zadaci

1. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici BC . Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E . Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokaži da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.
2. Na kružnici k nalaze se točke A i B , a na manjem luku AB točka P . Neka su Q i R točke na k , različite od P , takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ . Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti.
3. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD > 90^\circ$. Neka su E , F i G nožišta okomica iz vrha C na pravce AB , BD i DA , redom, i H sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$. Dokažite da točke E , F , G i H leže na istoj kružnici.
4. Dan je tetivni peterokut $ABCDE$. Neka su točke F , G , H i I polovišta dužina BC , CD , DE i EA , redom. Neka se pravci FG i HI sijeku u točki J , a pravci AC i HI u točki K . Dokazati da se točka K nalazi na kružnici opisanoj trokutu FCJ .
5. Kružnica upisana u ABC dodiruje stranice BC , CA i AB u točkama D , E i F , redom. Neka je točka K sa iste strane pravca EF kao i točka A , takva da vrijedi $\sphericalangle KFE = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle KEF = \sphericalangle ABC$. Dokažite da vrijedi $KD \perp BC$.
6. Upisana kružnica dodiruje stranice AB i AC trokuta ABC u točkama M i N . Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokažite da je $BP \perp CP$.
7. Kružnice ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama A i B . Pravac kroz B siječe ω_1 i ω_2 u C i D , redom. Točke E i F su na ω_1 i ω_2 , redom, takve da $CE = CB$ i $BD = DF$. BF siječe kružnicu ω_1 u točki P , a BE kružnicu ω_2 u točki Q . Dokažite da su točke A , P i Q kolinearne.
8. $ABCD$ je tetivni četverokut. E je sjecište pravaca paralelnih s AC i BD koji prolaze kroz B i A , redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB u F i G , redom. Dokažite da točke C , D , F i G leže na istoj kružnici.
9. U šiljastokutnom trokutu ABC , BH je visina iz vrha B . Točke D i E su polovišta dužina AB i AC redom. F je osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac ED . Dokažite da pravac BF prolazi središtem opisane kružnice trokuta ABC .
10. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka je t tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A . Kružnica sa središtem u točki A koja prolazi točkom C siječe stranicu AB u točki D , a pravac t u točkama E i F tako da su C i E s iste strane pravca AB . Dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na pravcu DE .

Teži zadaci

11. U trokutu ABC , točke M , N i K su polovišta dužina BC , CA i AB redom. ω_C i ω_B su polukružnice s promjerima AC i AB redom, izvan trokuta. MK i MN sijeku ω_B i ω_C u X i Y redom. Tangente na ω_B i ω_C kroz točke X i Y redom, sijeku se u točki Z . Dokažite $AZ \perp BC$.
12. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $AB < AC$. Točka D je polovište stranice BC , a p je pravac simetričan pravcu AD u odnosu na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$. Ako je P nožište okomice iz vrha C na pravac p , dokažite jednakost $\sphericalangle APD = \sphericalangle BAC$.
13. Kružnica upisana u trokut ABC u kojem vrijedi $AB < AC$ dodiruje stranice BC , CA i AB u točkama D , E i F , redom. Simetrala $\sphericalangle BAC$ siječe pravce DE i DF u točkama M i N , redom. Neka je K nožište visine iz vrha A . Dokažite da je D centar upisane kružnice trokuta MNK .
14. Kružnice ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama A i B . Neka je PQ njihova zajednička tangenta i $P \in \omega_1$ i $Q \in \omega_2$. X je proizvoljna točka na ω_1 . Pravac AX siječe ω_2 drugi put u točki Y . Točka Y' različita od Y leži na ω_2 tako da je $QY = QY'$. Pravac $Y'B$ siječe ω_1 drugi put u točki X' . Dokažite da je $PX = PX'$.
15. U šiljastokutnom trokutu ABC , $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Točke O i H su središte opisane kružnice i ortocentar trokuta ABC , redom. D je nožište visine iz vrha B . Točka X je polovište luka AH kružnice opisane trokutu AHD koji sadrži D . Dokažite $DX = DO$.
16. Neka su A , B i C točke kružnice Γ sa centrom O , takve da je $\sphericalangle ABC > 90^\circ$. Neka je D točka presjeka pravca AB i pravca okomitog na AC u točki C . Neka je l pravac koji sadrži točku D i okomit je na pravac AO . Dalje, neka je E točka presjeka pravaca l i AC , a F ona točka presjeka kružnice Γ i pravca l koja se nalazi između točaka D i E . Dokazati da se opisane kružnice trokuta BEF i CDF dodiruju u točki F .

3.5.4 A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju baviti ćemo se raznim neobičnim i nestandardnim zadacima koje natjecateljska algebra može iznjedriti. Pošto su takvi zadatci, kako im i ime samo kaže, nestandardni ne postoje neka univerzalna pravila ili algoritmi kako ih rješavati. Većinom je potrebno uočiti neki trik kako pojednostavniti zadatak na nešto rješivo. Nažalost, trikovi se ne ponavljaju često pa je teško predvidjeti što rješava zadatak. Iz tog razloga svrha ovog predavanja je upoznati se sa zadacima tog tipa, pokušati riješiti pokojeg i na koncu steći dojam što sve može doći prikriveno u okviru algebre i kako s razumnom dozom samopouzdanja pristupiti nestandardnom zadatku.

Nizovi

1. Niz je definiran ovako: $a_0 = 0, a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$. Dokažite da je:
 - (a) Niz rastući.
 - (b) Niz ograničen odozgo s 3.
2. Odredi sve nizove $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} - 200$.
3. Za prirodni broj d definiran je niz $a_0 = 1$, te $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, ako je a_n paran, a $a_{n+1} = a_n + d$, ako je neparan. Za koje vrijednosti d postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n = 1$?
4. Neka je $a_1, a_2, \dots$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da vrijedi:

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

za svaki prirodni k . Dokaži: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n$, za svaki $n \geq 2$

Mutne nejednakosti

5. Za dani prirodni broj n nađi najmanji prirodni broj k sa sljedećim svojstvom: Ako su $a_1, a_2, \dots, a_d$ realni brojevi,

$$0 \leq a_i \leq 1, a_1 + a_2 + \dots + a_d = n$$

, tada je moguće rasporediti tih d brojeva u k grupa tako da je zbroj brojeva u svakoj grupi najviše 1 (neke grupe mogu biti prazne).

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ za koje vrijedi:

$$f(n+1) - f(n) = f(f(n))$$

, za sve $n \in \mathbb{N}$

7. Neka je $n \geq 3$ prirodni broj. Pretpostavimo da je niz $a_i, a_2, \dots, a_n$ pozitivnih realnih brojeva takav da vrijedi: $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$ za neki niz $k_1, k_2, \dots, k_n$ prirodnih brojeva. ($a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$). Dokaži:

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 3n$$

8. Neka je $z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots$ beskonačni niz prirodnih brojeva. Dokaži da postoji jedinstven $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$z_n \leq \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n} \leq z_{n+1}$$

3.5.5 C15: Prebrojavanja - Lucija Relić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju podsjetit ćemo se osnovnih principa prebrojavanja i klasičnih problema gdje se ono koristi, ali i naučiti neke nove korisne alate. Za početak, navedimo izraze i terminologiju koju koristimo u ostatku predavanja:

- $|S|$ = broj elemenata skupa S
- Dva skupa su *ekvipotentna* ako imaju jednak broj elemenata.
- *Particija* skupa S je podjela elemenata tog skupa u $k \geq 1$ skupova $A_1, \dots, A_k$ tako da se svaki element od S nalazi u točno jednom od skupova A_i .
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$; čitamo: n *faktorijela*; posebno, vrijedi $0! = 1$
- *Binomni koeficijent* pojavljuje se kao koeficijent uz x^k u $(1+x)^n$, čitamo " n *povrh* k ", a dan je formulom:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Osnovni principi prebrojavanja

- **Princip sume**
Broj elemenata unije međusobno disjunktih skupova jednak je sumi broja elemenata skupova.
- **Princip produkta**
Broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova.
- **Princip kvocijenta**
Particioniramo li skup S na k jednakih skupova od n elemenata vrijedi $k = \frac{|S|}{n}$. Ovo je zapravo samo reformulacija principa produkta, ali dobro je imati ga na umu kao zaseban princip.
- **Princip bijekcije**
Dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih.
- **Princip dvostrukog brojanja**
Prebrojavanjem skupa na više različitih načina odgovori će biti jednaki.
- **Princip matematičke indukcije**
Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:
 1. Tvrdnja je istinita za $n = 1$ (*baza indukcije*).
 2. Uz pretpostavku da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n (*pretpostavka indukcije*) vrijedi da je istinita i za $n+1$ (*korak indukcije*).
 Tada je tvrdnja istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- **Dirichletov princip**
Particioniramo li skup S koji ima više od $k \cdot n$ elemenata u k skupova, tada barem jedan od tih k skupova ima barem n elemenata.

Promotrimo sada neke česte probleme vezane uz prebrojavanja.

Permutacije

Neka je

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Pretpostavimo da su elementi skupa S uređeni, dakle za svaki element zna se koji je po redu. Tada je **permutacija** π skupa S uređena n -torka $(\pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_n))$, tj. uređena n -torka međusobno različitih elemenata iz S . **k -permutacija** skupa S je uređena k -torka međusobno različitih elemenata iz S . Na sličan način možemo definirati i **permutacije s ponavljanjem** i **k -permutacije s ponavljanjem** kao uređene n -torke, odnosno k -torke, elemenata iz S , no ne nužno različitih.

Kombinacije

Neki podskup A skupa S , takav da vrijedi $|A| = k$, zovemo **k -kombinacija** od S . Kod k -kombinacija nije nam bitan poredak elemenata. Broj k -kombinacija od S , za $|S| = n$, jednak je $\binom{n}{k}$ (*provjerite!*).

Budući da skupovi ne mogu sadržavati više jednakih elemenata, kombinacije s ponavljanjem ne možemo definirati analogno permutacijama s ponavljanjem. Umjesto toga, možemo reći da je **k -kombinacija s ponavljanjem** od S multiskup ("skup" koji može sadržavati više jednakih elemenata) koji sadrži ukupno k elemenata iz S .

Na primjer, $A = \{1, 1, 2, 5, 5, 5\}$ je 6-kombinacija s ponavljanjem od $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. A možemo zapisati i kao $\{1^2, 2, 5^3\}$ pri čemu eksponenti označavaju broj istih elemenata u multiskupu.

Formula uključivanja i isključivanja (FUI)

Znamo da je broj elemenata unije dva disjunktne skupa jednak zbroju broja elemenata u svakom od njih. No, što ako želimo broj elemenata unije dva skupa koji nisu disjunktne? Ili više takvih skupova?

Promotrimo prvo slučaj sa dva skupa A i B koji nisu disjunktne. Zbrajanjem broja elemenata svakog od njih dobit ćemo prevelik broj jer smo tako elemente presjeka brojali dva puta. Zato vrijedi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Za tri takva skupa A , B i C moramo oduzeti broj elemenata presjeka dva skupa, ali tako smo previše puta oduzeli one koji se nalaze u sva tri skupa, pa ih moramo još jednom pribrojiti. To možemo provjeriti rastavljanjem skupa $A \cup B \cup C$ na međusobno disjunktne podskupove i iskoristiti princip zbroja.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Općenitno, za skupove $A_1, \dots, A_n \subseteq S$ koji nisu nužno disjunktne vrijedi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Odatle slijedi:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Uvodni zadaci

1. Koliko ima k -permutacija skupa od n elemenata?
2. $M = \{a, a, b, b, c, c, c\} = \{a^2, b^2, c^3\}$. Koliko ima permutacija multiskupa M ?
3. Na koliko načina možemo $n \in \mathbb{N}$ jednakih kuglica rasporediti u $m \in \mathbb{N}$ različitih kutija.
4. Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Lakši zadaci

5. Koliko je broj podskupova skupa S koji ima n elemenata?
6. Na koliko se načina sva slova $A B C D E F G H I$ mogu poredati tako da su i samoglasnici i suglasnici poredani abecednim redom?
7. Šest četvrtih razreda, IVa , IVb , IVc , IVd , IVe i IVf trebaju ići na maturano putovanje, a moguća odredišta su Kopački rit, Plitvička jezera, Trakošćan i Kornati. Na koliko načina oni to mogu učiniti, ako svaki razred može otići na samo jedno od tih mjesta, a svako od njih mora posjetiti barem jedan razred?

8. Osmero studenata igra društvenu igru Mafija. Uloge se dodjeljuju nasumično izvlačenjem papirića, a moguće uloge su: 1 voditelj igre, 1 liječnik, 1 policajac, 3 civila te 2 mafijaša. Svi osim voditelja igre sjednu u krug.
 - a) Na koliko načina se mogu podijeliti uloge i sjesti u krug?
 - b) Koliko ima rasporeda sjedenja i podjela uloga takvih da Marko bude civil, a Pero mafijaš i da njih dvojica ne sjede na susjednim mjestima?
9. Koliko ima peteroznamenastih prirodnih brojeva s parnim brojem parnih znamenaka?
10.
 - a) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ u kojima brojevi 1 i 2 nisu susjedni?
 - b) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ u kojima nikoja dva elementa skupa $\{1, 2, 3\}$ nisu susjedna?
11. Pustinjom putuje karavana od 9 deva. Nakon odmora u oazi potrebno je promijeniti redoslijed deva tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije dolaska u oazu. Na koliko je načina to moguće napraviti?
12. S koliko nula završava broj $(100!)$?

Teži zadaci

13. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do $(7, 10)$ koji prolaze točkom $(3, 5)$ ili točkom $(5, 3)$?
14. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ uz uvjete $x_1, x_4, x_5 \geq 0, 2 \leq x_3 \leq 7, x_2 \geq 2$.
15. Oko okruglog stola nalaze se kartice s imenima 11 MNM mentora (svi različitih imena). Na početku velikog sastanka nitko nije sjedio kod kartice sa svojim imenom. Je li moguće rotirati stol za neki kut tako da nakon rotacije barem 2 mentora sjede kod kartice sa svojim imenom?
16. n kandidata za neki posao se predstavlja pred tročlanom komisijom. Svaki od članova komisije rangira kandidate prema svom kriteriju. Pravilo je da će neki kandidat biti prihvaćen ako su ga barem dvojica članova komisije stavila na prvo mjesto. Izračunajte vjerojatnost da će se izabrati neki kandidat (tko god).

$$(vjerojatnost = \frac{\text{povoljni ishodi}}{\text{svi ishodi}})$$
17. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitim ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.
 Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?
18. Koliko ima k -članih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ takvih da ne sadrže dva uzastopna broja?
19. Pokažite da je broj $(4n)!$ djeljiv sa 2^{3n} i 3^n .

3.6 Zadaci za cijan grupu

3.6.1 C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju kroz razne zadatke ćemo prebrojavati iste objekte na 2 različita načina kako bismo pronašli sva moguća, tj eliminirali neka rješenja u zadanoj konfiguraciji.

Zadaci

1. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?
2. Na nekom natjecanju svaki učenik riješio je točno tri zadatka, a svaki zadatak riješilo je točno troje učenika. Dokaži da su broj učenika i broj zadataka jednaki.
3. 15 učenika sudjeluje na ljetnom kampu. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Kamp traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k .
4. Dokaži sljedeće identitete kombinatornim argumentom. (Nađi kombinatornu interpretaciju lijeve i desne strane).
 - (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 - (b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
 - (c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
 - (d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
 - (e) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
5. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?
6. Dana je 3×7 ploča u kojoj je svako polje obojano plavo ili crveno. Dokaži da postoje 2 reda i 2 stupca (ne nužno za redom) čiji presjeci daju 4 polja iste boje.

Teški zadaci

7. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?
8. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$.
9. Interval $< 0, 20 >$ je pokriven s 13 otvorenih podintervala tako da nijedan nije podskup unije ostalih. Dokaži da bar jedan od ovih podintervala ima duljinu ne veću od 3.

3.6.2 N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Za ovo predavanje podrazumijeva se poznavanje kongruencija i njihovih svojstava.

Sustavi ostataka

Skup $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ zove se **potpun sustav ostataka modulo m** ako za svaki $y \in \mathbb{Z}$ postoji točno jedan x_j takav da je $y \equiv x_j \pmod{m}$. Drugim riječima, to je skup takav da svi njegovi članovi daju različit ostatak pri dijeljenju sa m .

Reducirani sustav ostataka modulo m je skup cijelih brojeva r_i sa svojstvom da su relativno prosti s m , za $i \neq j$ vrijedi $r_i \not\equiv r_j \pmod{m}$, te da za svaki y relativno prost sa m postoji r_i takav da je $y \equiv r_i \pmod{m}$.

Eulerov teorem

Označimo s $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti s n , za svaki prirodan broj n (uočimo da je to broj elemenata reduciranog sustava ostataka modulo n). Time smo definirali funkciju $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ poznatu pod imenom **Eulerova funkcija**.

Ona ima svojstvo **multiplikativnosti**, odnosno za bilo koje relativno proste brojeve m i n vrijedi

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

Za Eulerovu funkciju postoji i eksplicitna formula. Za $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, gdje su p_i prosti, a α_i prirodni brojevi, imamo:

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1) \end{aligned}$$

Teorem 1. Neka je $S = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m i a cijeli broj relativno prost sa m . Tada je $S' = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}\}$ također reducirani sustav ostataka modulo m .

Dokaz. Budući da je svaki r_i relativno prost sa m , kao i a , vrijedi i da je svaki član skupa S' relativno prost sa m .

Uzmimo $x, y \in S$. Tada postoje $1 \leq x' \leq m$ i $1 \leq y' \leq m$ takvi da $x \equiv x' \pmod{m}$ i $y \equiv y' \pmod{m}$.

Pretpostavimo da S' nije reducirani sustav ostataka jer vrijedi $xa \equiv ya \pmod{m}$. Tada je i $x'a \equiv y'a \pmod{m}$, odnosno $(x' - y')a \equiv 0 \pmod{m}$. Jer su a i m relativno prosti i zbog uvjeta na x' i y' dobivamo $x' = y'$ pa x i y daju isti ostatak pri dijeljenju sa m , a budući da su elementi reduciranog sustava ostataka vrijedi $x = y$.

Teorem 2. (Eulerov teorem) Ako su a i m relativno prosti brojevi, onda vrijedi

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Dokaz. Neka je $\{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m . Jer je, po teoremu 1, $\{ar_1, ar_2, \dots, ar_{\varphi(m)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo m , zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\varphi(m)} (ar_j) &\equiv \prod_{i=1}^{\varphi(m)} r_i \pmod{m} \\ a^{\varphi(m)} \prod_{j=1}^{\varphi(m)} r_j &\equiv \prod_{i=1}^{\varphi(m)} r_i \pmod{m} \end{aligned}$$

Jer je $\text{GCD}(r_i, m) = 1$ i iz svojstava kongruencija, dobivamo tvrdnju teorema.

Mali Fermatov teorem

Teorem 3. (Mali Fermatov teorem) Neka je p prost broj. Ako $p \nmid a$, onda je $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Za svaki cijeli broj a vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Dokaz. Budući da je $\varphi(p) = p - 1$, MFT je direktna posljedica Eulerovog teorema.

Kineski teorem o ostatcima (CRT)

Navodimo još i iskaz Kineskog teorema o ostatcima (bez dokaza). U zadacima nam je najkorisniji jer garantira egzistenciju rješenja.

Teorem 4. (CRT) Neka su $m_1, m_2, \dots, m_r$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi, te neka su $a_1, a_2, \dots, a_r$ cijeli brojevi. Tada sustav kongruencija

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

...

$$x \equiv a_r \pmod{m_r}$$

ima rješenja. Ako je x_0 jedno rješenje, onda su sva rješenja sustava dana sa $x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_r}$.

Lakši zadaci

1. Izračunajmo $2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + 5^{50} + 6^{60} \pmod{7}$.
2. Neka je $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1$. Izračunaj $a_{100} \pmod{7}$.
3. Odredi

$$3!^{4!^{\dots^{2019!}}} \pmod{11}.$$

4. Koliko postoji prostih brojeva p takvih da je $29^p + 1$ višekratnik od p ?
5. Dokaži da za neparni prost broj p vrijedi

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 \equiv 2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \pmod{p}.$$

6. Za koliko cijelih brojeva $i, 1 \leq i \leq 1000$, postoji cijeli broj $j, 1 \leq j \leq 1000$, takav da $i \mid 2^j - 1$?
7. Izračunaj zadnje 3 znamenke broja $2008^{2007^{2006^{\dots^{2^1}}}}$.
8. Definirajmo $f(x) = x^{x^x}$. Nađi zadnje dvije znamenke od $f(17) + f(18) + f(19) + f(20)$.
9. Dokaži da za svaki parni prirodni broj n vrijedi $n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1$.
10. Odredi prirodan broj n takav da $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$.
11. Pronađi sve prirodne brojeve n takve da je izraz $2^{2^n+1} + 2$ djeljiv sa 17.
12. Ako je $a^p \equiv b^p \pmod{p}$ dokaži da je tada $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.
13. Pokaži da $19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$ za $k = 0, 1, 2, \dots$

Teži zadaci

14. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n \mid 2^n + 1$ i pronadi sve takve proste n .
15. Neka je n prirodan broj takav da je $n \geq 3$. Pokaži da je

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

djeljiv sa 1989 za svaki takav n .

16. Dokaži da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj $m, m > n$, takav da se decimalni prikaz broja 5^m dobiva iz decimalnog prikaza broja 5^n dodavanjem određenog broja znamenaka lijevo.
17. Promotrimo niz $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots \pmod{n}$. Pokaži da su za bilo koji fiksirani prirodni broj n svi osim konačno mnogo članova niza jednaki nekom k .
18. Neka je a_n niz zadan sa

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Odredi sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom zadanog niza.

3.6.3 G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip PupiĆ

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Na ovom predavanju ćemo rješavati geometrijske zadatke s upisanim i/ili pripisanim kružnicama te usput naučiti neke činjenice korisne pri rješavanju takvih zadataka.

Definicije

- *Upisana kružnica* trokuta ABC je kružnica unutar trokuta koja dodiruje sve 3 njegove stranice. Njezino središte najčešće označavamo s I ili U .
- *A-pripisana kružnica* trokuta ABC ili *pripisana kružnica* stranici BC trokuta ABC je kružnica izvan trokuta koja dodiruje stranicu BC te produžetke stranica AB i AC preko vrhova B i C . Njezino središte najčešće označavamo s I_A .

Činjenice

- Središte upisane kružnice trokuta ABC nalazi se u sjecištu simetrala kuteva trokuta ABC .
- Središte A -pripisane kružnice trokuta ABC nalazi se u sjecištu simetrale kuta pri vrhu A trokuta ABC te simetrala vanjskih kuteva pri vrhovima B i C trokuta ABC .
- Udaljenost vrha A od točaka u kojima upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice AB i AC iznosi $s - a$ pri čemu je $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Analogno vrijedi i za preostala 2 vrha trokuta. Nadalje, udaljenost vrha A od točaka u kojim A -pripisana kružnica dodiruje produžetke stranica AB preko B te AC preko C iznosi s . Ponovno, analogna tvrdnja vrijedi i za ostale vrhove trokuta.
- U trokutu ABC se simetrala kuta pri vrhu A i simetrala stranice BC sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
- Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I , središtem A -pripisane kružnice I_A te polovištem L luka BC (koji ne sadrži točku A) na opisanoj kružnici trokuta ABC . Tada je L središte kružnice koja sadrži točke B, I, C te I_A .
- Neka je T točka izvan kružnice k . Neka pravac p_1 kroz T siječe k u točkama A i B te neka je pravac p_2 kroz T tangenta na k koja dodiruje tu kružnicu u točki C . Tada vrijedi $TA \cdot TB = TC^2$. (Analogno vrijedi i ako je točka T unutar kružnice samo onda nema tangente, već je umnožak udaljenosti točke T od sjecišta pravca p kroz nju s kružnicom k konstantan.) Promatrani umnožak $TA \cdot TB$ zove se *potencija* točke T na kružnicu k .
- Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice. Tada je skup svih točaka kojima je potencija točke na te 2 kružnice jednaka, pravac koji nazivamo *radikalna os* kružnica k_1 i k_2 .
- (*Ptolomejev teorem*) Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Tada vrijedi jednakost:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Zadaci

1. Dokaži 4. činjenicu.
2. Dokaži 5. činjenicu.
3. Dokaži 3. činjenicu.
4. Neka su D, E i F redom nožišta visina iz vrhova A, B i C u trokutu ABC . Dokaži da je ortocentar H trokuta ABC ujedno i središte upisane kružnice trokuta DEF .
5. U trokutu ABC , simetrala kuta pri vrhu A siječe simetralu stranice BC u točki D , simetrala kuta pri vrhu B siječe simetralu stranice AC u točki E , a simetrale stranica AC i BC se sijeku u točki F . Ako nam je poznato $\angle ADF = 5^\circ, \angle BEF = 10^\circ$ te $AC = 3$, odredi duljinu dužine DF .

6. Stranice trokuta ABC sa središtem upisane kružnice I te opisanom kružnicom ω , zadovoljavaju jednakost $2BC = AB + AC$. Neka je D drugi presjek pravca AI i kružnice ω . Dokaži da je I polovište dužine AD .
7. Kružnica upisana u trokut ABC dodiruje stranice BC, CA i AB redom u točkama D, E i F . Za točku K koja se nalazi s iste strane pravca EF kao i točka A vrijedi $\angle KFE = \angle ACB$ te $\angle KEF = \angle ABC$. Dokažite da su pravci KD i BC okomiti.
8. Četverokut $ABCD$ je opisan oko kružnice k . Sjecište dijagonale AC i kružnice k koje je bliže točki A označimo s E . Neka je točka F diametralno suprotna točki E na kružnici k . Tangenta na k u točki F siječe prave AB i BC redom u točkama A_1 i C_1 te pravce AD i CD redom u točkama A_2 i C_2 . Dokažite $A_1C_1 = A_2C_2$.
9. Neka je ABC trokut opsega 4. Na polupravcima AB i AC redom leže točke X i Y takve da je $AX = AY = 1$. Dužine BC i XY se sijeku u točki M . Dokaži da je opseg jednog od trokuta ABM i ACM jednak 2.

3.6.4 A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Sadržaj

1. Iskaz i dokaz CSB - a.
2. Standardni trikovi: trik s jedinicom, trik s raspodjelom eksponenta, produkt prosjeka i prosjek produkta, simetrija, Engel forma itd.
3. Vježba
4. Zadatci s državnog
5. Zadatci s IMO - a

Iskaz i dokaz CSB - a

Teorem 1. *Neka je n prirodan broj. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ realni brojevi.*

Tada vrijedi:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}. \quad (3.1)$$

Pri tome jednakost vrijedi akko postoji k realan t . d. $k = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \wedge b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Baza indukcije: za $n = 1$, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da za neki n prirodan broj tvrdnja teorema vrijedi. Zapišimo i tvrdnju za $n = 2$, kasnije ćemo ju iskoristiti.

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \quad (3.2)$$

Gornja tvrdnja vrijedi jer raspisom dobivamo:

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 \quad (3.3)$$

što je ekvivalentno

$$0 \leq (a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \quad (3.4)$$

a posljednje je očita istina, pa je (1) istina.

Provedimo sada korak indukcije:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2} \end{aligned}$$

Prva nejednakost je pretpostavka indukcije, a iz (2) vrijedi druga nejednakost zato što (2) možemo zapisati kao

$$(\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1})^2 \leq (\alpha^2 + a_{n+1}^2)(\beta^2 + b_{n+1}^2) \quad (3.5)$$

te stavimo $\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ i $\beta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$

□

Trikovi

1. **(trik s jedinicom)** Pokaži da za svaki niz realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ vrijedi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

2. **(razdvajanje eksponenata)** Pokaži da za svaki niz realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. **(umnošci prosjeka i prosjeci umnožaka)** Pretpostavite da je $p_j \geq 0$ za svaki $j = 1, 2, \dots, n$ i $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Pokažite da ako su a_j i b_j nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju $1 \leq a_j b_j$ za svaki $j = 1, 2, \dots, n$, tada vrijedi ograda za umnoške

$$1 \leq \left\{ \sum_{j=1}^n p_j a_j \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j b_j \right\}$$

Komentar: Naziv je od posebnog slučaja $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, a najčešće se ograda koristi kada je $b_j = \frac{1}{a_j}$.

4. **(tri niza)** a_i, b_i, c_i realni brojevi, za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.

(a)

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \sum_{k=1}^n b_k^4 \sum_{k=1}^n c_k^4$$

(b)

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \sum_{k=1}^n c_k^2$$

5. **(simetrija)** Pokaži da za svaki pozitivan x, y, z vrijedi

(a)

$$\left(\frac{x+y}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x+z}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y+z}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 6^{\frac{1}{2}}$$

(b)

$$x + y + z \leq 2 \left\{ \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right\}$$

6. **(recipročni sumandi)** Pretpostavite da je $p_k > 0$ za svaki $1 \leq k \leq n$ i $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Pokaži da vrijedi

$$\sum_{k=1}^n \left(p_k + \frac{1}{p_k} \right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n}$$

7. **(Engel forma)** Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi, a $b_1, b_2, \dots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

Vježba

8. Dokaži za $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ realne brojeve:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2}$$

9. Dokaži da ako je $a, b, c > 0$ onda je

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

10. Dva trokuta sa stranicama a, b, c i a_1, b_1, c_1 su slične ako i samo ako

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$$

11. Minimiziraj $x_1^2 + \dots x_n^2$ za $0 \leq x_i \leq 1$ i $x_1 + \dots + x_n = 1$.

12. Neka su a, b, c realni brojevi veći od $-\frac{1}{4}$ i neka je $a + b + c = 1$. Dokaži sljedeću nejednakost:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

Zadatci s državnog

13. Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.

14. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}$$

15. Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$$

za neke realne brojeve x, y i z .

16. Neka je n prirodni broj. Odredi sve pozitivne realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \dots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + nx^2 = nx + \frac{n(n+3)}{2}$$

Zadatci s IMO - a

17. Ako je $x_i > 0$ i $x_i y_i - z_i^2 > 0$ za $1 \leq i \leq n$, tada je

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}$$

Dokaži ovu nejednakost za $n = 2$, a onda i za općeniti n .

18. Za bilo koji trokut sa stranicama duljina a, b, c vrijedi:

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0.$$

19. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi t. d. $abc = 1$. Dokaži da je:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

3.6.5 C16: Ploče - Juraj Marušić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U ovom predavanju proučavat ćemo igre te probleme vezane uz ploče.

Nekoliko savjeta za rješavanje ovih zadataka:

- Zadatke koji su vezani uz matematičke igre preporuča se prvo simulirati par puta kako bi se "naslutilo" rješenje te se potom to isto dokazuje ili odbacuje.
- Ako se u zadatku radi o $n \times n$ ploči, korisno je proučiti što se događa na pločama 2×2 , 3×3 ... te potom zaključiti nešto o ploči dimenzija $n \times n$.
- Ako se u zadatku pita može li se nešto napraviti, ukoliko je odgovor pozitivan, mora se objasniti i konstrukcija tog slučaja, često se događa da se na natjecanjima gube bodovi upravo zbog toga što učenici ne prilože konstrukciju (koliko god ona trivijalna bila).
- Kada se traži da se pronađe najveći broj n takav da nešto vrijedi, potrebno je pokazati da svaki $m > n$ nije povoljan (najčešće je dovoljno pokazati samo za $n + 1$) te naći konstrukciju za n .
- Korisno je probati iskoristi klasične metode u kombinatorici kao što su: "pretpostavimo suprotno", invarijante, princip ekstrema, neka klasična bojanja ...

Zagrijavanje

1. Upišimo na 64 polja šahovske ploče redom brojeve od 1 do 64 tako da u prvi redak upišemo brojeve od 1 do 8, u drugi redak brojeve od 9 do 16 i tako dalje. Proizvoljno postavimo 8 topova tako da nijedan ne napada drugoga. Koliki je zbroj brojeva onih polja koja zauzimaju postavljeni topovi?
2. Na svakom polju 101×101 ploče nalazi se ugašena lampa. Potez je odabir jedne lampe i mjenjanjem stanja te lampe te svih lampi u njenom retku i stupcu. U koliko je najmanje poteza moguće upaliti cijelu ploču?
3. Koji je najveći k takav da možemo postaviti konačno mnogo kraljica na beskonačnu šahovsku ploču tako da svaka napada točno k drugih kraljica?
4. Je li moguće obojati svako polje ploče dimenzija 8×8 jednom od 16 boja tako da za svake dvije boje postoje dva susjedna polja obojana u te dvije boje? Dva polja su susjedna ako imaju jednu zajedničku stranicu.
5. Mali Luis stavlja novčiće na neka polja 3×3 ploče, a zatim zapisuje koliko je novčića u svakom pojedinom retku i stupcu. Koliko najmanje novčića Luis mora staviti na ploču ako želi da tih šest brojeva bude međusobno različito?

Trening

6. Dana je šahovska ploča dimenzija $n \times n$ te je u svakom polju upisan po jedan cijeli broj sa sljedećim svojstvom: svaki broj jest aritmetička sredina brojeva koji se nalaze na susjednim poljima. Dokaži da su svi brojevi na ploči jednaki.
7. Na početku igre na šahovskoj ploči se nalazi jedino dama, i to na polju $f8$. U jednom potezu je moguće damu pomaknuti za bilo koji broj polja, ali samo u smjerovima: lijevo, dolje i ukoso lijevo-dolje. Izgubio je igrač koji više ne može odigrati potez, tj. kada se dama nađe na polju $a1$. Koji igrač ima strategiju za pobjedu? Ukoliko pobjeđuje prvi igrač, opišite neki njegov dobitni početni potez.
8. Polja jedinične kvadratne mreže velikih dimenzija obojana su naizmjenično crno i bijelo, poput šahovske ploče. Iz te mreže izrezan je poligon čije stranice leže na linijama kvadratne mreže. Neka se taj poligon sastoji od B bijelih i C crnih polja, a njegov rub od b bijelih i c crnih jediničnih dužina. Dokaži da vrijedi $c - b = 4(C - B)$.
9. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su prijateljska ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

10. Na šahovskoj ploči se nalaze dva lovca, u početku na poljima $b1$ i $c1$. Oni se mogu pomicati za bilo koji broj polja, ali samo u smjerovima lijevo-gore i desno-gore. Osim toga su im zabranjena četiri središnja polja. U jednom potezu igrač pomiče lovca po izboru. Igra završava kada se oba lovca nađu u retku 8. Pokažite da prvi igrač ima pobjedničku strategiju i nađite njegov početni potez koji mu osigurava pobjedu.
11. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje. Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

Pregrijavanje

12. Na početku igre sva polja 8×8 ploče su bijela. Katja i Josip igraju igru. Prvo Katja oboji n polja u crveno. Potom Josip odabere 4 reda i 4 stupca ploče te oboji sva polja u njima u crnu boju. Katja pobjeđuje ako nakon Josipovog bojanja na ploči ostane neko polje crvene boje. Nađi najmanji n takav da Katja pobjeđuje neovisno o tome kako Josip igra.
13. Pijuni i topovi postavljeni su na šahovsku ploču dimenzija 2019×2019 tako da je na svakom polju najviše jedna figura. Pijun može vidjeti drugog pijuna ako se nalaze u istom retku ili stupcu te su sva polja između njih prazna. Nađi najveći broj p takav da se na ploču mogu postaviti p pijuna i $p + 2019$ topova tako da se nikoja dva pijuna međusobno ne vide.
14. Neka je n prirodan broj. Na ploču dimenzija $4n \times 4n$ postavljeno je $4n$ kamenčića tako da se u svakom retku i svakom stupcu nalazi točno jedan kamenčić. U svakom potezu, jedan kamenčić se horizontalno ili vertikalno pomakne na susjedno polje. Više kamenčića se može nalaziti na istom polju. Cilj igre je kamenčićima zauzeti sva polja jedne od dvije dijagonale ploče. Odredi najmanji broj $k(n)$ takav da se za bilo koji početni raspored kamenčića igra može završiti u najviše $k(n)$ poteza.

3.7 Zadaci za plavu grupu

3.7.1 C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Susreli smo se već s klasičnom matematičkom indukcijom - ako pokažemo dvije stvari: neka tvrdnja vrijedi za $n = 1$ (baza indukcije) i ukoliko tvrdnja vrijedi za n (pretpostavka indukcije), tada vrijedi i za $n + 1$ (korak indukcije), pokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n .

Klasična matematička indukcija ima svoje varijacije, a s nekima od njih susrest ćemo se na ovom predavanju:

1. Što ako želimo pokazati da nešto vrijedi za parne brojeve? U bazi indukcije dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$, a u koraku ćemo pokazati da ako tvrdnja vrijedi za n , tada vrijedi i za $n + 2$.
2. Za dokaz da tvrdnja vrijedi za $n + 1$ ponekad je potrebna pretpostavka da tvrdnja vrijedi za brojeve $1, 2, \dots, n$, a ne samo n . U tom slučaju koristimo tzv. **jaku indukciju** i u praksi nema razlike, jaka indukcija od klasične razlikuje se samo u pretpostavci.
3. Što ako primjerice znam pokazati da ako tvrdnja vrijedi za n , tada vrijedi i za $n - 1$, te da tvrdnja vrijedi za neki beskonačni niz prirodnih brojeva, recimo niz potencija broja 2? Tada **"regresivna" indukcija** govori da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Kada se malo razmisli, ima smisla zašto varijacije indukcije funkcioniraju, tj. zašto uz navedene korake i baze indukcije ipak pokažemo da tvrdnja vrijedi za (najčešće) sve prirodne brojeve.

Formalnija objašnjenja možete potražiti u [Online predavanju](#) ili brojnim drugim mjestima.

Lakši zadaci

1. Ako je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj, pokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
2. Dokažite da je $\underbrace{2 \dots 2}_n - 3^n + 1$ djeljivo brojem 7, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
3. Znamo da svaki prirodan broj n ima svoj kanonski zapis, odnosno postoji $k \in \mathbb{N}$, prosti brojevi $p_1, p_2, \dots, p_k$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tako da je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Dokažite da je broj djelitelja broja n jednak $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.
4. (a) Na pravcu je dano n različitih točaka. Na koliko dijelova one dijele pravac?
(b) U ravнини je dano n pravaca u općem položaju, tj. nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Dokažite da oni dijele ravninu na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ dijelova.
5. (a) Ako 1024×1024 šahovskoj ploči uklonimo jednom polje, pokažite da se dobivena "krnja" ploče može pokriti L-triominima, figurama od tri polja u obliku slova L.
(b) Može li se 3×2019 ploča pokriti L-triominima?

Teži zadaci

6. (a) Ako imate volje, pokažite (induktivno)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

gdje je F_n n -ti Fibonaccijev broj (zadovoljene su relacije: $F_1 = F_2 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$).

- (b) Na koliko načina možemo ploču $1 \times n$ popločati 1×1 i 1×2 pločicama?
- (c) Koliko ima podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji ne sadrže susjedne elemente?
- (d) Koliko ima n -teroznamenastih binarnih brojeva koji nemaju susjednih jedinica?

7. U nekoj državi između svaka dva grada postoji jednosmjerna željeznička pruga. Dokaži da postoji grad iz kojeg se može krenuti i vlakom obići svi drugi gradovi tako da se svaki grad posjeti točno jednom.
8. Je li moguće poredati brojeve $1, 2, \dots, 2019^{2019}$ u niz tako da se prosjek nikoja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih.
9. Neka je n neka potencija broja 2. Dokažite da u proizvoljnoj $(2n - 1)$ -torci različitih cijelih brojeva postoji n brojeva takvih da je njihov zbroj djeljiv s n .
10. Dokaži da postoji barem n različitih pravaca koji spajaju n nekolinearnih točaka u ravnini (svih n točaka ne leži na jednom pravcu).

Još teži zadaci

11. Skup T sadrži n različitih cijelih brojeva, a nijednom od tih brojeva apsolutna vrijednost nije veća od $n - 2$. Pokažite da postoje tri različita broja $a, b, c \in T$ takva da je $a + b = c$.
12. Svakom vrhu pravilnog mnogokuta pridružen je jedan od brojeva 0 i 1 i svim vrhovima nije pridružen isti broj. Koristeći dijagonale koje se međusobno ne sijeku osim u vrhovima, Ivica dijeli mnogokut na trokute, a zatim u svaki trokut upisuje zbroj brojeva pridruženih njegovim vrhovima. Dokažite da Ivica može odabrati dijagonale kojima će podijeliti mnogokut na trokute u koje će biti upisani brojevi 1 ili 2.
13. Točke $P_1, P_2, \dots, P_{2n-1}$ nalaze se na polukružnici polumjera 1 sa središtem u O . Dokažite da je

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{2n-1}}| \geq 1$$

.

3.7.2 N7: Diofantske jednadžbe - Ivan Sinčić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Neke od korisnih ideja kod rješavanja diofantskih jednadžbi su:

1. Promatranje ostataka pri dijeljenju s nekim brojem
2. Uvođenje najvećeg zajedničkog djelitelja (gcd) nekih dva broja
3. Pretpostavljanje uređaja brojeva kod simetričnih ili cikličnih jednadžbi (npr. jedan od danih brojeva je najveći pa pretpostavimo koji će to biti)
4. Beskonačni spust
5. Promatranje prostog djelitelja nekog broja
6. Pokazivanje da je u nekom slučaju jedna strana jednadžbe veća od druge

Zadaci

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi:

$$m^3 + n^3 = (m + n)^2$$

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

3. Odredi sve parove m, n prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$n! + 5 = m^3$$

4. Odredi sve prirodne n za koje postoji prost broj p takav da vrijedi:

$$n^4 + 4^n = p$$

5. Odredi sve cijele x, y koji zadovoljavaju:

$$15x^2 - 7y^2 = 9$$

6. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

7. Odredi sve parove x, y cijelih brojeva koji zadovoljavaju:

$$x^3 + 3 = 4y(y + 1)$$

8. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$a(a + 1) = b^c$$

9. Riješi u skupu prostih brojeva jednadžbu:

$$p^q + 1 = r$$

10. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

11. Odredi sve $a, b \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju:

$$(a^a)^5 = b^b$$

12. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

13. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + x^x = y^y$$

14. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu:

$$a^a + b^b + c^c = d^d$$

15. (Baltic Way 2011.) Odredi sve uređene parove (p, q) prostih brojeva za koje su $p^2 + q^3$ i $p^3 + q^2$ potpuni kvadrati.

16. (Vojtech izborni 2019.) Neka su $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\sigma$ svi djelitelji n . Odredite n ako znamo:

1. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$
2. $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

17. (Poljska 2005.) Odredi sve trojke (x, y, n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju $(x - y)^n = xy$.

3.7.3 G7: Fantomiranje - Katja Varjačić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Na ovom predavanju obrađujemo metodu fantomiranja u geometriji. Ta metoda se najčešće koristi pri dokazivanju nekog svojstva za točku T jednoznačno određenu određenim skupom poznatih svojstava. Postupak podrazumijeva definiranje nove točke T' sa svojstvom koje želimo dokazati te skupom svojstava među kojim su neka od poznatih (obično sva osim jednog). Ako za T' uspijemo dokazati i preostala poznata svojstva, onda smo dobili točku koja zadovoljava sva poznata svojstva (pa to mora biti T), ali koja zadovoljava i traženo svojstvo pa očito slijedi da je $T = T'$ i da ta točka zadovoljava svojstvo koje je trebalo dokazati.

Zadaci

1. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.
2. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da vrijedi $AB = AD$. Neka je T točka na dijagonali AC takva da $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Dokaži da vrijedi $AT + AC \geq AB + AD$.
3. Četverokut $ABCD$ je opisan oko kružnice k . Sjecište dijagonale AC i kružnice k koje je bliže točki A označimo s E . Neka je točka F diametralno suprotna točki E na kružnici k . Tangenta na k u točki F siječe prave AB i BC redom u točkama A_1 i C_1 te pravce AD i CD redom u točkama A_2 i C_2 . Dokažite $A_1C_1 = A_2C_2$.
4. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC . Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M , a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N . Neka je T presjek pravaca AQ i MN . Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC .
5. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I . Kružnica kroz B koja dodiruje AI u I siječe stranicu AB u P . Kružnica kroz C koja dodiruje AI u I siječe stranicu AC u Q . Dokaži da je PQ tangenta na upisanu kružnicu trokuta ABC .
6. U četverokutu $ABCD$ vrijedi $\angle B = \angle D = 60^\circ$. Neka je M polovište od AD . Pravac iz M paralelan s CD siječe BC u točki P . Točka X leži na CD tako da vrijedi $BX = MX$. Dokaži da vrijedi:

$$AB = BP \iff \angle MXB = 60^\circ$$

3.7.4 A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

(Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky / CSB nejednakost) Neka su a_i, b_i realni brojevi, $i = 1, \dots, n$, tada vrijedi:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

Lakši zadaci

1. Neka su $x, y, z > 0$ takvi da vrijedi $x + y + z = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1.$$

Kada se postiže jednakost?

2. Neka su $a, b, c > 0$. Dokažite:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

Kada se postiže jednakost?

3. Neka su $a_i, b_i > 0$. Dokažite:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq 4n^2$$

4. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi takvi da vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokažite nejednakost:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8.$$

Teži zadaci

5. Neka su $a, b, c > 0$ realni brojevi takvi da vrijedi $ab + bc + ca = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\sum \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Neka su $a, b, c > 0$ i $abc = 1$. Dokažite:

$$\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

7. Neka su $x, y, z > 0$, te vrijedi $xy + yz + zx = x + y + z$. Dokažite:

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} + \frac{1}{y^2 + z + 1} + \frac{1}{z^2 + x + 1} \leq 1$$

8. Neka su $a, b, c > 0$. Dokažite:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

9. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, te $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Dokažite:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + a_i^2} \leq \sqrt{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

3.7.5 C17: Teorija igara - Petra Brčić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Teorija igara bavi se formalnim proučavanjem strategijskih interakcija. Ima primjenu u ekonomiji, svim društvenim znanostima, informatici, logici, biologiji... Na ovom predavanju bavit ćemo se osnovama teorije igara.

”Sastojci” igre: igrači, strategije, isplate, informacije/vjerovanja, racionalnost

Strateške igre - engl. strategic/normal form games, (N, S, u) sa sljedećim svojstvima:

- $N = 1, 2, \dots, n$: konačan skup igrača
- $S_i \ni s_i$: skup čistih strategija igrača i
- $S = S_1 \times \dots \times S_n \ni s = (s_1, \dots, s_n)$: skup (čistih) strategijskih profila (engl. pure strategy profiles)
- $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j \ni s_{-i}$: (čisti) strategijski profili i -ovih suparnika
- $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$: funkcija isplativosti za igrača i ; $u = (u_1, \dots, u_n)$

Igrač $i \in N$ dobiva isplatu $u_i(s_1, \dots, s_n)$ kada je odigran profil $s = (s_1, \dots, s_n)$. Struktura igre je **opće znanje**.

Mješovite strategije (engl. mixed strategies): igrač odabire više strategija, svaku s nekom vjerojatnošću, oznaka $\sigma_i, \sigma \in \Delta(S_1) \times \dots \times \Delta(S_n)$: mješoviti strategijski profil gdje je $\Delta(X)$ skup razdioba vjerojatnosti na mjerljivom prostoru X

Iterativna dominacija

Strategija $s_i \in S$ je striktno dominirana strategijom $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ ako $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

- pretpostavljamo da je ”nijedan igrač ne igra striktno dominiranu strategiju” opće znanje;
- za svakog igrača brišemo striktno dominirane strategije, postupak ponavljamo dok ne ostanemo bez istih.

Najbolji odgovor - engl. best response

Strategija σ_i je najbolji odgovor vjerovanju $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ ako $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i}), \forall s_i \in S_i$

- za igrača je iracionalno izabrati strategiju koja nije najbolji odgovor nekom vjerovanju o strategijama protivnika;
- u konačnoj igri (S je konačan), strategija nije nikada najbolji odgovor ako i samo ako je striktno dominirana.

Nashova ravnoteža - engl. Nash equilibrium

Nashova ravnoteža je strategijski profil sa svojstvom da nijedan igrač ne može profitirati promjenom strategije.

Mješoviti strategijski profil σ^* je Nashova ravnoteža ako za svaki $i \in N$ vrijedi $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) > u_i(s_i, \sigma_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$.

- samoostvarujuće predviđanje, tj. ako svaki igrač vjeruje da će svi ostali odigrati Nash onda će se odigrati upravo Nash.

Uvodni zadaci

1. Svaki igrač bira broj $[1, 100]$. Pobjednik je igrač čiji je broj najbliže $2/3$ prosjeka svih brojeva. Pronađite dominirane strategije i Nashovu ravnotežu. Zašto se u većini slučajeva ne odigra Nash? Kako predviđate da će se promijeniti rezultati igre ako ju ponavljamo s istim igračima?
2. Prisoners' dilemma
Dva zatvorenika koja ne mogu komunicirati moraju izabrati hoće li izdati partnera. Isplate su dane u matrici. Kako će postupiti zatvorenici? Postoji li ishod koji je društveno bolji? Kako će zatvorenici postupiti ako mogu komunicirati prije odabira?

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

3. Battle of the sexes

Dva prijatelja žele otići na koncert. Imaju dva izbora: Bach ili Stravinsky. Jednome je draži Bach, a drugome Stravinsky. Ako otiđu na različite koncerte podjednako su nesretni bez obzira koji je koncert. Pronađi Nashovu ravnotežu.

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

4. Matching pennies

Dva igrača istovremeno biraju hoće li pokazati pismo ili glavu. Ako oboje pokažu istu stranu, pobjeđuje prvi igrač, a u suprotnom drugi. Pronađi Nashovu ravnotežu.

	G	P
G	1,-1	-1,1
P	-1,1	1,-1

5. Stag hunt

Dva lovca imaju dvije opcije: pokušati uloviti jelena ili uloviti zeca. Ako oba lovca pokušaju uloviti jelena, onda ga uspiju uloviti te ga dijele podjednako. Ako bilo koji lovac odluči uloviti zeca, uloviti će ga ali jelen će pobjeći. Svaki lovac preferira uloviti jelena. Pronađi Nashovu ravnotežu. Pomaže li komunikacija da se ostvari bolji ishod?

