



Bilten

Ljetni kamp mladih matematičara 2015.

Fužine, 16. – 23. kolovoza 2015.



MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Sadržaj

O udruzi	3
O Ljetnom kampu ukratko	4
Sudionici	5
Predavanja za učenike	7
Projekti	9
Kocke	11
Geometrija biljara	11
Najbolja kutija	12
Algoritmi na grafovima	12
Kartografija	13
Vjerojatnost u igrama	13
Teorija igara u evoluciji	14
Liar's Dice	14
Novi pristup staroj geometriji	15
Koja je boja mog šešira?	16
Popularno znanstvena predavanja	18
Slobodne aktivnosti	20
Zahvale	23
Kontakt	24

O udruzi

Udruga Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić“ osnovana je 2008. godine s ciljem unaprjeđivanja rada s nadarenim učenicima i popularizacije matematike kod djece osnovnoškolskog i srednjoškolskog uzrasta.

Redovne aktivnosti udruge uključuju kontinuirane pripreme učenika za matematička natjecanja (predavanja subotama, pripreme za vrijeme praznika), organizaciju Ljetnog kampa i Zimske škole te niz radionica u školama i događanjima znanstvenog karaktera s ciljem popularizacije matematike. Uz to, organiziramo i online natjecanje „Marinada“ i već godinama održavamo međunarodna natjecanja Turnir gradova i Europski matematički kup.

Mentori – članovi udruge su uspješni studenti (pretežno PMF-a i FER-a), bivši uspješni srednjoškolski natjecatelji koji svoje stečeno znanje i iskustvo kroz volonterski rad prenose mlađim generacijama.

Upravo zbog ove činjenice možemo prikazati učenicima matematiku kao zanimljivu, kreativnu i dinamičnu disciplinu na njima blizak način i u ugodnoj atmosferi rada, što naše aktivnosti čini toliko posebnima te pobuđuje interes mladih za matematiku, razvija kod njih poseban oblik logičkog i analitičkog razmišljanja, omogućuje im redoviti kontakt i suradnju s vršnjacima sličnih interesa, a kao neizostavnu posljedicu ima sve bolje rezultate koje naši učenici postižu na domaćim i međunarodnim matematičkim natjecanjima.

O Ljetnom kampu ukratko

Glavni ciljevi Ljetnog kampa, između ostaloga, obuhvaćaju kvalitetnu i inovativnu edukaciju učenika tijekom ljetnih praznika, pogled na matematiku i njene primjene iz aspekta koji ne mogu dobiti u školi te međusobno upoznavanje i povezivanje učenika koji pokazuju interes za matematiku kao prvi korak prema njihovom budućem druženju i suradnji nakon samog kampa.

Na Ljetnom se kampu odvija čitav niz različitih aktivnosti: jutarnja predavanja za učenike, popodnevni rad na projektima iz različitih područja matematike i njenih primjena, znanstveno – popularna predavanja i druge slobodne aktivnosti.



Sudionici

Sudionici Ljetnog kampa su učenici koji pokazuju interes za matematiku. Ove su godine sudionici Ljetnog kampa bili u dobi od 7. razreda osnovne škole pa sve do 4. razreda srednje škole, a došli su iz raznih krajeva, pa čak i iz inozemstva. Na Ljetnom je kampu ukupno sudjelovalo 56 učenika.

IME	PREZIME	RAZRED	MJESTO
Adrian	Cvijanović	7. r. OŠ	Velika Gorica
Karlo	Priselac	7. r. OŠ	Zagreb
David	Mikulčić	7. r. OŠ	Varaždin
Marin	Belamarić	7. r. OŠ	Zagreb
Mislav	Brnetić	7. r. OŠ	Zagreb
Martin Josip	Kocijan	7. r. OŠ	Šenkovec
Andrea	Belamarić	7. r. OŠ	Zagreb
Ida	Kolmanić	7. r. OŠ	Novi Marof
Dora	Ivkovich	7. r. OŠ	Okemos, MI (SAD)
Andrija	Tomorad	8. r. OŠ	Marija Bistrica
Daniel	Širola	8. r. OŠ	Zagreb
Petra	Vrbošić	8. r. OŠ	Sesvete
Jelena	Dujella	8. r. OŠ	Zagreb
Karla	Krešić	8. r. OŠ	Samobor
Nikola	Sole	1. r. SŠ	Zagreb
Frano	Šooš	1. r. SŠ	Zagreb
Juraj	Bilušković	1. r. SŠ	Zagreb
Borna	Šimić	1. r. SŠ	Slavonski Brod
Nena	Vukšić	1. r. SŠ	Split
Ivan	Sinčić	1. r. SŠ	Rijeka
Luis	Šafar	1. r. SŠ	Našice
Tadej Petar	Tukara	1. r. SŠ	Zagreb
Leonard	Inkret	1. r. SŠ	Zagreb
Petar	Nizić - Nikolac	1. r. SŠ	Zagreb
Tea	Arvaj	1. r. SŠ	Osijek
Paula	Vidas	1. r. SŠ	Zagreb
Luka	Banović