	S	H
S	2,2	0,1
H	1,0	1,1

6. Hawk-dove

Dvije životinje se bore oko plijena. Svaka može biti pasivna ili agresivna. Svaka preferira biti agresivna kada je druga pasivna i pasivna kada je druga agresivna. Svaka životinja preferira kada je druga pasivna. Prikažite igru kao matricu i pronađite Nashovu ravnotežu.

7. Pronađi Nashovu ravnotežu koristeći najbolje odgovore.

	L	C	R		L	C	R
T	1, 2	2, 1	1, 0	T	2, 2	1, 3	0, 1
M	2, 1	0, 1	0, 0	M	3, 1	0, 0	0, 0
B	0, 1	0, 0	1, 2	B	1, 0	0, 0	0, 0

Zadaci

- Dva se kandidata natječu na izborima. Biraju svoju cjelobrojnu poziciju na intervalu $[1,10]$ (1 predstavlja radikalno lijevo, a 10 radikalno desno). Pretpostavimo da se na svakoj cjelobrojnoj poziciji nalazi 10% glasača. Glasaci glasaju za kandidata čija je pozicija najbliže njihovoj. Ukoliko su oba kandidata jednako udaljena od glasača, polovica glasa za prvog, a polovica za drugog. Kandidatima je u cilju pridobiti što više glasača. Kako će kandidati postupiti?
- Svatko od n ljudi bira hoće li ili ne svojim trudom pridonijeti ostvarenju zajedničkog cilja. Da bi se cilj ostvario potrebno je da sudjeluje barem k ljudi, $2 \leq k \leq n$. Svaka osoba rangira ishode od najpoželjnijeg do najgoreg u ovom redoslijedu: (i) svaki ishod gdje se cilj ostvari, a osoba nije uložila rad, (ii) svaki ishod gdje se cilj ostvari i osoba je uložila rad, (iii) svaki ishod gdje se cilj ne ostvari i osoba nije uložila rad, (iv) svaki ishod gdje se cilj ne ostvari, a osoba je uložila rad. Pronađi Nashovu ravnotežu.
- Dva kandidata A i B natječu se na izborima. Od n građana k podržava kandidata A, a $m (= n - k)$ podržavaju kandidata B. Svaki građanin bira hoće li glasati, s nekom cijenom, ili ne. Građanin koji ne glasa profitira s 2 jedinice ako pobijedi kandidat kojeg podržava, s 1 jedinicom ako je izjednačeno ili s 0 ako izgubi. Građanin koji glasa u ova tri slučaja profitira s $2 - c$, $1 - c$, $-c$ gdje je $0 < c < 1$.
 - Za $k = m$ pronađite skup Nashovih ravnoteža.
 - Za $k < m$ pronađite skup Nashovih ravnoteža.
- Dvoje ljudi želi međusobno podijeliti 10 kn. Koriste sljedeći proces. Svaka osoba kaže broj kuna (ne veći od 10). Ako je zbroj tih brojeva najviše 10, svaka osoba dobiva broj kuna koji je rekla (ostatak je uništen).

Ako je zbroj veći od 10, a osobe su rekle različite brojeve, osoba koja je rekla manji broj dobiva taj iznos, a druga osoba ostatak. Ako je zbroj veći od 10, a osobe su rekle jednake brojeve tada svaka osoba dobiva 5 kn. Pronađi Nashovu ravnotežu.

12. Dvije osobe su u nekakvoj vezi. Ako obje osobe ulože više napora u vezu, obje profitiraju. Neka je razina napora za pojedinu osobu a_i , $i = 1, 2$, a profit $u_i = a_i(c + a_j - a_i)$ gdje je $c > 0$ konstanta. Pronađi najbolje odgovore i Nashovu ravnotežu.
13. Pronađi mješovite Nashove ravnoteže u Matching pennies i Battle of the sexes.
14. Second-price sealed-bid auction
Na aukciji sudjeluje n kupaca (ponuditelja). Pobjeđuje kupac koji ponudi najviši iznos te plaća predmet po cijeni drugog najvišeg ponuđenog iznosa. Igrač i procjenjuje da je predmet vrijednosti v_i . Ako igrač i ponudi najviši iznos b_i tada mu je isplata $v_i - b_j$ gdje je b_j drugi najviši ponuđeni iznos. Pronađi Nashove ravnoteže.
15. First-price sealed-bid auction
Na aukciji sudjeluje n kupaca (ponuditelja). Pobjeđuje kupac koji ponudi najviši iznos te plaća predmet po cijeni tog iznosa. Pronađi Nashove ravnoteže.

3.8 Zadaci za ljubičastu grupu

3.8.1 C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Tekst.

Lakši zadaci

1. Na zabavi se nalazi 10000 ljudi. U nekom trenutku neke su se osobe počele rukovati. Dokažite da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
2. 20 realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki. (Brojevi a i b su takvi da se između njih nalazi točno jedan broj, njihova aritmetička sredina.)
3. U ravнини se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.
4. Od 2019 točaka u ravнини nikoje tri ne čine trokut površine veće od 1. Dokažite da se sve te točke mogu prekriti trokutom površine ne veće od 4.

Teži zadaci

5. Nađite sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbe:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2).$$

6. Unutar kruga polumjera 1 nalazi se n različitih točaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$). Za $i = 1, 2, \dots, n$ neka d_i označava udaljenost od A_i do najbliže od preostalih točaka. Dokaži da vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 \leq 16.$$

7. Na teniskom turniru sudjeluje n igrača, te igraju svaki sa svakim. Igrač A je "bolji" od igrača B ako ga je direktno pobijedio ili ako postoji igrač C kojeg je A pobijedio, te C pobijedio igrača B . Igrač koji je bolji od svih ostalih osvaja nagradu. Ako na kraju turnira imamo najviše jednu nagradu, dokažite da postoji igrač koji je direktno pobijedio sve ostale.
8. U ravнини je dan skup A koji sadrži 2016 točaka tako da nikoje četiri točke iz skupa A ne leže na istom pravcu. Dokaži da je moguće odabrati podskup $B \subset A$ koji sadrži barem 63 točke tako da nikoje tri točke iz skupa B ne leže na istom pravcu.

3.8.2 N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Za početak evo formalnog zapisa

Chinese Remainder Theorem (Kineski teorem o ostacima)

Neka su $m_1, m_2, \dots, m_k$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi, sustav linearnih kongruencija

$$x \equiv x_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv x_2 \pmod{m_2}$$

...

$$x \equiv x_k \pmod{m_k}$$

ima jedinstveno rješenje za x modulo $m_1 m_2 \dots m_k$

Značaj gornjeg teorema je u tome što je on formalizacija intuitivnog zaključka. Što ne znači da je teorem beskoristan, njegova moć je upravo u tome što intuitivan zaključak koji bi inače bio škakljiv za zapisati ovako stane u tri slova. Kroz zadatke ćemo se upoznati sa raznim oblicima koji CRT može preuzeti, a uglavnom su u funkciji *konstrukcije* ili *destrukcije*.

S jedne strane ćemo imati pristup brojevima, najčešće ogromnim brojevima, kojima ćemo zadati određena željena svojstva i tako konstruirati jedinstveno rješenje.

S druge strane možemo reducirati bilo koji izraz modulo N na izraz modulo svake proste potencije broja N , i tako pojednostavniti zadatak.

Zadaci

1. Riješi sljedeći sustav kongruencija $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$
2. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n uzastopnih prirodnih brojeva među kojima nema potencije prostog broja.
3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Odredi koliko brojeva $x \in 1, 2, \dots, n$ zadovoljavaju jednadžbu $x^2 \equiv x \pmod{n}$.
4. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje pairwise relativno prosti prirodni brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, svi strogo veći od 1, tako da je $a_0 a_1 a_2 \dots a_n - 1$ umnožak dva uzastopna prirodna broja.
5. Neka je točka sa cijelobrojnim koordinatama "vidljiva" ako je najveći zajednički djelitelj njenih koordinata jedan. Dokaži da postoji 100×100 kvadrat koji ne sadrži niti jednu "vidljivu" točku.
6. Dokaži da za neki $c \in \mathbb{Z}$ i prosti p , kongruencija $x^x \equiv c \pmod{p}$ ima rješenje.
7. Dokaži da za bilo koji $k \in \mathbb{N}$, postoji aritmetički niz

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$$

racionalnih brojeva, gdje su a_i i b_i relativno prosti za svaki $i = 1, 2, \dots, k$, i $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ međusobno različiti brojevi.

8. Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ takve da 3 dijeli $2^n - 1$ i $\frac{2^n - 1}{3}$ dijeli $4m^2 + 1$ za neki $m \in \mathbb{N}$

3.8.3 G8: Kolinearnost i konpuktalnost - Luka Kraljević

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Kroz par klasičnih primjera i poznatijih konfiguracija, pokazat ćemo osnovne pristupe prema rješavanju zadataka u kojima se traži kolinearnost ili konpuktalnost.

- **(Simson)** Neka je ABC trokut i P bilo koja točka na opisanoj kružnici $\triangle ABC$. Neka su X, Y, Z nožišta okomica iz P na pravce BC, CA i AB . Dokaži da su točke X, Y, Z kolinearne.
[Za neke zadatke je dovoljan samo pametan Angle chase](#)

Upoznat ćemo se i sa uporabom potencije točke za ovakve tvrdnje. Točnije sa radikalnom osi i radikalnim centrom. Radikalna os dviju kružnica je skup točaka P takve da je potencija točke P na prvu kružnici jednak potenciji P na drugu. Radikalni centar je sjecište radikalnih osi tri kružnice.

[Ukoliko prepoznamo prave kružnice u zadatku, radikalna os nam može poslužiti kao pomoć u dokazivanju kolinearnosti. Dok radikalni centar može preuzeti ulogu sjecišta triju pravaca i time riješiti problem konpuktalnosti.](#)

Kada sintetički pristupi propadnu ili nam postavka problema pruža informacije o duljinama korisno je uzeti u obzir sljedeća dva teorema:

- **Ceva** Neka su AX, BY, CZ čeviane trokuta ABC . Tada su one konpuktalne akko

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

- **Menelaj** Neka su X, Y, Z točke na pravcima BC, CA, AB u trokutu ABC različite od vrhova tog trokuta. Tada su X, Y, Z kolinearni akko

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$$

[Ovdje dužina \$MN\$ označava usmjerenu dužinu od \$M\$ prema \$N\$, odakle dolazi značaj isticanja \$-1\$ u Menelajevom teoremu.](#)

Jedna od metoda je homotetija, jednom kada se uklopi u zadatak obično proizlaze vrlo lijepa rješenja. Evo zato dva primjera za kolinearnost i konpuktalnost

- **(Eulerov pravac)** Dokaži da centar opisane O , ortocentar H i težište G leže na jednom pravcu. Centar kružnice devet točaka N_9 također leži na ovom pravcu
- Neka su D, E, F dirališta upisane kružnice (centar I) sa stranicama BC, AC, AB trokuta $\triangle ABC$ i M polovište stranice BC . Dokaži da su pravci AM, DI, EF konkurentni.

Sljedeći zadaci nastojat će proširiti ovu biblioteku pristupa prema kolinearnosti i konpuktalnosti. Sretno s rješavanjem!

Zadaci

1. Neka je H ortocentar, a AA_0 promjer opisane kružnice trokuta ABC . Ako je M polovište stranice BC , dokaži da su točke A_0, M i H kolinearne.
2. Neka su X i Y sjecišta kružnica ω_1 i ω_2 . Neka je l_1 pravac kroz središte ω_1 koji siječe ω_2 u P i Q . Neka je l_2 pravac kroz centar ω_2 koji siječe ω_1 u točkama R i S . Dokaži da ako P, Q, R i S leže na istoj kružnici, centar te kružnice mora ležati na pravcu XY .
3. Neka je ABC trokut s centrom upisane I i s centrom A -pripisane I_A , i neka su D i X pripadne točke tangenosti na BC . Dokaži da se pravci DI_A i XI sijeku na polovištu visine iz A .
4. Neka je A_1 center kvadrata upisanog u šiljastokutni trokut. Sa dva vrha kvadrata na BC . Točke B_1, C_1 su definirane na sličan način za upisane kvadrate sa dva vrha na stranicama AC i AB , redom. Dokaži da su pravci AA_1, BB_1, CC_1 konkurentni.

5. Na pravcima BC , CA i AB redom su odabrane kolinearne točke A_1, B_1 i C_1 . Neka je A_2 točka koja leži na BC i na pravcu simetričnom pravcu AA_1 s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$. Analogno su definirane B_2 i C_2 . Dokaži da A_2, B_2 i C_2 leže na istom pravcu
6. Dan je $\triangle ABC$. Točke D, E, F su na simetralama BC, CA, AB redom. Pokaži da su pravci kroz A, B, C okomiti na EF, FD, DE redom, kopunktalni.
7. Neka je ABC akutni trokut sa ortocentrom H i neka je W točka na strani BC , između B i C . Točke M i N su nožišta okomica iz B i C , redom. Ω_1 je kružnica opisana $\triangle BWN$ i X točka takva da je WX promjer Ω_1 . Slično, Ω_2 je opisana $\triangle CWM$ i Y točka takva da je WY promjer Ω_2 . Dokaži da su X, Y, H kolinearne.
8. U trokutu ABC , I je centar upisane a D, E, F su dirališta upisane sa BC, CA, AB redom. Pravci EF i BC se sijeku u K . Dokaži da $AD \perp IK$
9. Dane su četiri različite točke A, B, C, D na pravcu, u tom redoslijedu. Kružnice promjera AC i BD se sijeku u točkama X i Y . Pravac XY siječe BC u Z . Neka je P točka na pravcu XY različita od Z . Pravac CP siječe kružnicu sa promjerom AC u C i M , i pravac BP siječe kružnicu promjera BD u B i N . Dokaži da su AM, DN i XY konkurentni pravci.

3.8.4 A8: Uvod u funkcijske jednačbe - Krunoslav Ivanović

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Za početak, trebamo se upoznati s nekim temeljnim pojmovima o funkcijama.

- **injektivnost** - za funkciju $f: X \rightarrow Y$ kažemo da je injekcija ako

$$f(a) = f(b) \implies a = b,$$

odnosno, funkcija za različite vrijednosti iz X postiže različite vrijednosti iz Y .

- **surjektivnost** - za funkciju $f: X \rightarrow Y$ kažemo da je surjekcija ako za svaki $y \in Y$ postoji $x_0 \in X$ takav da je $f(x_0) = y$, odnosno, ako funkcija postiže sve vrijednosti iz kodomene.
- **bijektivnost** - za funkciju $f: X \rightarrow Y$ kažemo da je bijekcija ako je ujedno i surjekcija i injekcija

Standardne strategije prilikom rješavanja funkcijskih jednačbi uključuju uvrštavanje različitih uređenih parova (a, b) u početnu funkcijsku jednačbu te iskorištavanje svojstava dobivenih takvim uvrštavanjima. Čest primjer u lakšim zadacima jest uvrštavanje parova poput $(x, y) = \{(0, y), (0, 0), (x, 1), (y, x)\}$ i dr.

Cauchyeva funkcijska jednačba

Pronađi sve funkcije $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takve da za sve racionalne brojeve x i y vrijedi (Cauchyeva funkcijska)

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Iskorištavanje asimetrije

Pronađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi (Državno, 4.r. 2016.)

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

Skraćivanje jednakih stvari

Pronađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi (David Yang)

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

Supstitucije

Pronađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi (Singapur 1999.)

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

"Pointwise trap"

Pronađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi (Demonstracijski primjer)

$$f(x)^2 + y^2 f(y) = x^4 + y^4$$

Zadaci

Zadaci nisu poredani po težini izuzev zadnja dva koji su najteži.

1. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xf(y)) + f((f(x) + f(y))) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

2. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + 2y) = 2f(x)f(y).$$

3. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve m i n vrijedi

$$f(2m) + 2f(n) = f(f(m + n)).$$

4. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

5. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2f(y) + y^2f(x).$$

6. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

7. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$

8. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(f(x) + (y - x)f(y)) = 4x + 2yf(y) - 2xf(y).$$

9. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve m i n vrijedi

$$f(m + n) = f(m) + f(n) + mn.$$

10. $\mathbb{Q}^+$ je skup svih pozitivnih racionalnih brojeva i neka je $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow (\alpha, +\infty)$ takve da za sve pozitivne racionalne brojeve x i y vrijedi

$$f\left(\frac{x + y}{\alpha}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{\alpha}.$$

11. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve m i n vrijedi

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

3.8.5 C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U određenim zadacima susrećemo se sa "operacijom" koju moramo iznova i iznova primjenjivati na problem. Tada, često je korisno potražiti svojstvo koje ta "operacija" ne mijenja. Takvo nepromijenjeno svojstvo nazivamo invarijantom. Dakle, invarijanta je veličina koja tijekom nekog procesa ostaje nepromijenjena. Ideja invarijante provlači se kroz razna područja matematike, područja poput geometrije, algebre, topologije i diskretne matematike. Princip invarijante je često izrazito koristan alat pri analiziranju konačnog rezultata nekog procesa jer možemo odbaciti bilo koji potencijalni rezultat kojem invarijanta ima različitu vrijednost od one koju mi moramo postići.

Uvodni zadaci

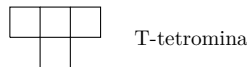
1. Brojevi 1, 0, 1, 0, 0, 0 poredani su u krug (u tom redoslijedu). Smijemo povećati dva susjedna broja za 1. Može li se postići da su svi brojevi u krugu jednaki?
2. Na nekoj hrpi se nalazi 1001 kamenčić. U jednom koraku odstranimo jedan kamenčić s neke hrpe te preostale kamenčiće podijelimo u dvije hrpe. Je li moguće nakon određenog broja takvih koraka dobiti nekoliko hrpa koje sve imaju po tri kamenčića?
3. Može li se ploča 10×10 od koje su izrezana dva nasuprotna kutna polja popločati pravokutnim pločicama tipa 1×2 (dominima)?

Invarijante

4. Pacman se kreće po cjelobrojnoj mreži po sljedećim pravilima: iz točke (x, y) može se pomaknuti u neku od točaka (y, x) , $(3x, -2y)$, $(-2x, 3y)$, $(x + 1, y + 4)$ i $(x - 1, y - 4)$. Pokaži da ako krene iz $(0, 1)$ nikad ne može stići u $(0, 0)$.
5. Na otoku Velika Hrid živi 8 plavih, 10 crvenih i 12 zelenih kameleona. Kada se susretnu dva kameleona različitih boja, oni mijenjaju svoje boje u treću boju. Može li se dogoditi da, poslije izvjesnog broja susreta, svi kameleoni budu istobojni?
6. Neka je n prirodan broj i imamo sortiranu listu $(1, 2, 3, \dots, n)$. U svakom koraku dozvoljeno je uzeti 2 različita broja i zamijeniti im pozicije. Je li moguće dobiti početnu listu nakon 2009 koraka?

Bojanja

7. Je li moguće ploču dimenzije 10×10 popločati s 25 domina dimenzija 4×1 ?
8. Pod pravokutnog oblika je pokriven pločama dimenzija 2×2 i 4×1 . Ako se jedna od tih ploča razbije i zamijenimo je pločom druge vrste, dokažite da se pod više ne može popločati.
9. Može li se ploča 10×10 pokriti pločicama (tetrominima) sljedećeg oblika?



10. Može li skakač obići svako polje ploče 4×8 točno jednom i vratiti se na početno polje?

3.9 Zadaci za magenta grupu

3.9.1 C9: Indukcija (turbo) - Josip PupiĆ

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Matematička indukcija je metoda dokazivanja kojom pokazujemo da neka tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve (nekog oblika, tj. iz nekog podskupa od $\mathbb{N}$). Rješavanje ovog predavanja podrazumijeva upoznatost s metodom te raniju višestruku primjenu metode prilikom rješavanja matematičkih problema. Iz tog razloga nećemo objašnjavati metodu, već odmah prelazimo na zadatke.

Zadaci

- Formula vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da formula obiđe stazu. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obiđe cijelu stazu.
- Za matricu dimenzija $n \times n$ kažemo da je *srebrna* ako su joj svi elementi iz skupa $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, te za svaki $i = 1, \dots, n$ svi elementi u i -tom retku i i -tom stupcu zajedno čine skup S . Dokaži da
 - ne postoji srebrna matrica za $n = 2019$.
 - postoji srebrna matrica za beskonačno mnogo n .
- Na otoku živi n domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. Ogrlica može biti i bez kamenja. Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ različitih vrsta kamenja, i da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.
- Na konačnom grafu G dozvoljeno je provoditi sljedeće operacije:
 - Odabrati vrh neparnog stupnja i ukloniti ga (zajedno sa svim bridovima koji iz njega izlaze).
 - Dodati po jednu kopiju I' svakog vrha I grafa G , povezati kopiju I' s originalnim vrhom I , te povezati kopije I' i J' ako i samo ako su originalni vrhovi I i J povezani u G .
 Dokaži da se (počevši od bilo kojeg konačnog grafa G primjenom dozvoljenih operacija može dobiti graf u kojem nikoja dva vrha nisu povezana.
- Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.
- Nekoliko identičnih kvadratnih papirića obojanih u n različitih boja se nalazi na pravokutnom stolu i to tako da su im stranice paralelne stranicama stola. Među svakih n papirića koji su svi različite boje postoje neka 2 koje je moguće pribosti na stol koristeći 1 pribadaču. Dokažite da se svi kvadratići pojedine boje mogu pribosti na stol koristeći $2n-2$ pribadača.

3.9.2 N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Bavit ćemo se zadacima iz teorije brojeva koji na prvi pogled nemaju neku jasno vidljivu i opipljivu strukturu, nego do iste treba doći isprobavanjem mnoštva malih slučajeva, naslućivanjem odgovora i dokazivanjem istog.

Naravno, u dokazivanju je jako često korisna indukcija, Većinu zadataka povezuje to što se u njima spominju neke aritmetičke funkcije pa prođimo kroz osnovna svojstva tih funkcija.

Eulerova φ funkcija

Ova funkcija broji koliko je prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti s n .

Za svaka 2 relativno prosta broja m i n vrijedi $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Postoji i formula; za $n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$ vrijedi

$$\varphi(n) = p_1^{e_1-1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Broj djelitelja- $\tau(n)$

Ova funkcija broji broj pozitivnih djelitelja od n .

Za svaka 2 relativno prosta broja m i n vrijedi $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

Postoji i formula; za $n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$ vrijedi

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \cdot \dots \cdot (e_k + 1).$$

Još jedan rezultat koji ćemo ponegdje koristiti je rezultat iz beskonačne teorije grafova.

Koenigova lema

Neka je G beskonačan povezan graf u kojem je svaki čvor konačnog stupnja. Tada u njemu postoji beskonačan jednostavan put (put u kojem se vrhovi ne ponavljaju).

Najvažnija (i nama jedina korisna) klasa beskonačnih grafova koji zadovoljavaju ovaj uvjet su beskonačna stabla.

Zadaci

1. Postoji li 2019 prirodnih brojeva $a_1 < a_2 < \dots < a_{2019}$ takvih da $\gcd(a_i, a_j) = a_j - a_i$ za sve indekse i, j takve da $1 \leq i < j \leq 2019$?
2. Odredi sve parove prirodnih brojeva (n, k) za koje postoji prirodan broj s takav da ns i ks imaju isti broj djelitelja.
3. Odredi sve prirodne brojeve n takve da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji m takav da vrijedi

$$\varphi^k(m) = n,$$

gdje φ^k označava funkciju φ primijenjenu k puta.

4. Odredi sve prirodne brojeve m za koje postoji prirodan broj n takav da je $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = m$.
5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji n cijelih brojeva $a_1, \dots, a_n$ takvih da vrijedi

$$n = a_1 + \dots + a_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

6. Neka je $\tau(n)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja n . Dokaži da postoji beskonačno prirodnih brojeva a takvih da ne postoji prirodan broj n za koji je $\tau(an) = n$.
7. Dokaži da niz $a_k = \left\lfloor \frac{2^k}{k} \right\rfloor$ sadrži beskonačno mnogo neparnih brojeva.
8. Dokaži da za svaki $n \geq 2$ postoji n prirodnih brojeva $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ za koje vrijedi

$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \dots > \varphi(a_n).$$

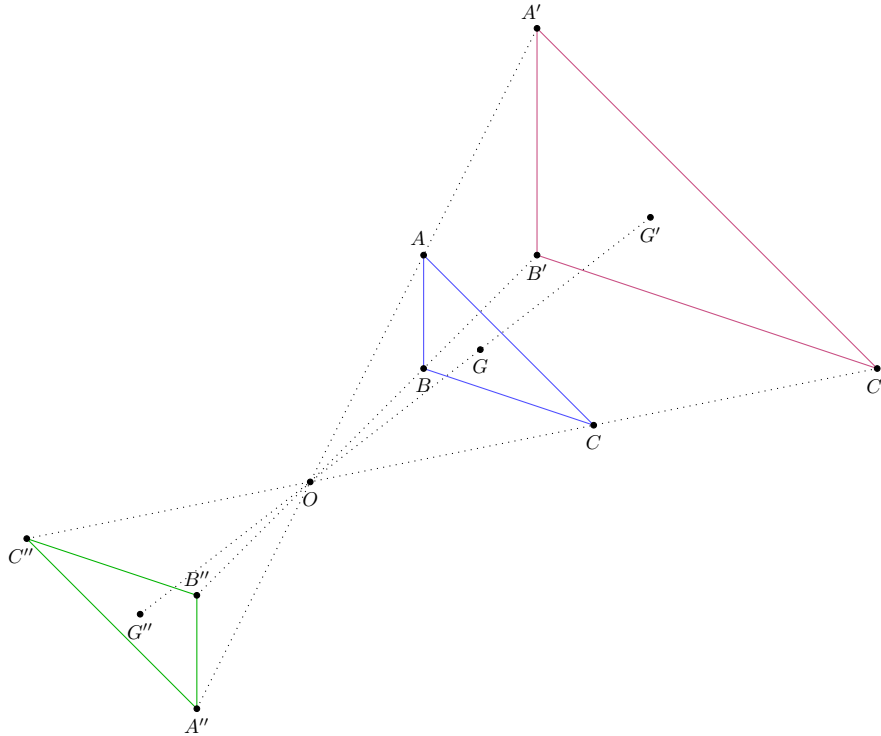
3.9.3 G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Homotetija

Formalno, homotetija s koeficijentom k , $k \in \mathbb{R}$ iz centra O je preslikavanje ravnine koje svaku točku T šalje u neku točku T^* tako da vrijedi $\overrightarrow{OT^*} = k \cdot \overrightarrow{OT}$ gdje su dužine usmjerene. Neformalno, o homotetiji možemo razmišljati kao transformaciji koja fiksira jednu točku, centar homotetije, te iz nje stežemo ili istežemo ravninu. Na slici je dan jednostavan primjer dvaju homotetija iz centra O koje trokut ABC transformiraju s koeficijentom 2 i -1 .



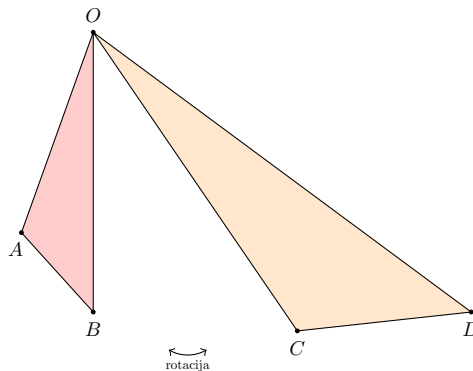
U svrhu jednostavnosti, sliku nekog objekta p pod nekom homotetijom $\mathcal{H}(O, k)$ ćemo označavati s $\mathcal{H}(p)$. Unatoč tome što je transformacija jednostavna, javlja se veliki skup jednostavno dokazivih posljedica:

- Točke O, T i T^* su kolinearne.
- Ako su pravci p i q paralelni, onda su i pravci $\mathcal{H}(p)$ i $\mathcal{H}(q)$.
- Ako su A, B i C neke točke u ravnini, onda $\angle(AB, BC) = \angle(\mathcal{H}(AB), \mathcal{H}(BC))$, odnosno, homotetija očuvava kuteve.
- Homotetija očuvava tangენტnost između pravaca i kružnica, odnosno, kružnica i kružnica.
- Svaka homotetija ima jedinstvenu inverznu homotetiju, odnosno $\mathcal{H}(O, k)^{-1} = \mathcal{H}(O, \frac{1}{k})$.
- Vrijedi $d(\mathcal{H}(\overline{AB})) = k \cdot d(\overline{AB})$.
- Kompozicija dvaju homotetija $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ je homotetija osim ako $k_1 \cdot k_2 = 1$.
- Ako imamo dva nesukladna trokuta ABC i $A'B'C'$ takve da je $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ i $CA \parallel C'A'$, postoji homotetija $\mathcal{H}$ koja šalje trokut $ABC \mapsto A'B'C'$.

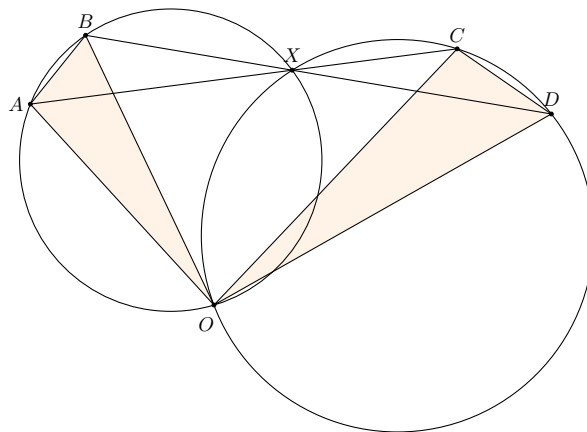
Sve prethodne činjenice su lako dokazive koristeći ili Kartezijev koordinatni sustav ili Gaussovu ravninu te ih zbog toga ovdje nećemo dokazivati.

Spiralna sličnost

Spiralna sličnost je kompozicija rotacije i homotetije iz istog centra.



Način za dobiti centar spiralne sličnosti koja šalje dužinu $\overline{AB}$ u dužinu $\overline{CD}$ jest da presiječemo pravce AC i BD te nacrtamo kružnice (ABX) i (XCD) kao na slici. Točka O koja je presjek tih kružnica je centar spiralne sličnosti te za trokute OAB i OCD kažemo da su spiralno slični. Također se da pokazati da su i trokuti OAC i ODB spiralno slični.



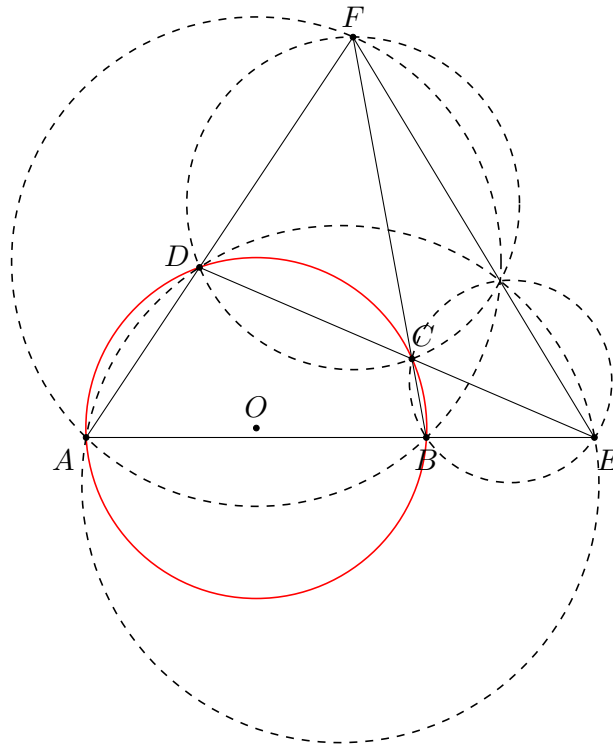
S obzirom da se dokaz svodi isključivo na angle chasing, nepotrebno ga je ovdje zapisivati. U kontekstu kompleksnih brojeva, centar spiralne sličnosti koja šalje a i b u c i d možemo dobiti na sljedeći način:

$$\frac{c - o}{a - o} = \frac{d - o}{b - o}$$

iz čega sređivanjem dobijemo

$$o = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

Oдавde možemo vidjeti da spiralna sličnost koja šalje AB u CD ne postoji ako i samo ako je $a + d = b + c$, odnosno, ako je $ABDC$ paralelogram. U suprotnome, postoji jedinstvena spiralna sličnost. Moć spiralne sličnosti se najviše vidi u Miquelovoj konfiguraciji koju ćemo ovdje samo nakratko spomenuti i istaknuti neka najvažnija svojstva.



U sljedećoj konfiguraciji ($ABCD$ tetivan, $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$) vrijede sljedeće stvari:

- Kružnice (ABE) , (ADE) , (BCE) i (CDF) su kopunktalne u nekoj točki M (točku M nazivamo Miqueolovom točkom)
- Točka M je na pravcu EF
- Točka M je centar spiralne sličnosti koja šalje AB u CD te spiralne sličnosti koja šalje BC u DA
- Točka M je presjek kružnica (OAC) i (ODB)

Naravno, u danoj konfiguraciji vrijede još neke stvari, no one izlaze iz područja ovog predavanja te bi svoje mjesto našle na predavanju iz projektivne geometrije ili inverzije.

Homotetija

1. Dan je trokut ABC . r_A je pravac koji prolazi kroz polovište stranice $\overline{BC}$ i okomit je na unutrašnju simetralu kuta $\angle BAC$. r_B i r_C su analogno definirani. Neka su H i I ortocentar i centar upisane kružnice trokuta ABC , redom. Pretpostavimo da pravci r_A , r_B i r_C čine trokut. Dokaži da je centar opisane kružnice tog trokuta polovište dužine HI .
2. Dvije kružnice jednakih radiusa, ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama X_1 i X_2 . Kružnica ω dira kružnicu ω_1 izvana u točki T_1 i kružnicu ω_2 iznutra u točki T_2 . Dokaži da se pravci X_1T_1 i X_2T_2 sijeku u točki koja leži na kružnici ω .
3. Kružnica ω_1 prolazi kroz vrh A paralelograma $ABCD$ i dira polupravce CB i CD . Kružnica ω_2 dira polupravce AB i AD te kružnicu ω_1 izvana u točki T . Dokaži da točka T leži na pravcu AC .
4. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je D nožište visine iz vrha A . Neka su R i Q redom težišta trokuta ABD i ACD . Neka je P točka na dužini $\overline{BC}$ takva da je $P \neq D$ i da su točke P, Q, R i D konciklične. Dokaži da su pravci AP , BQ i CR konkurentni.

5. Γ i ω su kružnice takve da ω dira Γ iznutra u točki T . Neka je AB tetiva kružnice Γ koja dira ω u točki P . Dokaži da pravac TP raspolavlja luk AB kružnice Γ .
6. U trokutu ABC diralište upisane kružnice s stranicom BC je D , a diralište A -pripisane kružnice s BC je E . Neka je X dijametralno suprotna točki D s obzirom na upisanu kružnicu. Dokaži da su točke A, X i E kolinearne.
7. Kvadrat $PQRS$ upisan je u kružnicu. Iz točke A van te kružice povučene su tangente na kružnicu koje pravac PR sijeku u točkama K i L . Pravci AQ i AS sijeku pravac PR redom u točkama M i N . Dokažite da je $|KM| = |LN|$.

Spiralna sličnost

8. Točke X i Y su na produžecima stranica AB i AC preko vrhova B i C takve da je $BX = CY$. Kružnice (AXC) i (AYB) se sijeku u A i Z . Dokaži da točka Z leži na simetrali kuta $\angle CAB$.
9. $ABCD$ je jednakokračan trapez takav da je $AB \parallel CD$. ω je kružnica koja prolazi kroz C i D te siječe CA i CB u točkama A_1 i B_1 . Točke A_2 i B_2 su simetrične točkama A_1 i B_1 s obzirom na polovišta stranica CA i CB . Dokaži da su točke A, B, A_2 i B_2 konciklične.
10. Neka je N polovište luka ABC opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ i neka su NP i NT tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC (P i T su na upisanoj kružnici). Pravci BP i BT sijeku kružnicu (ABC) u točkama P_1 i T_1 . Dokaži da je $PP_1 = TT_1$.
11. Dan je trokut ABC i točka M koja je polovište stranice AC . Kružnica ω prolazi kroz točke B i M te siječe stranice AB i BC u točkama P i Q . T je točka takva da je $BPTQ$ paralelogram. Pretpostavimo da je točka T na kružnici (ABC) . Odredi sve moguće vrijednosti $\frac{BT}{BM}$.
12. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut takav da je $AB \neq AC$. H je ortocentar trokuta ABC i M je polovište stranice BC . Točke D na stranici AB i E na stranici AC su takve da je $AE = AD$ i točke D, H, E su kolinearne. Dokaži da je pravac HM okomit na radikalnu os kružnica opisanih trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$.

3.9.4 A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Bavit ćemo se zadacima koji su, ako bismo ih pokušali klasificirati po području, negdje između algebre i kombinatorike. Prođimo kroz osnovne ideje/činjenice koje će nam trebati.

Uređaj i princip ekstrema

Ideja koja nam često može 'besplatno' dati neka svojstva je promatranje maksimalnih elemenata po nekom uređaju koji nam u tom trenutku treba. Naravno, najčešće promatramo realne brojeve uz standardni uređaj.

Brojanje na dva načina

Neka je S konačan skup s m realnih brojeva i recimo da promatramo izraz

$$t_1 + \dots + t_n,$$

gdje je n prirodan a t_i su elementi S . Tada je često korisno pokušati tu sumu zapisati (ili ograničiti) u obliku

$$e_1x_1 + \dots + e_mx_m,$$

gdje su $x_1, \dots, x_m$ različiti elementi S , a e_i nenegativni cijeli brojevi. Naravno, ne mora se raditi o sumi, ovo je samo primjer. Poanta je u *reinterpretaciji* izraza.

Promatranje slike funkcije

Kod rješavanja funkcijskih jednadžbi ili sličnih zadataka često je korisno promatrati sliku funkcije, odnosno skup svih vrijednosti koje funkcija postiže. Korisno je promatrati i prasluku nekog elementa: skup svih elemenata koje funkcija slika u njega.

Struktura slike može nam puno reći o tome kakva je funkcija. Ukoliko tražimo funkcije čija domena i kodomena su $\mathbb{N}$, Ova ideja često je korisna uz princip ekstrema; promatramo minimum slike ili neku varijaciju toga.

Nadalje, ako su domena i kodomena iste, korisno je promatrati funkciju kao usmjeren graf gdje su bridovi iz x prema $f(x)$. Pomoću strukture tog grafa možemo također puno saznati o funkciji.

Zadaci

1. Neka je X podskup prirodnih brojeva takav da ako vrijedi $x \in X$ i $y \in X$, tada je i $x + y \in X$. Nadalje, vrijedi da je $\mathbb{N} \setminus X$ konačan skup s n elemenata. Dokaži da je zbroj tih n elemenata manji ili jednak n^2 .
2. Ako je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkcija takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $f^{2019}(x) = 2019$ i da za sve različite $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x - y \mid f(x) - f(y),$$

dokaži da vrijedi $f(x) = 2019$ za sve $x \in \mathbb{N}$.

3. Dani su prirodni brojevi $n \geq m \geq 4$ i $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ podskup od $\{1, 2, \dots, n\}$ takav da za sve $a, b \in A$, $a \neq b$ vrijedi $a + b \leq n \implies a + b \in A$. Dokaži da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

4. Neka je $a_1, a_2, \dots$ beskonačan niz realnih brojeva za koji postoji realan broj c takav da $0 \leq a_i \leq c$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, i takav da vrijedi

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j} \quad \forall i, j \quad \text{t.d.} \quad i \neq j.$$

Dokaži da vrijedi $c \geq 1$.

5. Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funkcije takve da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(g(n)) = f(n) + 1$ te $g(f(n)) = g(n) + 1$. Dokaži da vrijedi $f = g$.
6. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji polinom s realnim koeficijentima P stupnja n takav da vrijedi $P(0) \neq 0$ i takav da postoji n kompleksnih brojeva $w_1, \dots, w_n$ takvih da za svaki kompleksan broj x vrijedi

$$P(x) = (x - w_1) \dots (x - w_n) = (x - w_1^2 - w_1) \dots (x - w_n^2 - w_n).$$

7. Za koje realne brojeve $k > 1$ postoji konačan skup pozitivnih realnih brojeva S koji ima barem 3 elementa takav da za svaka 2 različita broja $a, b \in S$ vrijedi da je $k|a - b| \in S$?
8. Neka je S skup prirodnih brojeva takav da za svaka 2 različita podskupa F i G od S vrijedi

$$\sum_{n \in F} 1/n \neq \sum_{n \in G} 1/n.$$

Dokaži da postoji pozitivan racionalan broj $r < 1$ takav da za svaki podskup F od S vrijedi

$$\sum_{n \in F} 1/n \neq r.$$

9. Neka je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ skup nenegativnih cijelih brojeva. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ koje zadovoljavaju

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

3.9.5 C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Kažemo da je skup točaka u ravnini *konveksan* ako je svaka dužina kojoj su vrhovi neke dvije točke tog skupa u potpunosti sadržana u skupu.

Kažemo da je mnogokut *konveksan* ako je područje ravnine koje zatvaraju njegove stranice konveksan skup.

Konveksna ljuska nekog skupa točaka u ravnini je presjek svih konveksnih skupova kojima je taj skup podskup, te najmanji konveksan skup kojemu je taj skup podskup.

Zagrijavanje

1. U ravnini se nalaze dva konveksna mnogokuta A i B takva da se A nalazi u potpunosti unutar područja ravnine zatvorenog stranicama B .
Dokaži da A ima manji opseg od B .
2. Dano je $2n + 1$ točaka u ravnini tako da nikoje tri nisu kolinearne, a nikoje četiri nisu konciklične.
 - (a) Dokaži da postoji kružnica kroz neke tri dane točke takva da je unutar nje točno $n - 1$ preostalih točaka.
 - (b) (teže) Dokaži da ih postoji barem $\frac{2n^2+n}{3}$
3. Dano je konačno mnogo točaka u ravnini tako da površina svakog trokuta kojem su vrhovi neke tri od danih točaka nije veća od 1. Dokaži da se sve točke može pokriti trokutom površine 4.
4. U ravnini je povučeno konačno mnogo pravaca tako da nikoja tri pravca ne prolaze kroz istu točku. Dokaži da je povezana područja ravnine određena tim pravcima moguće obojati u dvije boje tako da nikoja dva susjedna područja nemaju istu boju.

Zadaci

5. Dokaži da za svaki konveksan mnogokut postoji pravac koji mu dijeli i površinu i opseg na dva jednaka dijela.
6. Neka je P skup svih pravaca ravnine M . Postoji li injekcija $f: P \rightarrow M$ takva da $f(p) \in p$ za svaki $p \in P$?
7. Neka je n prirodan broj. Unutar kružnice nalaze se točke $A_1, A_2, \dots, A_n$, a na kružnici točke $B_1, B_2, \dots, B_n$ takve da su dužine $\overline{A_i B_i}$ u parovima disjunktne. Akademik može skočiti iz točke A_i u točku A_j ako i samo ako dužina $\overline{A_i A_j}$ ne siječe niti jednu od dužina $\overline{A_i B_i}$.
Pokaži da akademik može nizom skokova iz bilo koje od točaka A_i doći u bilo koju drugu.
8. U ravnini je obojano 2013 ljubičastih i 2014 purpurnih točaka na takav način da nikoje tri nisu kolinearne. Potrebno je nacrtati k pravaca takvih da ne prolaze kroz obojane točke i da dijele ravnine na regije takve da niti u jednoj regiji nisu dvije točke iste boje.
Nađi najmanji k takav da je ovo moguće postići za sve konfiguracije 4027 točaka.
9. (Sylvester-Gallai)
Dokaži da za svaki skup n točaka u ravnini takav da nisu sve kolinearne postoji pravac koji prolazi kroz točno dvije od njih.
10. Neka je $A_1, A_2, \dots, A_{3n}$ skup $3n$ točaka u ravnini takvih da je za sve $1 \leq i \leq 3n$ trokut $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ (gdje su indeksi uzeti mod n) jednakokraničan trokut u kojem su vrhovi poredani suprotno od kazaljke na satu. Dokaži da je broj sjecišta mnogokuta $A_1 A_2 \dots A_{3n}$ sa samim sobom najviše

$$\frac{3n^2}{2} - 2n + 1$$

3.10 Zadaci za crnu grupu

3.10.1 C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

U algoritmima i procesima je ključno, više nego i u kojem drugom području, promatrati i igrati se s malim primjerima. Kroz taj proces rješavanja malih primjera se dobije osjećaj za to kakav treba biti redoslijed poteza, koji su optimalni, koji slučajevi su zanimljivi, itd.

Tako polako počinjete otkrivati algoritam kojeg želite konstruirati, odnosno počinjete otkrivati što proces opisan u zadatku zapravo radi.

Jedna posebna napomena: kada smislite neki algoritam, nemojte odmah početi dokazivati da radi, nego se jako potrudite naći kontraprimjer. Tako uštedite puno vremena, te ako protuprimjer nađete analizirajte zašto algoritam na njemu ne radi, tako se često otkriju stvari koje vode rješenju.

Juhica

1. (Dvostruki šah) Sva pravila su ista, osim što kad je igrač na redu smije napraviti dva poteza. Dokažite da bijeli ima negubitničku strategiju.

Predjelo

2. Dano je 1990 kutija, u i -toj je i kuglica. Dozvoljen potez je odabrati odabrati skup kutija i maknuti jednak broj kuglica iz svake. Koliki je minimalan broj poteza potreban da se sve kutije isprazne?
3. Na jednoj hrpi nalazi se n različitih loptica. U prvom koraku loptice se odvajaju na dvije neprazne hrpe. Zatim se bira bilo koja od tih hrpi koja ima više od jedne loptice te se i ona razdvaja na dvije manje hrpe. Postupak se nastavlja sve dok ne ostanu hrpe sa samo jednom lopticom. Na koliko načina je moguće napraviti ovaj postupak razdvajanja hrpi?

Glavno jelo

4. Dana je $n^2 \times n^2$ ciklična matrica, gdje je n neparan prirodan broj. Dokažite da je moguće popuniti ploču brojevima $1, 2, \dots, n$ tako da su sve 2×2 podmatrice međusobno različite.
5. Brojevi od 1 do 20 napisani su na ploči. Igrači A i B naizmjenice ispred brojeva pišu znakove $+$ i $-$. Na kraju igre B dobiva apsolutnu vrijednost sume brojeva. Ukoliko oba igrača igraju optimalno, koliko će B dobiti novaca na kraju igre?
6. Dano je n utega s težinama $m_1 > m_2 > \dots > m_n$ i dvostrana tradicionalna vaga. Utezi se jedan po jedan stavljaju na vagu. Nakon svakog stavljanja, na papir zapišemo L ili R , ovisno je li lijeva ili desna strana teža. Dokažite da je moguće postići bilo koji niz duljine n koji se sastoji od slova L i R .

Desert

7. U parlamentu Nigdjezemske, za svaka dva člana postoji treći koji je upoznat s točno jednim od njih dvojice. Svaki član pripada točno jednoj od dvije stranke. Svakog dana predsjednik (koji nije član) odabere grupu članova te svi u njoj promijene stranku, a to također naprave i svi oni članovi koji poznaju nekog iz odabrane grupe. Dokažite da predsjednik može postići da u nekom trenutku svi članovi budu u istoj stranki.

3.10.2 G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Zadaci

1. Zadan je trokut ABC i proizvoljna točka T na luku BC njegove opisane kružnice. D i E su nožišta visina iz vrhova A i B . M je presjek AT i BE , N je presjek AD i BT , a P polovište MN . Dokažite da su D, E i P kolinearne.
2. Zadan je trokut ABC . D i E su polovišta AB i AC , a F je nožište visine iz A . P je polovište DE , a T presjek opisanih kružnica ADE, BDF, CEF (jedna točka-Miquel). Dokažite da su F, T, P kolinearne.
3. Zadan je trokut ABC . I je centar upisane kružnice, a T točka na simetrali kuta ACB t.d. je BT okomito na CT . D i E su presjeci CT s upisanom kružnicom, a P nožište okomice iz I na T . Dokaži da su A, P, D, E konciklične.
4. Zadan je trokut ABC . D, E, F su dirališta upisane s AB, BC, AC . T je presjek EF i AB , a P polovište DT . X je diralište tangente iz P na opisanu kružnicu ABC . Dokažite da je $|XP| = |DP| = |TP|$.
5. p i q su usporedni pravci i A i B dirališta kružnice s njima. Druga kružnica dira p u C i prvu u D izvana. Treća kružnica dira q u E , prvu izvana u F i drugu izvana u G . Dokaži da je FC tangenta na prvu i treću kružnicu.
6. 2 kružnice se sijeku u A i B . C je proizvoljna točka na prvoj kružnici. Točke D i E su na tangenti u C t.d. $|CD| = |DE|$ i D leži na AB . S i T su dirališta tangenti iz E na drugu kružnicu. Dokažite da su C, S, T kolinearne.
7. Zadan je tupokutan trokut ABC (tupi kut u B). D je točka na AB t.d. je B na dužini AD i $|BC| = |BD|$. T je proizvoljna točka unutar ABC na kružnici s promjerom AB , a M i N presjeci AT i BT s BC i AC . Dokažite da su D, M, N kolinearne.

3.10.3 C20: Teorija grafova - Leon Starešinić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Teorija grafova je jedinstvena kao područje kombinatorike, jer ima veliku artiljeriju teorema i ideja za rješavanje zadataka.

Ovo predavanje ima cilj pokazati što više elementarnih ideja, te će se dobar dio težih zadataka oslanjati na ideje lakših zadataka.

Najbitniji savjet za rješavanje je: razmišljajte algoritamski. Rješenja zadataka iz teorije grafova su često "dinamčna", vrhovi i bridovi se izbacuju, stvari se klasificiraju u grupe pa izmjenjuju, promatraju se putevi dobiveni određenim algoritmom, itd.

Grafovi u ravnini

1. (Eulerova formula) Dokažite da svako ulaganje povezanog planarnog grafa s V vrhova i E bridova u ravninu dijeli ravninu u F područja, gdje vrijedi $V - E + F = 2$.
2. Dokažite da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.
3. Dano je n točaka u ravnini tako da su svake dvije udaljene za barem 1. Odredite maksimalan broj parova točaka koje mogu biti udaljene točno za 1.

Grafovi u divljini

4. U sobi je $2n + 1$ ljudi, gdje je n prirodan broj. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokažite da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.
5. Dokažite da graf s n vrhova i E bridova ima barem $\frac{E(4E-n^2)}{3n}$ trokuta.
6. U državi ima 1983 gradova. Svaka dva su povezana cestom, a svaka cesta je u vlasništvu neke od 10 kompanija. Dokažite da postoji neparni ciklus kojemu su sve veze u vlasništvu iste kompanije.
7. U državi s 1993 gradova, svaki grad ima barem 93 neusmjerene veze prema drugim gradovima. Dokažite da, ako postoji put između svaka dva grada, onda postoji put između svaka dva grada koji prolazi kroz najviše 63 ceste.
8. Dano je n realnih brojeva. Koliko najviše parova brojeva (x, y) može zadovoljavati $x - y \in (1, 2)$?
9. Dan je graf u kojemu kroz svaki vrh prolazi najviše n neparnih ciklusa. Dokažite da je vrhove tog grafa moguće obojati u najviše $2n + 2$ boje, tako da ne postoji veza između dva vrha iste boje.
10. Dano je stablo s n vrhova. Neka je v_0 bilo koji vrh, te neka je v_1 najudaljeniji vrh od v_0 (bilo koji takav). v_2 se definira analogno, u odnosu na v_1 . Dokažite da je put v_1v_2 promjer stabla.

Bonus

11. U sobi se nalazi 120 ljudi. Svake dvije osobe su poznanici ili stranci. Slaba četvorka je skup četvero ljudi među kojima se točno jedan par međusobno poznaje. Koliko najviše slabih četvorki može biti?

3.10.4 A11: Funkcijske jednadžbe - Petar Orlić

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Zadaci

1. Nađi sve injektorije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d.

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

2. Nađi sve injektorije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.d.

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

3. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.d.

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

4. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d.

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz)$$

5. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d.

$$f(xy) = \max\{f(x), y\} + \min\{f(y), x\}$$

6. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d.

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y)$$

7. Funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zadovoljava

$$f(\dots f(n)) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

(kompozicija $f(n)$ puta). Koje sve vrijednosti može postići $f(1000)$?

3.10.5 G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Trigonometrija je veoma korisno sredstvo koje uvelike može olakšati rješavanje zadatka ukoliko se primjeni pravovremeno. Svrha ovog predavanja stoga nije riješiti zadatke trigonometrijskim bashanjem, nego naučiti kako primjenjivati trigonometriju kao pomoćno sredstvo na vrlo jednostavan način. Zadatci su vrlo reprezentativni što se tiče zadataka na natjecanjima i olimpijadama, stoga ih je moguće riješiti i bez korištenja trigonometrije.

Osnovne trigonometrijske formule:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (adicijska formula za sinus)
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (adicijska formula za kosinus)
- $a = 2R \sin \alpha$ (sinusov poučak)
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (kosinusov poučak)

Lakši zadaci

1. Nad stranicama šiljastokutnog trokuta ABC nacrtani su prema van jednakostranični trokuti BCD , ACE i ABF . Neka je M polovište stranice $\overline{BD}$, a O središte trokuta ACE . Dokaži da je $|AM| : |OF| = \sqrt{3} : 2$.
2. Dan je šiljastokutni trokut $\triangle ABC$ s visinama AD , BE , CF te ortocentrom H . Dužine EF i AD sijeku se u točki G . Dužina AK je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu BC u točki M . Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.
3. Neka su P i Q točke na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC takve da vrijedi $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle CAQ = \angle ABC$. Neka su M i N točke na pravcima AP i AQ , redom, takve da je P polovište dužine AM i Q je polovište AN . Dokaži da se BM i CN sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Teži zadaci

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut sa središtem O . Točke X i Y odabrane su tako da vrijedi:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90^\circ$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- X i C su u različitim poluravninama obzirom na AB
- Y i A su u različitim poluravninama obzirom na BC

Dokažite da je O polovište dužine $\overline{XY}$.

5. Dan je trokut $\triangle ABC$. Točka D je polovište stranice BC . Točke E i F se nalaze na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ tako da je $|DE| = |DF|$ i $\angle EDF = \angle BAC$. Dokazati:

$$|DE| \geq \frac{|AB| + |AC|}{4}$$

6. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ ima središte I te dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Neka je k kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku E . Drugo sjecište pravca DE s kružnicom k je točka K . Paralela s pravcem DF kroz točku I siječe stranicu AB u točki P . Točka L je sjecište pravca CP i kružnice k takvo da se P nalazi između točaka C i L . Točka O je središte opisane kružnice trokuta DKL . Dokaži da su pravci AI i OD paralelni.
7. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| = |AC| > |BC|$ i neka je I središte tom trokutu upisane kružnice. Pravac BI siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D , a pravac točkom D okomit na AC siječe pravac AI u točki E . Dokaži da se točka J , osnosimetrična točki I u odnosu na pravac AC , nalazi na opisanoj kružnici trokuta BDE .

3.10.6 N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac

[Link na hintove.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvod

Niz je zapravo funkcija iz prirodnih brojeva u bilo što. Postoje nizovi riječi (zovemo ih rečenice), postoje nizovi dana (zovemo ih kalendari), te postoje nizovi brojeva, što ćemo upravo promatrati. I to ne bilo kakvih, nego uglavnom nizovi u $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, gdje će kod prva dva do izražaja upravo doći svojstvo *skokovitosti*, dakle bilo koja dva člana se razlikuju barem za neku razliku (u ovom slučaju 1).

Početni uzorak

1. Fibbonacijev niz je zadan s $F_0 = 0, F_1 = 1$ te rekurzijom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geq 2$. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji prirodni broj m tako da je F_m djeljivo s n .
2. Neka je m prirodan broj veći od 1. Niz $(x_n)_{n \geq 0}$ je definiran s

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{ako je } 0 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=1}^m x_{i-j} & \text{ako je } i \geq m. \end{cases}$$

Pronađi najveći prirodni broj k tako da niz $(x_n)_{n \geq 0}$ sadrži k uzastopnih članova djeljivih s m .

3. Postoji li prirodan broj n tako da je $n^7 - 77$ Fibonaccijev broj?

Kretanje niza

4. Dokaži da postoji beskonačno prirodnih brojeva n tako da je najveći prosti djelitelj od $n^4 + n^2 + 1$ jednak najvećem prostom djelitelju od $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.
5. Neka je $a_1 = 11^{11}, a_2 = 12^{12}, a_3 = 13^{13}$, te vrijedi rekurzija

$$a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}| + |a_{n-2} - a_{n-3}|$$

za sve prirodne brojeve $n \geq 4$. Odredi $a_{14^{14}}$.

Cikličnost

6. Prirodni brojevi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 4$) su raspoređeni na kružnici tako da x_i dijeli zbroj svojih susjeda; to jest

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i$$

je prirodan broj za svaki i , gdje je $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$. Dokaži da je

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n < 3n.$$

7. Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ sa sljedećim svojstvom: za bilo koje cijele brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n$ čiji zbroj nije djeljiv s n , postoji broj $1 \leq i \leq n$ tako da niti jedan od brojeva

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$$

nije djeljiv n . Dodatno, vrijedi da je $a_i = a_{i-n}$ kada je $i > n$.

Poglavlje 4

Hintovi s predavanja

4.1 Hintovi za smeđu grupu

4.1.1 C1: Logika i dokazi - Lana Frkin

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. ako izbacimo osobu koja zna sva 3 jezika, koliko ima ljudi koji znaju 1 ili 2 od tih jezika?
2. koliko tekućine mogu primiti dvije posude?
3. nacrtaj kalendar, koliko dana mora imati mjesec koji zadovoljava sve uvjete
4. ako označimo put sa x i vrijeme iz A u B sa t , koliko je brzina u jednom, a kolika u drugom smjeru
5. nacrtajte kuda je brod plovio, prosječna brzina je udaljenost/vrijeme
6. pošto znamo da imaju konstantnu brzinu, probajmo zapisati njihovu brzinu na dva različita načina (prije i poslije susreta)
7. koliko stupnjeva velika kazaljka prođe u jednoj sekundi, a koliko mala?
8. ako je omjer bakra i cinka u nekoj smjesi 2:1, onda bakar čini $2/3$ mase te smjese, a cink $1/3$
9. za koliko bi vremena traktori preorali njivu kada bi ju zajedno orali? koliki dio njive bi tada preorao jedan traktor, a koliki drugi?
10. koliki dio bazena se napuni za jednu minutu ako ga pune dvije prve, dvije druge i dvije treće cijevi?
11. brojeve koji su djeljivi s 2 napišemo kao $2k$, a brojeve koji nisu kao $2m+1$, te zbrojimo, oduzmemo ili pomnožimo
12. taj broj se može napisati kao $100a+4k$, gdje je a neki troznamenkasti broj
13. taj broj možemo napisati kao neku kombinaciju brojeva djeljivih s 3 pomoću znamenki
14. nađimo protuprimjer
15. pretpostavimo suprotno i dodemo do kontradikcije sa djeljivošću sa 2

4.1.2 N1: Znamenke - Patricija Dovijanić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Koliko ima jednoznamenkastih, koliko dvoznamenkastih, a koliko troznamenkastih brojeva? Oprez: za 2020. znamenku, morali biste još pripaziti na ostatke pri dijeljenju s 3.
2. Kojim znamenkama završavaju potencije brojeva 1, 2, 3 i 4?
3. Slično kao prethodni zadatak.
4. Promotrite djeljivost s 5.
5. Podijelite pribrojnik u grupe po četiri.
6. Izračunajte faktorijele do 5. Što će svi preostali faktoriijeli imati zajedničko s 5!? Možda posljednju znamenku? Zašto?
7. Pokušajte zapisati zadani izraz kao umnožak nekog broja sa 100.
8. Svedite zadatak na rješavanje jednadžbe s jednom nepoznanicom.
9. Pazite na djeljivost nepoznanica s 5 s obe strane jednakosti.
10. Raspišite kako izgleda njihova suma. Kao u zadatku 10., pazite na djeljivost, ovaj puta s 18.
11. Slično zadacima 10. i 11.
12. Koje znamenke smije sadržavati traženi broj?
13. Promotrite parnost pribrojnika i usporedite sa zadatkom 4.
14. Budući da ne znamo broj znamenaka broja, ne možemo ga zapisati preko njegovih znamenaka. Uvedite nepoznanice za polazni broj, njegovu znamenku jedinica, i dobiveni broj. Kako biste izrazili dobiveni broj preko polaznog broja i njegove znamenke jedinica?
15. Prebrojite broj faktora 10 u umnošku. Pazite, to nisu samo višekratnici broja 10, ima ih još! Pomoći će vam rastav na proste faktore.
16. Traženi uvjet ekvivalentan je uvjetu $\overline{ab} + \overline{ba} = 1300$. Razmislite zašto.
17. Razdvojite zadatak na slučajeve po zadnjoj znamenci početnog broja.
18. Koliko znamenaka mogu imati traženi brojevi? Podijelite zadatak na slučajeve, i budite oprezni što radite sa znamenkom 0.
19. Ovo je samo (dosta) teža varijanta prvog zadatka. Sretno!

4.1.3 G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Nakon određivanja veličine vanjskog i unutarnjeg kuta, primjećuješ li da je traženi kut razlika dvaju kutova lakših za odrediti ?
2. Očito je da je trokut jednakokrakan. Dovoljno je pokazati da mu je bilo koji kut jednak 60° . Prisjeti se nekih trikova za određivanje kutova vezanih uz kružnicu.
3. Na koji način ćeš iskoristiti uvjet $|AB| = |EC|$
4. Što ti daje simetrala kraka AC ?
5. Raspisuj kutove koristeći zbroj kutova u trokutu, uoči jednakokračne trokute. Što vrijedi za četverokut $ASCG$? Kako nazivamo takav četverokut.
6. Zadatak izgleda simetrično. Pokušaj sve kutove izraziti preko γ i α .
7. Prvi dio zadatka je $|BE| = |ED|$ i to je lakši dio zadatka koji koristi neku sličnost. Nakon toga se prisjeti jedne zanimljive tvrdnje koja uključuje polovište hipotenuze i jednakost nekih dužina (Možeš li pronaći još neku dužinu jednaku navedenima?).
8. Docrtaj neki element. Kako ćeš pokazati jednakost dviju dužina ako raspisivanje duljina očito nema smisla?
9. Iz jednakokračnosti i simetrale kuta očito slijedi neki angle-chasing, na koji način bi jednakosti nekih kutova mogao povezati s duljinama stranica?
10. Imaš tri uvjeta zadatka koji upućuju na angle-chasing. Od kojeg kuta treba početi? Nakon što raspišeš kutove, što znaš o četverokutu $CBED$?
11. Kako smo u 2. zadatku pokazali da je trokut jednakokraki? Razmišljaj o sukladnosti.
12. Od kojeg trokuta ćeš početi crtati skicu? Za koja dva kuta trebaš pokazati da su jednaka?
13. Nema smisla krenuti od uvjeta $|CD| = 2|BD|$ niti provoditi obični angle chasing. Jedina opcija za započeti zadatak će docrtati nešto. Razmisli što bi bilo dobro docrtati, zadani kutovi i uvjet $|CD| = 2|BD|$ neka te usmjere.
14. Očito sličnost nekog para trokuta vodi do rješenja. Koje stranice bi oni trebali imati?
15. Ne treba crtati kružnice jer na njima nema nikakvih važnih elemenata osim točaka A, B, C . Ovo je zadatak u kojem očito treba provoditi angle-chasing. Kako možeš središta kružnica povezati s ostalim elementima (tj. vrhovima)?
16. Za što ti treba dužina CF ? Ni za šta osim za zaključak $|BC| = |BF|$, ignoriraj ju nakon toga. Kao i u 13. zadatku, opet očito treba docrtati neku dužinu, ali ovdje kutovi nisu dosta lijepi da pravokutni trokut bude koristan (to uglavnom dobro dođe ako ima puno višekratnika od 15° što nije slučaj u ovom zadatku). Što bi onda bilo korisno dobiti docrtavanjem.
17. Na što te podsjećaju brojevi 5 i 4 u geometriji? Što bi dužine AB i CD činile zajedno? Docrtaj to.

4.1.4 A1: Jednadžbe - Vinko Dragušica

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Podijeliti izraz s a i svesti na potpuni kvadrat.
2. Uvrstiti u formulu izvedenu u prvom zadatku ili faktorizirati
3. Uvesti supstituciju $t = x^2$.
4. Raspisati jednadžbu na sljedeći način: $x^4 - x^2 - 4(x^2 - 1) = 0$
5. Uzmimo p kovanica od 1kn i q kovanica od 5kn. Tada jednadžba koju trebamo riješiti glasi $p + 5q = 40$.
6. Mora vrijediti $\frac{n+36}{n-36} = m^2$ gdje je m prirodan broj. Sljedeći korak je raspisivanje ove jednadžbe i promatranje kada je n prirodan broj.
7. Pomnožiti sa $5mn$ i faktorizirati.
8. Ako su a i b duljine osnovnog i pobočnog brida, tada prema uvjetu problema vrijedi jednakost $2a^2 + 4ab = 8a + 4b$.

4.1.5 C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Svaki sedmi broj je takav!
2. Koliko ima brojeva djeljivih s 3? A s 5?
3. Koliko ima brojeva koji su djeljivi s 5 ili 7?
4. Koliko dijagonala ide iz svakog vrha? (Pazi da neke ne brojiš dva puta!!)
5. Koliko dužina ide iz svakog vrha?
6. Princip množenja! Za odabrati majicu ima 3 načina, a za traperice 2.
7. Princip množenja! Za odabrati pecivo Marin ima 2 načina, za sir 4, a za šunku 3.
8. Princip množenja! Za odabrati štit Kraljević ima 2 načina, za mač 3, za ravnalo 2, a za šestar n. (broj ljudi u prostoriji)
9. Na koliko načina Krunoslav može odabrati prvi zadatak koji će rješavati? Imajući na umu da je prvi zadatak rješio, na koliko načina može odabrati drugi koji će rješavati? A treći?
10. Slično kao i u prethodnom zadatku, koliko načina Andrija ima za odabrati prvog prijatelja kojeg će nazvati? A koliko za drugog?
11. Opet princip množenja. Ali, koliko sada Marin ima načina za odabir pojedine namirnice?
12. Koliko načina Luka ima za odabrati te tri karte pazeći na poredak? A koliko poredaka te tri karte može biti može biti?
13. Koliko parova učenika postoji? A koliko je poruka poslano?
14. Samo su se muškarci međusobno rukovali, prvo odredimo koliko njih ima.
15. Gledajmo poteze kao kuglice dvije boje. Na koliko načina ih možemo rasporediti ako su sve kuglice iste boje jednake.

4.2 Hintovi za crvenu grupu

4.2.1 C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Promatrajte što se dogodi kada izvučemo sve pikule koje nisu crvene te ponovno krenemo izvlačiti.
2. Koliki je maksimalan broj učenika koji možete rasporediti po učionicama tako da je broj učenika u svakoj učionici manji od 3?
3. Promatrajte ljude kao točke te poznanstva kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko se ljudi poznaju označite jednom bojom, a ukoliko ne drugom. Hoćete li u bilo kojem rasporedu poznanstava dobiti istobojni trokut?
4. Isto kao i 3. zadatak.
5. Promatrajte parnost koordinata.
6. Koliko različitih brojeva ljudi može poznavati netko sa zabave. Koliko je ljudi na zabavi?
7. Koje sve ostatke može davati broj pri dijeljenju sa 19? Što se dogodi kada oduzmemo dva broja sa istim ostatkom?
8. Poopćenje 7. zadatka.
9. Koliko različitih suma može biti? Koliko je stupaca/redaka/dijagonala?
10. Koliko različitih zbrojeva može biti? Koliko različitih zbrojeva ima među 21 različitih prirodnih brojeva?
11. Koji sve ostatak mogu davati kvadrati prirodnih brojeva pri dijeljenju s 10?
12. Faktorizirajte. S kojim sve brojevima mora biti djeljiv broj da bi bio djeljiv s 10.
13. Koje sve kombinacije točaka možemo smjestiti u 1 stupac?
14. 15. zadatak
15. Promatrajte niz $1, 11, 111, \dots, 111\dots11$ gdje zadnji član ima $n+1$ jedinicu. Postoje li dva broja sa istim ostatkom pri dijeljenju sa n ? Što se dogodi ako oduzmemo ta dva broja?
16. Promatrajte niz $a_1, a_2, \dots, a_{365}$ koji predstavljaju broj popijenih boca mlijeka zaključno s odgovarajućim danom te niz $a_1 + 29, a_2 + 29, \dots, a_{364} + 29$. Probajte pokazati da im je barem jedan element isti.
17. Isto kao i 16. zadatak.
18. Podijelite kvadrat na 4 manja, jednaka kvadrata. Smjestite, u svaki manji kvadrat, 1 točku. Što se dogodi kada probate smjestiti petu točku?
19. Isto kao i 18. zadatak.
20. Isto kao i 18. zadatak, samo podijeliti na više kvadrata.
21. Podijelite trokut na 4 manja, jednaka, jednakostranična trokuta. Smjestite, u svaki manji trokut, 1 točku. Što se dogodi kada probate smjestiti petu točku?
22. Isto kao i 21. zadatak.
23. Podijelite šesterokut na 6 jednakih, jednakostraničnih trokuta. Smjestite, u svaki manji trokut, 1 točku. Što se dogodi kada probate smjestiti sedmu točku?
24. Promatrajte romb čije su stranice duljine 1 te čija je kraća dijagonala duljine 1. U kakvom odnosu tada moraju biti ostale točke? Što tada možemo zaključiti o duljoj dijagonali? Koji je odnos točaka na osnovici, duljine 1, jednakokračnog trokuta čije krakove čine upravo dvije takve dijagonale?
25. Koliko različitih prostih brojeva može dijeliti zadane brojeve?
26. Promatrajte slučajeve. Što ako u skupu postoje 2 člana koja daju isti ostatak pri dijeljenju s 20? Što ako 3 ili pak 4?

4.2.2 N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. faktorizacija, $p - 1$, p , $p + 1$ su uzastopni brojevi
2. mod 3
3. mod 3
4. Pretpostavi suprotno i namjesti kontradikciju
5. $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$, ...
6. promotri brojeve $8p - 1$, $8p$ i $8p + 1$
7. zbroji brojeve i pogledaj mod 2
8. brojnik i nazivnik moraju biti relativno prosti
9. dirichleov princip
10. U ovisnosti o broju brojeva u prvoj vreći (nazovimo ga k) izrazi sumu brojeva u prvoj odnosno drugoj vreći.
11. mod 3
12. faktorizacija $a^4 + 4b^4$
13. a i b su neparni, mod 5 se dokaže malim fermatom
14. Euklidov algoritam

4.2.3 G2: Površine - Nikola Sole

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Prisjetite se da je duljina srednjice trapeza jednaka aritmetičkoj sredini duljina baza trapeza.
2. Usporedite likove prvo s kvadratom, a onda međusobno.
3. Nađite omjer visina pa se prisjetite formule za površinu trokuta.
4. Promotrite vrijednosti u formuli za površinu trokuta.
5. 4. zadatak.
6. Podijelite trokut na više dijelova.
7. Uočite najprije da je četverokut $PQRS$ paralelogram.
8. Promotrite odnos površine trokuta CED u odnosu na paralelograme.
9. Primijenite Pitagorin poučak.
10. 4. zadatak i prisjetite se osnovne definicije simetrale kuta.
11. Primijeti da je $MN = (AD+BC)/2$

4.2.4 A2: Faktorizacije - Nena Vukšić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Zapišite ta tri uzastopna prirodna broja kao $(n-1)^3, n^3, (n+1)^3$ i faktorizirajte.
2. Raspišite svaki član sume zasebno.
3. Nadopunite da dobijete kvadrat zbroja.
4. Nadopunite da dobijete kvadrat zbroja.
5. Faktorizirajte izraze te promatrajte kada su izrazi djeljivi sa 2 i 3.
6. Pomnožite sve sa 5 mn te faktorizirajte.
7. Rastavite srednji član na zbroj 2 broja.
8. Lijevu stranu jednadžbe svedite na kvadrat zbroja, prebacite r^2 na drugu stranu te primijenite razliku kvadrata.
9. Rastavite na slučajeve gdje je hipotenuza jednaka 25 i gdje je jedna od kateta jednaka 25.
10. Prigodno grupirajte.
11. Jednadžbu prvo zapišite kao kvadrat razlike pa potom kvadrat zbroja koji će biti jednak nekom broju puta ab .
12. Nadopunite do kuba zbroja 2 člana te primijenite zbroj kubova sa trećim članom.
13. Iskoristite 12. zadatak.
14. Za srednji pribrojnik iskoristite identitet $b - c = -(a - b) - (c - a)$, te grupirajte članove.
15. Iskoristite isti identitet kao i u prethodnom zadatku.
16. Drugi izraz nadopunite do kuba zbroja.

4.2.5 C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Nemoj pokušavati dobiti te brojeve. Uočavaš li nešto što je jednako skupovima $\{x, y, z\}$ i $\{2x - y, 2y - z, 2z - x\}$
2. Promotri koji "tornjevi" sudjeluju u jednom potezu. Pokušaj na osnovu toga svrstati ih u dva skupa kao što su u prošlom zadatku bila crna i bijela polja.
3. Koliko polja sudjeluje u potezu? Daje li ti to ideju za bojanje?
4. Šahovsko bojanje je dobar put. Primjećuješ li da nešto vrijedi nakon svakog drugog poteza?
5. Izračunao si promjene broja glava u svakom slučaju, zar ne? Imaju li ti brojevi nešto zajedničko?
6. Ima li pribrajanje neparnog broja u skupu prirodnih brojeva sličnosti s množenjem s negativnim brojem u skupu cijelih brojeva?
7. Hint su uvodni i 3. zadatak. Što im je zajedničko s ovim zadatkom?. Ne zaboravi konstrukciju. Dobar način za konstrukciju jest da se krene odostraga. Ako su dva na istom polju, možeš ih skupa premještati kamo želiš.
8. Koji je najtrivijalniji uvjet da se npr. p i z svedu na nulu. Primjećuješ da to ovisi o razlici tih dvaju broja na početku? Kako se ona može mijenjati?
9. Zamisli koordinatnu mrežu. Kad su koordinate prirodni brojevi, što uvijek vrijedi?
10. Šahovsko bojanje. Što nam daje neparnost brojeva m i n ?
11. Dobro prouči što se može dogoditi s brojem crnih polja u jednom potezu.
12. U kojem dijelu zadatka upoće koristimo invarijante? Razmisli o sumi svih brojeva. Drugi dio zadatka koristi matematičku indukciju. Možemo li učiniti nešto da nakon nekoliko poteza promijenimo samo jedan broj za 1?
13. Invarijanta je očito neka funkcija $f(x, y)$, malo složenija od $f(x, y) = x + y$. Na što te podsjećaju brojevi $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$?
14. Na što te asocira zbroj znamenaka u elementarnoj teoriji brojeva? Možda djeljivost s nekim brojem...
15. Tražimo neku varijablu koja se ne mijenja... Što ti pada na pamet? Zrcaljeni dio mnogokuta ostaje sukladan.
16. Na koji način međusobno mogu biti dva polja koja dijele stranicu s trećim. Koje svojstvo površine u korovu se ne mijenja kad korov dospijeva na treće polje?
17. Pokušaj riješiti slučaj za male brojeve. Pokušaj pogoditi invarijantu. Hint: opet na **točno dva** elementa primjenjujemo istu transformaciju u jednom potezu. Kod konstrukcije indukcijom pokaži za $4k$, ostalo se nakon toga lako riješi.
18. Počni s pretpostavkom da neki od tih pravaca siječe jedan domino. 2. zadatak neka ti bude inspiracija za bojanje. Što zaključuješ?
19. Ni slučajno nemoj razmišljati o broju znamenaka ili prvim znamenkama tog broja. Prisjeti se 13. zadatka. Što sigurno vrijedi za 10-znamenasti broj kojem su sve znamenke različite?
20. Koliko polja sudjeluje u 1 potezu. Daje li ti to uputu za bojanje?
21. Što znaš o broju potrebnih stepenica iz ukupnog broja polja? Pokušaj dalje razmišljati o parnosti i o ostatku pri djeljenu s 4. Za ideju bojanja je najveća uputa ono što znaš o odrezanim poljima. Prisjeti se kako smo došli do kontradikcije u 5. zadatku.
22. Pokušajmo isto s topom (kulom). Zamislimo da je ploča opločena 2×1 dominima. Sully bi se nakon svakog Mikeovog poteza pomaknuo u drugo polje istog domina i prisilio Mikea da napusti taj domino i to je ideja. Slično je i sa skakačem.

4.3 Hintovi za narančastu grupu

4.3.1 C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Uzmi najveći element, susjedi moraju biti jednaki.
2. Pretpostavi da ih je konačno, postoji najveći pa konstruiraj većeg.
3. Pretpostavi da se ne može podijeliti i uzmi podjelu sa minimalnim brojem neprijatelja.
1. Postoji najmanji element (beskonačno ih je pa ne postoji najveći).
2. B.S.O. (bez smanjenja općenitosti) pretpostavi da je x najveći.
3. Postoji najmanji element (beskonačno ih je pa ne postoji najveći).
4. Pretpostavi da ne postoji "odlično" bojanje i uzmi ono bojanje sa najmanje "dobrih" edgeva. Edge je "dobar" ako povezuje čvorove različite boje.
5. Promatraj najveću stranicu poliedra i Dirichletov princip na nju.
6. Pretpostavimo da imamo graf sa najviše "dobrih" edgeva (povezuje susjede različite boje) i da graf nije "odličan".
7. Promatraj put između najvećeg i najmanjeg broja na ploči.
8. Promotrimo trokut najveće površine i dokažimo da se sve točke nalaze unutar trokuta kojem su stranice trokuta najveće površine srednjice.
9. Promatraj najmanji trokut.
10. Promotrimo broj k sa najviše nula.
11. Od svih nekolinearnih trojki, uzmi onu sa najmanjom visinom trokuta.
12. Uzmi donju stranicu kocke i promatraj najmanji kvadrat "iscrtkan" na toj stranici (tim i najmanju kocku).

4.3.2 N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Ako $d|a$ i $d|b$, tada $d|(b-a)$ i $d|(a+b)$
2. Treba koristiti transformaciju $(x, y) \mapsto (y, x - ky)$ gdje je k maksimalan broj takav da je $ky \leq x$.
3. Euklidovim algoritmom odredi $\gcd(21n + 4, 14n + 3)$ i $\gcd(12n + 1, 30n + 2)$
4. $2n^2 - 2n$ je višekratnik od $n - 1$. Što možemo reći o $\gcd(a, ka + b)$?
5. Ako znamo da je $\gcd(b, k) = 1$, tada je $\gcd(b, ka) = \gcd(b, a)$. Dokažite!
U ovom zadatku to ćemo primijeniti na $k = 2$, odnosno koristit ćemo ovakve zaključke:
 - Ako je a paran broj, a b neparan, onda je $\gcd(a, b) = \gcd(\frac{a}{2}, b)$.
 - Ako su a i b neparni brojevi, tada je $\gcd(a, b) = \gcd(2a, b) = \gcd(a, 2b)$
6. Dokaži da je ostatak koji n^2 daje pri dijeljenju s k jednak kvadratu ostatka koji n daje s k .
Za prvih nekoliko neparnih prostih brojeva (3, 5, 7, 11) ispiši ostatke i ostatke koje njihovi kvadrati daju pri dijeljenju s p . Npr. pri dijeljenju sa 7, brojevi mogu davati ostatke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, a njihovi kvadrati tada daju ostatke redom 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Primjećuješ li pravilnost?
7. Isto kao prethodni zadatak
8. Možeš li dodati izrazu neki broj koji neće promijeniti ostatak tog izraza pri dijeljenju s 37, a koji će biti lakše svesti na potpuni kvadrat?
9. Prvi korak je $\gcd(13x + 4y, 29x + 9y) = \gcd(13x + 4y, 3x + y)$ (oduzmemo 2 puta)
10. Zadatak je vrlo sličan uvodnom primjeru 5
11. Koliki je najveći zajednički djelitelj prvih dvaju članova? Dokaži da su svi ostali brojevi u nizu djeljivi tim brojem.
12. Euklidovim algoritmom dokaži da za $m \leq n$ vrijedi $\gcd(a^m - 1, a^n - 1) = \gcd(a^{n-m} - 1, a^m - 1)$. (Prisjeti se bitne napomene kod primjera 5 koja govori o tome kako relativno proste dijelove možemo "izbaciti" iz razmatranja za najveći zajednički djelitelj). Euklidov algoritam tada garantira da ćeš uzastopnom primjenom tih transformacija doći upravo do $a^{\gcd(m,n)} - 1$.
13. Primijetite da je $(n + 1)!$ višekratnik od $n!$. Što ako je $n + 1$ složen broj? Za proste brojeve, upotrijebite **Wilsonov teorem**.
14. Promotri kakve ostatke bi brojevi u jednadžbama morali davati pri dijeljenju s 5.
15. Pretpostavi da su svi brojevi $a - 1, b - 1, c - 1$ prosti. Može li broj oblika $k^2 + 1$ biti djeljiv s 3 ili 4?
16. Koji bi ostatak d morao davati pri dijeljenju sa 16?
17. Pitagorin poučak. Bi li ta jednadžba mogla vrijediti kada niti jedan od a, b, c ne bi bio djeljiv s 3? Analogno za 4, 5.
18. Svedite jednadžbu na $301\overline{cd} + 100 = k^2$. Koje ostatke može davati k pri dijeljenju s djeliteljima broja 301?
19. Promotri $\gcd(x, y)$
20. Nakon uočavanja trivijalnog slučaja $(m, n) = (1, 1)$, što možete reći o parnosti broja m za $n > 1$?
21. Koje sve vrijednosti može poprimiti $\gcd(n^2 + 2, 2n - 1)$?
22. Nakon faktoriziranja jednadžbe, prisjeti se uvodnog primjera 4.
23. Zapiši jednadžbu u obliku

$$(m^2 + 3)(4m + 1) = 3p^n$$
 Što možeš reći o najvećem zajedničkom djelitelju zagrada?
24. Što možeš reći o najvećem zajedničkom djelitelju brojeva n i $27n^3 - 2n + 1$?
25. Primijeti da je m višekratnik broja 3. Koje vrijednosti može poprimiti $\gcd(2^k - 1, 2^{2k} + 2^k + 1)$?

4.3.3 G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Pokušaj dokazati da se sjecište dviju simetrala nalazi na trećoj.
2. Isto kao u prethodnom zadatku.
3. Kutevi nad istom tetivom u kružnici su sukladni.
4. Nacrtaaj srednjicu i dvije težišnice. Primjeti neke slične trokute.
5. Prisjeti se poučka o obodnom i središnjem kutu.
6. Pokušaj dokazati da su visine trokuta ABC simetrane kuteva trokuta $N_A N_B N_C$.
7. Sjeti se da je polovište hipotenuze središte opisane kružnice pravokutnog trokuta.
8. Dokaži da se simetrala kuta i simetrala stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC .
9. Dovoljno je dokazati da je četverokut $BIET$ tetivan.
10. Promotri srednjice trokuta ABH , AHC i ABC .
11. Označi dva polovišta stranica i nađi neke slične trokute.
12. Vidi zadatak 11.
13. Vidi Teorem 4.10 (Cevin teorem) na [linku](#)
14. **Potencija točke**

4.3.4 A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Pakirati zbroj kvadrata.
2. AG lako
3. CSB klasičan
4. CSB za $n = 4$
5. Zajednički nazivnik
6. CSB i još neko igranje
7. Reverse CSB
8. AG-om pojednostaviti LHS
9. Smjenama pojednostaviti razlomke
10. Uvjet pojednostaviti
11. Homogenizirati pa množiti
12. Igrati se sa reverse CSB
13. Dosta slabije vrijedi
14. AG pakirati

4.3.5 C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. klasična matematička indukcija
2. klasična matematička indukcija (izraz je oblika $49 \cdot x$, gdje je $x \in \mathbb{Z}$)
3. klasična matematička indukcija (kao i 2. zadatak)
4. baza $n = 4$, klasična matematička indukcija
5. sređivanje eksponenta u koraku indukcije dok se ne dobije izraz iz pretpostavke
6. klasična matematička indukcija
7. u koraku sređivati izraz s $k+1$ dok se ne pojavi izraz iz pretpostavke s k
8. ako označimo s $A_n = \underbrace{2 \dots 2}_n - 3^n + 1$, nađemo rekursivnu relaciju koja povezuje A_n i A_{n+1} te ju iskoristiti u koraku indukcije
9. uvrstimo $n = 1, 2, 3, \dots$ te klasičnom matematičkom indukcijom dokažemo jednakost $\frac{S_{n+1}}{(n+1)!} = n + 1$
10. klasična matematička indukcija
11. matematičkom indukcijom pokazati relaciju $3^n > 2^n + 3 \cdot n$
12. klasična matematička indukcija (paziti na nazivnike u koraku indukcije)
13. postavljanje ograde pomoću pretpostavke u koraku matematičke indukcije
14. postavimo $P(k) = k^2 - k + 2$ te pokažemo da vrijedi $P(k+1) = P(k) + 2k$
15. kombinatorno (matematička indukcija)

4.4 Hintovi za žutu grupu

4.4.1 C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Parnost zbroja svih brojeva.
2. Parnost.
3. Duljina zadnje proputovane udaljenosti.
4. Parnost.
5. Djeljivost s 3.
6. Zbroj kvadrata.
7. Broj parova susjeda iste vlade.
8. Podijeli mentore nasumično. Odaberi mentora koji ima više od jednog neprijatelja u svojoj grupi i prebaci ga u drugu. Što primjećuješ?
9. Promatraj grupe vrhova (A, C, E) i (B, D, E) .
10. Promatraj dijete s najviše i dijete s najmanje slatkiša.
11. Promatraj 8 polja na bridovima (rubovi bez 4 kuta).
12. Djeljivost s 9.
13. Odaberi neki stupac ili redak s negativnim zbrojem i obrni predznake. Promatraj zbroj svih brojeva u tablici.
14. Promatraj što se dogodi kada neki $a_i = -1$ zamijenimo s 1.
15. Broj parova brojeva u krivom poretku.

4.4.2 N4: Faktorizacije i djelitelji - Ivan Čulin

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. a) Prisjetite se pravila koje smo spomenuli za kvadratne trinome i primjenite ga ovdje.
b) Što se može izlučiti iz prve tri zagrade? Koje članove trebamo međusobno grupirati?
2. Faktorizirajte izraz i promotrite njegovu djeljivost brojem 3.
3. Faktorizirajte izraze i promatrajte djeljivost brojevima 2 i 3
4. Čemu je jednak izraz u faktoriziranom obliku? Kako zapisati činjenicu da je n neparan?
5. Faktorizirajte izraz. Kojim sve brojevima zadani izraz mora biti djeljiv?
6. Promatrajte ostatak zadanih brojeva pri djeljenju brojem 3
7. Da bi broj bio djeljiv s 30 s kojim brojevima mora biti djeljiv? Je li umnožak tri uzastopna prirodna broja uvijek djeljiv sa 6? Koja je zadnja znamenka zadanog broja?
8. Probajte rastaviti drugu zagradu na dva izraza tako da prvi povežete s prvom zagradom, a drugi bude djeljiv sa 7. (Prisjetite se osnovnih algebarskih izraza). Može li se u ovom zadatku iskoristiti mali Fermatov teorem?
9. Promatrajte djeljivost brojem 2. Faktorizirajte izraz da na jednoj strani ostane cijeli broj, a na drugoj ostatak izraza i provjerite sve mogućnosti.
10. Mora li nužno vrijediti $r \geq p$ i $r \geq q$? Probajte faktorizirati izraz koristeći algebarske izraze. Ako su p i q prosti koji su mogući faktori izraza pq ?
11. Formula za veće potencije?
Promatrati djeljivost s 3.
12. Prebacite broj 1 na desnu stranu i promotrite njenu parnost. Koji je faktor jednak kojem u sredenom izrazu?
13. Promatrajte djeljivost brojem 4.
14. Promatrajte koje ostatke daju kvadrati prirodnih brojeva pri djeljenju s 5 i 11.
15. Tekst

4.4.3 G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Prisjetite se teorema o obodnom i središnjem kutu. Kakav je trokut CSB ?
2. Promotrite trokut AOC .
3. Promotrite unutarnje kuteve tog četverokuta.
4. Prisjetite se Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom. Također, pronađite dva tetivna četverokuta i iskoristite što vrijedi za njihove kuteve.
5. Za koji četverokut znamo da je tetivan? Iskoristite da su obodni kutevi nad istim lukom jednaki.
6. Koji kutevi moraju biti jednaki da bismo dokazali tvrdnju zadatka? Pronađite ih promatrajući unutarnje i vanjske kutove dvaju tetivnih četverokuta.
7. Neka je H sjecište pravaca AD i FG . Koja dva četverokuta su tetivna? Promotrite trokut HDG .
8. Zapravo treba dokazati $\angle EAD = \angle EBD$. Kakav je trokut AOB ? Uočite da na gotovo jednak način možemo riješiti zadatak ako dokažemo jednakost nekih drugih dvaju kuteva. Kojih?
9. Promotrimo trokut CHB . Središte njemu opisane kružnice upravo je polovište stranice $\overline{BC}$ (zašto?), označimo ga s P . Dakle, ekvivalentno je dokazati $|PC| = |PH| = |PB|$.
10. Opišite kružnicu trokutu ABC . Gdje se nalazi njezino središte?
11. Ekvivalentno je dokazati $\angle RSP = \angle MSP$.
12. Promotrite kružnicu opisanu trokutu BMC . Gdje se nalazi njezino središte? Pomoći će vam slično razmišljanje kao u zadatku 10. Označimo li s E sjecište pravaca KM i AD , ekvivalentno je dokazati da je $\angle DEM = 90^\circ$ promatrajući trokut DEM .
13. Spustite visinu na osnovicu i iskoristite svojstva težišta i srednjice.
14. Iskoristite da osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta. Zapravo vam tetivni četverokuti neće pomoći u ovom zadatku, ali odlučila sam ga zadati kao poticaj da riješite zadaću, jer je službeno rješenje dugačko i puno ružne trigonometrije, a koristeći jednu od tvrdnji koju smo naveli na početku predavanja zadatak se može riješiti vrlo jednostavno u par redaka.

4.4.4 A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. KA
2. razmnožavanje pa AG ili AG na zagrade
3. $/ \cdot 4abc$ pa AG ili $/ + 2(a + b + c)$ pa AG
4. AG
5. AG
6. LHS liči na kvadrat binoma
7. $(a + b)^2 \geq 4ab$
8. AG na nazivnik
9. rastav na parcijalne razlomke, AH
10. LHS je suma kvadrata, KA
11. pretpostaviti da je $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ gdje su $x, y, z > 0$, AG
12. $ab + bc + ac = \frac{1}{2} \left((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \right)$
13. razmnožavanje
14. a) AH, AG b) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$
15. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i $b^2 + 1 \geq 2b$
- 16.

4.4.5 C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Napravite tablicu potencija.
2. Najveći broj koji dijeli 700 je 700 i cilj nam je odabrati n brojeva koji zbrojeni daju 700. Najmanji set n brojeva je iz skupa $1, 2, \dots, n$, gdje je zbroj tih brojeva $\frac{n(n+1)}{2}$.
3. Ostatak pri dijeljenju u prvom dijelu treba biti 10, a u drugom 1. Isprobavamo brojeve $1, 2, \dots$ po redu dok ne pronađemo uzorak.
4. Grupiramo promatrane brojeve u skupove S_k u kojima ima 2^k brojeva iz skupa ($k=0, \dots, 7$). Uočimo da se brojevi n i $2n$ nalaze u skupovima S_k i S_{k+1} i tako postavljamo konstrukciju.
5. Zbroj jagoda: $n + (n-2) + (n-4) + \dots + (n-2(k-1)) = 2014$ $nk - 2(1+2+\dots+k-1) = 2014$ $k(n-k+1) = 2014$
6. Da su svi rekli svoj točni poredak, zbroj bi bio $1+2+\dots+100$. Pretpostavimo da je n ljudi s kraja poretka reklo da su bili prvi, pišemo jednadžbu za zbroj.
7. Ispitajte situaciju za $n=1$ i $n \geq 1$. Postavite niz $x_1, x_2, \dots, x_{(2n)}$ kao dobar niz.
8. Neka je x Tonijev broj. Napravite tablicu slijeda igre s Tonijevim i Laninin koracima te vidite na kojem koraku je očit prijelaz broja 1000. Postavite nejednažbu koristeći interval u kojem se nalazi zadnji broj ispod 1000.
9. Troznamenkasti broj može imati znamenke 1, 2, 3, 4, 4, 4. Imamo 4 slučaja, ovisi koliko se puta broj 4 pojavljuje.
10. Tvrdimo da je tražen broj bubamara $2016^2 + 1$. Dokazujemo prvo da za 2016^2 se bubamare nikad neće naći na istom polju.

4.5 Hintovi za zelenu grupu

4.5.1 C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kokan

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. klasična matematička indukcija
2. klasična matematička indukcija
3. klasična matematička indukcija
4. klasična matematička indukcija
5. $3 * 3^n > 3(2^n + 3n)$
6. klasična matematička indukcija
7. generalizirani princip matematičke indukcije, pri čemu je $n_0 = 3$, uzmimo proizvoljni $(k+1)$ -terokut i izbacimo jedan njegov vrh da dobijemo k -terokut
8. S_{n+1} izrazi preko S_n
9. klasična matematička indukcija
10. iskoristi $169 = 183 - 14$ ili $196 - 13 = 183$
11. Na piramidu od n slojeva dodajmo najdonji $n + 1$. sloj.
12. klasična matematička indukcija
13. klasična matematička indukcija, adicijske formule sinusa i kosinusa
14. sumu koja ide od nule rastavi na nulti član i sumu od prvog člana
15. uvrsti što je x_{n+1} i y_{n+1}
16. Ako označimo s $A_n = \underbrace{2 \dots 2}_n - 3^n + 1$, pokušajte pronaći rekurzivnu relaciju koja povezuje A_n i A_{n+1} te ju iskoristiti u koraku indukcije.
17. Uvrstimo $x = y = 0$ da dobijemo $f(0) = 2f(0)$, pa dobivamo $f(0) = 0$. Neka je $f(1) = c$.
18. Što ako je jedna hrpa sačinjena od samo jednog graha?
19. Raspišimo izraz za $(m, n + 1)$.
20. Neka tvrdnja vrijedi za $n = k$, a u koraku indukcije dokazujemo da vrijedi za $n = 2k$, a potom da vrijedi za $n = k - 1$.

4.5.2 N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Promotrimo djeljivost s 3 u (b) dijelu i primijenimo rezultate iz (a) dijela.
2. Ako su mogući ostatci broja n pri dijeljenju s 3 brojevi 0, 1 i 2, to znači da je $n \equiv 0, 1$ ili $-1 \pmod{3}$.
3. Svojstva modularne aritmetike.
4. Svojstva modularne aritmetike, ponovo.
5. Svojstva djeljivosti.
6. Svojstva djeljivosti.
7. Posljednja znamenka je ostatak pri dijeljenju s 10, u slučaju da je netko to smetnuo s uma.
8. Isto kao i treći zadatak.
9. Ako je $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $10^m \equiv ? \pmod{11}$ za proizvoljan m ?
10. Izrazi x pomoću y . Koji ostatak ima y pri dijeljenju s 3?
11. Pretpostavimo suprotno. Očekivano promatramo modulo 7 situaciju.
12. Ako m mora biti paran, možemo li na zgodan način djelomice faktorizirati izraz?
13. Svojstva djeljivosti; označimo $n_1 = \frac{n}{(n,c)}$ i $c_1 = \frac{c}{(n,c)}$, n_1 i c_1 su relativno prosti.

4.5.3 G5: Angle chasing - Tea Arvaj

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. samo raspisati kuteve
2. T je centar upisane QPR , ili T i P su osnosimetrične preko AB
3. $AECG$, $FCDG$ su tetivni, H je polovište hipotenuze pa je centar opisane AEC
4. samo raspisati kuteve
5. KID bi trebali biti kolin.
6. $IPNC$ ili $IPCK$ konciklične
7. gledati kuteve $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle BAQ$
8. suma nasuprotnih je 180° u tetivnom
9. kutevi između str i spojnice vrhova s centrom opisane, traži tetivne četverokute ($MDBF$, $HABF$)
10. fantomiranje, $I' = DE$ presjek simetrale kuta $\sphericalangle A$, središnji i obodni, $AI'CE$ je tetivan
11. uvesti okomicu iz A na BC , XAY kolin, traži tetivne četverokute ($AHCY$, $AXBH$, $XMHY$, XYZ)
12. uvesti polovište AC , $APDE$ bi trebao biti tetivan, srednjica je paralelna stranici
13. centar upisane je sjecište simetrala kuteva, puno tetivnih četverokuta ($BDMIF$, $CEIDN$ pa $ABKM$, $ACNK$), $\sphericalangle DMN$ i $\sphericalangle MND$ su $\frac{\beta}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$
14. $YY' \parallel PQ$, trebalo bi biti i $XX' \parallel PQ$
15. dobiti $\sphericalangle XDA$ i $\sphericalangle ADO$, trebalo bi biti OX okomito na AC , $OA = OC$, trebalo bi biti $AX = CX$, tj. X centar AHC
16. promatrati presjek DC i Γ , E je ortocentar AGD , raspisati kuteve, kut tetive i tangente, FG je tangenta na obje

4.5.4 A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Indukcija.
2. Što se dogodi kada oduzmemo dvije takve jednakosti. Ne smijemo zaboraviti da je niz u prirodnim brojevima.
3. Koliko velik a_n može biti?
4. Što se dogodi kad gledamo recipročne vrijednosti?
5. Koji je granični slučaj kada u svakoj grupi mora biti samo jedan broj?
6. Postoji li takva funkcija i zašto ne? Hint u hintu: hint je ime sekcije zadataka.
7. AG i indukcija mogu mnogo pomoći.
8. Kako možemo definirati neki izraz čiji će predznak označavati istinitost neke od nejednakosti?

4.5.5 C15: Prebrojavanja - Lucija Relić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Na koliko načina možemo odabrati element za prvo mjesto k -torke? Na koliko za drugo mjesto nakon što smo odabrali element za prvo?
2. Koliko ima permutacija ako sve elemente shvaćamo kao različite? U takvim permutacijama više smo puta brojali istu stvar, budući da ne razlikujemo 2 slova a . Sada još treba maknuti višak prebrojanog.
3. Smještanje kuglica u kutije jednako je kao i odvajanje kuglica u redu nekim pregradama. Na koliko načina možemo to napraviti?
4. Što prebrojava desna strana jednakosti? Ako to isto prebrojavanje obavimo na neki drugi način (koji je opisan lijevom stranom jednakosti) tvrdnja će vrijediti po principu dvostrukog prebrojavanja.
5. U kreiranju podskupa svaki element skupa možemo i ne moramo odabrati u podskup. To su samo 2 mogućnosti za svaki element skupa.
6. Budući da tražimo abecedni poredak dovoljno je od 9 mjesta za sva slova pronaći 3 za samoglasnike. Pazi da ne prebrojavaš previše slučajeva!
7. Pokušaj rastaviti na slučajeve, jedan je onaj u kojemu jedno mjesto posjete 3 razreda, a preostala tri mjesta po 1 razred. Koji su još slučajevi? Drugi način je koristiti formulu uključivanja i isključivanja.
8. a) Pokušaj iskoristiti zadatak 2. Prilikom sjedenja u krug isti poredak ljudi, ali u rotiranom krugu smatramo istim slučajem.
b) Slično kao i a), ali neke uloge su već podijeljene. Za prebrojavanje načina sjedenja pokušaj iskoristiti princip sume (koliko je rasporeda sjedenja bez ograničenja, a koliko ako Marko i Pero sjede na susjednim mjestima?).
9. Odvojeno promatraj brojeve kojima je prva znamenka parna i one kojima je prva znamenka neparna.
10. a) Koliko ima svih permutacija zadanog skupa, a koliko onih u kojima brojevi 1 i 2 jesu susjedni? Iskoristi princip sume.
b) Slično kao i a). Pazi, ako su 1, 2 i 3 u jednom bloku, to znači da su i 1 i 2 zajedno, kao i 2 i 3.
11. Iskoristi formulu uključivanja i isključivanja.
12. Broj završnih nula ovisi o broju dvojki i petica u raspisu na proste faktore.
13. Promatraj najkraće puteve od $(0,0)$ do $(3,5)$, od $(0,0)$ do $(5,3)$, od $(3,5)$ do $(7,10)$ i od $(5,3)$ do $(7,10)$. Najkraći put sastoji se samo od pomaka gore i desno.
14. Iskoristi zadatak 3.
15. Svatko će u nekoj od rotacija sjediti kod svoje kartice s imenom.
16. Koliko postoji rangiranja takvih da su točno 2 člana komisije stavila nekog od n kandidata na prvo mjesto? Koliko ih postoji ako su to napravila točno 3 člana komisije?
17. Neka su omotnice označene brojevima tako da je najveća označena brojem 1, a najmanja 100. Na koliko načina možemo staviti omotnicu 2? A k ?
18. Pokušaj naći bijekciju između traženog podskupa i nekog podskupa bez restrikcija na uzastopnost elemenata.
19. Broj permutacija multiskupa $\{a_1^4, a_2^4, \dots, a_n^4\}$ je prirodan broj.

4.6 Hintovi za cijan grupu

4.6.1 C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

- Označite broj šahista s x , a broj penzionera s y i zapišite uvjet zadatka u jednadžbu.
- Prebrojite ukupan broj rješениh zadataka na 2 načina.
- Prebrojite ukupan broj parova učenika koji čiste učionicu zajedno.
- (a) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih n . Kako možemo interpretirati desnu stranu?
 - (b) S lijeve strane je broj načina za odabrati k učenika među njih $n + 1$, a na desnoj strani želimo isto brojanje nekako podijeliti na 2 slučaja.
 - (c) Prebrojavanja na obe strane koriste sličnu ideju "izolacije pojedinca" kao i prebrojavanje na desnoj strani u (b) dijelu.
 - (d) Razmislite koje sve izbore momčadi među n učenika prebrojavamo na lijevoj strani.
 - (e) Lijevu stranu možemo interpretirati kao da među n učenika biramo m -članu momčad, a zatim r članova momčadi koji započinju utakmicu. Što brojimo na desnoj strani?
- Prebrojimo ukupan broj parova kušača koji su kušali neko vino. Ne zaboravite konstrukciju za n koji mislite da je rješenje!
- Prebrojite ukupan broj parova polja iste boje koji dijele redak/stupac.
- Hint 1: Promotrimo tablicu s 8 redaka i n stupaca t.d. na presjeku i -tog retka i j -tog stupca pišemo 1, ako je i -ti sudac ocijenio j -tog natjecatelja s *prošao*, a 0 ako ga je ocijenio s *pao*. Interpretirajte uvjet zadatka u toj tablici.

Hint 2: Pokušajmo dokazati da je neki n rješenje (sami odredite koji bi to trebao biti!). Pretpostavimo da postoji $n + 1$ stupaca sa svojstvom zadatka. Označimo s a_i broj 0 u i -tom retku i prebrojimo na 2 načina broj parova 00 u istom retku i neka 2 različita stupca. Ne zaboravite konstrukciju za traženi n nakon toga!
- Definirajmo tablicu $n \times n$ po uzoru na prethodni zadatak i interpretirajmo uvjet zadatka. Označimo s d_i broj 1 u i -tom retku i prebrajajmo broj parova jedinica u istom retku te ukupan broj jedinica.
- Hint 2: Na prebrojane veličine treba primijeniti neku nejednakost da se dobije tražena ocjena.
- Napravi tablicu $n \times n$, u polje u i -tom stupcu i j -tom retku stavi 1 ako je i -ti profesor ocijenio j -tog studenta s prošao u suprotnom stavi 0. Sada promatramo ukupan broj jedinica, a znamo da ne postoje 4 jedinice koje čine pravokutnik.

4.6.2 N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Primijeni Mali Fermatov teorem na svaki član sume.
2. Prema Malom Fermatovom teoremu dovoljno je odrediti ostatak koji a_{99} daje pri dijeljenju sa $\varphi(7)$.
3. Prema Malom Fermatovom teoremu dovoljno je gledati eksponent modulo $\varphi(11) = 10$.
4. Po Malom Fermatovom teoremu vrijedi $29^p \equiv 29 \pmod{p}$. S druge strane, želimo da vrijedi $29^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
5. Pokušaj spariti faktore s lijeve i desne strane.
6. Promotrimo prvo parne brojeve. Nadalje, za neparne i pokušaj pronaći j za koji tvrdnja vrijedi.
7. Promatramo ostatak pri dijeljenju s 8 i ostatak pri dijeljenju sa 125 zasebno pomoću Eulerovog teorema.
8. Promatramo svaki pribrojnik zasebno modulo 100.
9. Izraz s lijeve strane je razlika kvadrata, a faktori su relativno prosti. Pokušaj primijeniti Eulerov teorem na oba.
10. Promatramo modulo 2, 3 i 5 zasebno te dobijemo ostatak koji n daje pri dijeljenju s 30. Nakon toga koristimo ograde i dobili smo nužan uvjet za n .
11. Pokušaj zadani problem svesti na neki ekvivalentni (npr. dijeljenje danog izraza s 2) i iskoristiti Mali Fermatov teorem.
12. Uvjet implicira da a i b daju isti ostatak pri dijeljenju sa p . Možemo li faktorizirati $a^p - b^p$?
13. Pokušaj problem zapisati u obliku kongruencija i modificirati izraz te primijeniti Mali Fermatov teorem.
14. Za proste, primijeni MFT. Primijetimo da 3 i 9 funkcioniraju.
15. Želimo riješiti svaki prost faktor od 1989 zasebno.
16. Pokušaj konstruirati takav broj pomoću Eulerovog teorema.
17. Dokaži da je dovoljno da niz postane periodičan modulo $\varphi(n)$.
18. Dovoljno je provjeriti koji prosti brojevi ne dijele niti jedan član niza.

4.6.3 G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip PupiĆ

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Dokažimo da se presjek opisane kružnice trokuta ABC i simetrale stranice BC nalazi na simetrali kuta pri vrhu A .
2. Hint 1: Dokažimo da su A, I, L kolinearne.
Hint 2: Angle-chaseom pokažimo $LB = LI$; ostali slučajevi analogno.
3. Hint za 1. dio: Označimo s D diralište upisane kružnice i stranice BC te s E diralište upisane kružnice i stranice AB . Dokažimo sukladnost trokuta BDI i BEI .
Hint za 2. dio: Kombiniramo činjenicu 4 sa prvim dijelom zadatka.
4. Primjećujete li neki tetivni četverokut?
5. Gdje se nalaze točke D i E ?
6. Primjena 2 leme navedene među činjenicama prije zadataka.
7. Potražimo tetivan četverokut. Promotrimo što sve vrijedi ako tvrdnja zaista vrijedi.
8. Hint 1: Neka je točka X presjek pravca AC i A_1C_1 .
Hint 2: Povucimo tangentu na k u točki E .
9. Hint 1: Docrtajmo A -pripisanu kružnicu trokuta ABC i promotrimo što vrijedi za njena dirališta s pravcima AB, AC i BC .
Hint 2: Konstruirajmo kružnicu polumjera 0 sa središtem u A i promotrimo radikalnu os te kružnice i A -pripisane kružnice.

4.6.4 A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

Trikovi

1. Za nizove a_k i b_k uzmemo $b_k = 1$.
2. CSB na $a_k^{\frac{1}{3}}$ i $a_k^{\frac{2}{3}}$.
3. Primjenimo CSB na $\sum_{k=1}^n \{p_j^{\frac{1}{2}} a_j^{\frac{1}{2}}\} \{p_j^{\frac{1}{2}} b_j^{\frac{1}{2}}\}$.
4. (a) Dvije primjene CSB-a na $a_k(b_k c_k)$.
(b) Podijelimo obje strane sumom $\sum_{k=1}^n c_k^2$ i iskoristimo očitu nejednakost $\frac{c_j}{\sum_{k=1}^n c_k^2}$ za $j = 1, 2, \dots, n$.
5. (a) Trik s jedinicom dovodi do pokrate brojnika i nazivnika pa desna strana jednakosti ne ovisi o x, y i z .
(b) Množimo sa $x + y + z$ (uočimo da su pozitivni pa se smjer nejednakosti neće promijeniti).
6. Jedino je teže $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \geq n^3$, a to se dobiva na sljedeći način:

$$\left(\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k^2} \right\} n \right) \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \right\}^2 \geq \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \right\}^2 \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \right\}^2 \geq (n^2)^2 = n^4$$

gdje su obje nejednakosti CSB.

7. Pomnožimo obje strane jednakosti sumom $\sum_{k=1}^n b_k$, a kako su svi b_k pozitivni, predznak jednakosti se ne mijenja.

Vježba

8. Kvadrirati i raspisati.
9. Podijeli s abc i Engel forma.
10. Uvjet jednakosti CSB - a.
11. Trik s jedinicom.
12. Trik s jedinicom da svedemo na oblik s $a + b + c$.

Zadatci s državnog

13. Izlučiti $\sqrt{uvw}$. CSB na $\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$, a A-G na $\sqrt{uvw}$. Dobije se $u + v + w \geq \sqrt{3}$, a jednakost vrijedi kada je $\frac{u}{1} = \frac{v}{1} = \frac{w}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
14. LHS pomnožimo s $(a + b) + (b + c)$ i po CSB to je veće od $(a + b)^2$. Sada jednoj zagradi od $(a + b)^2$ dodamo i oduzmemo $b + c$ kako bi kratili s nazivnikom. Dobivamo sada po A-G:

$$a + b - \frac{(b + c)(a + b)}{a + 2b + c}.$$

Sada uočavamo izraze $b + c$ i $a + b$ u brojniku i nazivniku! Primijenimo A-G dva puta, najprije na nazivnik!, onda na brojnik!:

$$\begin{aligned} a + b - \frac{(b + c)(a + b)}{a + 2b + c} &\geq a + b - \frac{(b + c)(a + b)}{(a + b) + (b + c)} \geq a + b - \frac{(b + c)(a + b)}{2\sqrt{a + b}\sqrt{b + c}} \\ &= a + b - \frac{\sqrt{(b + c)(a + b)}}{2} \geq a + b - \frac{(a + b) + (b + c)}{4} = a + b - \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{4} \\ &= \frac{3a + 2b - c}{4}. \end{aligned}$$

15. Suma se može ograničiti odozgo CSB - om tako da je grupiramo kao $(\sin x \sin y) \sin z + (\cos x \cos y) \cos z$. To je manje ili jednako od $\sqrt{(\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y)(\sin^2 z + \cos^2 z)}$. Druga zagrada je jednaka 1 pa izraz ne ovisi o jednoj od varijabli (mogli smo izdvojiti tako i neku drugu varijablu). Prva zagrada asocira nas na $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 y + \cos^2 y)$ (što je jasno jednako 1). U taj oblik zagradu vrlo jednostavno dovodimo jer će zagrada biti manja ili jednaka dodamo li pod korijen $\sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y$. Upravo je to tražena faktorizacija. Dakle, cijeli izraz je ≤ 1 , a jednakost se postiže npr. za $x = y = z$.

16. Pada na Engel formi i uvjetu jednakosti.

Zadatci s IMO - a

17. U CSB - u uzmimo $a_i = \sqrt{x_i y_i} - z_i$, $b_i = \sqrt{x_i y_i} + z_i$. Dovoljno je dokazati

$$\frac{n^3}{(\sum a_i)(\sum b_i)} \leq \frac{1}{\sum a_i b_i}$$

18. Ravi supstitucija, tj. $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{c+a-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$ pa je $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Tada ubacujući u nejednakost dobivamo

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z)$$

što vrijedi po CSB nejednakosti.

19. Neka je $x = 1/a$, $y = 1/b$ i $z = 1/c$. Tada je $xyz = 1$ i

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Označimo desnu stranu jednakosti kao S . Želimo dokazati $S \geq \frac{3}{2}$. CSB primijenjena na nizove

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}} \right), \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y} \right)$$

daje $(x+y+z)^2 \leq 2S(x+y+z)$ odnosno $S \geq (x+y+z)/2$. Koristeći A-G nejednakost dobivamo

$$S \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

Jednakost vrijedi akko $x = y = z = 1$ što je ekvivalentno s $a = b = c = 1$.

4.6.5 C16: Ploče - Juraj Marušić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Primjetimo da je u polju (i, j) upravo broj $8(i - 1) + j$.
2. Imamo 101 stupac te 100 poteza, što znači da nećemo odigrati u barem jedan stupac, može li se tada taj stupac upaliti s manje od 101 poteza?
3. Princip ekstrema, uzmimo od svih najljepijih kraljica onu najgornju te zaključimo koliko ona najviše drugih kraljica može napadati.
4. Prebrojimo broj parova boja i broj susjednih polja na ploči.
5. Uočimo da je suma paran broj jer je jednak dvostrukom broju novčića na ploči te da je taj broj > 14 .
6. Uzmimo najveći broj na ploči. Što mora vrijediti za sve brojeve oko njega?
7. Promatramo pobjedničke/gubitničke pozicije.
8. Indukcija.
9. Podijelimo ploču na 25 manjih 2×2 ploča.
10. Promatramo pobjedničke/gubitničke pozicije.
11. Pretpostavimo suprotno. Brojimo parove oblika (P, c) gdje je P polje a c crveni brid koji omeđuje to polje.
12. Promatrajmo polja dijagonale.
13. Ako je u redu r topova, u tom red mora biti barem $r - 1$ pijuna. Sumiranjem po svim redovima dobivamo da imamo najmanje p pijuna.
14. $k(n) = 6n^2$

4.7 Hintovi za plavu grupu

4.7.1 C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

- Promotrite $(x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) = \dots$
- Ako označimo s $A_n = \underbrace{2 \dots 2}_n - 3^n + 1$, pokušajte pronaći rekursivnu relaciju koja povezuje A_n i A_{n+1} te ju iskoristiti u koraku indukcije.
- Provodimo (klasičnu) indukciju po k , broju različitih prostih faktora. U koraku indukcije primijetimo da su svi djelitelji od $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ umnošci djelitelja od $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ i $p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.
- Prilikom koraka indukcije u (b) dijelu, imamo n pravaca i njih siječe $n + 1$. pravac i time dobivamo n novih točaka i time $n + 1$ dijelova na $n + 1$. pravcu koji pak ravnini daju koliko novih dijelova?
- (a) Dokazujemo tvrdnju za $2^n \times 2^n$ ploče. $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ploča sastoji se od četiri $2^n \times 2^n$ ploče. Uklanjanjem jednog polja u velikoj ploči, uklonili smo jedno polje u jednoj od četiriju manjih ploča; možemo li jednim L-triominom i preostale tri manje ploče učiniti "krnjima"?
(b) Možemo li pokriti $3 \times n$ ploču kada je n paran, a kada je neparan?
- Na koji način je broj traženih popločavanja od $1 \times n$ povezan s traženim popločavanjima od $1 \times (n - 1)$ i $1 \times (n - 2)$? Nije teško primijetiti da rješenja u (c) i (d) moraju svakako biti jednaka. Zato rješavamo (d) - neka a_n označava broj traženih binarnih nizova duljine n . Koliko ima traženih binarnih nizova duljine n kojima je na zadnjem mjestu 0, a koliko onih kojima je na zadnjem mjestu 1?
- U koraku indukcije, neka je među $n + 1$ gradova grad H onaj izdvojen i neka su $G_1, \dots, G_n$ preostali gradovi koje možemo obići, prema pretpostavci, i to upravo redoslijedom kojim smo ih označili. Promotrimo G_k , gdje je k najmanji indeks takav da se iz G_k ne može direktno stići u H ...
- Regresivna indukcija. Ako n zadovoljava traženo svojstvo, tada zadovoljava i $2n$.
- Uz pretpostavku indukcije, među $4n - 1$ ($2^{k+1} = 2n$) cijelih brojeva možemo pronaći tri n -torke cijelih brojeva čija je suma djeljiva s n . Možemo li od njih nekako sastaviti traženu $2n$ -torku?
- Ako n točaka ravnine spajanjem daje točno n pravaca, koja je jedina moguća "konfiguracija" tih pravaca i točaka?

4.7.2 N7: Diofantske jednadžbe - Ivan Sinčić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

Hintovi

1. Faktorizacija, ako je suma nekih kvadrata mali broj, ti kvadrati se lako odrede
2. Pretpostavi uređaj (jedan broj mora biti najmanji)
3. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
4. Faktorizacija
5. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
6. Kakvi su brojevi po parnosti?
7. Faktoriziraj tako da na jednoj strani dobiješ umnožak dva relativno prosta broja
8. Ako je umnožak dva relativno prosta broja potencija nekog broja, kakvi moraju biti ti brojevi?
9. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojevima
10. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem i usporedi novodobivenu jednadžbu s početnom
11. Promatraj najveći zajednički djelitelj danih brojeva
12. Promatraj ostatak pri dijeljenju s nekim brojem
13. Kakve su lijeva i desna strana s obzirom na veličinu?
14. Kakve su lijeva i desna strana s obzirom na veličinu?
15. Ako se jednadžbi od tri člana može primijeniti formula za razliku kvadrata, to obično nije loša ideja
16. Pokušaj izračunati d_5
17. Promatraj najveći zajednički djelitelj danih brojeva

4.7.3 G7: Fantomiranje - Katja Varjačić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Neka je P sjecište pravca TH s dužinom BC . Pokažimo da je P polovište od B . (Koristimo da je $AHTC$ tetivan četverokut).
2. Odaberimo točku T' tako da su trokuti ABC i $AT'B$ slični. Pokažimo da je $T' = T$.
3. Hint 1: Neka je točka X presjek pravca AC i A_1C_1 .
Hint 2: Povucimo tangentu na k u točki E .
4. Hint 1: Neka je T' druga točka u kojoj pravac AQ siječe opisanu kružnicu trokuta BOC .
Hint 2: Pokažimo da je $AT'CM$ tetivan četverokut.
5. Hint 1: Neka su QX i PY tangente na kružnicu upisanu trokutu ABC , pri čemu su X i Y na toj kružnici, a nisu na pravcima AB , tj. AC . Pokažimo $X = Y$.
Hint 2: Pokažimo $\angle AQX = \beta$ i $\angle APY = \gamma$.
6. Hint 1: Neka je X' takva da je trokut MBX' jednakokraničan te da X i X' leže s iste strane pravca MB . Pokažimo

$$AB = BP \iff X = X'$$

Hint 2: Definirajmo D' kao presjek pravca kroz X' paralelnog s CD i pravca AD te pokažimo da je $D = D'$.

4.7.4 A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y$.
2. A-G nejednakost na svaku zagradu posebno.
3. CSB, A-G
4. $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. A-G.
5. $(\sum a)^2 \geq 3$.
6. CSB, A-G
7. CSB
8. CSB
9. Lema: $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x} \leq \sqrt{2}(x+1)$

4.7.5 C17: Teorija igara - Petra Brčić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Koje brojeve ne treba igrati, tj. koji brojevi su dominirane strategije?
2. Pronaći dominiranu strategiju.
3. Zadatak se može riješiti promatranjem svakog ishoda (žele li igrači promijeniti strategiju) ili traženjem najboljih odgovora.
4. Treba li svaka igra imati Nashovu ravnotežu?
5. Zadatak se može riješiti promatranjem svakog ishoda (žele li igrači promijeniti strategiju) ili traženjem najboljih odgovora.
6. Zadatak se može riješiti promatranjem svakog ishoda (žele li igrači promijeniti strategiju) ili traženjem najboljih odgovora.
7. Pronaći najbolje odgovore prvog igrača na svaku akciju drugog igrača. Isto ponoviti za drugog.
8. Iterativna dominacija.
9. Postoji li Nash u kojem više od k ljudi uloži napor? U kojem točno k ljudi uloži napor? U kojem manje od k ljudi uloži napor?
10. Je li strategijski profil u kojem svi glasaju Nash? Postoji li Nash u kojem su kandidati izjednačeni, a nisu svi glasali? Postoji li ijedan Nash u kojem jedan kandidat pobijedi za jedan glas? Postoji li Nash u kojem jedan kandidat pobijedi za 2 ili više glasova?
11. Pronaći najbolje odgovore i konstruirati njihov dijagram.
12. Derivirati funkciju u_i po a_i .
13. Konstruirati dijagram najboljih odgovora.
14. Gledati pojedine strategijske profile i žele li igrači promijeniti strategiju.
15. Gledati pojedine strategijske profile i žele li igrači promijeniti strategiju.

4.8 Hintovi za ljubičastu grupu

4.8.1 C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Promotrimo osobe s najmanjim i najvećim projem rukovanja. Zaključujemo da se prva nije uopće rukovala, a druga se rukovala sa svima.
2. Promotrimo najveći broj u krugu.
3. Pretpostaviti suprotno, da nisu sve točke na istom pravcu. Tada postoji trokut s vrhovima u skupu zadanih točaka. Kako ih ima konačno mnogo, promotrimo trokut najmanje površine. Iz njega konstruirati trokut još manje površine. Kontradikcija.
4. Kako je točaka konačno mnogo, promotrimo trokut najveće površine. Konstruirajmo trokut kojemu je taj trokut dobijen spajanjem srednjica. Njegova maksimalna površina je 4.
5. Nema rješenja. Pretpostavimo suprotno, te promotrimo rješenje koje ima najmanj vrijednost $x^2 + y^2$.
6. Neka je K_i krug sa središtem A_i polumjera $\frac{d_i}{2}$. Zaključiti da imaju disjunktne nutrine te da stanu u krug polumjera 2.
7. Dokažimo prvo da uvijek postoji igrač koji osvaja nagradu. Da bi to dobili, promotrimo igrača s najviše direktnih pobjeda. Nakon toga, pretpostaviti da za tog igrača s najviše pobjeda postoji netko od koga je izgubio. Zaključiti da bi tada i taj igrač tebao dobiti nagradu.
8. Uzeti $B \subseteq A$ takav da bude najveći podskup koji ne sadrži tri točke na istom pravcu. Neka je $|B| = k$. Ocijeniti k .

4.8.2 N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. x možemo prikazati kao $5k + 3$ i $11m + 4$
2. Ako je broj djeljiv s dva različita prosta broja ne može biti prosta potencija
3. Posmatraj proste potencije broja n .
4. Koristi polinom $P(x) = x^2 + x + 1$. Pokaži da za svaki n postoji t tako da $P(t)$ ima barem $n + 1$ prostih djelitelja
5. Neka su točke na tablici oblika $(a + m, b + n)$ za $0 \leq m, n \leq 99$. Postavi 100 prostih da dijeli $a + k$, prvi od njih neka dijeli b , drugi $b + 1$, ...
6. $x^x \equiv x^x \pmod{p-1} \pmod{p}$ i još su pritom p i $p - 1$ relativno prosti.
7. Odaberi x i N za niz

$$\frac{x+1}{N}, \frac{x+2}{N}, \dots, \frac{x+k}{N}$$

Možeš li skratiti svaki razlomak točno jednim prostim brojem?

8. Razlika kvadrata je jaka stvar. Nazovimo broj oblika $2^{2^m} + 1$ Fermat broj, dokaži da su svi Fermatovi brojevi u parovima relativno prosti.

4.8.3 G8: Kolinearnost i konpunktalnost - Luka Kraljević

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Postoji paralelogram u skici.
2. Radikalna os dviju kružnica je okomita na spojnicu njihovih središta. Iskoristite tu okomitost.
3. Centri upisane i pripisane glume polovišta nekih dužina. Kako možemo spojiti dijametralno suprotnu točku točki D (s obzirom na upisanu) s ostatom skice?
4. Ceva.
5. Menelaj.
6. Postoje tri skrivene kružnice u ovom zadatku.
7. Leži li sjecište Ω_1 i Ω_2 na željenom pravcu? Iskoristite tu točku kao pomoć pri dokazivanju ove kolinearnosti.
8. Uvedite točku L kao okomicu iz I na pravac AD . Pokušajte sada dokazati da su I , L i K kolinearne.

4.8.4 A8: Uvod u funkcijske jednačbe - Krunoslav Ivanović

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Funkcija je injekcija.
2. Jedna strana je simetrična dok druga nije, kako to možemo iskoristiti?
3. Funkcija izgleda dosta slično Cauchyvoj jednačbi, možemo li je nekako transformirati u nju?
4. Što dobijemo ako uvrstimo $(x, y) = (x, 0)$? Ako je $f(0) = a$, s čime možemo zamijeniti x tako da "uljepšamo" izraz $f(x + a)$?
5. Postoje dva slučaja za vrijednosti $f(1)$ te se rješavaju različito, ali slično. Kojim uvrštavanjem možemo iskoristiti tu vrijednost $f(1)$ tako da nam izraz ima više smisla te dobijemo neku jednačbu iz koje možemo jednostavno dobiti $f(x)$?
6. Ili je $f(1) = 0$ ili je $f(-1) = 0$. Kako to iskoristiti?
7. Ako dobijemo da je $f(f(x)) = x$, onda primjenom f na početnu jednačbu imamo

$$f(y - x^2) = f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y).$$

Što ima smisla uvrstiti u novodobivenu jednačbu?

8. Vrijedi $f(f(x)) = 4x$. Promotri $f(f(f(x)))$ na dva različita načina te se iz toga može dovršiti.
9. Indukcija.
10. Zadatak se sastoji od 2 dijela. Jedan je da pokažemo da je $\alpha = 2$ što ćemo pokazati kao posljedicu činjenice da je $f(x) > \alpha$ za svaki realan x te ako je $\alpha \neq 2$, taj uvjet ne može vrijediti. Drugi dio je klasična funkcijska jednačba $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ koja se može riješiti slično kao Cauchyjeva.
11. Koristeći činjenicu da ako $a \mid b$ onda $a \leq b$ ili $b = 0$ te pametna uvrštavanja, želimo pokazati da u isto vrijeme vrijedi $f(n) \geq n$ i $f(n) \leq n$ pa mora vrijediti $f(n) = n$.

4.8.5 C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

Uvodni zadaci

1. Invarijanta je alterirajuća suma brojeva.
2. Gledajmo unazad. Krenimo od hrpi koje sve imaju 3 kamenčića. Spajanjem hrpi ostaje 3 (mod 4).
3. Šahovsko bojanje.

Invarijante

4. Invarijanta je $(x + y) \pmod{5}$.
5. Potpun sustav ostataka $\pmod{3}$.
6. Za neku konfiguraciju $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, što se dešava (nakon promjene) s brojem parova (i, j) takvima da je $a_i < a_j$?

Bojanja

7. Obojimo dijagonale udaljene za 4 pločice počevši od donjeg lijevog kuta.
8. U svakom 2×2 obojaj donji lijevi kut.
9. Šahovsko bojanje. Ispadne da broj polja mora biti 0 (mod 8), što 100 nije.
10. Istovremeno napravimo 2 bojanja, prvo šahovsko (crno, bijelo), a onda parne redove obojamo kružićem, a neparne križićem.

4.9 Hintovi za magenta grupu

4.9.1 C9: Indukcija (turbo) - Josip PupiĆ

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. U koraku indukcije pretpostavimo da nijedna stanica nema dovoljno goriva da se dođe do sljedeće stanice.
2. (a) Hint 1: Neka je x neki element skupa $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ koji se ne pojavljuje na dijagonali. (Takav očito postoji jer je samo n elemenata dijagonale.)
Hint 2: Neka je A_i skup svih elemenata i -tog retka te i -tog stupca. Ako se x nalazi na polju (i, j) , kažemo da su A_i i A_j **x-par**.
(b) Induktivno stvaramo srebrne matrice reda 2^n . (iz srebrne matrice reda n konstruiramo srebrnu matricu reda $2n$).
3. Hint 1: Provodimo indukciju po broju domorodaca. Baza indukcije je $n = 1$ i $n = 2$, a želimo dokazati: ako tvrdnja vrijedi za neki k , onda vrijedi i za $k + 2$.
Hint 2: Promotrimo proizvoljan par domorodaca i gledamo kakav može biti njihov odnos (ne/prijateljstvo) s proizvoljnim trećim domorocem.
4. Definiramo **pravilno** bojanje vrhova grafa u nekoliko boja kao bojanje u kojem su svaka 2 povezana vrha različite boje.
Želimo dokazati **Lemu**: Ako za konačni graf G postoji pravilno bojanje u n boja ($n > 1$), onda konačnim nizom poteza tipa (a) i (b) možemo dobiti graf s pravilnim bojanjem u $n - 1$ boja.
Ova ideja nije direktna primjena metode indukcije, već pristupamo induktivno uz korištenje obrata po kontrapoziciji.
5. Hint 1: Dokazujemo općenitiju tvrdnju: Neka je m staklenki pri čemu nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{n}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama, uz $n \leq m$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n .
Hint 2: U koraku indukcije promatramo 2 slučaja - kada je u posudi s najviše pekmeza točno $\frac{1}{n+1}$ ukupne količine pekmeza te kada je u njoj manje od toliko.
6. Promatrajmo najlijeviji kvadrat.

4.9.2 N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Odgovor je *da*. Pokušaj induktivno konstruirati n -torku tako da konstruiranu $n - 1$ -torku pomakneš za neku konstantu.
2. Probaj riješiti slučaj kad su n i k djeljivi samo s 3 i 2.
3. Promotri eksponent uz 2 u prostim faktorizacijama od n i $\varphi(n)$.
4. Greedy algoritam za dobivanje neparnih brojeva funkcionira.
5. Razdvoji na slučajeve ovisno o ostatku pri dijeljenju s 4.
6. Pokušaj brojeve sa što jednostavnijom prostom faktorizacijom.
7. Pokušaj brojeve sa što jednostavnijom prostom faktorizacijom.
8. Induktivno ćemo konstruirati takav skup. Primijetimo da smijemo pomnožiti dobar niz s nekim velikim prostim brojem i niz će ostati dobar.

4.9.3 G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Trokut $\Delta I_A I_B I_C$ je homotetičan s trokutom definiranim linijama r_A, r_B i r_C . Gdje je centar te homotetije i gdje šalje točke?
2. Kompozicija homotetija je još uvijek homotetija. Promotrimo transformaciju $\omega_1 \xrightarrow{T_1} \omega \xrightarrow{T_2} \omega_2$.
3. Što se dogodi pri homotetiji iz T koja šalje jednu kružnicu u drugu?
4. Kako pomoću homotetije možemo dobiti da su neka 3 pravca konkurentna?
5. Što se dogodi pri homotetiji iz T koja šalje jednu kružnicu u drugu?
6. Upisana kružnica je pripisana kružnica nekog trokuta. Koji je to trokut i kako je to povezano s zadatkom?
7. Možemo li ovaj zadatak povezati s nekim od prethodnih?
8. Koja dva trokuta su spiralno slična?
9. Što nam daje spiralna sličnost?
10. $BPINT$ je tetivan. Što nam to daje?
11. Neka je N polovište PQ , $X = (APQ) \cap (ABC)$ i $Y = PQ \cap AC$. Pokaži da je peterokut $TMNXY$ tetivan.
12. Neka je $(ADE) \cap (ABC) = A, P$. Uvedimo točku Q kao polovište dužine DE te razmislimo o spiralnoj sličnosti iz P koja šalje DE u BC . Također, promotrimo točku P' koju definiramo kao $HM \cap (ABC)$. Što sve znamo o točki P' ? (Postoje razne lemme o ovoj konfiguraciji)

4.9.4 A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. $A + B$ izvan X implicira A ili B izvan X .
2. Ako gledamo graf induciran funkcijom, lako se može dobiti da je graf stablo konačne dubine. Promotrimo sve čvorove na najvećoj dubini.
3. $a_i + a_{m+1-i}$ se može ograditi.
4. Uzmi prvih n i poredaj ih, probaj iskoristiti neku nejednakost.
5. Korisno je dokazati da su minimumi slika jednaki.
6. Ako je n neparan, polinom ima realnu nultočku.
7. Poredaj članove skupa i promotri lanac.
8. Poredaj, mora vrijediti $a_{i+1} \geq 2a_i$.
9. Dokaži da je f injektivna. Nakon toga, promatraj sliku.

4.9.5 C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Zbilja?
2. Odaberi neke točke na konveksnoj ljusci i sortiraj kutove.
3. Princip ekstrema. Promatraj najveći trokut ili slične objekte.
4. Indukcija.
5. Neprekidnost.
6. Postoji.
7. Indukcija. HMO 2018.
8. IMO 2013. Promatraj konveksnu ljusku točaka.
9. Princip ekstrema. Promatraj točku i pravac najmanje udaljenosti.
10. Koji segmenti se uopće mogu sjeći?

4.10 Hintovi za crnu grupu

4.10.1 C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Može li bijeli postati crni?
2. Nakon k poteza, koliko je maksimalno kutija ispražnjeno?
3. Što bi bio obratni proces?
4. Redak bi trebao biti neki smislen kombinatorni skup s n^2 elemenata.
5. B očito može osigurati barem 30. A na svom potezu uvijek želi iskoristiti najveći broj koji je ostao - analizirajte kako se apsolutna vrijednost sume brojeva s već određenim predznacima mijenja kad je on na potezu, ovisno o tome promijeni li se njen predznak ili ne.
6. Obrnemo li proces, moramo skidati već raspoređene utege tako da dobijemo suprotnu riječ od one koje tražimo. Sada imamo prednost da možemo utege rasporediti kako želimo.
7. Za skup članova S je $A(S)$ skup svih članova iz S i članova koji poznaju nekog u S . Dokažite da za svaku podskup članova F postoji skup članova S takav da je $A(S) = F - \{d\}$, gdje je d neki član parlamenta.

4.10.2 G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. ortocentar se preslika na opisanu
2. simedijana
3. T i durališta upisane su kolinearne
4. računanje duljina stranica
5. radikalne osi i njihova svojstva
6. angle chase
7. Menelaj

4.10.3 C20: Teorija grafova - Leon Starešinić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Formula vrijedi za stablo.
2. Nejednakosti u kombinatorici se uglavnom dokazuju dvostrukim prebrojavanjem.
3. Želimo konstruirati graf, što bi bio jedini logičan uvjet da su točke povezane?
4. Promotrite najveću kliku u grafu.
5. Nejednakosti u kombinatorici se uglavnom dokazuju dvostrukim prebrojavanjem.
6. Kad god se spominju neparni ciklusi, prva stvar koja pada na pamet su bipartitni grafovi.
7. Uzmite proizvoljan put između dva vrha. Kada ga možemo smanjiti?
8. Koje svojstvo ima graf kojeg očito treba iskonstruirati?
9. Indukcija.
10. Rootajte stablo u proizvoljnom vrhu. Koje svojstvo ima proizvoljan promjer stabla s obzirom na to rootanje?
11. Ideja dokaza je slična dokazu Turánovog teorema. Pokušajte prvo dokazati taj teorem (ili pogledajte rješenje).

4.10.4 A11: Funkcijske jednadžbe - Petar Orlić

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Indukcija, prvo za parne
2. $f(n) \geq n$
3. Može se interpretirati kao rekurzija
4. Prvo treba dokazati $f(0) = 0$, za to je potrebna parnost
5. $f(f(x)) = x$
6. Može se svesti na Cauchyjevu
7. Indukcija po neparnima

4.10.5 G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Kosinusov poučak
2. Talesov poučak.
3. Nađi sličnost trokuta koja je ekvivalentna s tvrdnjom zadatka.
4. Dodaj točku i nađi četverokut takav da je tvrdnja zadatka ekvivalentna s tvrdnjom da je taj četverokut paralelogram.
5. Dodaj polovišta stranica.
6. Korisno je promatrati zrcalne slike nekih točaka preko AC ili D .
7. Pokušaj dokazati da su točke D , K i L kolinearne.

4.10.6 N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac

[Link na zadatke.](#) [Link na rješenja.](#)

1. Promotriti F_0 .
2. Što su $x_{-1}, x_{-2}, \dots$?
3. Mod 29.
4. Prvo uočimo da je $n^4 + n^2 + 1 = ((n-1)^2 + (n-1) + 1)(n^2 + n + 1)$. Neka je p_n najveći prosti djelitelj od $n^2 + n + 1$ te promotrimo *kretanje* niza $(p_n)_{n \geq 1}$.
5. Prvo promatrajmo parnost niza te odredimo parnost $a_{14^{14}}$. Sljedeće probajmo pokazati da niz *dosta brzo* pada te će eventualno poprimiti samo vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2\}$.
6. Okej lijeva ograda slijedi po A-Gu. Za desnu ogradu, promatrajmo najveći element i njegove susjede.
7. Nakon malo igranja primjetit ćemo da ako je n prost tvrdnja vrijedi. Tada pretpostavimo suprotno na glavnoj tvrdnji, pa za svaki i postoji $f(i)$ tako da $n \mid a_i + a_{i+1} + \dots + a_{f(i)}$. Potrebno je pokazati da $n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$, kako bi smo dobili kontradikciju.

Poglavlje 5

Rješenja s predavanja

5.1 Rješenja za smeđu grupu

5.1.1 C1: Logika i dokazi - Lana Frkin

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Lucko, 2018., 43.](#) Rješenje: Ako izuzmemo osobu koja zna sva 3 jezika i stavimo ju sa strane (tada sa strane imamo jednu osobu) ostaje nam 5 osoba koji znaju engleski, 5 osoba koje znaju njemački, 6 francuski, 3 engleski i njemački, 2 osobe njemački i francuski i 1 osoba francuski i engleski. Sada više ne postoji ni jedna osoba koja zna sva 3 jezika. Sada izuzmemo osobe koje znaju 2 jezika (ima ih $3+2+1=6$) i nakon toga nam ostane točno jedna osoba koja zna engleski i 3 osobe koje znaju njemački, te 0 osoba koje znaju francuski. Dakle sveukupno je $1+6+3+1+0=11$ osoba.
2. [Lucko, 2018., 44.](#) Rješenje: Neka je p = posuda, $\check{c}$ = čaša, b = boca i v = vrč. Tada $b + \check{c} = p$, $b = \check{c} + v$, $3v = 2p$. Ako prvu jednakost pomožimo sa 2 dobit ćemo: $2b + 2\check{c} = 2p$. Jer vrijedi $2p = 3v$ imamo $2b + 2\check{c} = 3v$. Uvrstimo b iz druge jednakosti i sada imamo: $4\check{c} + 2v = 3v$ iz čega slijedi $v = 4\check{c}$, dakle u jedan vrč stanu 4 čaše.
3. [Lucko, 2018., 45.](#) Rješenje: Jer svaki mjesec ima manje ili jednako 31 dan, takav mjesec koji ima 5 ponedjeljaka, 5 utoraka i 5 srijeda mora početi na ponedjeljak i završiti u srijedu. Dakle prvi dan tog mjeseca je ponedjeljak što znači da je posljedni dan prošlog mjeseca bila nedjelja. Ukoliko prošli mjesec ima više od 28 dana, ima 5 nedjelja. Dakle prošli mjesec mora imati točno 28 dana, a jedini mjesec za koji to vrijedi je veljača. Dakle, sadašnji mjesec je ožujak, a slijedeći je travanj koji ima 30 dana. Znamo da je 1.4. četvrtak i iz toga slijedi da travanj ima točno 4 subote.
4. [Lucko, 2018., 25.](#) Rješenje: Znamo da za brzinu vrijedi: $v = \frac{s}{t}$ gdje je v brzina, s put i t vrijeme. Put je u oba smjera jednak, a vrijeme natrag je pola sata manje, dakle vrijeme potrebno za povratak je $t - 0.5$. Sada imamo dvije jednadžbe: $360 = \frac{s}{t}$ i $400 = \frac{s}{t-0.5}$. Iz toga slijedi $s = 360 \cdot t$ i $s = 400 \cdot (t - 0.5)$. Ako izjednačimo te dvije jednadžbe dobimo da je $t = 5h$ i iz toga slijedi $s = 1800km$.
5. [Državno 2018., 8. razred, 2. zadatak.](#) Rješenje.
6. [Državno 2012., 8. razred, 2. zadatak.](#) Rješenje.
7. [Državno 2017., 7. razred, 3. zadatak.](#) Rješenje.
8. [Državno 2010., 7. razred, 3. zadatak.](#) Rješenje.
9. Nepoznat izvor. Rješenje: Ako prvi traktor preora cijelu njivu za 7 sati, znači da za 1 sat preora $\frac{1}{7}$ njive. Drugi traktor preora njivu za 5 sati, dakle taj traktor za 1 sat preora $\frac{1}{5}$ njive. Oni zajedno za 1 sat preoraju $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{12}{35}$ njive. Dakle oni cijelu njivu preoraju za $\frac{35}{12}$ sati. Za to vrijeme prvi traktor preora $\frac{5}{12}$ njive, a drugi $\frac{7}{12}$ njive. Iz zadnjeg uvjeta znamo da je $\frac{7}{12}$ njive za 7 hektara više od $\frac{5}{12}$ njive, dakle cijela njiva ima 42 hektara.

10. Državno 2006., 7. razred, 3. zadatak. Rješenje.

11. Poznate činjenice. Rješenje: Svaki paran broj se može napisati kao $2m$, gdje je m neki prirodni broj ili 0. Također svaki broj koji se može napisati kao $2m$, gdje je m neki prirodni broj ili 0 je paran broj. Jednako tako svaki neparan broj se može napisati kao $2k + 1$, i svaki broj koji se može napisati u obliku $2k + 1$ je neparan broj, gdje je k bilo koji prirodan broj ili 0.
- (a) paran + neparan = $2m + 2k + 1 = 2(m + k) + 1$, što je neparan broj
 (b) neparan - neparan = $2k + 1 - (2m + 1) = 2k + 1 - 2m - 1 = 2k - 2m = 2(k - m)$ što je paran broj
 (c) paran · paran = $2k \cdot 2m = 2(2mk)$, što je paran broj
 (d) neparan · neparan = $(2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4mk + 2k + 2m + 1 = 2(2mk + k + m) + 1$, što je neparan broj.
 (e) paran · neparan = $2k \cdot (2m + 1) = 4km + 2k = 2(2km + 1)$, što je paran broj.
12. Poznata činjenica. Rješenje: Svaki peteroznamenasti broj možemo napisati kao $\overline{abcde}$ gdje su a, b, c, d i e znamenke. Ukoliko ga zapišemo po znamenkama imamo: $\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 4(2500a + 250b + 25c) + 10d + e$. Ako je dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4 tj. ako je $10d + e$ djeljivo sa 4, tada je i taj peteroznamenasti broj djeljiv sa 4 jer se može napisati kao zbroj dva broja djeljiva sa 4.
13. Poznata činjenica. Rješenje: Svaki četveroznamenasti broj možemo napisati kao $\overline{abcd}$ gdje su a, b, c i d znamenke. Ukoliko ga napišemo pomoću znamenaka imamo: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d) = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$. Ako je zbroj znamenaka djeljiv s 3 tj. ako je $a + b + c + d$ djeljivo s 3, tada je i taj broj djeljiv s 3 jer se može napisati kao zbroj dva broja djeljiva s 3.
14. Poznata činjenica. Rješenje: To možemo dokazati protuprimjerom. npr. neka je $x=2$ i $y=2$, tada samim uvrštavanjem dobivamo $16 = 8$, što je očito krivo i tome dolazimo do kontradikcije, tj. dokazali smo da to ne vrijedi.
15. Poznata činjenica. Rješenje: Prvo ćemo pretpostaviti suprotno tj. neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku razlomka, tj. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Sada tu jednakosti možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2 pa imamo: $2n^2 = m^2$. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 2, onda je i taj broj djeljiv s 2, pa znamo da je m djeljiv s 2. Dakle m možemo napisati $m = 2k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo: $n^2 = 2k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 2. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s 2, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

5.1.2 N1: Znamenke - Patricija Dovijanić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. *Rješenje.* Prebrajanjem dolazimo do znamenke 9, posljednje znamenke broja 709: $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ je broj znamenaka u svim brojevima manjim od 100. Slično je 2889 broj znamenaka u brojevima manjim od 1000. Zaključujemo da se 2019. znamenka nalazi među troznamenkastim brojevima, odakle slijedi $2019 - 189 = 1830$ te $1830 : 3 = 610$, pa je traženi broj $99 + 610 = 709$.
2. 1998.Ž8.2
3. *Rješenje.* $\overline{...4} \cdot \overline{...3} = \overline{...2}$.
4. Branimir Dakić, Metodika
5. Branimir Dakić, Metodika
6. Branimir Dakić, Metodika
7. 2015.Ž1B
8. Natječemo se u znanju matematike 4, Mirko Polonijo, 1976.
Rješenje. Ako je x znamenka jedinica traženog broja, tada je znamenka desetica $3x$, a traženi broj $31x$. Broj dobiven iz traženog zamjenom znamenaka je $x \cdot 10 + 3x = 13x$. Slijedi $78 \cdot 31x = 78 \cdot 13x + 2808$, tj. $x = 2$, pa je traženi broj jednak 62.
9. 1997.D7
10. 2016.O3B.5
11. 1998.O1.2
12. 2017.01B.5
13. Branimir Dakić, Metodika
14. 2010.OA1.4
15. 2016.Ž1B.4
16. 2017.D1A.1
17. 2014.OA4.4
18. 2019.D1B.4
19. 2019.D3B.4

5.1.3 G1: Određivanje kuteva - Andrija Tomorad

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Izvor.](#)
2. [Izvor.](#)
3. [Izvor.](#)
4. [Izvor.](#)
5. [Izvor.](#)
6. [Izvor](#)
7. [Izvor](#)
8. [Izvor.](#)
9. [Izvor.](#)
10. [Izvor.](#)
11. [Izvor.](#)
12. [Izvor.](#)

5.1.4 A1: Jednadžbe - Vinko Dragušica

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Izvor za 1. zadatak nalazi se na Wikipediji na stranici 'Kvadratna jednadžba' pod naslovom 'Općenito rješenje kvadratne jednadžbe'.
2. Uvrštavanjem u formulu iz prvog zadatka dobije se da je jedino rješenje $x = -1$.
3. Uvrštavanjem u formulu iz prvog zadatka dobije se da su rješenja $x = -1, 1, -2, 2$.
4. Faktorizacijom i uočavanjem razlike kvadrata dobiva se sljedeće: $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$. Rješenja su opet $x = -1, 1, -2, 2$.
5. Ako pogledamo jednadžbu $p + 5q = 40$ uočavamo da je maksimalna vrijednost koju p može primiti jednaka 40 a najmanja 0. Također uočavamo da p mora biti višekratnik broja 5 pa su rješenja za uređeni par (p, q) sljedeća: $(0, 8), (5, 7), (10, 6), (15, 5), (20, 4), (25, 3), (30, 2), (35, 1)$ i $(40, 0)$. Ukupno ima 9 rješenja.
6. Raspisivanjem se dobije da je $n = 36 + \frac{72}{m^2-1}$. Povoljni djelitelji broja 72 su $m^2 - 1 = 3, 8, 24$. Time dobivamo da je $n = 60, 45, 39$.
7. Množenjem sa $5mn$ i faktorizacijom dobiva se sljedeće: $(2m-5)(2n-5) = 15$. Djelitelji broja 15 su 1, 3, 5 i 15 pa broj m može poprimiti samo vrijednosti 3, 4, 5 i 10. Tada za n nalazimo 10, 5, 4 i 3. Skup rješenja jednadžbe je stoga:
$$(m, n) = (3, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 3).$$
8. Ako su a i b duljine osnovnog i pobočnog brida, tada prema uvjetu problema vrijedi jednakost $2a^2 + 4ab = 8a + 4b$. Ako tu jednadžbu zapišemo u obliku $2b = 4 - \frac{a^2-1}{a-1}$ uočavamo da je jedini zadovoljavajući uređeni par (a, b) jednak $(2, 2)$. Zaključujemo da se radi o kocki.

5.1.5 C11: Uvod u prebrojavanja - Daniel Širola

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Podijelimo 100 sa 7 i uzmemo cijeli dio.
2. Slično kao u predhodnom zadatku odredimo koliko ima brojeva djeljivih s 3, i brojeva djeljivih s 5. Zbrojimo ta dva broja i oduzmemo broj brojeva djeljivih s 15 jer smo te brojeve dva puta brojali.
3. Slično kao u prethodnom zadatku, odredimo koliko ima brojeva djeljivih s 5 ili sa 7, te oduzmemo taj broj od 100.
4. Iz svakog vrha ide 4 dijagonale (7 - 1 vrh koji gledamo - 2 susjedna vrha s kojima taj vrh ima stranicu). Dakle 7 vrhova puta 4 dijagonale je 28. Moramo još podijeliti s 2 jer smo svaku dijagonalu brojali dva puta, svaki put iz jednog od vrhova. Dakle 14 je dijagonala.
5. Slično kao u prethodnom zadatku, izbrojimo dijagonale te dodamo broj stranica. Drugi način je brojanje dužina koje idu iz svakog vrha (7), te množimo 7 puta 8 i dijelimo s 2, jer smo svaku dužinu brojali dva puta.
6. Lucija majicu odabire na 3 načina a hlače na dva načina. Prema principu množenja, to je $2 \cdot 3 = 6$ načina za odabir odjevne kombinacije.
7. Marin ima 2 opcije za pecivo, 4 za sendvič, te 3 za odabir šunke. Prema principu množenja, ukupan broj načina za slaganje marende je $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.
8. Kraljević ima 2 opcije za odabir štita, 3 za odabir mača i n za odabir šestara. Ukupni broj načina, prema principu množenja je: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n = 12n$
9. Krunoslav prvi zadatak koji rješava odabire na 5 načina. Pošto je jednog rješio, drugi odabire na 4 načina, trećeg na 3, četvrtog na dva i na koncu mu ostaje samo jedan zadatak koji može riješiti. To je dakle $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = 5!$ načina.
10. Slično kao u prethodnom zadatku. Andrija prvo zove bilo kojeg od svojih 6 prijatelja. Zatim bilo koga od 5 preostalih. Potom nekog od 4 preostala i tako do kraja. Ukupni broj načina je $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 = 6!$
11. Marin sad ima više opcija za odabir namirnica. Pošto nije bitno pojavljuje li se uopće neka skupina namirnica (sir, šunka...) ili ne, možemo svaku pojedinu namirnicu gledati kao jednako vrijednu. Dakle, ako Marin ima 4 vrste sira i 3 vrste šunke, to je ukupno 7 namirnica. Svaka od njih može se, ali i ne mora nalaziti u sendviču. Dakle, to je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$ načina za odabir namirnica, to još moramo pomnožiti sa 2 vrste peciva i dobivamo ukupno 256 načina. b) dio je prepušten čitatelju.
12. Luka može prvu kartu izvući na 32 načina, drugu na 31, i treću na 30. Pošto poredak karata nije bitan, podijeliti ćemo taj umnožak s brojem poredaka te 3 karte: $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4960$
13. Državno 2017., 8. razred.
14. Državno 2016., 8. razred
15. Državno 2018., 8. razred b) i c) djelovi su za vježbu prepušteni čitatelju.

5.2 Rješenja za crvenu grupu

5.2.1 C2: Dirichletov princip - Nena Vukšić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [MNM online predavanja](#)
2. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
3. [MNM online predavanja](#)
4. [MNM online predavanja](#)
5. [Državno 1994., 3. razred srednje škole, 4. zadatak](#)
6. [Državno 2006., 3. razred srednje škole, B varijanta, 5. zadatak](#)
7. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
8. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
9. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
10. [MNM online predavanja](#)
11. [Općinsko 2014., 3. razred srednje škole, A varijanta, 7. zadatak s malom modifikacijom](#)
12. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
13. [Općinsko 2013., 3. razred srednje škole, A varijanta, 5. zadatak](#)
14. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
15. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
16. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
17. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
18. [MNM online predavanja](#)
19. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
20. [Državno 2013., 8. razred osnovne škole, 3. zadatak](#)
21. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
22. [Državno 2008., 3. razred srednje škole, B varijanta, 5. zadatak](#)
23. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
24. [MNM online predavanja](#)
25. [Državno 2008., 2. razred srednje škole, A varijanta, 5. zadatak](#)
26. [Državno 1999., 3. razred srednje škole, 4. zadatak](#)

5.2.2 N2: Prosti brojevi i kanonski zapis - Matej Ivaniček

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. p je neparan, $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, $p - 1$ i $p + 1$ su parni brojevi i to dva parna uzastopna broja, što znači da je jedan od njih višekratnik broja 4 tj. djeljiv je s 4. s time smo dokazali djeljivost s 8. $p - 1$, p i $p + 1$ su tri uzastopna broja, kako je p prost broj veći od 3, znamo da nije djeljiv s 3, pa to mora biti $p - 1$ ili $p + 1$.
2. **Izvor.**
3. 1. slučaj $p = 3$, $14p^2 + 1 = 127$. 2. slučaj p prost broj različit od 3 tj. $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$.
 $14p^2 + 1 = 126k^2 + 84k = 3(42k^2 + 28k)$ ili $14p^2 + 1 = 126k^2 - 84k = 3(42k^2 - 28k)$. $14p^2 + 1$ je djeljiv s 3 pa ne može biti prost.
4. **Izvor.**
5. **Izvor.**
6. **Izvor.**
7. **Izvor.**
8. **Izvor.**
9. **Izvor.**
10. Ne postoji izvor.
11. **Izvor.**
12. $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. (Slijedi iz hinta). Kako bi $x^4 + 4$ bio prost jedan od faktora mora biti 1.
 $x^2 + 2x + 2 = 1$ ili $x^2 - 2x + 2 = 1$ rješavanjem ovih jednačbi dolazimo do rješenja da je $x = 1$ ili $x = -1$
13. Iz malog fermatovog teorema slijedi da je $5|a^4 - 1$ i $5|b^4 - 1$, a iz toga slijedi $5|a^4 - b^4$ jer $a^4 - b^4 = (a^4 - 1) - (b^4 - 1)$.
 $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$. Analogno iz malog fermata možemo dokazati da je $3|a^2 - b^2$ pa onda i $3|a^4 - b^4$.
 $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$. Jasno je da je svaki fakort djeljiv s dva. Pokažimo da je uvijek jedan od ovih fakora djeljiv s 4. Proste brojeve možemo zapisati u obliku $4k + 1$ ili $4k - 1$. Ako a i b daju isti ostatak pri djeljenju s 4 onda će $4|a - b$ (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 4k + 1$ i $b = 4l + 1$ $a - b = 4(k - l)$), a ako daju uprotne onda je onda $4|a + b$ (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 4k + 1$ i $b = 4l - 1$ $a + b = 4(k + l)$). S time smo pokazali da $16|a^4 - b^4$
14. Korištenjem Euklidovog algoritma imamo:

$$\begin{aligned}
 M(2n^2 + 3, n^2 + n + 1) &= M(2n^2 + 3 - 2(n^2 + n + 1), n^2 + n + 1) = M(-2n + 1, n^2 + n + 1) = \\
 &= M(2n - 1, 2n^2 + 2n + 2) = M(2n - 1, 2n^2 + 2n + 2 - n(2n - 1)) = \\
 &= M(2n - 1, 3n + 2) = M(2n - 1, 3n + 2 - (2n - 1)) = M(2n - 1, n + 3) = \\
 &= M(2n - 1 - 2(n + 3), n + 3) = M(-7, n + 3) \in \{1, 7\}
 \end{aligned}$$

5.2.3 G2: Površine - Nikola Sole

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. 5-2 zadatak iz knjige Challenging problems in Geometry.
2. 5-4 zadatak iz knjige Challenging problems in Geometry.
3. Byju's.
4. 1. zadatak MNM predavanja: površine u geometriji.
5. 8. zadatak MNM predavanja: površine u geometriji.
6. Expaii.
7. 2. zadatak MNM predavanja: površine u geometriji.
8. 5-1 zadatak iz knjige Challenging problems in Geometry.
9. 18. zadatak MNM predavanja: površine u geometriji.
10. Wikipedia.
11. 12. zadatak MNM predavanja: površine u geometriji.

5.2.4 A2: Faktorizacije - Nena Vukšić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [MNM online predavanja](#)
2. [MNM online predavanja](#)
3. [MNM online predavanja](#)
4. [MNM online predavanja](#)
5. [MNM online predavanja](#)
6. [Državno natjecanje 2007., 1. razred srednje škole, B varijanta, 5. zadatak](#)
7. [Državno natjecanje 2001., 1. razred srednje škole, 1. zadatak](#)
8. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
9. "Posebne metode rješavanja matematičkih problema", Zdravko Kurnik
10. [Državno natjecanje 2002., 1. razred srednje škole, 3. zadatak](#)
11. [MNM online predavanja](#)
12. [Mathematical Olympiad Treasures.](#)
13. [Mathematical Olympiad Treasures.](#)
14. [MNM online predavanja](#)
15. [MNM online predavanja](#)
16. [ELMO 2019. \(1. zadatak\)](#)

5.2.5 C12: Uvod u invarijante - Andrija Tomorad

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Ne u oba slučaja. U prvom je invarijanta broj parnih brojeva, a u drugom zbroj.
2. Nije moguće. Nazovimo ih redom A, B, C, D, E, F. U jednom potezu za 1 povećamo jednoga od A, C, E i jednog od B, D, F pa je invarijanta razlika sume A, C i E i sume B, D i F.
3. Nije moguće. Prvo podijelimo ploču na $25 \times 2 \times 2$ kvadrata (5 u retku i stupcu) zatim dobivenu ploču obojamo šahovski. Svaka pločica pokriva 2 crna i 2 bijela polja, ali ukupni broj crnih polja nije jednak broju bijelih polja.
4. Nije moguće. Treba nam 25 T-tetromina. Obojamo ploču šahovski i uočavamo da možemo pokriti 3 crna i 1 bijelo polje ili obratno u potezu. Razlika pokrivenih crnih i bijelih polja se mijenja za 4, 0 ili -4 nakon svaka dva poteza. Što znači da nakon 24 poteza razlika je djeljiva s 4, a nakon 25. poteza razlika je oblika $4k + 2$, dakle nije nula.
5. U svakom mogućem potezu broj glava se mijenja za neki broj djeljiv s 3 iz čeg slijedi da je invarijanta ostatak pri djeljenju s tri. 100 i 0 ne daju isti ostatak pri djeljenju s 3, stoga nije moguće.
6. Zbroj parnog i neparnog je neparan broj, a zbroj dva parna ili dva neparna je paran. Za razlike vrijedi isto. Iz toga slijedi da se broj neparnih brojeva smanji za 2 ako se uopće promijeni. Zato će zadnji broj biti paran ako i samo ako ima parno mnogo neparnih brojeva, tj. za $n = 4k$ ili $n = 4k + 3$.
7. Obojamo ploču šahovski tako da su crna polja u kutovima. Žetone uvijek mičemo iz crnog u bijelo polje ili obratno tako da se broj žetona promijeni za 2 ako se uopće mijenja. Na početku je 12 žetona na bijelim poljima pa ne možemo postići da bude 25. Treba još naći konstrukciju za neparne. Uočimo da je svako neparno polje na dijagonali ili simetrali stranica pa možemo koristiti to kao os simetrije i tako postići da sve s lijeve strane osi bude na traženom polju isto kao i sve s desne strane. Ostaju nam još samo žetoni s polja na osi, a za njih je trivijalno.
8. Nije moguće ako svi brojevi daju isti ostatak pri dijeljenju s tri. Lako je pokazati da će nakon svakog mogućeg susreta opet davati različite ostatke pri djeljenju s tri. Ako postoje neka dva koja daju isti ostatak pri djeljenju s tri (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $c = p + 3k$), onda susrećemo crvene i zelene. Razlika crvenih i plavih će se smanjivati za 3 i nakon nekoliko poteza će biti jednaki. Ako nam u međuvremenu ponestane zelenih, onda susretnemo crvenog i plavog (i dalje daju isti ostatak pri djeljenju s 3). Kad postignemo jednakost crvenih i plavih, samo ih susrećemo u parovima (P, C) dok svi ne budu zeleni.
9. Nacrtamo koordinatni sustav. Zanimaju nas samo točke s cjelobrojnim koordinatama. Iz neke točke se može krenuti u 4 različita smjera, lako je provjeriti da za svaki smjer vrijedi da točka u koju sljedeću dođemo ima istu parnost zbroja koordinata. SE kut ima istu parnost zbroja koordinata kao SW, ali NE i NW nemaju. Zraka će dospjeti u SE kut.
10. Skakač ne može skočiti na polje iste boje kao ono s kojeg skače. Počinje na crnom polju treba skočiti na k bijelih i $k + 1$ crnih počevši od bijelog što je nemoguće. Za 4×8 ploču nakon šahovskog bojanja nazovimo polja u prvom i zadnjem retku A, a u ostala dva retka B. Iz polja A ne može skočiti u A, a broj polja A na koje treba skočiti je jednak broju polja B na koje treba skočiti, zato ne bi smio niti skočiti iz B u B, tj. uvijek bi morao iz B u A. Ako počinje iz crnog A polja, skočiti će u bijelo B polje, zatim opet u crno A polje i tako dalje. Nikad neće skočiti u crno B ili bijelo A (analogno ako počinje iz bijelog A).
11. Broj crnih polja se može povećati za $8 - 0 = 8$, $7 - 1 = 6$, $6 - 2 = 4$, $5 - 3 = 2$, smanjiti za te brojeve ili ostati isti. Parnost broja crnih polja je invarijanta; nije moguće.
12. 6 nije savršen. Ukupan zbroj se promijeni za 3 što znači da je ostatak sume svih brojeva pri djeljenju s 3 invarijanta. Na kraju je zbroj $36k$ što znači da je djeljiv s 3. Ako na početku zbroj nije djeljiv s 3, ne može se postići. Za b) dio dokazujemo jaču tvrdnju, moguće je za svaku potenciju broja 2. 2×2 je trivijalna baza. Treba nam tvrdnja da složeni L-tromino s 3 kvadrata u kojima je $2^k \times 2^k$ polja moguće popločiti klasičnim L-trominom, a tu je korak s 2^k na sljedeću isti kao s 2 na 4. To nam daje mogućnost da u konačno mnogo poteza postignemo da se svi brojevi osim onih u jednom krajnjem $2^k \times 2^k$, te ako za svaki od tih kvadrata posebno postignemo da su brojevi u njima međusobno jednaki (možemo prema pretpostavci indukcije), onda se korak svodi na slučaj baze.

13. Invarijanta je zbroj kvadrata, 1,3,5 se ne može postići, a 0,2,5 se postigne jednim potezom $(a, b) = (3, 4)$.
14. Invarijanta pri transformaciji je ostatak pri djeljenu s 9 (svaki broj daje isti ostatak pri djeljenu s 9 kao i zbroj njegovih znamenaka). Od 1 do $10^{2019} - 1$ će svih brojeva biti jednako jer se ostaci periodički ponavljaju kod uzastopnih brojeva, a 10^{2019} će dati 1. Najviše ima brojeva 1.
15. Nije moguće. Opseg i površina su invarijante, pa tako i njihov omjer je invarijanta.
16. Opseg dijela obraslog u korov se ne može povećati. Zato $n < 7$ nije moguće. Za $n = 8$ konstrukcija može biti u jednom 5×5 kvadratu dijagonala je obrasla u korov i još 3 polja u 3 različita stupca minimizirajući broj diranja tih stupaca međusobno ili s kvadratom.
17. Nije moguće za $4k + 2$ jer je parnost zbroja svih brojeva invarijanta. Za $n = 4k$ ili $n = 4k + 3$ možemo upariti brojeve 1 i $\frac{n}{2} + 1$, 2 i $\frac{n}{2} + 2$, i sve do $(\frac{n}{2} - 1, n - 1)$, zatim svaki par povećati do $(\frac{n}{2}, n)$, zatim podijelimo prvih $\frac{n}{2}$ u parove i povećamo ih do n . Za $n = 4k + 1$ je isto kao za $n = 4k$, samo ih još u parovima povećamo za 1 kad dobijemo n n -ova i jedan $n + 1$ da svi na kraju budu $n + 1$.
18. Pretpostavimo da neki od tih pravaca siječe točno 1 domino. Dobit ćemo kontradikciju jer taj pravac onda dijeli ploču na dva dijela s neparnim brojem polja (parnost broja opločenih polja je invarijanta za oba dijela jer nam više nije dozvoljeno presjeći pravac što je jedini način za ne opločiti dva polja na istom dijelu). Sada znamo da imamo ukupno 18 domina, 10 pravaca, a svaki pravac siječe 0 ili barem 2 domina. Ako svi sijeku barem dva, trebalo bi biti barem 20 domina ukupno, zato barem jedan ne siječe niti jedan domino.
19. Opet je invarijanta ostatak pri djeljenu s 9 (ili 3). 10-znamenasti broj s različitim znamenkama je djeljiv s 9, a početni broj nije.
20. Obojimo ploču u 3 boje ponavljajući uzorak (pattern) A, B, C prema desno i prema dolje. Tako dobijemo da u svakom potezu premjestimo žeton s jedne boje na drugu i uzimamo žeton na trećoj boji. Promjene broja žetona na bojama su -1, +1, -1, dakle svi mijenjaju parnost. Na početku su brojevi žetona na svim bojama jednaki, a nakon svakog poteza svi mijenjaju parnost. Uvijek će se dogoditi da su ili svi parni ili svi neparni, ali to ne vrijedi za slučaj koji želimo postići (1, 0, 0).
21. Broj polja ploče (bez ona dva) je djeljiv s 2, a nije djeljiv sa 4. Broj polja obaju stepenica je također djeljiv s 2, ali ne sa 4. To nam daje da broj poteza treba biti neparan (jer nakon parnog broja poteza broj opločenih polja će biti djeljiv s 4). Sada obojamo ploču tako da su prvi i drugi redak crni, treći i četvrti bijeli, peti i šesti crni, itd. Uočimo da svim stepenicama pokrivamo neparno mnogo crnih i neparno mnogo bijelih polja. To nam daje da broj poteza treba biti paran jer ima parno mnogo crnih i parno mnogo bijelih polja. Tu dolazimo do kontradikcije.
22. Ideja je obojati ploču u 32 boje, 2 polja svake boje tako da se iz svakog polja može u polje iste boje. Tako će Sully imati spreman odgovor na svaki Mikeov potez - pomaknuti skakača u drugo polje iste boje. Valja se i prisjetiti šahovskog bojanja (jedan će uvijek micati s crnog na bijelo, a drugi obratno) što znači da se za svaku boju zna na koje polje Mike skače, a na koje Sully. Ostaje još samo pokazati da je takvo bojanje moguće. Lako uočavamo da je moguće za 2×4 pravokutnik, pa je moguće i za 8×8 ploču jer se može podijeliti a 2×4 pravokutnike

5.3 Rješenja za narančastu grupu

5.3.1 C3: Uvod u princip ekstrema - Mate Peroš

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 4
2. Dokaz - Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva
3. A. Engel - Problem-Solving Strategies, Extremal Principle, E14
4. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 5
5. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 6
6. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 13
7. Cut-the-Knot - Graph coloring
8. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 9
9. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 15
10. MNM - Online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 11
11. Brilliant.org - Extremal Principle, Example 2
12. Math StackExchange - Palindrom $1\dots n$
13. Quora - Sylvestreov problem
14. Putnam and Beyond - Extremal principle, Example after Problem 57

5.3.2 N3: Euklidov alg. + Kvadratni ostaci - Vlatka Vazdar

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Neka je $\gcd(a, b) = d_1, \gcd(a, b - a) = d_2$. Budući da $d_1 | a$ i $d_1 | b$, slijedi da $d_1 | (b - a)$, dakle $d_1 \leq d_2$ (jer je djeljitelj od a i $b - a$, a d_2 je njihov najveći zajednički djeljitelj). Isto tako $d_2 | a$ i $d_2 | (b - a)$ pa time dijeli i njihov zbroj, dakle $d_2 | b$. Budući da je onda d_2 zajednički djeljitelj od a i b , slijedi $d_2 \leq d_1$. Zaključujemo $d_1 = d_2$.
Neka je sada $b = ka + r$, $r < a$, $k \geq 0$. Ako je $k = 0$, onda je već $b = r$, pa je očito $\gcd(a, b) = \gcd(a, r)$. U suprotnom je $b > a$ i primjenom jednog koraka Euklidovog algoritma dobivamo $\gcd(a, b) = \gcd(a, ka + r) = \gcd(a, (k - 1)a + r)$. Sada ovaj postupak možemo ponavljati dok god je član uz a veći od 0, te na kraju dobivamo $\gcd(a, b) = \gcd(a, r)$.
2. $\gcd(6845, 4477) = \gcd(2368, 4477) = \gcd(2368, 2109) = \gcd(259, 2109) = \gcd(259, 37) = \gcd(0, 37) = 37$
3. **IMO1959 P1**
Drugi razlomak se rješava na isti način $\gcd(12n + 1, 30n + 2) = \gcd(12n + 1, 6n) = \gcd(1, 6n) = 1$
4. $\gcd(n - 1, 2n^2 + 5n + 6) = \gcd(n - 1, 7n + 6) = \gcd(n - 1, 13)$ što može biti 1 ili 13
5. **AOPS, nepoznat izvor**
6. Za prost broj p kvadrati daju točno $\frac{p+1}{2}$ različitih ostataka. Prvo primijetimo da k^2 i $(p - k)^2 = p^2 - 2pk + k^2$ daju isti ostatak pri dijeljenju s p , dakle postiže se najviše $\frac{p+1}{2}$ različitih ostataka. Još je potrebno dokazati da kvadrati svih brojeva $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ daju različite ostatke pri dijeljenju s p . Neka su m i n , $m < n$ dva različita takva broja i neka m^2 i n^2 daju isti ostatak pri dijeljenju s p . To znači da je razlika kvadrata $n^2 - m^2$ djeljiva s p , a to povlači da je ili $n - m$ ili $m + n$ (ili oba) djeljiv s p . Budući da su $m, n \leq \frac{p-1}{2}$, slijedi $m + n \leq p - 1$, dakle p ne može dijeliti $m + n$. Također, broj $n - m$ je još manji od $n + m$ pa ne može dijeliti ni njega. Dakle, ostaci koje kvadrati brojeva $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ daju pri dijeljenju s p su međusobno različiti i ukupno ima točno $\frac{p+1}{2}$ ostataka.
7. Neparni brojevi mogu davati ostatke 1, 3, 5, 7 pri dijeljenju s 8. Njihovi su kvadrati redom 1, 9, 25, 49 i svi oni daju ostatak 1 pri dijeljenju s 8.
Alternativno, možemo dokazati da ako je a neparan, tada je $a^2 - 1$ djeljiv s 8. Primijetimo da su $a - 1$ i $a + 1$ 2 uzastopna parna broja, dakle barem 1 od njih je djeljiv s 4, a time je njihov umnožak djeljiv s 8.
8. $x^2 - 31x + 34$ daje isti ostatak pri dijeljenju s 37 kao i $x^2 + 6x + 34 = (x + 3)^2 + 25$, što daje isti ostatak pri dijeljenju s 37 kao i $(x + 3)^2 - 12$. Ostaje provjeriti postoji li broj čiji kvadrat daje ostatak 12 pri dijeljenju s 37, međutim $37 + 12 = 49 = 7^2$. Dakle, takav broj postoji.
9. **AOPS**
10. **AIME 1985**
11. **HMMT 2002**
12. **AOPS**
13. Primijetimo prvo $\gcd(n! + 1, (n + 1)!) = \gcd(n! + 1, n + 1)$ jer su $n!$ i $n! + 1$ relativno prosti. Ako je $n + 1$ prost, tada je $\gcd(n! + 1, n + 1) = n + 1$ po Wilsonovom teoremu. Inače, $n + 1$ se može zapisati kao umnožak dvaju brojeva strogo manjih od $n + 1$. Budući da oni dijele $n!$, moraju biti relativno prosti s $n! + 1$, dakle $\gcd(n! + 1, n + 1) = 1$
14. x^2 može davati ostatke 0, 1, 4 pri dijeljenju s 5, a $2y^2$ može davati ostatke 0, 2, 3 pri dijeljenju s 5. Ako bi razlika nekog para tih ostataka bila 0 (jer 10 daje ostatak 0), moralo bi vrijediti da su i x^2 i $2y^2$ djeljivi s 5, a time i da su djeljivi s 25. Međutim, 10 nije djeljiv s 25 pa dobivamo kontradikciju.
Za drugu jednadžbu ponovno gledamo ostatke pri dijeljenju s 5. $3x^4$ može davati ostatke 0, 3 pri dijeljenju s 5, a $2y^2$ (kao i gore) 0, 2, 3. Nijedna kombinacija tih ostataka ne daje razliku 4 pri dijeljenju s 5 koju daje broj 79.
15. **INAMO Shortlist 2014, N2**

16. IMO 1986, A1
17. Pretpostavimo $a \leq b < c$ (dakle da je c hipotenuza). Prema Pitagorinom poučku vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Ako nijedan od brojeva a, b, c ne bi bio djeljiv s 3, onda bi a^2, b^2 i c^2 svi davali ostatak 1 pri dijeljenju s 3, što je nemoguće jer bi tada desna strana davala ostatak 1, a lijeva 2 pri dijeljenju s 3. Isti je argument za djeljivost s 4. Ako nijedan od brojeva ne bi bio djeljiv s 5, tada bi svaki od a^2, b^2, c^2 davao ostatak 1 ili 4 pri dijeljenju s 5. Tada bi lijeva strana mogla davati ostatke 2, 5, 3 pri dijeljenju s 5, a desna 1, 4. Dakle, 3, 4 i 5 moraju dijeliti po barem jedan od brojeva a, b, c te je zato abc djeljiv sa 60.
18. Stack Exchange, izvor nepoznat
19. HMO 2015
20. HMO 2016 (MEMO test)
21. HMO 2017 (MEMO test)
22. AOPS, izvor nepoznat
23. INMO 2013
24. HMO 2017
25. HMO 2018

5.3.3 G3: Karakteristične točke u trokutu - Tadej Petar Tukara

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Rješenje.](#)
2. [Rješenje.](#)
3. [Rješenje.](#)
4. [Rješenje.](#)
5. [Rješenje.](#)
6. Neka je H ortocentar trokuta ABC . Iz tetivnosti četverokuta AN_CHN_B zaključujemo da je $\angle HNB_NN_C = \angle CAN_C = 90 - \beta/2$. Analogno iz tetivnosti četverokuta CN_BHN_A dobivamo $\angle HNB_NN_A = 90 - \beta/2$. Budući da su ta dva kuta jednaka vidimo da je HN_B simetrala kuta $\angle N_A N_B N_C$. Analogno dobivamo da su i ostale visine simetrale kuteva u trokutu $N_A N_B N_C$ pa je H središte upisane kružnice tog trokuta.
7. [Rješenje.](#)
8. [Rješenje.](#)
9. Iz činjenice da je trokut $\triangle AEF$ jednakokrakan i da je CI simetrala kuta $\angle ACB$ pomoću zbroja kuteva u $\triangle CFT$ dobivamo da je $\angle CTF = \beta/2$. Stoga je $\angle ITE = \angle IBE = \beta/2$, pa je četverokut $BIET$ tetivan, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
10. [Teorem 5.8.](#)
11. Direktno slijedi iz prvog dijela dokaza idućeg zadatka.
12. [Teorem 4.9.](#)
13. [Gergonneova točka.](#)
14. [IMO 1995 problem 1.](#)

5.3.4 A3: Uvod u nejednakosti - Ilja Uzelac-Bujišić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. AG za dva broja daje $a^2 + b^2 \geq 2ab$, simetrično zbrajanje ovih nejednakosti daje traženu.
2. Vrijedi da je $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abac}{cb}} = 2a$, simetrično zbrajanje ovih nejednakosti daje traženu
3. Nashbittova nejednakost
4. https://artofproblemsolving.com/community/c3240_jbmo_shortlists
5. Nejednakost je ekvivalentna s $a(c+1) + b(a+1) + c(b+1) \geq \frac{3}{4}(a+1)(b+1)(c+1)$ što nakon izmnožavanja postaje ekvivalentno s $a + b + c + ab + ac + bc \geq 6$. Ovo odmah slijedi iz AG-a za $n = 6$ i uvjeta $abc = 1$.
6. (a) Lijeva strana: Iz CSB-a znamo da je $\left(\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a) \geq (b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c})^2$.
Iz AG-a imamo da je $b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt{abc}$. Kombinacijom ove dvije nejednakosti lako dokazujemo traženu.
- (b) Desna strana: Iz AG-a imamo da je $\frac{ab^2}{a+b} \leq \frac{(a+b)^2b}{4(a+b)} = \frac{ab+b^2}{4}$. Zbrajanjem ovih nejednakosti i korištenjem nejednakosti 1. dokazujemo traženu nejednakost.
7. https://artofproblemsolving.com/community/c3240_jbmo_shortlists
8. Iz AG-a imamo da je $b^4 + c^4 \geq b^3c + bc^3$. Zbog toga znamo da je $\frac{a}{a+b^4+c^4} \leq \frac{a}{a+b^3c+bc^3} = \frac{a}{a+\frac{b^2+c^2}{a}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$. Zbrajanjem ovih nejednakosti dobijamo da je lijeva strana ≤ 1 .
9. Pomnožimo obje strane s abc . Vidimo da je nejednakost ekvivalentna s $\sum \frac{2a^2bc}{a^2+bc} \leq \sum a^2$. Znamo da je $\frac{2a^2bc}{a^2+bc} \leq \frac{2a^2bc}{2a\sqrt{bc}} = a\sqrt{bc}$. Sada na sve pribrojнике slijeva primjenimo nejednakost $a\sqrt{bc} \leq a\frac{b+c}{2}$ pa tako jednostavno dovršimo zadatak.
10. https://artofproblemsolving.com/community/c3420_usajmo
11. Primjetimo da je $\frac{1}{2ab+ac+bc} \leq \frac{1}{4a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{2}{4}}}$. Ovo slijedi iz klasičnog AG-a primijenjenog na nazivnik.
12. Nejednakosti smo tako sveli na to da dokažemo da je $\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{2}{4}}} \leq \frac{a+b+c}{abc}$. Uvedimo smjenu $x = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}, y = \frac{1}{b^{\frac{1}{4}}}, z = \frac{1}{c^{\frac{1}{4}}}$. Nejednakost sada postaje $x^3y^3z^2 + x^2y^3z^3 + x^3y^2z^3 \leq x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4$. Ovo se sada lako dokazuje kombinacijom ovakvih AG nejednakosti: $2x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4 \geq 4x^3y^3z^2$
13. <https://dms.rs/matematika-osnovne-skole/>
14. https://artofproblemsolving.com/community/c3420_usajmo

5.3.5 C13: Uvod u indukciju - Dorotea Bošnjak

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Izvor.](#)
2. [Izvor.](#)
3. [Izvor.](#)
4. [Izvor.](#)
5. [Izvor.](#)
6. [Izvor.](#)
7. [Izvor.](#)
8. [Izvor.](#)
9. [Izvor.](#)
10. [Izvor.](#)
11. [Izvor.](#)
12. [Izvor.](#)
13. [Izvor.](#)
14. [Izvor.](#)
15. [Izvor.](#)

5.4 Rješenja za žutu grupu

5.4.1 C4: Invarijante i monovarijante - Marko Prološćić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Zbroj svih brojeva na početku je paran. Ako Janko odabere dva parna broja, zamijenit će ih s jednim parnim. Ako Janko odabere dva neparna broja zamijenit će ih s jednim neparnim. Ako Janko odabere paran i neparan broj, zamijenit će ih s jednim neparnim. U svakom slučaju, parnost zbroja svih brojeva ostaje ista, dakle zadnji broj će biti paran.
2. Broj crnih polja je uvijek neparan, nazovi ga C . Ako u nekom stupcu ima n crnih polja, onda će se nakon "okretanja" tog stupca C smanjiti za n i povećati za $8 - n$. Dakle, C će postati $C + 8 - 2n$ što ostaje neparno.
3. Zadnja propotovana udaljenost uvijek ili raste ili ostaje jednaka. Pošto je udaljenost od B do C a veća nego bilo koja udaljenost do grada A , putnik se nikada neće vratiti u A .
4. Sa svakim parenjem, broj kameleona neke boje će promijeniti parnost, što znači da će crveni uvijek ostati drugačije parnosti pa ako ostane samo jedan, morat će biti crven.
5. Nakon svakog koraka, broj kameleona jedne boje se mijenja za 2, a drugih boja za -1 . Gledano Mod 3, svi se promijene za 2, dakle brojevi kameleona različitih boja uvijek različiti mod 3 (pošto $13 \not\equiv 15 \not\equiv 17 \pmod{3}$) pa ne mogu nikada biti jednaki.
6. Neka je S zbroj kvadrata svih brojeva. Na početku:

$$S = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$$

Nakon nekog koraka S postaje:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow S - (a^2 + b^2) + (0.6a - 0.8b)^2 + (0.8a + 0.6b)^2 \\ &= S - a^2 - b^2 + 0.36a^2 - 0.96ab + 64b^2 + 0.64a^2 + 0.96ab + 0.36b^2 \\ &= S - a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = S \end{aligned}$$

Pošto je $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$, odgovor je ne.

7. Neka je S broj parova susjeda s istom vladom. Nakon št p neka država promijeni vlast iz "stare" u "novu" S se smanji za a , broj susjeda sa starom vladom, i povećá za b , broj država sa novom vlasti. Pošto je $b > a$, S će uvijek strogo rasti. Pošto S ne može beskonačno rasti, promijene vlade moraju stati nakon konačnog broja promijena.
8. Podijelimo mentori nasumično u dvije grupe. Neka je S broj parova neprijateljskih mentora u istim grupama. Odaberimo jednog mentora koji ima više od jednog neprijatelja u svojoj grupi i prebacimo ga u drugu. Nakon toga se S smanji ili za $2 - 1 = 0$ ili za $3 - 0$. Pošto se S ne može beskonačno smanjivati, nakon nekog vremena nam mora ponestati mentora sa više od jednim neprijateljem.
9. Ako podijelimo vrhove u grupe $G_1 = (A, C, E)$ i $G_2 = (B, D, F)$, zbroj brojeva u jednoj će biti veći za 2. Pošto se nakon svakog koraka G_1 i G_2 oba povećaju za 1, njihovi zbrojevi će uvijek biti različiti za 2, dakle odgovor je ne.
10. Broj slatkiša djeteta sa najviše slatkiša nikada neće narasti, a broj slatkiša djeteta sa najmanje slatkiša uvijek raste, dakle u nekom trenutku se moraju sresti.
11. Umnožak brojeva u bridovima bez kutova uvijek ostaje -1 , dakle barem jedan broj mora biti 1.
12. $7^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 7^{1996} \equiv 1 \pmod{9}$. Zbroj svih znamenaka uvijek ostaje isti mod 9. Kad bi na kraju sve znamenke bile različite, njihov zbroj bi bio $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$ što je djeljivo s 9 dakle nemoguće.
13. Ako postoji neki red ili stupac s neparnim zbrojem, okreni predznak brojevima u njemu. Nakon toga zbroj svih brojeva strogo raste. Pošto zbroj ne može rasti beskonačno, nakon konačnog broja poteza nam mora ponestati negativnih redova.

14. Ako neki a_i zamijenimo s $-a_i$, S ostaje jednak modulo 4 pošto će 4 elementa promijenit predznak. Ako jedan po jedan, sve negativne a_i promijenimo u 1, S će ostati dijeljiv s 4, ali također ćemo imati $S = n$, dakle $4|n$.
15. Bez gubitka generalnosti, neka su brojevi poredani od najmanjeg prema najvećem, s lijeva na desno. Neka je P broj parova brojeva (ne nužno susjednih) gdje je lijevi veći od desnog. Svaki puta kada zamijenimo dva susjedna broja P se smanji ili poveća za 1. To znači da će parnost broja P uvijek biti jednaka parnosti broja poteza koje smo napravili pa onda kako bi P bio 0 broj odigranih poteza mora biti paran.

5.4.2 N4: Faktorizacije i djelitelji - Ivan Čulin

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. a) Školsko 2010., 1.razred, B varijanta, 1.
b) Školsko 2008., 1.razred, A varijanta, 1.
2. Nema izvora, poznat primjer. Skica rješenja: Neka je n neki prirodan broj. Tada vrijedi: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. Dokažimo da je prethodni izraz djeljiv s 3. Ako je n djeljiv s 3 zadatak je gotov. Ako n nije djeljiv s 3 onda daje ostatak 1 ili ostatak 2 pri djeljenju s 3.
Prvi slučaj: n daje ostatak 1 pri djeljenju s 3, odnosno $n = 3k+1$. Tada je $(3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1)$
Drugi slučaj: n daje ostatak 2 pri djeljenju s 3, odnosno $n = 3k+2$. Tada je $(3k+2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3(3k^2 + 4k + 2)$
3. MNM online predavanja
4. Školsko 2015., 1. razred, B varijanta, 7.
5. Školsko 2016., 2. razred, A varijanta, 2.
6. Zadatak s vježbi iz kolegija Elementarna matematika 1
Skica rješenja: a) S obzirom da je p prost, p je jednak 3 ili daje ostatak 1 ili 2 pri djeljenju s 3.
Prvi slučaj: Ako je $p = 3$, $8p + 1 = 25$ pa tvrdnja vrijedi.
Drugi slučaj: Ako je $p = 3k + 1$, $8p + 1 = 24k + 9$ pa je zadani broj različit od 3 i djeljiv s 3 i samim tim složen.
Treći slučaj: Ako je $p = 3k + 2$, $8p - 1 = 24k - 15$ pa nije zadovoljena pretpostavka zadatka.
b) Ponovno ćemo promatrati djeljivost brojem 3. Ako je $p = 3k + 1$, onda je $8p^2 + 1 = 72k^2 + 48k + 9$ pa pretpostavka nije zadovoljena. Ako je $p = 3k + 2$, onda je $8p^2 + 1 = 72k^2 + 96k + 33$ pa pretpostavka nije zadovoljena za $k \geq 1$. Provjerimo posebno slučajeve za $p = 2$ i $p = 3$.
7. Županijsko 2008., 1.razred, A varijanta, 3.
8. Državno 2008., 1.razred, B varijanta, 4.
9. Državno 2016., 1.razred, B varijanta, 3.
10. Državno 2015., 3.razred, B varijanta, 5.
11. MNM predavanja
12. Državno 2015., 3.razred, A varijanta, 2.
13. Europski matematički kup 2013.
14. Državno 1997., 3.razred, 1.
15. HMO 2017., 4.

5.4.3 G4: Tetivni četverokuti - Patricija Dovijanić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 3.
2. 2015.O2A.2
3. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 8.
4. 2016.O2A.4
5. MNM on-line predavanje, Tetivni četverokuti, zadatak 11.
6. 2016.Ž3A.3
7. 2011.D1A.4
8. 2017.Ž2A.4
9. 2009.D4A.1
10. 2018.D4B.5
11. 2018.Ž4A.3

12. Izvor: staro predavanje.

Skica rješenja. Uvedimo oznaku $\alpha = \angle AMB$. Slijedi $\angle KBC = \angle BCK = 90^\circ - \alpha$ i $\angle BKC = 2\alpha$. Promotrimo kružnicu BCM . Kako je $\angle CMB = 180^\circ - \alpha$, drugi obodni kut nad $\overline{BC}$ jednak je α . Budući da je $\angle BKC = 2\alpha$ i $|BK| = |CK|$, K je središte kružnice BCM i vrijedi $|BK| = |CK| = |MK|$.

Označimo s E sjecište pravaca KM i AD . Dokazujemo da je $\angle DEM = 90^\circ$.

Vrijedi $\angle ACB = \angle ADB = \angle EDM = \frac{\alpha}{2}$, jer se radi o obodnim kutevima nad lukom AB . Kako je trokut CMK jednakokrakan, $\angle CMK = \angle MCK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Također, $\angle DMC = \alpha$.

Budući da su točke E, M i K kolinearne (leže na istom pravcu), vrijedi $\angle DME + \angle DMC + \angle CMK = 180^\circ$, odakle je $\angle DME = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, i konačno, promatrajući unutarnje kutove trokuta DEM , dobijemo $\angle DEM = 90^\circ$, što je i trebalo dokazati.

13. Izvor: staro predavanje.

Skica rješenja. Neka je E nožište visine iz vrha C , i G sjecište CE i FH . Četverokut $EMGH$ je tetivan (razmislite zašto), i G je težište trokuta ABC , pa je $|GE| = \frac{1}{3}$, odakle je $|EM| = \frac{1}{3}|BE|$. Po poučku SKS , trokuti BHF i EBC su slični, pa je $\angle EMG = \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. $\overline{EF}$ je srednjica trokuta ABC , pa je i $\angle FEB = \alpha$. Sada je $\angle EMF = 180^\circ - \angle EMG = 180^\circ - \alpha$, pa je $EBHF$ tetivan, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

14. Izvor: staro predavanje, navodno neko državno za 3.razred

Skica rješenja. Neka je H' osnosimetrična slika ortocentra preko $\overline{AB}$ i D nožište visine na stranicu AB , tj. presjek pravaca HH' i AB . Kako je trokut AOH jednakostraničan (razmislite zašto), vrijedi $\angle AOH' = 60^\circ$, pa je njegov obodni kut $\angle ACH' = \angle ACD$ jednak 30° . Budući da je trokut ACD pravokutan, slijedi $\angle CAD = \angle CAB = 60^\circ$.

5.4.4 A4: KAGH (osnovno) - Tea Arvaj

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Općinsko 1998. 1.
2. rješenje: Primjenom AG nejednakosti na svaku zagradu dobijemo

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$a + c \geq 2\sqrt{ac}$$

Množenjem tih nejednakosti (što smijemo jer su $a, b, c > 0$) dobijemo

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Jednakost vrijedi kada je $a = b = c$.

3. rješenje: Primjenom AG imamo

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3a$$

$$\frac{b^3}{ac} + a + c \geq 3b$$

$$\frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3c$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobijemo traženu. Jednakost u slučaju $a = b = c$.

4. rješenje: Primjenom AG-a dobije se

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq a^2b$$

$$\frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geq b^2c$$

$$\frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geq c^2a$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobije se tražena nejednakost. Jednakost u slučaju $a = b = c$.

5. rješenje: Prvimjenom AG-a dobije se

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \frac{a}{c}$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \frac{b}{a}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2 \frac{c}{b}$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobije se tražena nejednakost. Jednakost u slučaju $a = b = c$.

6. rješenje: Vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 9$ pa ako pomnožimo lijevu stranu s 9, a desnu s $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ dobijemo nejednakost ekvivalentnu početnoj, tj. dovoljno je dokazati

$$9a^2 + 9b^2 + 9c^2 + 9ab + 9bc + 9ac \geq 6(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac)$$

$$\iff 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 3bc - 3ac \geq 0 \quad / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\iff (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Jednakost u slučaju $a = b = c$. (Motivacija za prvi korak je to što želimo homogenu nejednakost.)

7. rješenje: Vrijedi $(a+b)^2 \geq 4ab$, ako a definiramo kao $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, a b kao 1 imamo

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Vrijedi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

jer $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, tj. $x_i \geq x_i^2 \forall i$.

Jednakost je u slučaju $a = b$ i svi x -evi su 0 ili 1.

8. **Državno 2015. 1.**

9. rješenje: Vrijedi

$$\frac{a+1}{a(a+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} \right)$$

Pa je dana nejednakost ekvivalentna ovoj:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 4$$

Uvrštavanjem a, b, c u A-H imamo

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Zbog $a+b+c \leq 3$ vrijedi $1 \geq \frac{a+b+c}{3}$

Pa je i $1 \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$, odnosno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \quad (*)$$

Uvrštavanjem $a+2, b+2, c+2$ u A-H imamo

$$\frac{a+2+b+2+c+2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}}$$

Zbog $a+2+b+2+c+2 \leq 9$ vrijedi $3 \geq \frac{a+2+b+2+c+2}{3}$

Pa je i $3 \geq \frac{3}{\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}}$, odnosno

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1 \quad (**)$$

Zbrajanjem $(*)$ i $(**)$ dobivamo ono što se tražilo.

10. **Državno 2017. 2.**

11. rješenje: Možemo pretpostaviti da je $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ gdje su $x, y, z > 0$. To možemo napraviti jer možemo uzeti da je $a = \frac{x}{y}$ za neke $x, y > 0$ i da je $b = \frac{y}{z}$ jer postoji $z > 0$ takav da je $z = \frac{y}{b}$ i tada iz uvjeta $abc = 1$ vrijedi $c = \frac{z}{x}$.

Početna nejednakost onda izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} &\geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad / \cdot x^2 y^2 z^2 \\ \iff x^3 z^3 + x^3 y^3 + y^3 z^3 &\geq x^3 y z^2 + x^2 y^3 z + x y^2 z^3 \end{aligned}$$

AG

$$\begin{aligned}\frac{x^3z^3 + x^3z^3 + x^3y^3}{3} &\geq x^3yz^2 \\ \frac{x^3y^3 + x^3y^3 + y^3z^3}{3} &\geq x^2y^3z \\ \frac{y^3z^3 + y^3z^3 + x^3z^3}{3} &\geq xy^2z^3\end{aligned}$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobijemo ono što se tražilo.

12. rješenje: $ab + bc + ac = \frac{1}{2}((a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2))$

pa je dovoljno dokazati

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (a+b+c)^2$$

AG

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 &\geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a \\ \sqrt{b} + \sqrt{b} + b^2 &\geq 3b \\ \sqrt{c} + \sqrt{c} + c^2 &\geq 3c\end{aligned}$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobije se

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a+b+c) = (a+b+c)^2$$

13. HMO 2017. MEMO test

14. Izborna 1998., rješenje: a) AH

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + b^3 + abc + b^3 + c^3 + abc + c^3 + a^3 + abc}{3} &\geq \frac{3}{\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc}} \\ \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\geq \frac{9}{a^3 + b^3 + abc + b^3 + c^3 + abc + c^3 + a^3 + abc}\end{aligned}$$

Dovoljno je dokazati

$$\frac{9}{a^3 + b^3 + abc + b^3 + c^3 + abc + c^3 + a^3 + abc} \geq \frac{3}{a^3 + b^3 + c^3}$$

odnosno

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc$$

AG

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

b) Vrijedi $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. Dokaz: AG

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} &\geq a^2b \\ \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} &\geq ab^2\end{aligned}$$

Analogno $b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2$ i $c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2$.

Pa je

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\leq \frac{1}{a^2b + ab^2 + abc} + \frac{1}{b^2c + bc^2 + abc} + \frac{1}{c^2a + ca^2 + abc} \\ \frac{1}{a^2b + ab^2 + abc} + \frac{1}{b^2c + bc^2 + abc} + \frac{1}{c^2a + ca^2 + abc} &= \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{abc}\end{aligned}$$

15. rješenje: Vrijedi $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i $b^2 + 1 \geq 2b$, odnosno

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2ab + 2b + 2}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2ab + 2b + 2} + \frac{1}{2bc + 2c + 2} + \frac{1}{2ca + 2a + 2}$$

Uvodimo supstituciju $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ab + 2b + 2} + \frac{1}{2bc + 2c + 2} + \frac{1}{2ca + 2a + 2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + 1} + \frac{1}{\frac{z}{y} + \frac{x}{y} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x + y + z} + \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

16. rješenje:

$$\frac{a}{b^2c^2 + 1} = a - \frac{ab^2c^2}{b^2c^2 + 1}$$

pa je

$$LHS = a + b + c - \frac{ab^2c^2}{b^2c^2 + 1} - \frac{a^2bc^2}{c^2a^2 + 1} - \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + 1}$$

Dovoljno je dokazati

$$\frac{ab^2c^2}{b^2c^2 + 1} + \frac{a^2bc^2}{c^2a^2 + 1} + \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + 1} \leq \frac{3}{2}$$

AG

$$b^2c^2 + 1 \geq 2bc$$

$$c^2a^2 + 1 \geq 2ca$$

$$a^2b^2 + 1 \geq 2ab$$

pa je

$$\frac{ab^2c^2}{b^2c^2 + 1} + \frac{a^2bc^2}{c^2a^2 + 1} + \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + 1} \leq \frac{ab^2c^2}{2bc} + \frac{a^2bc^2}{2ca} + \frac{a^2b^2c}{2ab} = \frac{3}{2}abc$$

Vrijedi $1 = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ pa je $abc \leq 1$.

5.4.5 C14: Konstrukcija i dokaz - Ema Kompar

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Algebra math forum](#)
2. [AOPS forum](#)
3. [AOPS forum](#)
4. [Državno natjecanje 2011., drugi razred, A varijanta, 5. zadatak](#)
5. [Državno natjecanje 2014., treći razred, B varijanta, 5. zadatak](#)
6. [Državno natjecanje 2012., četvrti razred, B varijanta, 5. zadatak](#)
7. [Županijsko natjecanje 2018., treći razred, A varijanta, 5. zadatak](#)
8. [Županijsko natjecanje 2016., treći razred, B varijanta, 5. zadatak](#)
9. [Državno natjecanje 2016., četvrti razred, B varijanta, 4. zadatak](#)
10. [Državno natjecanje 2017., četvrti razred, A varijanta, 5. zadatak](#)

5.5 Rješenja za zelenu grupu

5.5.1 C5: Indukcija (osnovno) - Kristin Kokan

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Izvor.](#)
2. [Izvor.](#)
3. [Izvor.](#)
4. [Izvor.](#)
5. [Izvor.](#)
6. [Izvor.](#)
7. [Izvor.](#)
8. [Izvor.](#)
9. [EM1 2009.](#)
10. [EM1 2016.](#)
11. [Izvor.](#)
12. [FER.](#)
13. [Matematički univerzitet, Beograd.](#)
14. [Matematički univerzitet, Beograd.](#)
15. [Školsko 2017., 4. razred.](#)
16. [Školsko 2019., 4. razred.](#)
17. [Izvor.](#)
18. [Izvor.](#)
19. [Izvor.](#)
20. [Izvor.](#)

5.5.2 N5: Modularna aritmetika - Nikola Šalgaj

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. (a)
 - $(3k)^2 = 3 \cdot 3k^2$ daje ostatak 0, a $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ i $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k)+1$ daju ostatak 1
 - Slično kao i za 3, dobivamo da su mogući ostatci 0 i 1.
- (b) Za $p = 3$ dobivamo broj 73, koji je prost, i to je jedino rješenje. Naime, prema (a) dijelu zadatka ako p nije djeljiv s 3, a nije za $p > 3$, tada je $p^2 = 3k+1$ za neki prirodni broj k , pa je $8p^2+1 = 24k+9$, što je djeljivo s 3, pa nije prosto.
2. (a) Na sljedeći način ćemo označavati moguće ostatke: $n \equiv -1, 0, 1 \pmod{3}$, iz čega slijedi primjenom svojstava modularne aritmetike $n^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$. Slično dobivamo s ostacima pri dijeljenju s 4.
- (b) Ako je $p > 3$, primjenom (a) dijela $8p^2+1 \equiv 8 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, pa tada $8p^2+1$ ne može biti prost jer je djeljiv s 3 (i naravno veći od 3).
3. $234 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 234^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 234^6 = (234^2)^3 \equiv 2^3 \equiv (-1) \pmod{7}$
Sada računamo $234^{56} = (234^6)^9 \cdot 234^2 \equiv (-1)^9 \cdot 2 \equiv -2 \equiv 5 \pmod{7}$ pa je traženi ostatak 5.
4. (a) Ako je n paran n^2+2n-1 je neparan pa nije djeljiv s 4.
Ako je n neparan, tada je $n \equiv -1, 1 \pmod{4}$, pa je $n^2+2n-1 \equiv (-1)^2+2 \cdot (-1)-1 \equiv -2 \pmod{4}$ ili $n^2+2n-1 \equiv 1^2+2 \cdot 1-1 \equiv 2 \pmod{4}$, u oba slučaja opet nije djeljivo s 4.
- (b) $2^{n+2}+3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv (-3) \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 0 \pmod{7}$, pa je izraz djeljiv sa 7.
5.
 - $n \mid 0 = a - a \Rightarrow a \equiv a \pmod{n}$
 - $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b - a \mid n \Rightarrow a - b \mid n \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
 - $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow n \mid b - a$ i $n \mid c - b \Rightarrow n \mid b - a + c - b = c - a \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
6.
 - Za prva tri svojstva pogledajte [Online predavanje](#).
 - Što se četvrtog svojstva tiče: $ca \equiv cb \pmod{n}$, znači da $n \mid c(a-b)$, no ako su n i c relativno prosti znamo da tada $n \mid a-b$, odnosno $a \equiv b \pmod{n}$
7. $3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{33} = (3^2)^{16} \cdot 3 \equiv (-1)^{16} \cdot 3 = 3 \pmod{10}$, pa je tada jasno i posljednja znamenka broja 3^{33} znamenka 3.
8. Do rješenja se dolazi istim putem kao i u trećem zadatku, jedino je put dulji.
9. [Online predavanje - Zad.6.](#)
10. $x = \frac{10-7y}{3} \Rightarrow 10-7y \equiv 0 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow 7y \equiv 7 \pmod{3}$, a kako je $(7,3)=1$, imamo $y \equiv 1 \pmod{3}$. Dakle postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $y = 3k+1$. Tada uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $x = 1-7k$ pa su rješenja svi parovi cijelih brojeva oblika $(1-7k, 3k+1)$.
11. [Kolokvij iz Elementarne matematike 1](#)
12. Imamo $2^m = 3^n + 1$. Kako je $2 \equiv -1 \pmod{3}$, $1 \equiv 3^n + 1 = 2^m \equiv (-1)^m \pmod{3}$, pa m mora biti paran, tj $m = 2m_1$, za neki $m_1 \in \mathbb{N}$.
Tada jednadžbu možemo zapisati u obliku $(2^{m_1}-1)(2^{m_1}+1) = 3^n$, što znači da su i $2^{m_1}-1$ i $2^{m_1}+1$ potencije broja 3, a one se razlikuju točno za 2, pa je jedina mogućnost $2^{m_1}-1 = 1$ i $2^{m_1}+1 = 3$ iz čega lako slijedi da je jedino rješenje $(m,n) = (2,1)$.
13. [Online predavanje - Teorem 1.](#)

5.5.3 G5: Angle chasing - Tea Arvaj

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. 2016. županijsko Hrvatska 4. A 3. zadatak
2. 2016. županijsko Hrvatska 2. A 4. zadatak
3. Rješenje: $CDGF$ je tetivan, slijedi $\angle FGC = \angle FDC = \angle BDC$, $\angle CGD = 90^\circ$
 $\angle FGD = 90^\circ + \angle FGC = 90^\circ + \angle BDC$
 $\angle DFG = 180^\circ - 90^\circ - \angle BDC - \angle ADB = 90^\circ - \angle CBA$
 $AECG$ je tetivan jer $\angle AGC = \angle CEA = 90^\circ$, slijedi $\angle GEA = \angle GCA = 90^\circ - \angle CAG = 90^\circ - \angle ACB$
 H je polovište dužine AC , $\angle CEA$ je pravi, slijedi $\angle HEA = \angle EAH = \angle BAC$
 $\angle HEG = \angle HEA - \angle GEA = \angle BAC - 90^\circ + \angle ACB = 90^\circ - \angle CBA = \angle DFG = 180^\circ - \angle GFH$, slijedi $EHFG$ je tetivan
4. 2019. okružno Srbija 1. A 2. zadatak
 Prvo rješenje: Kako je IH srednjica u AED , slijedi $IH \parallel AD$, Slično, $FG \parallel BD$. Dakle, $\angle IJF = \angle ADB$.
 Kako je peterokut $ABCDE$ tetivan, slijedi $\angle ADB = \angle ACB$.
 Sveukupno imamo $\angle KJF = \angle IJF = \angle ACB = \angle KCF$. Dakle, četverokut $KFCJ$ je tetivan, tj. točka K se nalazi na kružnici opisanoj trokutu FCJ .
 Drugo rješenje $\angle DAE = (\angle HI$ srednjica u $ADE)$ $\angle HIE = (\text{vršni}) \angle KIA$ $\angle CFJ = \angle CFG = (FG$ srednjica u $CBD)$ $\angle CBD = (\text{tetivnost}) \angle CAD$
 $\angle IAK = 180^\circ - \angle KIA - \angle AKI = 180^\circ - \angle CAD - \angle DAE$
 $\rightarrow \angle AKI = \angle CAD$, tj. $\angle CKJ = \angle AKI = \angle CAD = \angle CFG = \angle CFJ$, tj. $CJKF$ je tetivan
5. 2018. okružno Srbija 1. A 3. zadatak
 Rješenje Neka je I centar upisane kružnice. Imamo $KEF \sim ABC$,
 pa dobijamo $\angle EKF = \angle BAC = 180^\circ - \angle EIF$, što znači da je četverokut $EIFK$ tetivan.
 Slijedi $\angle KIF = \angle KEF = \angle ABC = 180^\circ - \angle DIF$, pa su točke K, I, D kolinearne, odakle slijedi tvrdnja.
6. 2010. državno Hrvatska 2. A 4. zadatak
7. IGO 2017. Intermediate 2.
 Rješenje: $\angle BFD = \angle DBF = 180^\circ - \angle PBC = \angle CEP \rightarrow \angle CEB + \angle BEP = \angle BFQ + \angle QFD$
 $\angle CEB = \angle EBC = \angle QBD = \angle QFD \rightarrow \angle BEP = \angle BFQ \rightarrow \angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ$
 Dakle, A, P i Q su kolinearne.
8. MEMO 2015. I-3
9. IGO 2015. Medium 2.
 Rješenje: O je središte opisane kružnice trokuta ABC . $DH = DA$ jer je BA hipotenuza trokuta BHA .
 $M := BH$ presjek ED . FMD sukladan HMD . $\angle MFD = \angle DHM = 90^\circ - \angle BAC = \angle HBA = \angle MBD$,
 $MDBF$ je tetivan. $\angle FBM = \angle FDM = \angle MDH = \angle EDH = \angle EDA - \angle HDA =$
 $\angle CBA - (180^\circ - 2\angle BAC) = \angle CBA + 2\angle BAC - 180^\circ$
 $\angle FBA = \angle FBD = \angle FBM + \angle MBD = \angle CBA + 2\angle BAC - 180^\circ + 90^\circ - \angle BAC =$
 $\angle CBA + 2\angle BAC - \angle BAC - \angle ACB - \angle CBA + 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle ACB = \angle OBA$
10. 2016. državno Hrvatska 2. A 3. zadatak
11. IGO 2015. Medium 3.
12. 2016. državno Srbija 1. A 2. zadatak
13. 2016. općinsko Srbija 2. A 5. zadatak
14. IGO 2018. Advanced 1.
 Rješenje: $QY = QY'$ implicira $\angle QYY' = \angle YY'Q$. $\angle YY'Q = \angle QYY' = (\text{tetiva i tangenta}) \angle PQY'$, $YY' \parallel PQ$
 $\angle Y'YA = \angle Y'BA = \angle X'BA = \angle X'XA$, slijedi $XX' \parallel YY' \parallel PQ$
 $\angle X'XP = (\text{tetiva i tangenta}) \angle X'PQ = (\text{paralelnost}) \angle PXX'$, tj. $PX = PX'$

15. IGO 2018. Advanced 2.

Rješenje: $\angle AXH = 90^\circ$ i $XA = XH$, slijedi $\angle XHA = 45^\circ = \angle XDA$. $\angle BOC = 2\angle BAC = 90^\circ$, B, C, D, O leže na kružnici s promjerom BC . $\angle ADO = \angle CBO = 45^\circ \rightarrow \angle XDO = 90^\circ$
 $\angle ACH = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ = \frac{\angle AXH}{2}$ to uz $XA = XH$ znači da je X središte kružnice opisane trokutu AHC pa je $XA = XC$. OX je simetrala dužine AC pa je OX okomito na AC . U trokutu ODX , simetrala kuta $\angle XDO$ jednaka je visini iz vrha D , iz toga slijedi da je ODX jednakokrakan i $DX = DO$.

16. BMO 2012 1.

5.5.4 A5: Uvod u nestandardnu algebru - Daniel Širola

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. A. Engel Problem solving strategies, p. 223
2. HMO 2011, MEMO test, Zad 1.
3. HMO 2011, Dan 2., Zad 1.
4. ISL 2015. A1
5. HMO 2014., MEMO test Zad 1
6. HMO 2010., Dan 1., Zad 1.
7. <https://kheavan.files.wordpress.com/2011/10/mathematical-olympiads-1997-1998-problems-solutions-from-around-the-world-maa-problem-book-225p-b002kypabi.pdf>
8. ISL 2014, A1

5.5.5 C15: Prebrojavanja - Lucija Relić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Prvi element k -permutacije možemo odabrati na n načina, drugi na $n - 1$ itd. Iz principa produkta slijedi da je traženi broj P_k

$$P_k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

2. Ako sve elemente shvaćamo kao različite ukupno imamo $7!$ permutacija. Budući da nekih elemenata imamo istih, dovoljno nam je podijeliti s brojem permutacija tih istih elemenata. Npr. zbog a brojimo točno $2!$ puta previše (onoliko koliko ima permutacija svih a -ova). Dakle, rješenje je

$$\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}.$$

3. Ovo je poznatije kao *Metoda kuglica i štapića*. Odvajanje u kutije možemo napraviti i ovako: posložimo kuglice u red i na neka mjesta dodamo štapiće. Kuglice prije prvog štapića spadaju u prvu kutiju, kuglice između 1. i 2. štapića spadaju u drugu kutiju itd. Kuglice nakon zadnjeg štapića (ima ih $m - 1$) spadaju u zadnju kutiju. Time dozvoljavamo i prazne kutije (ako između dva štapića ne postoji niti jedna kuglica). Sada imamo n kuglica i $m - 1$ štapić koje treba posložiti u red. Budući da ne razlikujemo kuglice i štapiće međusobno, dovoljno nam je od $n + m - 1$ mjesta odabrati n na koje ćemo staviti kuglice, a na ostale stavimo štapiće. Broj načina za to napraviti je $\binom{n + m - 1}{n}$.

4. Desna strana je broj k -članih podskupova $n + 1$ -članog skupa. Lijevu stranu možemo interpretirati ovako: ako iz nekog $n + 1$ -članog skupa odaberemo jedan element (neka je to a), da bi dobili k -člane podskupove možemo ne uzeti a i iz ostatka odabrati k elemenata, a možemo i uzeti a i iz ostatka odabrati još $k - 1$ elemenata. To je ukupno $\binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1}$, što je i trebalo dokazati.

5. Budući da svaki element skupa možemo i ne moramo staviti u podskup, imamo točno 2 mogućnosti za svaki element skupa. Ako svaki podskup shvatimo kao niz 0 i 1 (pri čemu 0 označavam da taj element nije u podskupu, a 1 da je) trebamo samo naći broj svih takvih uređenih nizova. Za svako od n mjesta (imamo n elemenata skupa) imamo 2 opcije (0 ili 1) pa je broj takvih nizova 2^n .

6. školsko 2018., SŠ3A, 4. zadatak

7. županijsko 1999., SŠ4A, 3. zadatak

8. a) Permutacijama multiskupa $\{\text{voditelj, liječnik, policajac, civil}^3, \text{mafijaš}^2\}$ dobivamo broj načina za podjelu uloga. Budući da svi osim voditelja igre sjedaju u krug (7 osoba) i za svaki razmještaj postoji 7 rotacija koje daju isti poredak ljudi, to je $\frac{7!}{7} = 6!$ rasporeda sjedenja. Konačno, traženi rezultat je

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} \cdot 6!.$$

b) Rješenje je slično kao i u a). Kod podjele uloga jednog civila i jednog mafijaša već smatramo dodijeljenima (Marko i Pero), a ostatak dobivamo analogno prvom dijelu zadatka. Za broj rasporeda sjedenja gledamo koliko postoji rasporeda sjedenja bez restrikcija ($6!$), a od tog broja moramo oduzeti broj rasporeda sjedenja u kojima Marko i Pero sjede na susjednim mjestima. Takvih rasporeda je $2 \cdot 5!$, njih dvojicu shvatimo kao jedan blok koji stalno držimo zajedno, pa sada imamo 6 "osoba" za razmjestiti u krug ($5!$), ali moramo pomnožiti s 2 zbog permutacija njih dvojice (nije nam svejedno sjedi li lijevo Marko ili Pero). Dakle, traženo rješenje je

$$\frac{6!}{2!} \cdot (6! - 2 \cdot 5!)$$

9. županijsko 2003., SŠ4A, 2. zadatak

10. županijsko 2001., SŠ4A, 3. zadatak

11. Recimo da su deve numerirane prije odmora u oazi. Promotrimo sada redoslijede nakon odmora. Neka je $S = \{\text{svi redoslijedi deva}\}$, a $A_i = \{\text{redoslijedi u kojima } i - \text{ta deva hoda iza } (i-1) - \text{te deve}\}$ za $i = 2, \dots, 9$. Želimo pronaći koliko je $|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_9}|$ (broj redoslijeda u kojima niti jedna deva ne hoda iza svoje prijašnje prethodne). Za formulu uključivanja i isključivanja potrebno je pronaći brojeve elemenata pojedinačnih skupova, kao i svih njihovih presjeka.

- $|S| = 9!$ - svi mogući rasporedi deva bez restrikcija (njihove permutacije)
- $|A_i| = 8!$ za $2 \leq i \leq 9$ - za i -tu devu znamo da hoda iza $i-1$ -te pa ih promatramo kao jedan blok
- $|A_i \cap A_j| = 7!$ za sve $2 \leq i < j \leq 9$ - promatramo ih ili kao 2 bloka od 2 deve i još 5 pojedinačnih, ili kao jedan blok od 3 deve i 6 ostalih (ako je $j = i + 1$)
- ...
- $|A_2 \cap \dots \cap A_9| = 1$

Uvrštavanjem u formulu uključivanja i isključivanja (dana je u uvodu predavanja) dobivamo

$$\sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot \binom{8}{k} \cdot (9-k)!$$

pri čemu binomnim koeficijentom "biramo" deve za skupove A_i .

12. Primjetimo da će broj $100!$ završiti s onoliko nula koliko puta se broj 5 pojavljuje u njegovom raspisu na proste faktore (za svaki par brojeva 2 i 5 u raspisu broja $n!$ na proste faktore dobijemo jednu nulu na njegovom kraju, ali broj 2 se sigurno pojavljuje više puta od broja 5). To znači da trebamo prebrojati broj petica u svim raspisima na proste faktore prirodnih brojeva do 100. Višekratnici broja 5 sigurno imaju po jednu peticu u raspisu, to je $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$ petica (najveći cijeli broj manji od broja unutar "zagrada").

Sada smo pronašli broj brojeva koji imaju barem jednu 5 u raspisu na proste faktore. Većina ih i ima samo jednu, ali višekratnici broja 25 imaju po još jednu. Takvih je $\left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 4$. Tri petice u raspisu na proste faktore nema niti jedan prirodan broj manji od 100 jer je $5^3 = 125 > 100$.

Broj petica u raspisu broja $100!$ na proste faktore je $20 + 4 = 24$ (višekratnike od 25 ubrojili smo jednom u prvom pribrojniku, jednom u drugom), a toliki je i broj završnih nula.

13. Promotrimo najkraće puteve od točke (a, b) do točke (c, d) , pri čemu je $a \leq c$ i $b \leq d$. Najkraći putevi u tom slučaju sastoje se samo od pomaka gore i desno, i to točno $(c-a)$ desno i $(d-b)$ gore. Shvatimo li cijeli put kao niz određenog broja znakova G (gore) i D (desno), broj različitih puteva dobit ćemo kao broj različitih takvih nizova. Niz dobijemo odabirom mjesta za znakove (recimo) G , a to možemo učiniti na
- $$\binom{\text{ukupno pomaka}}{\text{pomaka gore}} = \binom{c-a+d-b}{d-b}.$$

Traženje najkraćih puteva od $(0, 0)$ do $(7, 10)$ koji prolaze točkom $(3, 5)$ ili točkom $(5, 3)$ ekvivalentno je traženju svih puteva koji prolaze jednom zadanom točkom i onih koji prolaze drugom zadanom točkom (želimo zbroj brojeva tih puteva). Da bi put prolazio zadanom točkom moramo pronaći broj najkraćih puteva od početne točke do usputne zadane točke i od zadane točke do završne točke (i tada primijenimo princip produkta). Zato je rješenje (binomni koeficijenti prebrojavaju najkraće puteve redom od $(0, 0)$ do $(3, 5)$, od $(3, 5)$ do $(7, 10)$, od $(0, 0)$ do $(5, 3)$ i od $(5, 3)$ do $(7, 10)$)

$$\binom{3-0+5-0}{5-0} \cdot \binom{7-3+10-5}{10-5} + \binom{5-0+3-0}{3-0} \cdot \binom{7-5+10-3}{10-3},$$

odnosno

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{9}{5} + \binom{8}{3} \cdot \binom{9}{7}.$$

14. Pronađimo prvo broj nenegativnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ bez dodatnih restrikcija. Svaki x_i možemo shvatiti kao jednu kutiju, a n kao broj kuglica koje treba rasporediti u te kutije. Zato metodom kuglica i štapića dobivamo $\binom{n+m-1}{m-1}$ nenegativnih rješenja ove jednadžbe.

Uvedimo sada supstituciju:

- $y_1 = x_1$
- $y_2 = x_2 - 2$
- $y_3 = x_3 - 2$
- $y_4 = x_4$
- $y_5 = x_5$

Početna jednadžba uz supstituciju postaje $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 46$, uz uvjete $y_i \geq 0$ za svaki i i $y_3 \leq 5$. Ovaj problem možemo riješiti korištenjem principa komplementa, oduzmemo li od broja nenegativnih rješenja bez dodatnih restrikcija broj nenegativnih rješenja uz restrikciju $y_3 > 5$ (odnosno $y_3 \geq 6$) dobivamo rješenje zadatka. Broj nenegativnih rješenja bez dodatnih restrikcija dobivamo jednostavno korištenjem rezultata s početka rješenja ovog zadatka i ono je $\binom{46+5-1}{5-1}$. Za broj nenegativnih rješenja uz restrikciju $y_3 \geq 5$ poslužiti ćemo se sličnom supstitucijom; $z_i = y_i$ za $i = 1, 2, 4, 5$ i $z_3 = y_3 - 6$. Problem smo sveli na traženje broja nenegativnih rješenja jednadžbe $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 40$ bez dodatnih restrikcija i on iznosi $\binom{40+5-1}{5-1}$. Dakle, konačno rješenje je

$$\binom{50}{4} - \binom{44}{4}.$$

15. JBMO 2012 SL C1

16. Budući da tražimo vjerojatnost, treba nam i broj svih "ishoda", odnosno broj svih mogućih listi bez dodatnih ograničenja. Imamo 3 člana komisije, i svatko od njih radi svoju listu od n kandidata neovisno o druga dva člana. Jedan član komisije može složiti listu kandidata na $n!$ načina (možemo to zamisliti kao postavljanje kandidata u red i permutiranje rednih brojeva koje im pridružujemo), pa je broj svih ishoda jednak $(n!)^3$. Sada trebamo pronaći broj različitih rangiranja nakon kojih će neki kandidat biti izabran. Kandidat može biti izabran ako je na dvije liste na prvom mjestu (1) ili ako je na sve tri liste na prvom mjestu (2). Ti slučajevi su disjunktivi pa koristimo princip sume, a za prebrojavanja unutar jednog slučaja koristit ćemo princip produkta (možemo to lako shvatiti kao Kartezijev produkt skupova). Sada navodimo broj traženih listi, uz objašnjenja svakog od faktora:

$$(1. \text{ slučaj}) = \binom{3}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot ((n-1)!)^3$$

- $\binom{3}{2}$ - broj načina za odabiranje 2 člana komisije koja stvljaju kandidata na prvo mjesto
- n - broj različitih kandidata koji mogu biti odabrani
- $(n-1)$ - treći član komisije stavio je nekog drugog kandidata na prvo mjesto, on može biti jedan od preostalih $n-1$
- $((n-1)!)^3$ - svaki od 3 člana komisije još mora rangirati $(n-1)$ kandidata

$$(2. \text{ slučaj}) = n \cdot ((n-1)!)^3$$

- n - kandidati koji mogu biti odabrani
- $((n-1)!)^3$ - svaki od 3 člana komisije još mora rangirati $(n-1)$ kandidata

Tako dolazimo do tražene vjerojatnosti

$$\frac{\binom{3}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot ((n-1)!)^3 + n \cdot ((n-1)!)^3}{(n!)^3} = \frac{((n-1)!)^3 \cdot n \cdot (3 \cdot (n-1) + 1)}{(n!)^3} = \frac{3n+2}{n^2}.$$

17. državno 2014., SŠ2A, 5. zadatak

18. Tražimo na koliko načina možemo odabrati k brojeva a_1 takve da $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ i da nema među njima uzastopnih. Uvedimo brojeve b_i , $b_i = a_i - (i - 1)$, za $i = 1, \dots, k$. Budući da među brojevima a_i nema uzastopnih, vrijedi $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n - k + 1$, bez restrikcija na uzastopnost brojeva b_i . Tako između k -torki $(a_1, \dots, a_k)$ i $(b_1, \dots, b_k)$ postoji bijekcija, pa da bismo pronašli odgovor na naše pitanje trebamo pronaći broj načina na koji možemo odabrati k elemenata iz $(n - k + 1)$ -članog skupa bez restrikcija na uzastopnost (k -torke b_i -jeva). Odgovor je $\binom{n - k + 1}{k}$.

19. Promotrimo multiskup $\{a_1^4, a_2^4, \dots, a_n^4\}$; broj njegovih permutacija je

$$\frac{(4n)!}{4! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 4!} = \frac{(4n)!}{(2!)^n 3^n 4^n} = \frac{(4n)!}{2^{3n} 3^n}.$$

Budući da je broj permutacija bilo kojeg multiskupa prirodan broj (općenito to je broj uređenih k -torki), dobivamo da tvrdnja zadatka vrijedi.

5.6 Rješenja za cijan grupu

5.6.1 C6: Dvostruka prebrojavanja - Katja Varjačić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Imomath predavanje dvostruko prebrojavanje](#)
2. [Ljetne pripreme 2016-Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, Azra Tafro](#)
3. [Ljetne pripreme 2016-Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, Azra Tafro](#)
4. [skripta iz Diskretne, ima lijepo napisana ta rješenja tih identiteta](#)
5. [Memo pripreme 2015., Prebrojavanje, Ilko Brnetić](#)
6. [članak s Brillianta, Double counting](#)
7. [Memo pripreme 2015., Prebrojavanje, Ilko Brnetić](#)
8. [Državno 2001., 4.razred](#)
9. [imomath predavanje dvostruko prebrojavanje](#)

5.6.2 N6: Mali Fermatov i Eulerov - Lucija Relić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. **AoPS**

2. Po Malom Fermatovom teoremu znamo da je $4^6 \equiv 1 \pmod{7}$, pa nam je dovoljno pronaći ostatak koji eksponent (a_{99}) daje pri dijeljenju sa $\varphi(7) = 6$.
 a_{99} je djeljiv sa 2. Ostaje nam još pronaći a_{99} modulo 3. Iskoristimo ponovno Mali Fermatov teorem.

$$a_{99} = 4^{a_{98}} \equiv 4^{2 \cdot k} \equiv (4^{\varphi(3)})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{3},$$

za neki k (prva kongruencija vrijedi jer je a_{98} paran). Znamo $a_{99} \equiv 0 \pmod{2}$ i $a_{99} \equiv 1 \pmod{3}$, iz čega zaključujemo $a_{99} \equiv 4 \pmod{6}$.

Sada imamo

$$a_{100} = 4^{a_{99}} = 4^{6l+4} \equiv (4^{\varphi(7)})^l \cdot 4^4 \equiv 1^l \cdot 4^2 \cdot 4^2 \equiv 2 \cdot 2 = 4 \pmod{7},$$

za neki l . Dakle, rješenje je 4.

3. Slično kao i u prošlom zadatku, po Malom Fermatovom teoremu rješenje će biti $6^{4! \cdots 2019!} \pmod{\varphi(11)} \pmod{11}$. Pronađimo traženi ostatak pri dijeljenju sa $\varphi(11) = 10$. Zapravo nas zanimaju ostaci pri dijeljenju sa 2 i 5. Eksponent $24^{120 \cdots 2019!}$ je djeljiv sa 2. Nadalje,

$$24^{120 \cdots 2019!} \equiv 24^{4k} \equiv (24^{\varphi(5)})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{5}$$

jer $4 \mid 120$ i 24 i 5 su relativno prosti. Kombiniranjem tih ostataka dobivamo $24^{120 \cdots 2019!} \equiv 6 \pmod{10}$. Zato kao rješenje imamo

$$3^{4! \cdots 2019!} \equiv 6^6 \equiv (6^2)^3 \equiv 36^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

4. **Olympiad number theory, primjer 2.3.2**

5. Primijetimo da vrijedi $a^2 \equiv (p-a)^2 \pmod{p}$ za svaki cijeli broj a . Primijenimo li svojstva množenja kongruencija, tvrdnja zadatka slijedi.

6. **Olympiad number theory, primjer 2.3.1**

7. **Olympiad number theory, primjer 2.3.7**

8. **PUMaC 2008, NT, 8**

9. **104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, primjer 1.32**

10. **AIME 1989, 9**

11. Zadani uvjet djeljivosti možemo zapisati i pomoći kongruencija kao

$$2^{2^n+1} + 2 \equiv 0 \pmod{17}$$

iz čega slijedi i

$$2^{2^n} + 1 \equiv 0 \equiv 17 \pmod{17}$$

jer su 2 i 17 relativno prosti. Odavde imamo i

$$2^{2^n} \equiv 16 = 2^4 \pmod{17},$$

odnosno

$$2^{2^n-4} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Promotrimo li redom ostatke koje 2^k daje pri dijeljenju sa 17, za $k \in \mathbb{N}$, možemo zaključiti da je taj ostatak jednak 1 za $k \equiv 0 \pmod{8}$. Dakle, tražimo n takve da $2^n - 4 \equiv 0 \pmod{8}$.

Dijeljenjem kongruencije sa 4 dobivamo $2 \mid 2^{n-2} - 1$, što očito nije moguće za $n > 2$. Provjerom $n = 1$ i $n = 2$ zaključujemo da je $n = 2$ traženo rješenje.

12. Iz Malog Fermatovog teorema imamo $a^p \equiv a \pmod{p}$ i $b^p \equiv b \pmod{p}$, odnosno znamo da vrijedi

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Želimo pokazati $p^2 \mid a^p - b^p$. Dani izraz možemo faktorizirati kao

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1}).$$

Iz pretpostavke zadatka dobili smo da p dijeli lijevu zagradu pa nam je dovoljno pokazati da p dijeli i desnu zagradu. To nam slijedi iz Malog Fermatovog teorema i uvjeta $a \equiv b \pmod{p}$.

$$\begin{aligned} a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1} &\equiv a^{p-1} + a^{p-1} + \dots + a^{p-1} + a^{p-1} \pmod{p} \\ &\equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \pmod{p} \\ &\equiv p \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Budući da p dijeli obje zagrade u faktorizaciji izraza, tvrdnja zadatka vrijedi.

13. 250 problema elementarne teorije brojeva, 5
14. 250 problema elementarne teorije brojeva, 16
15. Olympiad number theory, primjer 2.3.10
16. BMO 1984, 3
17. USAMO 1991, 3
18. IMO 2005, 4

5.6.3 G6: Upisana i pripisana kružnica - Josip PupiĆ

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Neka je D točka u kojoj simetrala stranice BC siječe opisanu kružnicu trokuta ABC . Iz svojstva točaka na simetrali dužine vrijedi $BD = CD$. Nadalje, obodni kutevi nad tetivama jednakih duljina su jednaki pa su kutevi $\angle BAD$ i $\angle CAD$ jednaki. Odatle je AD simetrala kuta $\angle BAC$ te je D upravo presjek simetrale kuta $\angle BAC$ i simetrale stranice BC , a po definiciji točke D , ona se nalazi na opisanoj kružnici trokuta.

2. Evan Chen - Fact 5

3. Rješenje 1. dijela: Označimo s D, E i F redom dirališta stranica BC, AB i CA s upisanom kružnicom. Primijetimo da su kutevi $\angle BDI$ te $\angle BEI$ pravi, da je $DI = EI = r$, pri čemu je r radijus upisane kružnice te da trokuti $\triangle BDI$ i $\triangle BEI$ dijele stranicu BI . Iz tog su razloga trokuti $\triangle BDI$ i $\triangle BEI$ sukladni po SKS poučku i dobivamo jednakost stranica $BD = BE$. Iz analognih sukladnosti pri vrhovima A i C dobivamo jednakosti $CD = CF$ te $AF = AE$. Imamo sljedeći niz jednakosti:

$$BD = a - CD = a - CF = a - (b - AF) = a - b + AF = a - b + AE = a - b + (c - BE) = a - b + c - BE = a - b + c - BD$$

Odatle dobivamo $BD = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b$, što je i trebalo pokazati, a analogne jednakosti slijede uvrštavanjem.

Rješenje 2. dijela: Koristimo iste oznake kao u iskazu činjenice 4. Odatle slijedi $LI = LI_A$. Nadalje, neka je M diralište stranice BC i upisane kružnice trokuta ABC , a N diralište stranice BC i A -pripisane kružnice trokuta ABC . Neka su P, R i S redom nožišta okomica iz L na BC, IM te $I_A N$. Pošto L leži na simetrali stranice BC , očito je P polovište stranice BC . Također, jasno je da su četverokuti $LPMR$ i $LPNS$ pravokutnici, a odatle vrijedi $PM = LR$ i $PN = LS$. Nadalje, trokuti $\triangle LRI$ i $\triangle LSI_A$ imaju vršne kuteve pri vrhu L , oba su pravokutni i od ranije znamo da vrijedi $LI = LI_A$ pa su sukladni po poučku KSK. Stoga je $LR = LS$, odnosno $PM = PN$ pa i $CN = BM$. Sada koristeći prethodni dio zadatka imamo

$$BN = a - CN = a - BM = a - (s - b) = a + b - s = s - c$$

Pošto je I_A na simetrali vanjskog kuta pri vrhu B trokuta ABC , sličnim razmatranjima kao ranije dobivamo da su trokuti $\triangle BI_A N$ i $\triangle BI_A T$ sukladni te da je $BT = BN = s - c$ (točka T je diralište A -pripisane kružnice i pravca AB). Napokon dobivamo $AT = AB + BT = c + (s - c) = s$.

4. Promotrimo četverokut $AFDC$. Vrijedi $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$ pa je taj četverokut tetivan (jednaki obodni kutevi nad istom tetivom). Stoga je

$$\angle ADF = \angle ACF = 180^\circ - \angle CFA - \angle FAC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

Analogno pokazujemo da je četverokut $ABDE$ tetivan, a onda sličnim postupkom kao ranije imamo

$$\angle ADE = \angle ABE = 180^\circ - \angle BEA - \angle EAB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

Dakle $DA = DH$ je simetrala kuta $\angle EDF$. Za ostale kutove pokazujemo analogno pa je H upravo središte upisane kružnice.

5. CHMMC 2012. - Spring - Individual Round, Problem 10

Komentar: Alternativno rješenje bez trigonometrije je identično do trenutka kada dobijemo da je $y = 30^\circ$. Zatim označimo s T presjek dužina AC i EF te primijetimo da trokut $\triangle ATF$ ima kuteve $30^\circ, 60^\circ$ i 90° te da je $AT = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$. Stoga je $AF = AT \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, a pošto su i DF i AF polumjeri opisane kružnice trokuta ABC , vrijedi $DF = \sqrt{3}$.

6. HTTM 2013. - February - Team Round, Problem 6

7. srpsko okružno natjecanje, 2018., 1. razred, A varijanta - 3. zadatak

8. Baltic Way 2018. - Problem 14

9. Let I_A be the center of the A -excicle, tangent to $\overline{BC}$ at T , and to the extensions of $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ at U and V . We see that $|AU| = |AV| = s = 2$. Then XY is the radical axis of the A -excicle and the circle of radius 0 at A . Therefore $|AM| = |MT|$. Assume without loss of generality that T lies on $\overline{MC}$, as opposed to $\overline{MB}$. Then $|AB| + |BM| + |MA| = |AB| + |BM| + |MT| = |AB| + |BT| = |AB| + |BU| = |AU| = 2$, as desired.

5.6.4 A6: CSB (osnovno) - Mateo Dujić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

Trikovi

Prvih 6 zadataka dio su knjige "The Cauchy-Schwarz Masterclass" koju je napisao J. Michael Steele. U knjizi se nalaze rješenja zadataka. Sedmi zadatak je poznata lema.

1. [Exercise 1.1. \(a\)](#)
2. [Exercise 1.1. \(b\)](#)
3. [Exercise 1.2.](#)
4. [Exercise 1.3.](#)
5. [Exercise 1.4.](#)
6. [Exercise 1.6.](#)
7. [Engel forma](#)

Vježba

Zadatci za vježbu dio su knjige "Problem Solving Strategies" koju je napisao Arthur Engel. U knjizi se nalaze rješenja zadataka.

8. [Inequalities - Problem 10.](#)
9. [Inequalities - Problem 17.](#)
10. [Inequalities - Problem 57.](#)
11. [Inequalities - Problem 59.](#)
12. [Inequalities - Problem 80.](#)

Zadatci s državnog

13. [2009., 2. r., 4. zad.](#)
14. [2014, 3. r. 4. zad.](#)
15. [2017., 3. r., 1. zad.](#)
16. [2015., 4. r., 4. zad.](#)

Zadatci s IMO - a

17. [IMO 1969 Shortlist](#)
18. [IMO 1983, Problem 6](#)
19. [IMO 1995, Problem 2](#)

5.6.5 C16: Ploče - Juraj Marušić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Primjetimo da je u polju (i, j) upravo broj $8(i-1) + j$. Primjetimo da je u polju (i, j) upravo broj $8(i-1) + j$. Kako se u sumi svaki od indeksa pojavljuje točno jednom, zbog komutativnosti zbrajanja rezultat je uvijek isti.
2. [Marinada '15](#)
3. [Marinada '14](#)
4. [Školsko natjecanje 2016., 4. razred](#)
5. [Školsko natjecanje 2019., 3. razred](#)
6. Uzmimo najveći broj na ploči. Označimo ga s x . Kako je x aritmetička sredina brojeva na susjednim poljima, slijedi da su svi brojevi na susjednim poljima točno x . Induktivno zaključimo da su svi brojevi jednaki.
7. [Matematičke igre na šahovskoj ploči](#)
8. [Županijsko natjecanje 2013., 3. razred](#)
9. [Državno natjecanje 2012., 4. razred](#)
10. [Matematičke igre na šahovskoj ploči](#)
11. [Državno natjecanje 2018., 2. razred](#)
12. [JBMO Shortlist 2018](#)
13. [2019 Benelux](#)
14. [MEMO 2013](#)

5.7 Rješenja za plavu grupu

5.7.1 C7: Indukcija (napredno) - Nikola Šalgaj

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. *Skica rješenja:* U koraku indukcije, primijetimo da vrijedi jednakost $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}$, pa korištenjem jake indukcije imamo $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ iz čega lako slijedi $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.
2. **Školsko natjecanje, 2019., 4.r.**
3. *Skica rješenja:* Dio (a) je trivijalan, rješenje je $n + 1$. U (b) dijelu, neka a_n označava broj dijelova na koje ravninu podijeli n pravaca u općem položaju. U koraku indukcije, skicom lako primijetimo da je odgovor na pitanje iz hinta $n + 1$, jer jedan odsječak $n + 1$. pravca daje jedan novi dio ravnine; stoga je $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, iz čega lako slijedi korak indukcije.
4. *Skica rješenja:* Provodimo indukciju po k , broju različitih prostih faktora te time pokažemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n s k različitih prostih faktora, za sve prirodne brojeve k , tj. pokazali smo tvrdnju za sve prirodne brojeve n . U koraku indukcije, $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ima $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ djelitelja, a $p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ ima $\alpha_{k+1} + 1$ djelitelja, pa primjenom hinta zaključujemo da je broj djelitelja od $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ jednak $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) \cdot (\alpha_{k+1} + 1)$.
5. (a) **Online predavanje - Napredna indukcija, 2. zad.**
(b) **Državno natjecanje, 1992., 3.r.**
6. (a) **Jedan induktivni dokaz formule**
(b) **Diskretna matematika, 22. str.**
(c) **Diskretna matematika, 23. str.**
(d) **Diskretna matematika 23. str.**

Primijetimo, ako uzmemo neki podskup A od $S = \{1, 2, \dots, n\}$ koji ne sadrži susjedne elemente i sve elemente od A označimo s 1, a preostale brojeve iz S označimo s 0, dobili smo upravo jedan binarni niz iz (d); i obrnuto - binarni niz iz (d) daje nam jedan podskup od S iz (c). Stoga je rješenje od (c) jednako rješenju od (d) i nije potrebno to rigorozno dokazivati, tj. konstruirati bijekcije kao što je spomenuto u rješenju na linku.

7. **Online predavanja - Napredna indukcija, 9. zad.**
8. *Skica rješenja:* Dokazat ćemo općenitu tvrdnju: brojevi $1, 2, \dots, n$ gdje je n proizvoljan prirodan broj mogu se poredati u niz tako da se prosjek nikoja dva broja iz tog niza ne nalazi između njih. To ćemo dokazati "regresivnom" indukcijom - pokazat ćemo indukcijom po k da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $n = 2^k$ (kojih ima beskonačno mnogo), a zatim ćemo pokazati da ako tvrdnja vrijedi za 2^k , tada vrijedi i za svaki prirodan broj n manji od 2^k .
Baza indukcije $k = 1$ je očita. Pretpostavimo da se $1, 2, \dots, 2^k$ mogu poredati u željen niz $(a_1, a_2, \dots, a_{2^k})$. Tvrdimo da niz $(2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_{2^k} - 1, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k})$ brojeva $1, 2, \dots, 2^{k+1}$ zadovoljava traženo svojstvo. Naime, ako uzmemo dva broja iz prve polovice ili dva broja iz druge polovice niza, svojstvo slijedi iz pretpostavke indukcije. Ako pak uzmemo jedan broj s prve polovice (dakle neparan je), a drugi broj s druge polovice (dakle paran je), njihov prosjek nije ni cijeli broj.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n < 2^k$ za neki $k \in \mathbb{N}$ - tada poredamo brojeve $1, 2, \dots, 2^k$, maknemo brojeve veće od n , i imamo traženi niz brojeva $1, 2, \dots, n$.
9. *Skica rješenja:* Indukcija po k , $n = 2^k$; baza indukcije $k = 1$ je trivijalna. Pretpostavimo da možemo odabrati $n = 2^k$ cijela broja među proizvoljnih $2n - 1$ cijelih brojeva tako da je njihova suma djeljiva s n .
Promotrimo sada proizvoljnih $2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 4n - 1$ cijelih brojeva. Prema pretpostavci ($4n - 1 \geq 2n - 1$), među njima mora biti n cijelih brojeva čija suma A je djeljiva s n ; neka je $A = 2^k \cdot a$. Ako izuzmemo tu n -torku, ostaje nam $3n - 1$ brojeva među kojima opet mora postojati n cijelih brojeva, sume sada $B = 2^k \cdot b$. Njihovim izuzimanjem, preostalo je $2n - 1$ brojeva među kojima postoji treća n -torka sume $C = 2^k \cdot c$.
Prema Dirichletovom principu, u skupu $\{a, b, c\}$ postoje dva broja iste parnosti - neka su to, bez smanjenja općenitosti a i b . Tada nam prve dvije n -torke daju $2n$ -torku sume $A + B = 2^k(a + b) = 2^k \cdot 2d = 2^{k+1}d$ pa vidimo da među proizvoljnih $2 \cdot 2^{k+1} - 1$ postoji 2^{k+1} brojeva čija je suma djeljiva s 2^{k+1} .

10. *Skica rješenja:* Baza indukcije $n = 1, 2, 3$ je očita. Pretpostavimo sada da proizvoljnih n nekolinernih točaka daje barem n različitih pravaca.

Promotrimo sada $n + 1$ nekolinearnih točaka, i izdvojimo jednu, neka to bude točka T .

Ako je preostalih n točaka kolinearno, tj. leže na nekom pravcu p , tada sve one spojene s T daju n pravaca pa zajedno s pravcem p točke daju $n + 1$ pravac.

Ako preostalih n točaka ne leži na jednom pravcu, primijenimo pretpostavku indukcije i time imamo barem n pravaca. Ako ih imamo barem $n + 1$, gotovi smo.

Dakle moramo se pozabaviti slučajem kada n točaka daje točno n pravaca. Primijetimo, za $n > 3$, ako među n točaka imamo 4 točke od kojih po tri nisu kolinearne, one same daju 6 pravaca, a preostale $n - 4$ točke prema pretpostavci indukcije daju barem $n - 4$ pravca: sve zajedno n točaka daje barem $n + 2$ pravca. Stoga, ako n točaka daje točno n pravaca, među njima ne postoje 4 točke od kojih po tri nisu kolinearne, tj. od tih n točaka $n - 1$ leži na jednom pravcu i jedna ne leži na tom pravcu. No u tom slučaju, promatrajući skicu, lako se uvjerimo da među tih (preostalih) n točaka postoji (barem) jedna koja spajanjem s T daje pravac drugačiji od onih "dobivenih" pretpostavkom indukcije, pa opet svih $n + 1$ točaka daje barem $n + 1$ pravac.

11. Tekst...

12. Malo modificirano HMO 2012., Prvi dan

13. IMO 1973.

5.7.2 N7: Diofantske jednadžbe - Ivan Sinčić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

Rješenja

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi:

$$m^3 + n^3 = (m + n)^2$$

Rješenje: Dana jednakost je ekvivalentna s:

$$(m + n)(m^2 - mn + n^2 - m - n) = 0$$

Ako je $m + n = 0$, dobivamo beskonačno mnogo parova rješenja $(m, n) = (k, -k) \forall k \in \mathbb{Z}$, a za $m + n \neq 0$ imamo:

$$\begin{aligned} m^2 - mn + n^2 - m - n &= 0 \\ \iff (m - n)^2 + (m - 1)^2 + (n - 1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

Iz čega lako dobivamo preostala rješenja: $(m, n) = (1, 2), (2, 1), (0, 1), (1, 0)$

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \geq y \geq z$. Kada bi imali $z > 3$, lijeva strana bi sigurno bila manja od 1.

Ako je $z = 3$, imamo jedino rješenje $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ jer bi za veće vrijednosti x, y lijeva strana bila manja od 1.

Ako je $z = 2$, preostaje jednadžba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Za $y > 4$ nemamo rješenja jer je tada lijeva strana manja od desne, pa provjeravajući ostale moguće vrijednosti za y dobivamo $(x, y, z) = (4, 4, 2), (6, 3, 2)$ i permutacije.

Ako je $z = 1$, preostaje jednadžba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$ koja očito nema rješenja u prirodnim brojevima.

3. Odredi sve parove m, n prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$n! + 5 = m^3$$

Rješenje: Provjeravajući vrijednosti n od 1 do 9 dobivamo da je jedno rješenje $n = 5, m = 5$. Kada bi imali rješenje za $n > 9$, imali bi $5 | LHS \Rightarrow 5 | m \Rightarrow 5^3 | m^3 \Rightarrow 5^3 | LHS$ što je nemoguće.

4. Odredi sve prirodne n za koje postoji prost broj p takav da vrijedi:

$$n^4 + 4^n = p$$

Rješenje: Za paran n lijeva strana je djeljiva s 2 i veća od 2 pa je dovoljno promatrati n oblika $2k + 1, k \in \mathbb{N}$ i jednadžba postaje:

$$\begin{aligned} (2k + 1)^4 + 4^{2k+1} &= p \\ \iff ((2k + 1)^2 + 2^{2k+1})^2 - (2k + 1)^2 2^{2k+2} &= p \\ \iff ((2k + 1)^2 - (2k + 1)2^{k+1} + 2^{2k+1})((2k + 1)^2 + (2k + 1)2^{k+1} + 2^{2k+1}) &= p \end{aligned}$$

Kako su oba faktora na lijevoj strani strogo veća od 1 za $n > 1$, dana jednadžba nema rješenja osim za $n = 1$.

5. Odredi sve cijele x, y koji zadovoljavaju:

$$15x^2 - 7y^2 = 9$$

Rješenje: Iz jednadžbe slijedi:

$$y = 3y_1 \Rightarrow 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \Rightarrow x = 3x_1 \Rightarrow 5x_1^2 - 7y_1^2 = 1 \Rightarrow y_1^2 \equiv -1 \pmod{3}$$

Što je očito nema rješenja.

6. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

Rješenje: Lijeva strana mora biti parna pa imamo dva slučaja: Prva mogućnost je da je točno jedan od brojeva x, y, z paran, ali tada je desna strana djeljiva s 4 dok lijeva nije. Druga mogućnost je da su sva tri broja parna pa možemo uvesti supstituciju:

$$x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$$

Jednadžba sad postaje:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Ponavljajući iste argumente dobivamo da i sve tri nove varijable moraju biti parne. Ovaj postupak ponavljat će se beskonačno pa svaki od brojeva x, y, z mora biti djeljiv s 2^n za proizvoljno veliki n iz čega slijedi da je jedina mogućnost $x = y = z = 0$ što je uistinu rješenje jednadžbe.

7. Odredi sve parove x, y cijelih brojeva koji zadovoljavaju:

$$x^3 + 3 = 4y(y + 1)$$

Rješenje: Dana jednadžba ekvivalentna je s:

$$x^3 + 4 = (2y + 1)^2$$

$$\iff x^3 = (2y - 1)(2y + 3)$$

Budući da su faktori na desnoj strani relativno prosti, slijedi da su oba potpuni kubovi koji se razlikuju za 4. Kako takvi kubovi ne postoje, dana jednadžba nema rješenja.

8. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$a(a + 1) = b^c$$

Rješenje: Za $c = 1$ dobivamo beskonačno rješenja: $(a, b, c) = (k, k^2 + k, 1)$. Za $c > 1$ moramo imati $a > 1$, pa promotrimo prosti faktor p od a :

$$p|a \Rightarrow p|b \Rightarrow p^c|b^c \Rightarrow p^c|a$$

Gdje zadnja implikacija vrijedi jer su a i $a + 1$ relativno prosti. Dobivamo da svaki prosti broj koji dijeli a , dijeli ga višekratnikom od c puta ($c \mid v_p(a)$) te slijedi da je a potencija nekog broja s eksponentom c . Analogno dobivamo da je i $a + 1$ c -ta potencija, međutim to je kontradikcija jer ne postoje dvije takve uzastopne potencije u prirodnim brojevima.

9. Riješi u skupu prostih brojeva jednadžbu:

$$p^q + 1 = r$$

Rješenje: Ako je p prost broj veći od 2, on je neparan pa r mora biti paran, ali to je kontradikcija jer ne postoji paran prost broj veći od 2. Dakle $p = 2$. Ako je q neparan prost broj, tada vrijedi:

$$LHS \equiv (-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

Iz čega slijedi $r = 3$, ali ne postoji prost q koji zadovoljava $2^q + 1 = 3$. Dakle q ne smije biti neparan pa imamo $q = 2$ te iz jednadžbe dobivamo $r = 5$.

10. Odredi sve trojke a, b, c prirodnih brojeva takve da vrijedi:

$$(36a + b)(a + 36b) = 2^c$$

Rješenje: Iz dane jednadžbe slijedi:

$$36a + b = 2^x \tag{5.1}$$

$$a + 36b = 2^y \tag{5.2}$$

Kako su lijeve strane obje jednačbe veće ili jednake od 37, moramo imati $x, y \geq 6$. Sada iz (1) slijedi $4|b \Rightarrow b = 4b_1$, a iz (2) slijedi $4|a \Rightarrow a = 4a_1$. Nove jednačbe sada glase:

$$36a_1 + b_1 = 2^{x-4} \quad (5.3)$$

$$a_1 + 36b_1 = 2^{y-4} \quad (5.4)$$

Nove jednačbe izgledaju isto kao i prošle dvije s razlikom u eksponentima na desnoj strani. Zbog ovoga možemo ponoviti argumente koje smo već iskoristili pa ćemo imati $x - 4, y - 4 \geq 6$. Zapravo, budući da ćemo se beskonačno vrtiti u krug, moramo imati $x - 4k, y - 4k \geq 6, \forall k \in \mathbb{N}$ što je nemoguće pa početna jednačba nema rješenja.

11. Odredi sve $a, b \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju:

$$(a^a)^5 = b^b$$

Rješenje: Neka je $d = \gcd(a, b)$. Imamo $a = da_1, b = db_1, \gcd(a_1, b_1) = 1$ i jednačba postaje:

$$d^{5a_1d} a_1^{5a_1d} = d^{b_1d} b_1^{b_1d}$$

Odnosno, uzimajući d -ti korijen:

$$d^{5a_1} a_1^{5a_1} = d^{b_1} b_1^{b_1}$$

Prvi slučaj: $5a_1 \geq b_1$:

$$d^{5a_1-b_1} a_1^{5a_1} = b_1^{b_1}$$

Budući da $a_1^{5a_1}$ dijeli desnu stranu s kojom je relativno prost, slijedi $a_1 = 1$ i jednačba postaje:

$$d^{(5-b_1)} = b_1^{b_1}$$

Dovoljno je provjeriti vrijednosti od b_1 koje su manje ili jednake od 5 jer je inače lijeva strana manja od 1 ili je $d = 1$ što je lako provjeriti. Dobivamo dva rješenja: $(a, b) = (1, 1), (256, 1024)$

Drugi slučaj: $5a_1 < b_1$:

$$a_1^{5a_1} = d^{b_1-5a_1} b_1^{b_1}$$

Budući da $b_1^{b_1}$ dijeli lijevu stranu s kojom je relativno prost, slijedi $b_1 = 1$ i jednačba postaje:

$$a_1^{5a_1} = d^{1-5a_1}$$

Za svaku prirodnu vrijednost a_1 , desna strana je manja ili jednaka od 1 pa u ovom slučaju imamo samo jedno rješenje $(a, b) = (1, 1)$ koje smo već dobili.

12. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

Rješenje: Provjeravajući $x = 1, 2, 3, 4$ nailazimo na dva rješenja $(x, y) = (3, 3), (1, 1)$. Za $x \geq 5$ vrijedi $LHS \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod{5}$, a nijedan kvadrat ne postiže ostatak 3 pri dijeljenju s 5, pa za $x \geq 5$ nema rješenja.

13. Odredi sve prirodne x, y za koje vrijedi:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + x^x = y^x$$

Rješenje: Za $x > 1$ vrijedi $x^x < y^x$ te matematičkom indukcijom pokazujemo $y^x = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + x^x < (x+1)^x$. Ovdje je prikazan samo korak indukcije:

$$(x+1)^x + (x+1)^{x+1} < (x+2)^{x+1}$$

$$\iff (x+1)^x(1+x+1) < (x+2)^{x+1}$$

Što očito vrijedi. Vidimo da y mora biti cijeli broj između x i $x+1$ što je nemoguće pa je jedino rješenje $(x, y) = (1, 1)$

14. Riješi u skupu prirodnih brojeva jednadžbu:

$$a^a + b^b + c^c = d^d$$

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$ i mora vrijediti $a < d$. Iz tih nejednakosti imamo:

$$LHS \leq 3a^a, \quad (a+1)^{a+1} \leq RHS$$

Ako dokažemo da za svaki prirodan a vrijedi $3a^a < (a+1)^{a+1}$, znat ćemo da dana jednadžba nema rješenja. Provjerom vidimo da tvrdnja vrijedi za $a = 1$, a za veće vrijednosti a imamo:

$$(a+1)^{a+1} = (a+1)^a \cdot (a+1) \geq (a+1)^a \cdot 3 > 3a^a$$

15. (Baltic Way 2011.) Odredi sve uređene parove (p, q) prostih brojeva za koje su $p^2 + q^3$ i $p^3 + q^2$ potpuni kvadrati.

Rješenje: Ako je $p = q$ imamo $p^2(p+1) = x^2$ za neki x iz čega slijedi $p+1 = x_1^2$ za neki x_1 , ali tada imamo $p = (x_1 - 1)(x_1 + 1) \implies x_1 - 1 = 1 \implies p = 3$ te dobivamo jedno rješenje $(p, q) = (3, 3)$. U suprotnom je $p \neq q$ te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p < q$ iz čega je $q \geq 3$. Iz $p^2 + q^3 = a^2$ za neki a imamo $q^3 = (a-p)(a+p)$ te kada bi oba faktora s desne strane bila djeljiva s q , tada bi q dijelio $a+p - (a-p) = 2p$ što je nemoguće. Dakle $a-p = 1$ pa je $a+p = q^3 \implies 2p = (a+p) - (a-p) = q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1) > 2q$ što je kontradikcija pa nemamo drugih rješenja.

16. (Vojtech izborni 2019.) Neka su $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\sigma$ svi djelitelji n . Odredite n ako znamo:

1. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$

2. $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

Rješenje: Kad bi bilo $d_{15} \leq \frac{n}{3}$, bilo bi $d_{14} \leq \frac{n}{4}$ i $d_{13} \leq \frac{n}{5}$, pa bi bilo $d_{13} + d_{14} + d_{15} < n$. Zato je $n > d_{15} > \frac{n}{3}$ pa je jedino moguće $d_{15} = \frac{n}{2}$ i $2 \mid n$. Kad bi bilo $3 \nmid n$, bilo bi $d_{14} \leq \frac{n}{4}$ i $d_{13} \leq \frac{n}{5}$, što je opet nemoguće jer bi bilo $d_{13} + d_{14} + d_{15} < n$. Zato $3 \mid n$ i $d_{14} = \frac{n}{3}$. To nam odmah daje $d_{13} = \frac{n}{6}$. Iz toga je jasno da je $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6$. To nam odmah daje da $4 \nmid n$ i $5 \nmid n$. Kako $6 \mid n$, to $3 \mid \frac{n}{2}$, odnosno $3 \mid d_{15}$. Zato imamo $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1 \equiv 1 \pmod{3}$. Iz malog Fermatovog teorema slijedi $d_5 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ pa $3 \mid d_5$. Zato je $d_5 = 3d_i$ za neki $1 \leq i \leq 4$. Vrijedi $d_5 > d_4 = 3d_2 > 3d_1$, pa je $d_5 = 3d_i$ za neki $3 \leq i \leq 4$. Kako su i d_3 i d_4 djeljivi s 3, slijedi $9 \mid d_5$ pa i $9 \mid n$. Kad bi bilo $d_5 > 9$, tada bi postojao djelitelj od n između d_4 i d_5 (upravo 9), a to je nemoguće. Zato je $d_5 = 9$. Sada lagano iz uvjeta zadatka slijedi $d_{15} = 999$ i odmah imamo $n = 2d_{15} = 1998$. Lagana provjera pokazuje da je to zaista rješenje.

17. (Poljska 2005.) Odredi sve trojke (x, y, n) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju $(x-y)^n = xy$.

Rješenje: Za $n = 1$ imamo $x - y = xy$, ali $xy \geq x > x - y$ pa u ovom slučaju nemamo rješenja.

Za $n = 2$ jednadžba glasi $x^2 - y^2 = 3xy$. Neka je $d = \gcd(x, y)$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, $\gcd(x_1, y_1) = 1$, jednadžba postaje $x_1^2 + y_1^2 = 3x_1y_1$ iz čega vidimo $x_1 \mid y_1^2$ te $y_1 \mid x_1^2 \implies x_1 = y_1 = 1$ što ne zadovoljava dobivenu jednadžbu pa ni u ovom slučaju nemamo rješenja.

U nastavku je $n \geq 3$, odnosno $m = n - 2 \in \mathbb{N}$. Opet korištenjem $d = \gcd(x, y)$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, $\gcd(x_1, y_1) = 1$ dana jednadžba postaje:

$$d^m(x_1 - y_1)^{m+2} = x_1y_1$$

Ako prost broj p dijeli $x_1 - y_1$, onda dijeli i bar jednog od x_1 i y_1 , a kako dijeli njihovu razliku, mora dijeliti obojicu što je u kontradikciji s $\gcd(x_1, y_1) = 1$. Dakle nijedan prost broj ne dijeli $x_1 - y_1$ pa slijedi $|x_1 - y_1| = 1$. Izraz $(x_1 - y_1)^{m+2}$ ne može biti jednak -1 jer bi tada lijeva strana jednadžbe bila negativna dok je desna pozitivna. Supstitucijom $t = \min\{x_1, y_1\}$ i kombinirajući je s $|x_1 - y_1| = 1$ dobivamo jednadžbu:

$$d^m = t(t+1)$$

Ako prost broj p dijeli t , tada on dijeli i d , a onda i lijevu stranu kratnošću koja je djeljiva s m . Zbog toga je kratnost kojom p dijeli desnu stranu također djeljiva s m , a kako su t i $t+1$ relativno prosti imamo $(p^k)^m \mid t$. Ovo vrijedi za svaki prost djelitelj broja t pa on mora biti m -ta potencija nekog prirodnog broja. Analogan argument vrijedi i za $t+1$, no sada imamo dvije uzastopne m -te potencije prirodnih brojeva što je nemoguće za $m \geq 2$. Dakle $m = 1 \implies n = 3$, $x_1 > y_1$, $d = t(t+1)$, $x = t(t+1)^2$, $y = t^2(t+1) \quad \forall t \in \mathbb{N}$ te provjerom vidimo da su ovo uistinu rješenja dane jednadžbe

5.7.3 G7: Fantomiranje - Katja Varjačić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Državno 2009., 4.razred
2. Baltic Way 2016., Problem 17
3. Baltic Way 2018., Problem 14
4. Državno 2017., 4.razred, 4.zadatak
5. EGMO 2019., 2.dan, Problem 4.
6. IGO 2014., Senior level, Problem 6.

5.7.4 A7: KAGH i CSB (napredno) - Andrija Mandić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Zdravko Cvetovski - Inequalities, ex.2.1](#)

2. [Zdravko Cvetovski - Inequalities, ex.2.3](#)

3.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i + b_i}{\sqrt{a_i b_i}} \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n 2 \right)^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

4. [Zdravko Cvetovski - Inequalities, ex.2.8](#)

5. [Zdravko Cvetovski - Inequalities, ex.4.9](#)

6. Iz CSB nejednakosti slijedi $LHS \cdot \sum a(b+c) \geq (\sum \frac{1}{a})^2$ te pošto je

$$\sum a(b+c) = 2 \sum ab, \quad \sum \frac{1}{a} = \sum \frac{ab}{a^2} \text{ zaključujemo da vrijedi } LHS \geq \frac{\sum ab}{2}$$

Iz A-G nejednakosti je $\sum ab \geq 3$ te je onda $LHS \geq \frac{\sum ab}{2} \geq \frac{3}{2}$ Q.E.D.

7. Iz CSB nejednakosti vrijedi $(x^2 + y + 1)(1 + y + z^2) \geq (x + y + z)^2$ pa zaključujemo:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{cyc} \frac{1}{x^2 + y + 1} \leq \sum_{cyc} \frac{1 + y + z^2}{(x + y + z)^2} \\ &= \frac{3 + \sum x + \sum x^2}{(x + y + z)^2} \leq \frac{\sum x + \sum x + \sum x^2}{(x + y + z)^2} = \frac{2 \sum xy + \sum x^2}{(x + y + z)^2} = 1 \end{aligned}$$

to vrijedi jer je $\sum x \geq 3$ što vrijedi iz $\sum x^2 \geq 3 \sum xy$.

8. Pošto imamo tri broja, a, b i c postoje dva koja su oba veća/jednaka 1, ili dva koja su oba manja/jednaka jedan. BSOMO da su takvi b i c . Dokazat ćemo da vrijedi:

$$(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(c^2 + b^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 - b^2 - c^2 + 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$$

što očito vrijedi zbog izbora b i c . Sada zaključujemo:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq (a^2 + 2) \cdot 3(b^2 + c^2 + 1)$$

tj. $LHS \geq 3(a^2 + 1 + 1)(1 + b^2 + c^2) \geq 3 \cdot (a + b + c)^2$ Q.E.D.

9. Lema: $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x} \leq \sqrt{2}(x+1)$

$$\text{Dokaz: } 2(x+1)^2 = (1+1)((x^2+1)+2x) \geq (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x})^2$$

$$\text{Iz leme slijedi } \sum \sqrt{1+a_i^2} \leq \sum \sqrt{2}(1+a_i) - \sqrt{2} \sum \sqrt{a_i},$$

te iz A-G nejednakosti vrijedi $\sum \sqrt{a_i} \geq n$ te je zbog toga

$$\sum \sqrt{1+a_i^2} \leq \sum \sqrt{2}(1+a_i) - \sqrt{2} \sum \sqrt{a_i} \leq \sqrt{2} \sum a_i.$$

Q.E.D.

5.7.5 C17: Teorija igara - Petra Brčić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

- Brojevi veći od 67 su dominirani. $Nash = 1$. Nash nije odigran ako neki igrači namjerno odabiru velike brojeve, očekuju da Nash neće biti odigran ili nisu zaključili kako pametno odigrati. Očekujemo da će se ponavljanjem igre pobjednički broj smanjivati.
- (D,D)
Društveno bolji ishod je (C,C). Ako zatvorenici komuniciraju prije, mogu se složiti da je bolje (C,C), ali u trenutku odluke svejedno će imati tendenciju odigrati D.
- (B,B), (S,S)
- Ne postoji Nash.
- (S,S), (H,H)
Oba lovca preferiraju (S,S) nad (H,H) te će, ako se dogovore, odigrati (S,S). (Vidimo da isto nije slučaj u prisoners' dilemma - (C,C) nije Nashova ravnoteža)

- Nash: (A,P), (P,A)

	A	P
A	0,0	3,1
P	1,3	2,2

- lijevo: (M,L), (B,R) desno: (T,C), (M,L), (B,R)

- 2 dominira 1:

Ako je drugi igrač odabrao 1, onda ako prvi igrač odabere 1 dobiva $u_1(1,1) = 50\%$ glasova, a ako izabere 2 dobiva $u_1(2,1) = 90\%$.

$$u_1(1,1) = 50\% < u_1(2,1) = 90\%$$

$$u_1(1,2) = 10\% < u_1(2,2) = 50\%$$

$$u_1(1,3) = 15\% < u_1(2,3) = 20\%$$

$$u_1(1,4) = 20\% < u_1(2,4) = 25\%$$

itd.

Dakle, svaki igrač preferira igrati 2 nad 1. Ekvivalentno zaključujemo da 9 dominira 10. Nijedan racionalan igrač neće igrati 1 ili 10 te ih možemo izbaciti iz igre.

-3 dominira 2:

$$u_1(2,2) = 50\% < u_1(3,2) = 80\%$$

$$u_1(2,3) = 20\% < u_1(3,3) = 50\%$$

$$u_1(2,4) = 25\% < u_1(3,4) = 30\%$$

$$u_1(2,5) = 30\% < u_1(3,5) = 35\%$$

itd.

Izbacujemo 3 i 8.

Ekvivalentnim postupkom zaključujemo da se neće odigrati 4 i 7. Dakle, ostaju samo pozicije 5 i 6. Igrači će izabrati pozicije bliže centru. Primjećujemo da su u ovim pozicijama kandidati izjednačeni.

Ovaj model poznat je u političkim znanostima kao *median voter theorem*.

- Nash: svi ishodi u kojima točno k ljudi uloži trud i profil u kojem nitko ne uloži trud.
- Neka je n_A broj građana koji su glasali za A, a n_B za B.

(a) $k = m$

- $n_A = n_B = k$ (svi glasaju): Kada bi građani koji su glasali odlučili ne glasati, njihov kandidat bi izgubio umjesto bio izjednačen. Njegova isplata bi bila 0 umjesto $1 - c$. Kako je $c < 1$ ovo je Nash.
- $n_A = n_B < k$ (ne glasaju svi, kandidati izjednačeni): Građanin koji nije glasao bi svojim glasom uzrokovao pobjedu svog kandidata i povećao isplatu s $1 - c$ na $2 - c$. Nije Nash.

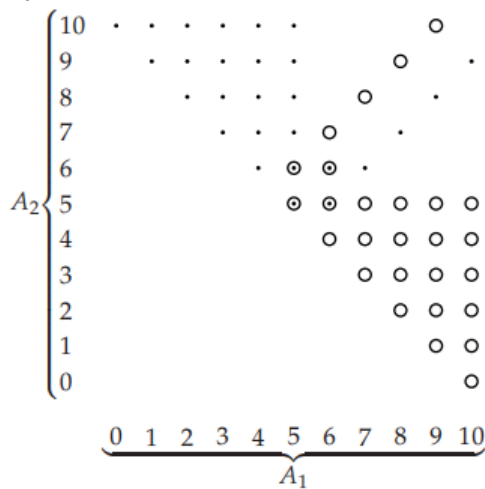
- iii. $n_A = n_B + 1$ ili $n_B = n_A + 1$ (kandidat pobijedi s jednim glasom): Ako građanin koji podržava gubitničkog kandidata i nije glasao odluči glasati, povećava svoju isplatu s 0 na $1 - c$. Nije Nash.
- iv. $n_A \geq n_B + 2$ ili $n_B \geq n_A + 2$ (kandidat pobjeđuje s 2 ili više glasova): Građanin koji je glasao za pobjedničkog kandidata bi si povećao isplatu s $2 - c$ na 2 da ne glasa. Nije Nash.

Dakle postoji jedinstvena Nashova ravnoteža u kojoj svi građani glasaju.

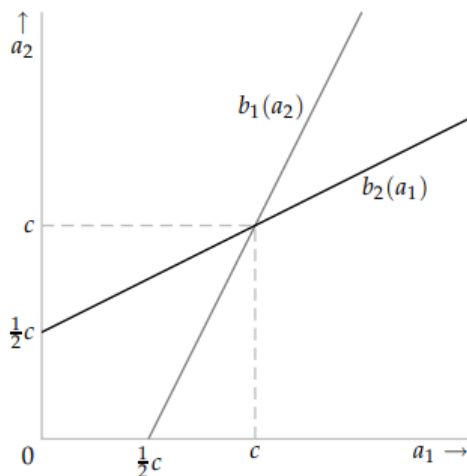
(b) $k < m$

- i. $n_A = n_B < k$: Građanin koji podržava B i nije glasao glasanjem si povećava isplatu s 1 na $2 - c$. Nije Nash.
- ii. $n_A = n_B + 1$ ili $n_B = n_A + 1$: Ako građanin koji podržava gubitničkog kandidata i nije glasao odluči glasati, povećava svoju isplatu s 0 na $1 - c$. Nije Nash.
- iii. $n_A \geq n_B + 2$ ili $n_B \geq n_A + 2$: Građanin koji je glasao za pobjedničkog kandidata bi si povećao isplatu s $2 - c$ na 2 da ne glasa. Nije Nash.

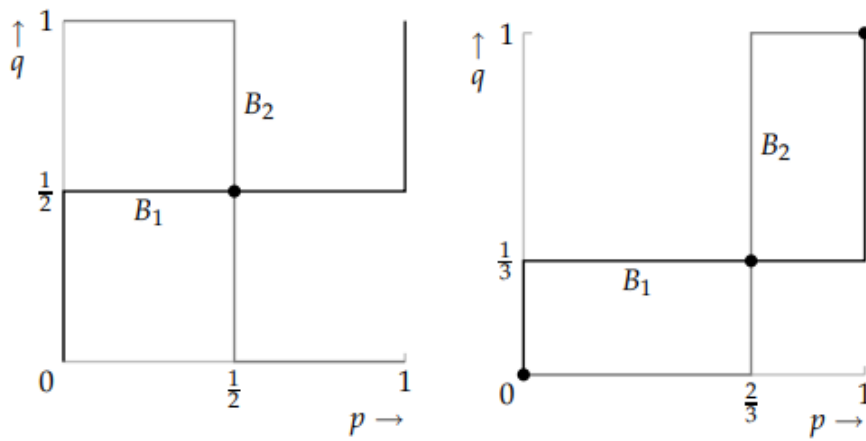
11. vidjeti sliku



12. vidjeti sliku



13. vidjeti sliku



14. $b = (b_1, \dots, b_n)$ je Nashova ravnoteža akko za $i = \operatorname{argmax} b$:

- (a) $\max_{j \neq i} v_j \leq b_i$ (pobjednik je ponudio dovoljno visok iznos)
- (b) $\max_{j \neq i} b_j \leq v_i$ (pobjednikova procjena vrijednosti predmeta je dovoljno visoka)

15. $b = (b_1, \dots, b_n)$ je Nashova ravnoteža akko za $i = \operatorname{argmax} b$:

- (a) $b_i \leq v_i$
- (b) $\max_{j \neq i} v_j \leq b_i$ (pobjednik je ponudio dovoljno visok iznos)
- (c) $b_i = \max_{j \neq i} b_j$ (postoji još jedan igrač koji je ponudio jednak iznos kao igrač i)

5.8 Rješenja za ljubičastu grupu

5.8.1 C8: Princip ekstrema - Andrija Mandić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [MNM online predavanje](#)
2. [MNM online predavanje](#)
3. [MNM online predavanje](#)
4. [Općinsko natjecanje SS3 1997](#)
5. Problem Solving Strategies by Engel - E9
6. [Županijsko natjecanje SS4 2006](#)
7. Pripreme za MEMO 2015. Skica rješenja. Promotrimo igrača A koji ima najviše direktnih pobjeda. Dokažujemo da on mora osvojiti nagradu. Pretpostavimo suprotno, tada sigurno postoji igrač C od kojeg igrač A nije bolji. Tada se lako vidi da C ima više pobjeda od igrača A . Nadalje, pretpostavimo da za tog istog igrača A vrijedi da je skup ljudi od kojih je izgubio neprazan skup. Tada u tom skupu, promatranom kao manji turnir, postoji igrač D koji je bolji od svih ostalih u tom skupu. Tada slijedi da bi i igrač D trebao osvojiti nagradu, što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka.
8. [HMO 2016 1.dan](#)

5.8.2 N8: Kineski teorem o ostacima - Luka Kraljević

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Olympiad Number Theory - Justin Stevens, Example 2.2.1.
2. CRT - Evan Chen, Problem 4.1. ili IMO 1989/5
3. CRT - Evan Chen, Problem 4.2. ili IMO 2009/1
4. CRT - Evan Chen, Example 3.1. ili USAMO 2008/1
5. Olympiad Number Theory - Justin Stevens, Example 2.2.4.
6. Olympiad Number Theory - Justin Stevens, Example 2.3.9.
7. CRT - Evan Chen, Problem 4.3. ili APMO 2009/4
8. Olympiad Number Theory - Justin Stevens, Example 2.4.2.

5.8.3 G8: Kolinearnost i konpuktalnost - Luka Kraljević

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Kako je AA_0 promjer imamo $A_0C \perp AC$ i $A_0B \perp AB$ odakle slijedi

$$A_0C \parallel BH \text{ i } A_0B \parallel CH$$

što implicira da je HBA_0C paralelogram. Budući da je M polovište dijagonale BC ovog paralelograma imamo da je M središte BBA_0C i time polovište dijagonale HA_0

2. **USAMO 2009/1**

3. Neka homotetija s centrom u A šalje dijametralno suprotnu točku točki D (točka E) u X , i neka šalje točku D u Y (dijametralno suprotna točki X na pripisanoj kružnici). Neka je N nožište visine. Vrijedi $\triangle AND \sim \triangle YXD$ kao i $\triangle ANX \sim \triangle EDX$ zbog okomica i vršnih kuteva. Iz prve sličnosti možemo zaključiti da homotetija s centrom u X šalje $\triangle EDX$ u $\triangle ANX$ što znači da šalje polovište stranice ED (centar upisane I) u polovište stranice AN (polovište visine M), odakle slijedi da su X, I i M kolinearni. Slično zaključujemo za kolinearnost I_A, D , i M

4. **IMO SL 2001 G1**

5. **Vlatko Crnković**

6. **USAMO 1997/2**

7. **IMO SL 2013 G1**

8. Usmena predaja (Andrija Mandić)

Bez nekog znanja o polarama i polovima okomitost je dosta teško dokazati direktno, stoga zadatak definiramo na sljedeći način. Neka je L okomica iz I na AD , dokazat ćemo da su K, L i I kolinearne točke odakle slijedi tvrdnja zadatka. Iz

$$\angle ILA = \angle IEA = \angle IFA = \pi/2$$

imamo da je $ILFAE$ tetivan peterokut, nazovimo mu opisanu γ . Po teoremu o tetivi i tangenti iz

$$\angle ILD = \angle IDC = \pi/2$$

imamo da je opisana trokuta ILD (Ω) tangenta na BC i na upisanu kružnicu u točki D . Oblježimo upisanu kružnicu sa ω .

$$\gamma \cap \omega = \{E, F\}$$

$$\Omega \cap \gamma = \{I, L\}$$

$$\omega \cap \Omega = \{D\}$$

Zadnja jednačba zapravo znači da je radikalna os ω i Ω tangenta u D , što je pravac BC . A po Teoremu o radikalnom središtu pravci EF , BC (DD) i IL sijeku u zajedničkoj točki, ona mora biti K po njenoj definiciji, dakle K, L i I su kolinearni.

9. **IMO 1995/1**

5.8.4 A8: Uvod u funkcijske jednadžbe - Krunoslav Ivanović

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [MEMO 2009.](#)
2. [Vojtech 2017.](#)
3. [IMO 2019.](#)
4. [Državno 2017. 4. razred](#)
5. [Državno 2015. 4. razred](#)
6. [Državno 2014. 4. razred](#)
7. [Državno 2011. 4. razred](#)
8. [AOPS](#)
9. [AOPS](#)
10. [MEMO 2018.](#)
11. [IMO SL 2013.](#)

5.8.5 C18: Posebna bojanja i invarijante - Mate Peroš

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

Uvodni zadaci

1. [Problem Solving Strategies - Arthur Engel, Chapter 1, Problem E3](#)
2. [AOPS - Stone operations](#)
3. [Bojanja i invarijante - Ilko Brnetić - Primjer 1](#)

Invarijante

4. [ELMO 1999. - Problem 2](#)
5. [Invarijante - Ilko Brnetić, Problem 4](#)
6. [Problem Solving Strategies - Arthur Engel, Chapter 1, Problem 37](#)

Bojanja

7. [Problem Solving Strategies - Arthur Engel, Chapter 2, Problem 5](#)
8. [Problem Solving Strategies - Arthur Engel, Chapter 2, Problem 1](#)
9. [Problem Solving Strategies - Arthur Engel, Chapter 2, Problem 3](#)
10. [Skakačeva tura.](#)

5.9 Rješenja za magenta grupu

5.9.1 C9: Indukcija (turbo) - Josip PupiĆ

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

d

1. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i pretpostavimo da vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. PokaŹimo tvrdnju za $n + 1$.

Ako niti u jednoj stanici nema dovoljno goriva za doći do sljedeće stanice, onda ukupno u svim stanicama nema dovoljno goriva za obiĆi cijeli krug. To znaĉi da barem u jednoj stanici S ima dovoljno goriva za doći do sljedeće. Sada tu sljedeću stanicu "prebacimo" u S te stanici gorivu na S pribrojimo gorivo s prebaĉene stanice. Ovakvim razmatranjem dolazimo do sluĉaja u kojem imamo n stanica i ukupno toĉno onoliko goriva koliko je potrebno za obiĆi stazu, a po pretpostavci indukcije znamo da u tom sluĉaju tvrdnja vrijedi.

2. IMO 1997. - 4.
3. DrŹavno natjecanje 2002. - 3. razred, 4. zadatak
4. IMO Shortlist 2013. - C3.
5. Turnir gradova 2005. - jesen, juniori (A-dio)
6. Remorov, IMO Training 2010. - Kombinatorna geometrija, 11. zadatak

5.9.2 N9: Nezgrapna teorija brojeva - Ivan Novak

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. (Nepoznat izvor) Uvjet zadatka je ekvivalentan s $a_i - a_j \mid a_i$ za svaki i i j , jer ako $a_i - a_j \mid a_i$ te $a_i > a_j$, onda a_j ne može dijeliti a_i osim ako je $a_i - a_j = a_j$, ali taj slučaj nije problem. Dokazat ćemo indukcijom da za svaki n postoji n takvih brojeva. Za $n = 2$ uzmimo $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Pretpostavimo da imamo $n - 1$ broj s traženim svojstvom, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Promotrimo brojeve $b_0 = k!, b_1 = k! + a_1, \dots, b_{n-1} = k! + a_{n-1}$, gdje je k takav da $a_j - a_i$ te a_i dijele $k!$ za svaki izbor i i j . Može se provjeriti da ti brojevi zadovoljavaju uvjete zadatka.

2. (IMO SL 2018, N1) Odgovor je svi parovi (n, k) takvi da n ne dijeli k i obrnuto. Očito ti parovi ne funkcioniraju. Primijetimo da ako je za neki prost broj $\nu_p(n) = \nu_p(k)$, tada taj prost broj možemo zanemariti.

Preformulirajmo zadatak: za dvije m -torke ($m \geq 2$) prirodnih brojeva $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ i $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ takve da vrijedi $x_1 > y_1, \dots, x_k > y_k$ te $x_{k+1} < y_{k+1}, \dots, x_m < y_m$ želimo naći m -torku $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ takvu da je

$$(z_1 + x_1)(z_2 + x_2) \dots (z_m + x_m) = (z_1 + y_1)(z_2 + y_2) \dots (z_m + y_m).$$

Neka je $z_i = a_i(x_i - y_i) - y_i$ za $i \leq k$ te $z_i = b_i(y_i - x_i) - y_i$ za $i > k$, gdje su brojevi a_i i b_i takvi da su $z_i > 0$, koje ćemo sada odrediti. Dakle, želimo namjestiti

$$(a_1 + 1) \dots (a_k + 1) b_{k+1} \dots b_m = a_1 \dots a_k (b_{k+1} + 1) \dots (b_m + 1).$$

Stavimo $a_j = a_1 + j - 1$ za svaki j te stavimo $b_k + j = b_{k+1} + j - 1$ za svaki j . Sada želimo izjednačiti

$$a_2 \dots a_k (a_k + 1) b_{k+1} \dots b_m = a_1 \dots a_k b_{k+2} \dots (b_m + 1) \iff$$

$$(a_1 + k) b_{k+1} = a_1 (b_{k+1} + m - k).$$

Dokažimo da to možemo za svaki k i m . Naime, uzmimo $a_1 = ck$ i $b_{k+1} = c(m - k)$, gdje je c bilo koji prirodan broj dovoljno velik da sve prethodne restrikcije na veličinu budu ispunjene.

3. (Izborna natjecanje za VJIMC, 2018.) Odgovor je svi prirodni brojevi oblika $2^x 3^y$ gdje je x prirodan a y nenegativan cijeli broj. Da bismo pokazali da oni zadovoljavaju, za svaki k uzmimo $m_k = 2^x 3^{y+k}$, lako vidimo da je $\varphi^k(m_k) = 2^x 3^y$.

Pretpostavimo da je neki drugi x_0 rješenje. Sada to znači da postoji proizvoljno dugačak niz $(x_k)_k$ takav da je $\varphi^k(x_k) = x_0$, takav da vrijedi $\varphi(x_k) = x_{k+1}$. Promotrimo graf čiji vrhovi su prirodni brojevi takav da je x spojen s y ako i samo ako je $\varphi(x) = y$ ili $\varphi(y) = x$, te promotrimo podgraf u kojem su svi prirodni brojevi t takvi da je $\varphi^m(t) = x_0$ za neki m . Taj graf nema ciklusa jer je φ strogo padajuća, lokalno je konačan jer za svaki m postoji konačno brojeva x za koje je $\varphi(x) = m$ (zašto?), te zbog pretpostavke da je x_0 rješenje graf mora biti beskonačan.

Dakle, po Koenigovoj lemi, postoji beskonačan niz $(x_n)_n$ takav da je $\varphi(x_n) = x_{n-1}$ za svaki n . Promotrimo što se događa s ν_2 tog niza:

Ako x nije potencija broja 2, tada je $\nu_2(\varphi(x)) \geq \nu_2(x)$. Ako je neki x_k potencija broja 2, tada je i x_0 . Inače, $\nu_2(x_n)$ je padajući niz prirodnih brojeva, pa postoji N iza kojeg se stabilizira.

Neka je taj ν_2 jednak c . Ako neki x_m nakon N ima više od 2 različita prosta faktora, tada je $\nu_2(x_{m-1}) > \nu_2(x_m)$, što je nemoguće. Neka je $x_m = 2^c p^x$, tada je $x_{m-1} = 2^{c-1} (p-1) p^{x-1}$, ako je $x = 1$, tada je nužno $\frac{p-1}{2}$ prost. Ako je $x > 1$, tada je nužno $\frac{p-1}{2} = 1$, zbog uvjeta na ν_2 i na broj prostih faktora članova niza. U drugom slučaju, dobivamo rješenja $3^a 2^b$. Promotrimo prvi slučaj:

Dakle, vrijedi za svaki $m > N$ da je $x_m = 2^c p_m$, gdje je p_m neki prost broj. Nadalje, vrijedi $p_{m+1} = 2p_m + 1$. Ako neki član ovog niza nije prost, došli smo do kontradikcije. Promatrajmo niz modulo p_{N+1} . Po Dirichletu, postoje $i < j$ takvi da $p_{N+1} \mid p_i - p_j$, ali tada p_{N+1} dijeli i $p_{i-1} - p_{j-1}$ pa induktivno dijeli i $p_{N+1} - p_{N+1+j-i}$, pa je $p_{N+1+j-i}$ složen. Dakle, nema preostalih rješenja.

4. (IMO SL 1998, N6) Ako n nije potpun kvadrat, onda je $\tau(n)$ parno, a $\tau(n^2)$ neparno, pa je n nužno potpun kvadrat. Nadalje, parni brojevi nisu rješenja. Dokazat ćemo da svi neparni jesu.

$n = 1$ i $n = 3$ jesu rješenja, pretpostavimo da je za neki k svaki neparan broj manji ili jednak $k - 2$ rješenje. Primijetimo da ako su a i b rješenja, tada je i ab , jer nije bitno koji su prosti faktori od n odnosno n^2 već koliko je kojih.

Ako je k složen, tada smo po pretpostavci indukcije gotovi. Inače, k je prost. Konstruirajmo niz takav da je $x_0 = k$, $x_{n+1} = \frac{3x_n+1}{2}$. Promotrimo najmanji j takav da je $x_j \equiv 1 \pmod{4}$. Tada je moguće dobiti

$$\frac{3x_0 3x_1 \dots 3x_{j-1}}{x_1 x_2 \dots x_j} = 3^n \frac{x_0}{x_j}.$$

Sada želimo konstruirati $3^{-j}x_j$. Možemo dobiti $\frac{2x_j}{x_j+1}$. Možemo lako dobiti $x_j + 1 = (x_0 + 1)^{\frac{3^j}{2^j}}$, pa je $\frac{2x_j}{x_j+1} = x_j 3^{-j} \frac{2^{n+1}}{x_0+1}$, a znamo da jer je $\nu_2(x_j + 1) = 1$ da je $\nu_2(x_0 + 1)$ točno jednak $j + 1$, pa smo po pretpostavci indukcije gotovi.

5. (Nepoznat izvor) Ako je $n = 4k + 1$, uzmimo $4k + 1$, $2k$ puta 1 te $2k$ puta -1 .

Ako je $n = 4k + 2$, tada je zbog uvjeta na umnožak točno jedan od brojeva koje uzmemo paran, pa su svi ostali neparni, ali je onda zbroj neparan. Dakle, to nisu rješenja.

Ako je $n = 4k + 3$, tada su svi brojevi neparni, te ih zbog uvjeta na umnožak neparno mnogo daje ostatak 3 mod 4. Međutim, tada se lako provjeri da zbroj daje ostatak 1 mod 4.

Neka je $n = 4k$. Za $k = 1$ nema rješenja. Za veće k ćemo dokazati da ima.

Neka je x ostatak koji k daje s 4.

Ako je $x = 0$ ili 2, uzmimo $2k$, 2 te uzmemo $3k - 2$ jedinica te k minus jedinice.

Ako je $x = 1$, uzmimo $k, 2, -2, -1$ te ostatak popunimo jedinicama i minus jedinicama tako da zbroj funkcionira. Minus jedinica će biti parno mnogo, pa će i umnožak funkcionirati.

Ako je $x = 3$, uzmimo $k, 2, 2, 1$ te opet dopunimo jedinicama i minus jedinicama.

6. IMO SL 2004, N1

7. Uzmimo $k = 3 \cdot 2^n$, tada je izraz pod zagradom jednak $\frac{2^{3 \cdot 2^n - n}}{3}$. Za parne n , gornji izraz davat će ostatak 1 pri dijeljenju s 3, pa će najveće cijelo biti jednako $\frac{2^{3 \cdot 2^n - n} - 1}{3}$, što je neparno.
8. Za $n = 2$ uzmimo $a_1 = 6$ i $a_2 = 7$. To je baza indukcije. Pretpostavimo da postoji $n - 1$ brojeva $a_1 < \dots < a_{n-1}$ koji zadovoljavaju.

Dokažimo da $\varphi(n)/n$ može postati proizvoljno malo, odnosno da za svaki $c > 0$, postoji n takav da je $\varphi(n)/n < c$. Uzmimo n djeljiv s prvih k prostih brojeva.

$$\varphi(n)/n = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\prod_{p|n} (1 + p^{-1} + p^{-2} + \dots)} < \frac{1}{\prod_{p|n} (1 + p^{-1} + \dots + p^{-r})},$$

gdje smo r izabrali tako da je 2^r veće od $k + 1$ -tog prostog broja. Ako sada izmnožimo ovih k zagrada, dobijemo da se u nazivniku pojavljuju kao pribrojnici svi brojevi oblika $1/m$, gdje je m manji od $k + 1$ -tog prostog broja.

Kako suma recipročnih prirodnih brojeva divergira, za dovoljno velik k će nazivnik biti veći od $1/c$, pa je i $\varphi(n)/n < c$.

Primijetimo da ako prvih $n - 1$ brojeva pomnožimo prostim brojem p koji ne dijeli niti jedan od njih,

ti brojevi isto zadovoljavaju tražene uvjete. Sada želimo naći n_0 i p takve da je p prost, $n_0 > pa_{n-1}$ i $\varphi(n_0) < (p-1)\varphi(a_n-1)$. Uzmimo n_0 takav da je $\varphi(n_0)/n_0$ manji od nekog $c > 0$ koji ćemo naknadno izabrati.

Uzmimo najveći prost broj p takav da je $pa_{n-1} < n_0$; tada je, po Betrandovom postulatu, $3(p-1)a_{n-1} > 2p_{a_{n-1}} > n_0$. Sada vrijedi $\varphi(n_0) < cn_0 < 3c(p-1)a_{n-1}$, pa je za $c = \frac{\varphi(a_{n-1})}{3a_{n-1}}$ zadovoljeno i $\varphi(n_0) < \varphi(a_{n-1})$.

Time smo dokazali korak indukcije.

5.9.3 G9: Homotetija i spiralna sličnost - Krunoslav Ivanović

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Brazil(BMO)
2. EGMO
3. Rusija(Sharygin)
4. MEMO
5. Čevidova lemma, uzmemo homotetiju iz T koja šalje jednu kružnicu u drugu i promatramo što se događa s tangentnom tetivom.
6. Poznata lemma, uzmemo paralelu s BC kroz točku X koja siječe AB i AC u U i V , uzmemo homotetiju iz A koja šalje trokut AUV u ABC i promatramo što se događa s pripisanim kružnicama.
7. Interpretiramo zadatak kao konfiguraciju s upisanom i pripisanom kružnicom pa je tvrdnja zadatka posljedica 6. zadatka.
8. AOPS/poznata činjenica
9. Rusija(ARMO)
10. Rusija(Sharygin)
11. IMO SL
12. IMO SL

5.9.4 A9: Kombinatorna algebra - Ivan Novak

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. (knjiga Putnam and Beyond) Neka je Y skup svih prirodnih brojeva koji nisu elementi X . Poredajmo brojeve po veličini, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Dovoljno je dokazati $a_k \leq 2k - 1$.
Promotrimo sljedeće uređene parove: $(1, a_k - 1), (2, a_k - 2), \dots, (\lfloor a_k/2 \rfloor, \lceil a_k/2 \rceil)$. Iz svakog od parova mora barem jedan član biti u Y , u suprotnom bi a_k bio u X .
To implicira da je $\lfloor a_k/2 \rfloor \leq k - 1$, iz čega direktno slijedi $a_k \leq 2k - 1$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
2. (2. ELMO, 1) Dokažimo da za svaki prirodan broj $k \geq 2$ vrijedi:

$$((\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq y) (x - y \mid f(x) - f(y) \wedge f^k(x) = 2019)) \implies ((\forall x \in \mathbb{N}) f^{k-1}(x) = m).$$

Definirajmo $A = \{l \in \mathbb{N} : f^{k-1}(l) = 2019\}$, $B = \mathbb{N} \setminus A$. Ako je B prazan, nema se što dokazivati.

Pretpostavimo da je B neprazan i izaberimo proizvoljne brojeve $b \in B$, $a \in A$. Primijetimo da za svaki $l < k$ vrijedi $f^l(b) \neq f^l(a)$. Zbog toga vrijedi redom

$$a - b \mid f(a) - f(b) \mid \dots \mid f^{k-1}(a) - f^{k-1}(b).$$

Kako je $f^{k-1}(a) = 2019$, vrijedi $a - b \mid 2019 - f^{k-1}(b)$.

Kako je $f^{k-1}(b) \neq 2019$, vrijedi $|a - b| \leq |2019 - f^{k-1}(b)|$.

Ako je skup A beskonačan, možemo fiksirati b i izabrati dovoljno velik $a \in A$ takav da zadnja nejednakost ne vrijedi.

Ako je A konačan, tada je B beskonačan. Primijetimo da za svaki $b \in B$ vrijedi $f^{k-1}(b) \in A$. Iz toga slijedi da je f^{k-1} ograničena odozgo najvećim elementom skupa A . Kako je B beskonačan, možemo fiksirati a i uvrstiti dovoljno velik $b \in B$ takav da zadnja nejednakost ne vrijedi.

Dakle, B je nužno prazan, pa je tvrdnja dokazana. Primjenom dokazane tvrdnje 2018 puta dolazimo do zaključka da je $f(x) = 2019$ za svaki $x \in \mathbb{N}$.

3. (nepoznat izvor) Bez smanjenja općenitosti $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Dokažimo da vrijedi $a_i + a_{m-i} \geq n + 1$. Naime, ako bi vrijedilo $a_i + a_{m-i} \leq n$, tada bi vrijedilo $a_1 + a_{m-1} < a_2 + a_{m-2} < \dots < a_i + a_{m-i} \leq n$, pa bi svaki od tih i brojeva bio u skupu, ali u parovima su različiti i svaki je veći od a_{m-i} , pa je to nemoguće. Sada je dvostruka suma elemenata skupa veća ili jednaka $m(n + 1)$, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.
4. (IMO SL 2002 A2) Promotrimo prvih n članova niza. Uzmimo permutaciju prvih n brojeva p takvu da vrijedi $a_{p_1} < a_{p_2} < \dots < a_{p_n}$. Sada je

$$\begin{aligned} c \geq a_{p_n} - a_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{p_{i+1}} - a_{p_i} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p(i) + p(i+1)} \geq_{CSB} \\ &\geq \frac{(n-1)^2}{2(p(1) + \dots + p(n)) - p(1) - p(n)} = \frac{(n-1)^2}{n^2 + n - p(1) - p(n)} \end{aligned}$$

Ako pustimo limes kako n teži u beskonačno, dobijemo $c \geq 1$.

5. IMO SL 2010, A6

6. (Adaptacija od IMC 2019, 9) Ako je n paran, polinom $(x^2 + x + 2)^{n/2}$ zadovoljava uvjete.

Ako je n neparan, polinom mora imati realnu nultočku. Neka je w_0 ta nultočka. Definirajmo niz $(w_k)_k$ rekursivno tako da je $w_{k+1} = w_k^2 + w_k$. Svaki član niza je realan i svaki član niza mora biti nultočka od P , pa po Dirichletovom principu postoje a i b takvi da je $w_a = w_b$.

Promotrimo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}w_{a+1} &= w_a^2 + w_a \\w_{a+2} &= w_{a+1}^2 + w_{a+1} \\&\dots \\w_b &= w_{b-1}^2 - w_{b-1}\end{aligned}$$

Sumiramo ih, i dobijemo $w_a^2 + w_{a+1}^2 + \dots + w_{b-1}^2 = 0$, ali svi su članovi niza realni, pa su svi jednaki 0 ali niti jedan ne smije biti jednak 0 jer je $P(0) \neq 0$.

7. [EMC 2018, S3](#)
8. [IMO SL 2018, A3](#)
9. [IMO SL 2013, A5](#)

5.9.5 C19: Kombinatorna geometrija - Borna Šimić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Može se, recimo, dići okomice na svaku stranicu iz njenih krajeva. Dio B koji ta pruga u ravnini siječe je sigurno dulji od stranice.
2. Odaberi neke dvije točke A, B i sortiraj ostale po $\sin(\angle AXB)$, te provuci kružnicu kroz A, B i n -tu točku u poretku.
3. Promotri trokut maksimalne površine među danima te trokut stvoren od njega tako da se uzmu pravci za 1 udaljeni od njegovih stranica, prema van. Lako se pokaže da je postojanje točke izvan vanjskog trokuta kontradiktorno sa pretpostavkom da je početni bio maksimalne površine.
4. Lagana indukcija. Pri dodavanju pravca, uzmi jednu od dvije poluravnine na koje on dijeli ravninu i invertiraj boje u njoj.
5. Uzmi neki pravac koji raspolovljava opseg te ga rotiraj oko mnogokuta, čuvajući svojstvo za opseg, dok se ne vrati u početni položaj. Ako je na početku površina desne polovice mnogokuta X , a na kraju Y , razlike desne i lijeve polovice se iz $X - Y$ promijenila u $Y - X$, a neprekidna je, pa je nekad bila 0.
6. <https://www.skoljka.org/task/2338/>
7. <https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2019/03/HMO2018-rje.pdf>
8. <https://www.imo-official.org/problems/IMO2013SL.pdf>
9. https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester-Gallai_theorem
10. <https://www.imc-math.org.uk/imc2014/IMC2014-day1-solutions.pdf>

5.10 Rješenja za crnu grupu

5.10.1 C10: Algoritmi i procesi - Leon Starešinić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Arthur Engel Problem Solving Strategies - Games 18.](#)
2. [Arthur Engel Problem Solving Strategies - Games 10.](#)
3. [Diskretna matematika - Prvi kolokvij 2016./2017. - 9.](#)
4. [Some old contest](#)
5. [Arthur Engel Problem Solving Strategies - Games 14.](#)
6. [Arthur Engel Problem Solving Strategies - Further Strategies 18.](#)
7. [St. Petersburg City Mathematical Olympiad 2001.](#)

5.10.2 G10: Geometrije iz ruske zbirčice - Petar Orlić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [1. zadatak](#)
2. [2. zadatak](#)
3. [3. zadatak](#)
4. [4. zadatak](#)
5. [5. zadatak](#)
6. [6. zadatak](#)
7. [7. zadatak](#)

5.10.3 C20: Teorija grafova - Leon Starešinić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. Diskretna matematika Pmf - Skripta iz predavanja
2. Diskretna matematika Pmf - Skripta iz vježbi
3. Domagoj Bradač - Teorija grafova
4. Domagoj Bradač - Teorija grafova
5. APMO 1989. 4.
6. Domagoj Bradač - Teorija grafova
7. Domagoj Bradač - Teorija grafova
8. Domagoj Bradač - Teorija grafova
9. Domagoj Bradač - Teorija grafova
10. Computer Science Stack Exchange, poznati algoritam za nalaženje promjera
11. IMO Shortlist 2002. C7

5.10.4 A11: Funkcijske jednadžbe - Petar Orlić

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [zadatak](#)
2. [zadatak](#)
3. [zadatak](#)
4. [zadatak](#)
5. [zadatak](#)
6. [zadatak](#)
7. [zadatak](#)

5.10.5 G11: Bashanje - Tadej Petar Tukara

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [Izvor.](#)
2. [Izvor.](#)
3. [IMO 2014 / problem 4](#)
4. [Izvor.](#)
5. [Izvor.](#)
6. [IMO test 2018.](#)
7. [IMO test 2017.](#)

5.10.6 N11: TB nizovi - Petar Nizić-Nikolac

[Link na zadatke.](#) [Link na hintove.](#)

1. [AOPS forum](#)
2. [IMO Shortlist 2003. N1.](#)
3. [Cambridge, predmet Numbers & Sets, druga zadaća, 13. zadatak](#)
4. [IMO Shortlist 2013. N3.](#)
5. [IMO Shortlist 2001. N3.](#)
6. [Tajvan izborni 2014. Quiz 3 P1](#)
7. [IMO Shortlist 2017. N3.](#)

Poglavlje 6

Projekti

6.1 O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 2 do 6 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz par popodneva detaljnije neku temu.

Na ovogodišnjem je kampu bilo ponuđeno 17 projekata. Većina projekata se mogu svrstati u sljedeće tri kategorije:

1. *fakultetski*, namjera je popularizirati faksovsku matematiku te učenicima unaprijed prikazati kako otprilike izgleda studiranje matematike
2. *natjecateljski*, namjera je fokusirati se na neku užu natjecateljsku temu te je temeljito obraditi
3. *primjenjeni*, namjera je predložiti na koje načine možemo koristiti matematiku u nekim (naizgled nepovezanim) zanimanjima

6.2 Popis projekata

6.2.1 Linearna algebra

Vrsta: fakultetski **Predavači:** Vinko Dragušica, Mateo Dujić, Matej Ivaniček, Nikola Sole

Cilj našeg projekta bio je obraditi način procjenjivanja rezultata koji se ponašaju približno nekoj linearnoj funkciji.

Kako bismo to obradili, morali smo razviti teoriju koja je sastavni dio linearne algebre. Projekt se odvijao u tri dana.

Prvi dan obradili smo definiciju vektorskog prostora preko poznatih 8 svojstava, kao i definiciju linearne nezavisnosti skupa, sustava izvodnica, baze i dimenzije.

Drugi dan efinirali smo linearne operatore kao funkcije s prostora na prostor koje zadovoljavaju aditivnost i homogenost, a od njih smo izveli definiciju jezgre i slike lin. operatora. Kao i za funkcije, tako smo i ovdje promatrali injektivnost i surjektivnost lin. operatora. Nadalje, isti dan obradili smo matrice i operacije nad njima kao što su zbrajanje i množenje. Naučili smo rješavati sustave jednačbi Gaussovom metodom eliminacije.

Treći dan bio je dan u kojem smo od teorije još obradili definiciju i svojstva skalarnog produkta, definiciju okomitosti i normiranosti, ortonormiranu bazu i Gram - Schmidtov postupak. Većina gradiva toga dana bila je primjena naučenog. Rješavali smo rekurzije drugog reda dijagonalizacijom matrice 2×2 i sami vrhunac projekta bio je obrada metode najmanjih kvadrata koju smo obradili na dva načina, preko analize i preko linearne (gradiva koje smo naučili).

Projekt smo zaključili eksperimentom u kojem smo promatrali ovisnost visine i težine članova projekta.

6.2.2 Vizualna teorija grupa

Vrsta: fakultetski **Predavači:** Leon Starešinić

Glavna ideja projekta je bio alternativni pristup učenju Teorije grupa. Na tipičnom faksovskom kolegiju, taj predmet je obično u potpunosti algebarski i apstraktan, lišen bilo kakve vizualne intuicije te se često kroz definicije i teoreme prebrzo prolazi, uglavnom bez motivacije. Na projektu smo pokušali upravo suprotno: prije uvođenja definicija proučavali smo velik broj primjera da se stvarno uvjerimo da je svojstvo koje definicija formalizira vrijedno proučavanja, a prije iskaza teorema smo se uvjerali da on stvarno vrijedi, koliko god vremena bilo potrebno da se to uvjerenje postigne.

Teorija grupa se bavi proučavanjem simetrija i posljedica prisutnosti simetrija. Čitav projekt, naglasak je bio na vizualnim primjerima iz stvarnog života. Prije svega su to bili simetrični objekti: Platonova tijela, Rubikova kocka, kristalne rešetke i uzorci u umjetnosti. Tijekom proučavanja takvih primjera bi navodili svojstva koja bi uočili, te smo tako postepeno dolazili do definicije grupe. Formalnu definiciju smo dali tek nakon 6 sati rada, kad smo se uvjerali da ona stvarno opisuje matematička svojstva simetrija.

Glavni alat za analizu grupa bili su Cayleyevi dijagrami. To su vizualni prikazi grupi, koji ovise o odabiru generatora grupe. Analizirajući ih, mnoge stvari postaju intuitivne: Direktni i Semidirektni produkti, Cosetovi, Kvocjentiranje, Lagrange-ov teorem, itd. Također smo koristili i aplikaciju **Group Explorer** koja sadrži opise i vizualizacije velikog broja grupa.

U projektu nismo napravili puno teorije, no to nije ni bio cilj. Cilj je bio dobiti intuiciju za to kako uopće doći do definicije grupe, kao temelj razumjevanja te čitave matematičke teorije.

6.2.3 Cauchyeva funkcijska jednadžba broken down

Vrsta: fakultetski **Predavači:** Borna Šimić

Projekt se bavio rješavanjem Cauchyeve funkcijske jednadžbe, to jest, traženjem svih funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takvih da za sve realne brojeve x, y vrijedi

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Prvo smo ustanovili par osnovnih činjenica iz same jednadžbe, specifično, dobili smo da $f(nx) = nf(x)$ za sve cijele brojeve n i realne brojeve x , a zatim proširili istu relaciju do racionalnih brojeva te dobili da $f(qx) = qf(x)$ za svu racionalnu q i realnu x .

Međutim, jednakosti

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ f(qx) &= qf(x) \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

su upravo definicija linearnog operatora iz vektorskog prostora $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ u samoga sebe, pa smo krenuli istraživati svojstva ovog prostora.

Definirali smo što su to grupa, polje, prste i vektorski prostor te dokazali par osnovnih činjenica o konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima, a zatim pokazali da naš prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ zapravo nema konačnu, pa čak ni prebrojivu bazu.

Nakon toga, iz aksioma izbora dokazali smo Zornovu lemu, a iz nje moćniju tvrdnju da baš svaki vektorski prostor ima bazu, u našem slučaju, Hamelovu bazu, što nam konačno omogućuje da okarakteriziramo sva rješenja ove jednadžbe.

Za kraj smo proučili neka svojstva Hamelovih baza i proučili par primjena nje na natjecateljske zadatke i neke druge probleme u kojima može biti od pomoći.

6.2.4 P-adska dolina

Vrsta: fakultetski/natjecateljski **Predavači:** Ivan Novak

Na ovom smo projektu radili teoriju brojeva i rješavali natjecateljske zadatke u kojima je korisno promatrati s kojim eksponentom neki prost broj dijeli neki izraz. Na drugom dijelu projekta definirali smo osnovne pojmove iz p -adske analize. Dokazivali smo rezultate i iz realne analize te ih uspoređivali s onima iz p -adske analize.

6.2.5 Nejednakosti (od A do G)

Vrsta: natjecateljski

Predavači: Ivan Sinčić, Ilja Uzelac Bujišić

Ideja ovog projekta bila je prezentirati učenicima teoreme i metode potrebne za dokazivanje nejednakosti na natjecanjima.

Kako je bilo natjecatelja različitih predznanja i dobi, obradili smo sve bitne teoreme počevši od AG nejednakosti i nejednakosti između sredina, a potom i CSB te Hölderovu nejednakost. Nakon svakog iskazanog teorema učenici su dobili zadatke za vježbu kroz koje su naučili razne načine primjena spomenutih teorema.

Uz vježbanje dokazivanja nejednakosti, učenici su također vježbali algebarske manipulacije te učili koji su identiteti korisni jer se često spominju. Osim identiteta natjecatelji su naučili i neke korisne leme koje im mogu pomoći pri rješavanju težih zadataka te njihove dokaze.

6.2.6 Uvod u logiku

Vrsta: natjecateljski

Predavači: Katja Varjačić, Josip Pupić

Projekt Uvod u logiku bio je namijenjen učenicima 7. i 8. razreda. Ideja je bila da objašnjavanjem osnovnih logičkih koncepata približimo deduktivno razmišljanje i principe dokazivanja mlađim učenicima te im time olakšamo tranziciju u srednjoškolska natjecanja u kojima zadaci u velikoj mjeri više nisu izračunavanje, već dokazivanje.

Najprije smo radili prevođenje rečenica iz govornog jezika u sudove u jeziku logike sudova, odnosno jeziku logike predikata. Nakon toga smo pomoću istinitosnih tablica uveli veznike za uspostavljanje odnosa među jednostavnim sudovima te za konstrukciju složenijih sudova. Zatim smo uveli univerzalni i egzistencijalni kvantifikator te na primjerima objašnjavali kako njihova uporaba u jeziku logike predikata omogućuje elegantnije baratanje sudovima, tj. zaključcima.

S obzirom da smo stvorili sve preduvjete, počeli smo koristiti kompliciranije sudove te promatrati njihove negacije i ekvivalentne načine zapisa tih sudova. Nakon toga smo počeli proučavati prirodnu dedukciju. Definirali smo pravila uvođenja i isključenja veznika te smo kombinacijom tih pravila počeli dokazivati zaključke na temelju zadanih premisa.

Naposlijetku, koristeći stečena znanja, probali smo rješavati zadatke sa srednjoškolskih natjecanja iz logike. U zadacima je uglavnom trebalo provjerati slijede li nužno neki složeni zaključci iz kompliciranog seta pretpostavki koji je zadan odlomkom teksta pa je bilo potrebno ispravno prevesti premise na jezik logike sudova, preoblikovati ih u ekvivalentne, no jednostavnije sudove koristeći dokazana pravila poput De Morganovih zakona ili obrata po kontrapoziciji, a na kraju onda i dokazati je li set pretpostavki kontradiktoran s ponuđenim zaključkom ili on pak nužno slijedi iz njih.

6.2.7 Natj. prog. - linearna algebra u natj prog

Vrsta: natjecateljski

Predavači: Mate Peroš

Ovaj projekt bio je namijenjen iskusnim informatičarima učenicima.

Sudionici projekta prvo su učili osnove linearne algebre, Markovljevih lanaca i kompleksne analize te su kasnije proučavali algoritme koji se nalaze u IOI Syllabusu pod linearna algebra, odnosno, FFT i Gaussovu eliminaciju. Nakon što su se upoznali sa algoritmima proučavali smo neke standardne trikove koji se pojavljuju u takvim zadacima.

Zadnji dan projekta dani su im zadaci za samostalno rješavanje kako bi bolje usvojili naučeno.

6.2.8 Teorija igara

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Andrija Tomorad

Ovaj projekt obuhvatio je proučavanje područja teorije igara iz tri različita stajališta.

Prvi dio projekta je faksovski/teorijski/istraživački dio u kojem smo promatrali simetrične igre te ih objašnjavali što općenitije koristeći igre kao što je *Nim*.

Zatim smo razvijali različite strategije u rješavanju kombinatornih natjecateljskih zadataka sličnog tipa. Neke od njih su direktna primjena klasične teorije igara i traženje sigurnog odgovora na protivnički potez. Bilo je zadataka različitih težina sve do razine državnog natjecanja za četvrte razrede te HMO-a.

Na kraju smo se bavili Nashovom ravnotežom i primjenom teorije igara. Promatrali smo situacije u kojim svaka moguća kombinacija poteza koje igrači biraju daje neku isplatu koja je ili poznata ili, u praksi, predvidiva nakon dovoljno malo vremena. Proučavali smo npr. 'Zašto konkurentni prodavači otvaraju trgovine jedni u blizini drugih?', te 'Isplati li se više biti dobar ili zao u zajednici od mnogo ljudi?'

Sva tri dijela su povezana načinom logičkog i kombinatornog razmišljanja.

6.2.9 Geometrija za ljude koji ne vole geometriju

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Krunoslav Ivanović, Luka Kraljević

Na ovome projektu, učenici su se upoznali s konfiguracijama i idejama olimpijske geometrije.

Prolazivši kroz sveobuhvatan skup zadataka s raznih natjecanja, imali su priliku uočiti povezanost različitih zadataka kroz fundamentalne konfiguracije i ideje. Prošli smo kroz konfiguracije s upisanom kružnicom, pripisanom kružnicom, Miquelovom točkom, ortocentrom, preslikavanjima i dr. Naravno, provodili smo i dokaze tih konfiguracija te prilikom dokazivanja, učenici su naučili rješavati zadatke homotetijom, ali i angle chaseati te pronalaziti tetivne četverokute.

6.2.10 "OMG, E Koji dobar projekt"

Vrsta: natjecateljski **Predavači:** Lana Frkin, Vlatka Vazdar

Na projektu "OMG, E koji dobar projekt" (a prva 4 slova su anagram od...) bavili smo se sustavnim učenjem planimetrije koja se pojavljuje na svim nivoima matematičkih natjecanja.

Prateći knjigu Evana Chena "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads", riješili smo mnoge zahtjevne zadatke iz geometrije s raznih međunarodnih natjecanja i olimpijada.

6.2.11 Uvod u natjecateljsko programiranje

Vrsta: natjecateljski/primjena **Predavači:** Andrija Mandić

Projekt je bio namijenjen za srednjoškolce koji žele unaprijediti svoje znanje iz programiranja.

Glavni cilj projekta bio je upoznati se s algoritamskim načinom razmišljanja i zapisati ga u obliku koda u programskom jeziku C++. Počeli bismo s nekim jednostavnim zadatkom i pokušali smanjiti složenost rješavanja koja može biti vremenska i memorijska. Jedan od primjera bio je binarno pretraživanje.

Koristili smo liste, stogove, redove, stabla kao i strukture podataka te tako minimizirali upotrebu memorije. Da bismo provjerili učinkovitost zadatka, upisali smo ga na LeetCode. U potrazi za rješenjem prvotno smo koristili DFS koji je bio učinkovit, ali dugotrajan pa smo to poboljšali koristeći BFS.

6.2.12 Kako smjestiti Beethovena na torus

Vrsta: primjena **Predavači:** Patricija Dovijanić, Lucija Relić

Cilj je ovog projekta bio smjestiti Beethovenovu 9. simfoniju, poznatiju kao *Oda radosti*, na torus.

Na početku smo se projekta upoznali s raznim glazbenim pojmovima koje smo odlučili promatrati u Odi radosti s naglaskom na kvintakorde. Definirali smo pojam grupe i nekoliko transformacija na kvintakordima te smo pomoću njih opisali odnose među akordima u tom glazbenom djelu. Uočili smo da se transformacije među odabranim akordima pravilno izmjenjuju opisujući put na torusu.

6.2.13 Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vrsta: primjena **Predavači:** Marko Prološćić, Dorotea Bošnjak, Juraj Marušić

Projekt Uvod u vjerojatnost i statistiku namijenjen je učenicima 8. razreda osnovne škole te učenicima 1. razreda srednje škole.

Na projektu smo se upoznali s osnovnim pojmovima iz vjerojatnosti, kao što su slučajne varijable, očekivana vrijednost, binomna razdioba i druge. Koristeći Bayesov teorem rješavali smo "Frog licking problem" te smo naučili na koji se način određuje efikasnost lijekova. Također smo se bavili igrama na sreću te objasnili zašto kasino zarađuje novac. Od igara smo najviše proučavali rulet te Blackjack.

6.2.14 Matematika i fizika u sportu

Vrsta: primjena **Predavači:** Kristin Kokan, Ivan Čulin, Petra Brčić, Ema Kompar

Na projektu smo približili djeci kombinatoriku i vjerojatnost. Bavili smo se primjenom kombinatorike i vjerojatnosti na prvo jednostavnijim primjerima, a kasnije kompliciranijim i to sportskim primjerima.

Na projektu Fizika u sportu bavili smo se fizikalnim zakonima i objašnjenjima funkcioniranja sportova, i općenito u životu.

Prvo smo ih upoznali s Magnusovim efektom na primjeru nogometa i slavnog pogotka Roberta Carlosa. Na loptu djeluje sila otpora zraka i stvara područja visokog tlaka zraka gdje vjetar puše u suprotnom smjeru od rotacije lopte, te niskog tlaka na drugoj strani. Lopta *zakrivljuje* svoju putanju u smjeru niskog tlaka zraka.

Na primjeru skoka s motkom pobliže smo im objasnili zakon očuvanja energije te pretvaranje kinetičke u potencijalnu energiju. Primijetili smo da skakač može saviti tijelo kako bi snizio položaj svojeg centra mase te tako dostigao veću visinu.

Sljedeći smo obradili tenis i ukazali im na postojanje pogodnih i nepogodnih mjesta na reketu, kako bi se loptica što bolje odbila. Upoznali smo ih sa zakonom očuvanja kutne količine gibanja i s neelastičnim sudarima.

Biljar smo također objasnili preko sudara, u ovom slučaju elastičnih. Kuglice su jednakih masa i dimenzija te u jednadžbu unosimo samo njihove početne i konačne brzine. Objasnili smo razliku između čeonog sudara i sudara pod kutem te kako se kuglice sudarene pod kutem uvijek odbiju pod pravim kutem. Ukazali smo im na postojanje *posebne točke* na kuglici, ako ju udarimo štapom, kuglica se nastavlja gibati bez trenja.

Bungee jumping i *skydiving* primjeri su gibanja u zraku. *Bungee jumping* ih je fascinirao činjenicom da tijekom prvog "pada", skakač ima akceleraciju veću od akceleracije slobodnog pada. *Skydivingom* smo im pokazali "pad tijela u fluidu" i postojanje granične brzine te metode usporavanja i ubrzavanja promjenom svojstvene površine.

6.2.15 Matematika žongliranja

Vrsta: primjena **Predavači:** Nikola Šalgaj

Na našem projektu povezali smo matematiku i žongliranje.

Naučili smo kako se pomoću dva tipa dijagrama i brojeva mogu zapisati pojedini žonglerski uzorci. Proučavanjem brojčanog zapisa objasnili smo dokaz teorema koji govori da je prosjek veličina skokova u nekom uzorku jednak broju

loptica koji nam je potreban za žongliranje. Taj teorem pomaže nam i u razlikovanju žonglirljivih i nežonglirljivih uzoraka.

Osim toga, bavili smo se pojmom grupe na primjeru grupe permutacija. Matematički smo definirali pletenice (eng. braids), njihovo spajanje i primijetili da se oni ponašaju kao grupa. Također, objasnili smo kako se svaka pletenica može dobiti žongliranjem i time zaokružili cijelu priču.

6.2.16 "Platonova tijela" u n dimenzija

Vrsta: primjena **Predavači:** Tea Arvaj

Na projektu "Platonova tijela u n dimenzija" učili smo o vektorskim prostorima i unitarnim prostorima te preko njih definirali pojam višedimenzionalnog Euklidskog prostora.

Definirali smo pojam pravilnih tijela. U 0-dimenzionalnom prostoru postoji samo jedno pravilno tijelo - točka, u 1-dimenzionalnom prostoru postoji samo dužina, dok u 2 dimenzionalnom prostoru postoji beskonačno mnogo pravilnih tijela, naime, svaki pravilni mnogokut je pravilno 2-dimenzionalno tijelo. U tri dimenzije postoji 5 pravilnih tijela: tetraedar, oktaedar, ikosaedar, kocka i dodekaedar.

Također smo pričali o 4 dimenzionalnim tijelima, njih 6 koji su dobili ime po broju pravilnih 3 dimenzionalnih tijela potrebnih za njihovu konstrukciju, njihovi engleski nazivi su: 5-cell, 16-cell, 600-cell (napravljeni od tetraedara) 24-cell (napravljen od oktaedara), 8-cell (napravljen od kocaka) i 120-cell (napravljen od dodekaedara). U svakoj dimenziji iznad četvrte, postoje točno 3 pravilna tijela i ona su poopćenja tetraedra, kocke i oktaedra.

6.2.17 Kriptografija

Vrsta: primjena **Predavači:** Nena Vukšić

Na projektu "Kriptografija" obradili smo osnove šifriranja poruka sa naglaskom na kriptografiju uz kratak osvrt na steganografiju.

Analizirali smo zasebno transpozicijske i supstitucijske šifre, uveli pojam tajnog i javnog ključa te razmatrali uporabu različitih funkcija kao metode šifriranja. Upoznali smo se sa modularnom aritmetikom kao sredstvom za dešifriranje supstitucijskih šifri primarno koristeći Eulerov i mali Fermatov teorem.

Uspješno smo naučili dešifrirati Cezarovu, Afinu, Vigenereovu šifru kao i razne alternacije pri tome stvarajući nove, personalizirane šifre pomoću osnovnih funkcija koristeći njihov inverz za dešifriranje.

Poglavlje 7

Natjecanje ELMO

Na ovom kampu se održalo treće izdanje natjecanja ELMO (ekstra loša matematička olimpijada) koji su sastavili Ivan Novak i Borna Šimić. Svih pet zadataka su sami smislili, a natjecanje su pisali učenici srednjih škola.

7.1 Zadaci

1. Neka su x, y realni brojevi. Dokaži:

$$x^3 + 3xy(x + y) + y^3 \leq 1 \text{ ako i samo ako } x^3 + 3xy + y^3 \leq 1$$

2. Neka su u i v pozitivni racionalni brojevi. Definiramo niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rekursivno tako da vrijedi $a_1 = u$, $a_2 = v$, te za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2 + 2 + a_n + a_{n-1}}$$

Odredi sve parove (u, v) za koje je a_n racionalan za svaki prirodan broj n .

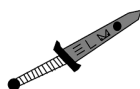
3. Neka je $M(a, b)$ najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b . Neka je $\varphi(m)$ broj prirodnih brojeva $a \leq m$ takvih da $M(a, m) = 1$, a neka je $\tau(m)$ broj djeljitelja m . Dokaži:

$$\sum_{k=1}^n \varphi(M(k, n)) \leq \varphi(n)\tau(n)$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| < |AB| < |BC|$. Neka je Γ njegova opisana kružnica. Neka je Y točka na Γ , na manjem luku $\widehat{AB}$, takva da vrijedi $|\angle BCY| = 2|\angle ACY|$. Neka je X točka na stranici $\overline{AB}$ takva da vrijedi $2|AX| = |AC|$. Neka je R točka osnosimetrična polovištu dužine $\overline{AC}$ s obzirom na pravac XY . Dokaži da kružnica opisana trokutu BXY prolazi kroz R ako i samo ako joj je središte na Γ .
5. Neka je $n \geq 4$ prirodan broj. Promotrimo skup od n bakterija, takav da svaka bakterija osim jedne, koju ćemo zvati *Kraljica*, ima točno jednu majku (također bakteriju iz skupa). Kraljica nema niti jednu majku te je predak svim drugim bakterijama. Nijedna bakterija nije majka sama sebi. Kažemo da je bakterija U *tetka* bakterije V ako U nije majka od V i majka od U je majka majke od V . Odredi maksimalan broj parova bakterija (U, V) takvih da je U tetka od V .

(Napomena: Kažemo da je bakterija A *predak* bakterije B ako postoji niz bakterija $x_1, x_2, \dots, x_k$ takav da $x_1 = A$, $x_k = B$ te je x_i majka x_{i-1} za svaki $i \in \{2, 3, \dots, k\}$)



7.2 Rješenja

Zadatak 1. (Borna Šimić)

Neka su x, y realni brojevi. Dokaži:

$$x^3 + 3xy(x + y) + y^3 \leq 1 \text{ ako i samo ako } x^3 + 3xy + y^3 \leq 1$$

Prvo rješenje. (Borna Šimić)

Prva nejednakost je $(x + y)^3 \leq 1 \iff x + y \leq 1$. Međutim, imamo

$$x^3 + y^3 - 1 + 3xy = \frac{1}{2}(x + y - 1)((x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2)$$

pa su nejednakosti očito ekvivalentne.

Drugo rješenje. (Ivan Novak)

Razlikujemo 4 slučaja:

1. $x \leq 0, y \leq 0$. Tada uvijek vrijedi $x + y \leq 1$, a vrijedi i $(-x)^3 + (-y)^3 + 1 \geq 3(-x)(-y) = 3xy$ po AG nejednakosti.

2. $x \geq 0, y \geq 0$. Ako je $x \geq 1 - y$, onda je $x^3 + 3xy + y^3 \geq (1 - y)^3 + 3(1 - y)y + y^3 = 1$.

Ako je $x < 1 - y$, onda je $x^3 + 3xy + y^3 < (1 - y)^3 + 3(1 - y)y + y^3 = 1$.

3. $x \geq 0, y \leq 0$. Neka je $z = -y$.

Ako je $x - z \leq 1$, onda je $x \leq z + 1$, pa je $x^3 - 3xz - z^3 - 1 = x(x^2 - 3z) - z^3 - 1$.

Ako je $x^2 - 3z \geq 0$, onda je taj izraz manji ili jednak $(z + 1)(x^2 - 3z - z^2 + z - 1) = (z + 1)(x^2 - (z + 1)^2) \leq 0$.

Ako je $x^2 - 3z < 0$, tada je $x(x^2 - 3z) - z^3 - 1 \leq 0$ jer je svaki pribrojnik manji ili jednak 0.

Ako je $x - z > 1$, onda je $x > z + 1$, pa je $x^3 - 3xz - z^3 - 1 = x(x^2 - 3z) - z^3 - 1$.

Ako je $x^2 - 3z > 0$, tada je $x(x^2 - 3z) - z^3 - 1 > (z + 1)(x^2 - 3z - z^2 + z - 1) = (z + 1)(x^2 - (z + 1)^2) > 0$.

Ako je $x^2 - 3z \leq 0$, onda je $x^2 \leq 3z \leq z^2 + 2z + 1$, pa je $x \leq z + 1$, što je kontradikcija.

4. $x \leq 0, y \geq 0$. Tvrdnja slijedi iz 3. slučaja.

Treće rješenje. (Ivan Novak)

Prva nejednakost je ekvivalentna s $x + y \leq 1$. Dovoljno je dokazati $(x + y - 1)(x^3 + y^3 + 3xy - 1) \geq 0$. Sada vrijedi niz ekvivalencija:

$$(x + y - 1)(x^3 + y^3 + 3xy - 1) \geq 0 \iff$$

$$x^4 + y^4 + 3x^2y + 3xy^2 + xy^3 + yx^3 + 1 - x^3 - y^3 - 3xy - x - y \geq 0 \iff$$

$$x^4 + y^4 + 3x^2y + 3xy^2 + xy^3 + yx^3 + 1 \geq x^3 + y^3 + 3xy + x + y.$$

Uvedimo supstituciju $u = x + y, v = xy$. Tada zadnju nejednakost možemo zapisati kao

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 3xy(x + y) + (x + y)^2xy - 2x^2y^2 + 1 \geq (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 3xy + x + y \iff$$

$$u^4 + 6uv + 1 \geq u^3 + 3u^2v + 3v + u \iff$$

$$u^4 - u^3 - u + 1 \geq v(3 + 3u^2 - 6u) \iff$$

$$(u^3 - 1)(u - 1) \geq 3v(u - 1)^2 \iff$$

$$(u - 1)^2(u^2 + u + 1) \geq 3v(u - 1)^2.$$

Ako je $u = 1$, nejednakost je očita. Ako nije, tada je dovoljno pokazati

$$u^2 + u + 1 \geq 3v \iff x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1 \geq 3xy \iff x^2 + x(1 - y) + y^2 + y + 1 \geq 0.$$

Ako izraz gledamo kao kvadratnu funkciju po x , diskriminanta je jednaka

$y^2 - 2y + 1 - 4y^2 - 4y - 4 = -3y^2 - 6y - 3 = -3(y + 1)^2 \leq 0$, pa je izraz uvijek veći ili jednak 0, kao što je i trebalo dokazati.

Četvrto rješenje. (Ivan Novak)

Ako je $x + y \geq 1$, onda je $x^3 + y^3 + 3xy = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 3xy \geq x^2 - xy + y^2 + 3xy = (x + y)^2 \geq 1$.

Ako je $-1 \leq x + y < 1$, onda je $x^3 + y^3 + 3xy = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 3xy < x^2 + y^2 - xy + 3xy = (x + y)^2 \leq 1$.

Ako je $x + y < -1$, razlikujemo 3 slučaja:

1. $x \leq 0, y \geq 0$. Tada je $x^3 + y^3 + 3xy \leq x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$. Prvi faktor je manji od -1 , a drugi je veći od 0 , pa je umnožak sigurno manji od 1 .
2. $x \geq 0, y \leq 0$. Tvrdnja slijedi iz 1. slučaja
3. $x \leq 0, y \leq 0$ Tada vrijedi $(-x)^3 + (-y)^3 + 1 \geq 3(-x)(-y) = 3xy$ po AG nejednakosti, iz čega slijedi tvrdnja.

Zadatak 2. (Ivan Novak)

Neka su u i v pozitivni racionalni brojevi. Definiramo niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rekurzivno tako da vrijedi $a_1 = u$, $a_2 = v$, te za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2 + 2 + a_n + a_{n-1}}$$

Odredi sve parove (u, v) za koje je a_n racionalan za svaki prirodan broj n .

Prvo rješenje.

Dani uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$a_{n+1}^2 = n^2 + 2 + a_n + a_{n-1}.$$

Pretpostavimo da su za neke u i v svi članovi niza racionalni. Neka su $\{b_n\}_n$ i $\{c_n\}_n$ nizovi prirodnih brojeva takvi da su b_n i c_n relativno prosti za svaki n i takvi da je $a_n = \frac{b_n}{c_n}$. Tada rekurziju možemo zapisati kao

$$\frac{b_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} = n^2 + 2 + \frac{b_n}{c_n} + \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}} \iff$$

$$b_{n+1}^2 c_n c_{n-1} = (n^2 + 2) c_{n+1}^2 c_n c_{n-1} + c_{n+1}^2 (b_n c_{n-1} + c_n b_{n-1}).$$

Iz ovog možemo zaključiti da $c_{n+1}^2 \mid b_{n+1}^2 c_n c_{n-1}$, a kako su c_{n+1} i b_{n+1} relativno prosti, vrijedi $c_{n+1}^2 \mid c_n c_{n-1}$.

Iz ovog slijedi $c_{n+1} \leq \sqrt{c_n c_{n-1}} \leq \max(c_n, c_{n-1})$, a kako je $c_n \leq \max(c_n, c_{n-1})$, vrijedi $\max(c_{n+1}, c_n) \leq \max(c_n, c_{n-1})$, pa je to padajući niz prirodnih brojeva, pa postoje prirodni brojevi m i k takvi da vrijedi $\max(c_n, c_{n-1}) = k$ za svaki $n > m$.

Promotrimo neki $n > m + 300$. Ako je $c_{n+1} > c_n$, onda je $c_{n+1} = \max(c_{n+1}, c_n) = k$, ali je i $c_{n-1} = \max(c_n, c_{n-1}) = k$. Međutim, tada je $c_{n+1}^2 = k^2 > k c_n = c_{n+1} c_n$, što je kontradikcija. Dakle, $c_{n+1} \leq c_n$ za svaki $n > m + 300$.

Iz toga slijedi da je $\{c_n\}_n$ padajući niz prirodnih brojeva, pa postoje M i K takvi da je $c_n = K$ za svaki $n > M$.

Tada za svaki osim konačno mnogo n vrijedi

$$b_{n+1}^2 K^2 = (n^2 + 2) K^4 + (b_n + b_{n-1}) K^3.$$

Iz ovog slijedi $K \mid b_{n+1}$, ali K i b_{n+1} su relativno prosti, pa vrijedi $K = 1$.

Sada za svaki $n > M$ vrijedi

$$b_{n+1}^2 = n^2 + 2 + b_n + b_{n-1}.$$

Desna strana je veća od n^2 , pa mora vrijediti $b_{n+1} \geq n + 1$. To znači da postoji beskonačno prirodnih brojeva n takvih da je $b_{n+2} > b_{n+1}$ jer je niz $\{b_n\}_n$ neograničen.

Promotrimo takav $n > M + 300$ i oduzmimo izraze

$$b_{n+1}^2 = n^2 + 2 + b_n + b_{n-1}$$

$$b_{n+2}^2 = (n+1)^2 + 2 + b_{n+1} + b_n.$$

Dobivamo da vrijedi

$$(b_{n+2} - b_{n+1})(b_{n+2} + b_{n+1}) = 2n + 1 + b_{n+1} - b_{n-1}.$$

Lijeva strana je veća ili jednaka $n + 2 + b_{n+1}$, a desna strana je manja ili jednaka

$2n + 1 + b_{n+1} - (n - 1) = n + 2 + b_{n+1}$, zbog nejednakosti $b_{n+2} - b_{n+1} \geq 1$, $b_{n+2} \geq n + 2$ i $b_{n-1} \geq n - 1$.

Jednakost se postiže ako i samo ako vrijede jednakosti $b_{n+2} - b_{n+1} = 1$, $b_{n+2} = n + 2$ i $b_{n-1} = n - 1$.

Iz ovog slijedi $b_{n+2} = n + 2 = a_{n+2}$ i $b_{n+1} = n + 1 = a_{n+1}$. Kako za svaki $k \geq 2$ vrijedi $a_{k-1} = a_{k+1}^2 - k^2 - 2 - a_k$, $a_k = k$ i $a_{k+1} = k + 1$ implicira $a_{k-1} = (k + 1)^2 - k^2 - k - 2 = k - 1$, pa induktivno vrijedi i $a_2 = 2$ te $a_1 = 1$.

Iz ovog slijedi da je $(u, v) = (1, 2)$ jedino moguće rješenje. Direktnom provjerom vidimo da niz $a_n = n$ zadovoljava rekurziju pa je $(1, 2)$ uistinu rješenje.

Drugo rješenje.

Uvedemo nizove $\{b_n\}_n$ i $\{c_n\}_n$ kao u prvom rješenju, te ponovno dobijemo $c_{n+1}^2 \mid c_n c_{n-1}$.

Neka je p prost broj koji dijeli c_{n+1} . Tada taj prost broj dijeli c_n ili c_{n-1} , pa zaključujemo da svaki prost broj koji dijeli c_k za neki k mora dijeliti c_1 ili c_2 , pa niz ima konačno mnogo prostih faktora.

Promotrimo sada neki prost broj p koji dijeli neki član niza. Neka je $x_n = \nu_p(c_n)$. Tada vrijedi

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$

Ako je $x_{n+1} > x_n$, onda je $x_{n+1} < x_{n-1}$, pa vrijedi $\max(x_{n+1}, x_n) \leq \max(x_n, x_{n-1})$. To je padajući niz nenegativnih cijelih brojeva, pa postoje prirodan broj M_p i nenegativan cijeli broj K_p takav da je $\max(x_n, x_{n-1}) = K_p$ za svaki $n > M_p$.

Promotrimo neki $n > M_p$. Ako je $x_{n+1} > x_n$, onda je $x_{n+1} = K_p$ jer $\max(x_{n+1}, x_n) = K_p$, ali je i $x_{n-1} = K_p$ jer je $\max(x_n, x_{n-1}) = K$. Međutim, $x_{n+1} = K_p > \frac{K_p + x_n}{2} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$, što je kontradikcija.

Dakle, $\{x_n\}_n$ je također padajući niz nenegativnih cijelih brojeva, pa postoje m_p i k_p takvi da je $x_n = k_p$ za svaki $n > M_p$.

Kako ima konačno mnogo prostih faktora p niza $\{c_n\}_n$ i svaki od prostih faktora vrijedi da se niz $\nu_p(x_n)$ stabilizira, iz ovog slijedi da postoje M i K takvi da je $c_n = K$ za svaki $n > K$.

Tada za svaki osim konačno mnogo n vrijedi

$$b_{n+1}^2 K^2 = (n^2 + 2)K^4 + (b_n + b_{n-1})K^3.$$

Iz ovog slijedi $K \mid b_{n+1}$, ali K i b_{n+1} su relativno prosti, pa vrijedi $K = 1$.

Sada za svaki $n > M$ vrijedi

$$b_{n+1}^2 = n^2 + 2 + b_n + b_{n-1}.$$

Desna strana je veća od n^2 , pa mora vrijediti $b_{n+1} \geq n + 1$. Definirajmo niz $\{d_n\}_n$ tako da je $d_n = a_n - n$. Tada se rekurzija može zapisati kao

$$d_{n+1}(d_{n+1} + 2(n+1)) = d_n + d_{n-1}.$$

Iz ovog slijedi $d_{n+1} \leq \frac{d_n + d_{n-1}}{2(n+1)} < \max(d_n, d_{n-1})$, pa je niz $\{\max(d_n, d_{n-1})\}_n$ padajući, pa se stabilizira, ali se onda stabilizira i $\{d_n\}_n$, odnosno jednak je K za beskonačno n . Tada vrijedi $K(K+2n) = 2K$, pa je nužno $K = 0$, jer je inače lijeva strana veća od desne za dovoljno velik n .

Iz ovog slijedi $a_n = n$ za svaki n dovoljno velik, pa kao i u prethodnom rješenju zaključujemo $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$.

Zadatak 3. (Borna Šimić)

Neka je $M(a, b)$ najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b . Neka je $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva $k \leq n$ takvih da $M(k, n) = 1$, a neka je $\tau(n)$ broj djelitelja n . Dokaži:

$$\sum_{k=1}^n \varphi(M(k, n)) \leq \varphi(n)\tau(n)$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje.

Imamo $M(k, n) \mid n$ za sve $k \leq n$, pa sumu s lijeve strane možemo prikazati kao sumu po djeliteljima n . Potrebno je izračunati, za neki $d \mid n$, koliko postoji $k \leq n$ takvih da $d = M(k, n)$.

Međutim, tada je očito $M(k/d, n/d) = 1$ i vrijedi $k/d \leq n/d$, ali i za svaki $r \leq n/d$ takav da $M(r, n) = 1$ je $M(rd, n) = d$, pa je dovoljno naći koliko ima takvih r , a to je upravo $\varphi(n/d)$. Prema tome, imamo:

$$\sum_{k=1}^n \varphi(M(k, n)) = \sum_{d \mid n} \varphi(d) \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

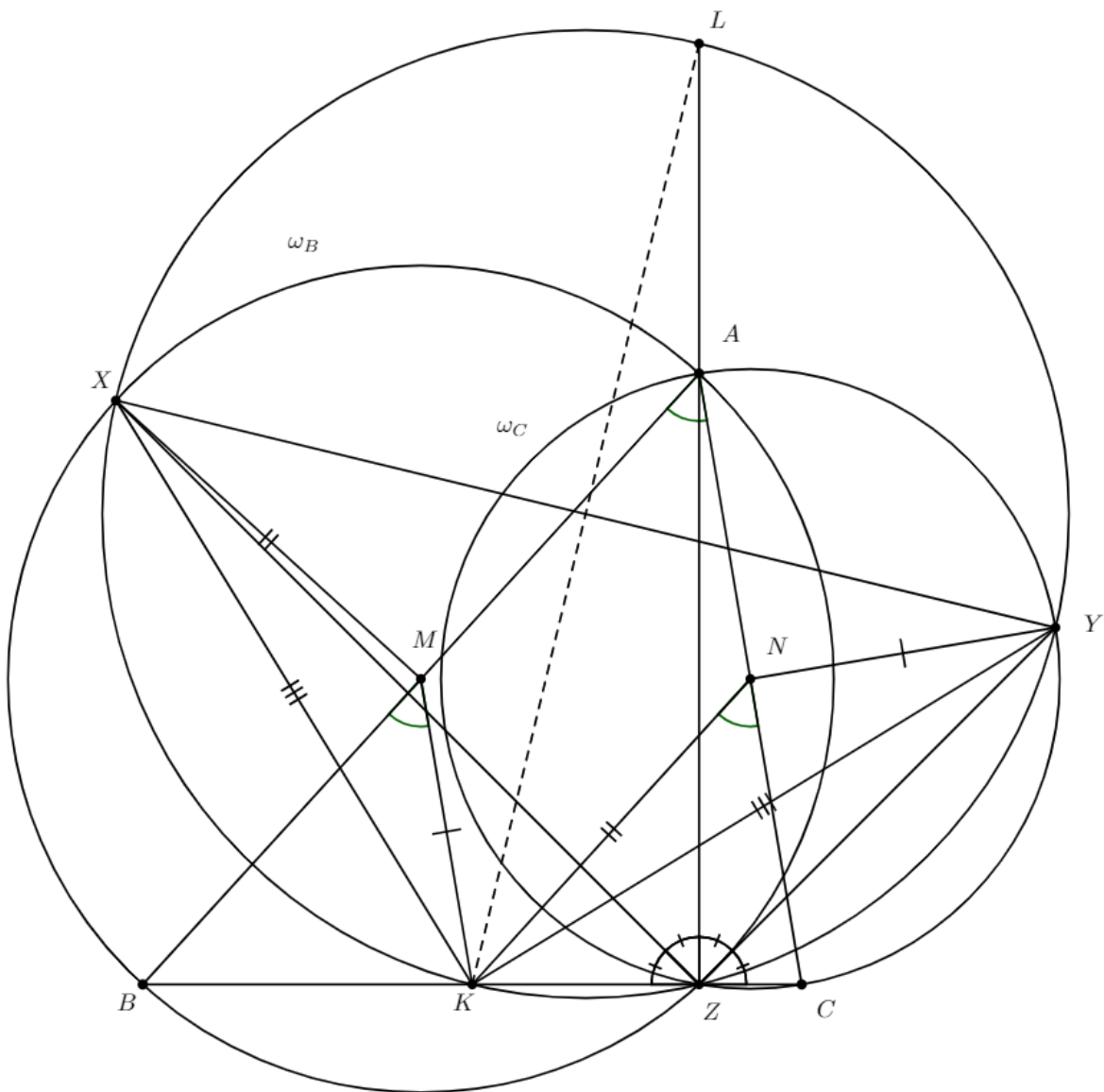
Dovoljno je sada pokazati da $\varphi(m)\varphi(n) \leq \varphi(mn)$.

Međutim, kako $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)M(m, n)/\varphi(M(m, n))$ i $\varphi(n) \leq n$, ovo je očito.

Jednakost vrijedi kad u svakoj od prethodnih nejednakosti vrijedi jednakost, to jest, kada su $d, n/d$ relativno prosti za sve vrijednosti $d \mid n$, to jest kad je n kvadratno slobodan.

Zadatak 4. (Ivan Novak)

Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|\overline{AC}| < |\overline{AB}| < |\overline{BC}|$. Neka je Γ njegova opisana kružnica. Neka je Y točka na Γ , na manjem luku $\widehat{AB}$, takva da vrijedi $|\angle BCY| = 2|\angle ACY|$. Neka je X točka na stranici $\overline{AB}$ takva da vrijedi $2|AX| = |AC|$. Neka je R točka osnosimetrična polovištu dužine $\overline{AC}$ s obzirom na pravac XY . Dokaži da kružnica opisana trokutu BXY prolazi kroz R ako i samo ako joj je središte na Γ .

Prvo rješenje.

Označimo s O središte opisane kružnice, te s P polovište stranice $\overline{AC}$.

Neka je $\gamma = \angle ACB$, te neka je $\alpha = \angle BAC$. Tada je $\angle ACY = \angle ABY = \gamma/3$ (obodni kutevi nad tetivom $\overline{AY}$). Nadalje, vrijedi $\angle AOY = 2\gamma/3$ (središnji kut nad $\overline{AY}$). Kako je AOY jednakokrakan, vrijedi $\angle OYA = 90^\circ - \gamma/3$.

Trokutovi PXY i RXY su sukladni jer su refleksija jedan drugog preko pravca XY , pa vrijedi $\angle XPY = \angle XRY$.

Trokut APX je jednakokrakan, pa je $\angle APX = \angle AXP = 90^\circ - \alpha/2$.

Četverokut $BRXY$ je tetivan ako i samo ako vrijedi $\angle XBY = \angle XRY$, jer su to obodni kutevi nad tetivom $\overline{XY}$. To vrijedi ako i samo ako vrijedi $\angle XRY = \gamma/3$, što vrijedi ako i samo ako je $\angle XPY = \gamma/3$. Nadalje, to vrijedi ako i samo ako vrijedi $\angle APY = \angle APX - \gamma/3 = 90^\circ - \alpha/2 - \gamma/3$.

Kako je $\angle YAC = 2\gamma/3 + \alpha$, to vrijedi ako i samo ako je

$$\angle AYP = 180^\circ - (\alpha + 2\gamma/3) - (90^\circ - \alpha/2 - \gamma/3) = 90^\circ - \alpha/2 - \gamma/3.$$

To vrijedi ako i samo ako je $|AP| = |AY|$, a kako je $|AP| = |AX|$, to vrijedi ako i samo ako je $|AX| = |AY|$.

Središte kružnice opisane trokutu BXY , nazovimo ga S , je na Γ ako i samo ako vrijedi $\angle ASY = \gamma/3$. Vrijedi $\angle XSY = 2\angle XBY = 2\gamma/3$, pa je $\angle ASY = \gamma/3$ ako i samo ako je $\angle ASX = \angle ASY$, a kako je $SX = SY$, to vrijedi ako i samo ako je AS simetrala od $\overline{XY}$, što vrijedi ako i samo ako je $|AX| = |AY|$.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da je središte kružnice opisane trokutu BXY na Γ . Tada je to središte polovište kraćeg luka YB . Označimo ga s S . Želimo dokazati $SR = SX$. Dovoljno je pokazati da je preslika S preko XY jednaka A jer vrijedi $AX = AP$.

Vrijedi $\angle ASY = \gamma/3$, ali i $\angle SAX = \gamma/3$ (obodni kutevi nad tetivama iste duljine). Iz ovog slijedi da su SY i AX paralelni.

Nadalje, vrijedi $\angle YAX = 2\gamma/3$, te vrijedi $\angle YSX = 2\gamma/3$, pa su i AY i XS paralelni, pa je četverokut $AXSY$ paralelogram, a kako je $SX = SY$, vrijedi i $AX = AY$, četverokut je romb. Iz toga slijedi da je A preslika S preko XY , pa vrijedi $SR = AP = AX = SX$, kao što je i trebalo pokazati.

Pretpostavimo da je četverokut $BRXY$ tetivan. Tada kao u prvom rješenju zaključujemo $|AX| = |AY|$. Iz toga slijedi da je $\angle AYO = 90^\circ - \gamma/3$, ali vrijedi i $\angle AYO = 90^\circ - \gamma/3$, pa su O, X, Y kolinearne.

Iz toga slijedi da je Γ jednaka refleksiji preko XY od Γ , pa je refleksija od A preko XY također na Γ . Neka je S' refleksija od A preko XY . Tada je S' polovište kraćeg luka YB , pa vrijedi $|S'Y| = |S'B|$. Nadalje, iz $|AY| = |AX|$ slijedi $|S'Y| = |S'X|$, pa je S' središte kružnice opisane trokutu BXY , kao što je i trebalo pokazati.

Zadatak 5. (Ivan Novak)

Neka je $n \geq 4$ prirodan broj. Promotrimo skup od n bakterija, takav da svaka bakterija osim jedne, koju ćemo zvati *Kraljica*, ima točno jednu majku (također bakteriju iz skupa). Kraljica nema niti jednu majku te je predak svim drugim bakterijama. Nijedna bakterija nije majka sama sebi. Kažemo da je bakterija U *tetka* bakterije V ako U nije majka od V i majka od U je majka majke od V . Odredi maksimalan broj parova bakterija (U, V) takvih da je U tetka od V .

(Napomena: Kažemo da je bakterija A *predak* bakterije B ako postoji niz bakterija $x_1, x_2, \dots, x_k$ takav da $x_1 = A$, $x_k = B$ te je x_i majka x_{i-1} za svaki $i \in \{2, 3, \dots, k\}$)

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je odgovor $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$.

Dokažimo da se taj broj može postići. Označimo bakterije s $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ tako da je A_0 kraljica.

Postavimo da su $A_1, \dots, A_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ djeca od A_0 , te da su ostale bakterije djeca od A_1 .

Tada je svaka kći od A_0 različita od A_1 teta svakoj kćeri od A_1 , pa ih ima

$$\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right) \left(n - 1 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Označimo kraljicu s Q . Za bakteriju X različitu od kraljice, neka je $M(X)$ majka od X . Tada definiramo dubinu od X kao najmanji k takav da je $M^k(X) = Q$, te stavimo da je dubina od Q jednaka 0. Broj parova (tetka, nećakinja) je manji ili jednak broju parova bakterija u, v takvih da je dubina od u različite parnosti od dubine od v i takvih da u i v nisu spojeni, jer tetka i nećakinja imaju dubine različite parnosti i nisu spojene.

Neka je P broj bakterija parne dubine.

Tada je broj opisanih parova jednak

$$P(n-P) - (n-1).$$

Lijevi pribrojnik je broj parova različite dubine, a od tog broja moramo oduzeti one povezane, a ima $n-1$ bridova. Taj broj je prema AG nejednakosti manji ili jednak

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - (n-1) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Iz toga slijedi da je i broj parova (tetka, nećakinja) ograničen tim brojem, kao što je i trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Konstrukcija je ista kao i u prvom rješenju. Dubinu definiramo kao i u prvom rješenju. Neka je L_i broj vrhova s dubinom i .

Vrijedi da je broj parova (teta, nećakinja) manji ili jednak broju parova (u, v) takvih da je dubina od u za 1 manja od dubine od v i takvih da u nije majka od v . Naime, ako su neki (u, v) teta i nećakinja, tada je dubina od u za 1 manja od dubine od v i u nije majka od v .

Vrijedi da je broj opisanih parova jednak

$$\sum_{i=0}^k (L_i - 1) L_{i+1},$$

gdje je k maksimalna dubina, zato što neki vrh čija dubina je $i+1$ se spari s točno $L_i - 1$ vrhova dubine i , sa svima čija dubina je i osim sa svojom majkom.

Primijetimo da vrijedi $L_0 = 1$ pa prvi pribrojnik možemo zanemariti. Također, $L_{k+1} = 0$ pa možemo i zadnji pribrojnik zanemariti. Nadalje, vrijedi $L_1 + L_2 + \dots + L_k = n - 1$. Uvedimo oznaku

$$f(L_1, \dots, L_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (L_i - 1) L_{i+1}.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom po k sljedeću tvrdnju:

Za svaki prirodan broj $k \geq 2$, za svaki prirodan broj $n \geq 4$ i za svakih k prirodnih brojeva $L_1, \dots, L_k$ za koje vrijedi $L_1 + \dots + L_k \leq n - 1$, vrijedi

$$f(L_1, \dots, L_k) \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil.$$

Baza: za $k = 2$, vrijedi

$$(L_1 - 1)L_2 \leq (n - 2 - L_2)L_2 \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil,$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz AG nejednakosti.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k - 1$, gdje je $k \geq 3$. Promotrimo brojeve $L_1, \dots, L_k$ čiji zbroj je manji ili jednak $n - 1$.

Pretpostavimo da je $L_2 \geq L_{k-1} - 1$. Tada vrijedi

$$f(L_1, \dots, L_k) \leq f(L_1 + L_k, L_2, \dots, L_{k-1}, 0),$$

jer je $f(L_1 + L_k, L_2, \dots, L_{k-1}, 0) = f(L_1, \dots, L_k) + L_k L_2 - L_k(L_{k-1} - 1)$. Nova $k - 1$ -torka zadovoljava sve uvjete (zbroj je ostao isti, svi brojevi su prirodni), pa možemo primijeniti pretpostavku indukcije pa vrijedi nejednakost.

Drugi slučaj je ako je $L_2 < L_{k-1} - 1$. Tada vrijedi

$$f(L_1, \dots, L_k) \leq f(L_2, \dots, L_{k-1}, L_k + L_1 - 1, 0),$$

gdje nejednakost vrijedi zbog $f(L_2, \dots, L_{k-1}, L_k + L_1 - 1, 0) = f(L_1, \dots, L_k) + (L_{k-1} - 1)(L_1 - 1) - L_2(L_1 - 1)$. Nova $k - 1$ -torka zadovoljava sve uvjete (zbroj se smanjio za 1, svi brojevi su prirodni), pa po pretpostavci indukcije i u ovom slučaju vrijedi nejednakost. Time smo pokazali korak indukcije.

Dakle, broj parova (tetka, nećakinja) je manji ili jednak od $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$, čime smo dokazali da je to maksimum.

Poglavlje 8

Završno

8.1 Zahvale

Organizacija, financiranje, ali i samo održavanje događaja poput Ljetnog kampa velik je pothvat koji ne bi bio moguć bez nesebične pomoći svih koji su u tome na bilo koji način sudjelovali. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti svima koji su prepoznali naš rad i pomogli nam u uspješnoj organizaciji još jednog Ljetnog kampa, a neke bismo htjeli i posebno spomenuti.

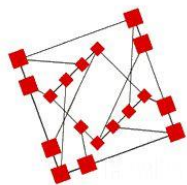
Najprije, želimo iskreno zahvaliti našim sponzorima i partnerima koji su prepoznali naš rad i njegovu važnost: HMD, Infobip, Jane Street i Photomath. Hvala vam što ste svojim donacijama ne samo omogućili da se kamp održi, već i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima.

Također zahvaljujemo Medicinskoj školi Ante Kuzmanića što nam je ustupila svoj prostor za održavanje predavanja, kao i Srednjoškolskom đlačkom domu Zadar.

Zahvaljujemo i našim popularno znanstvenim predavačima, Navidu Safaeiju i Borni Vukorepi, te svim mentorima. Svojim su trudom polaznicima kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje te ih, nadamo se, potakli na daljnje bavljenje matematikom i kada kamp završi.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Sve veći i veći odaziv potiče nas na daljnji napredak i potvrđuje da ono što radimo u MNM-u i na Ljetnom kampu zaista čini razliku.

Nadamo se da ćemo surađivati i dogodine!



8.2 Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte e-mailom.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"



e-mail: mnm@mnmm.hr

adresa: Zvonimira Rogoza 3, 10000 Zagreb

Možete nas kontaktirati i osobno:

Lucija Relić
Predsjednica Udruge
e-mail: lucijarelic7@gmail.com
mob: +385 95 845 2964

Josip Pupić
Dopredsjednik Udruge
e-mail: josip.pupic@mnmm.hr
mob: +385 99 2710 996

Ivan Miošić
Tajnik Udruge
e-mail: ivan.miosic@hotmail.com
mob: +385 91 300 5829

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.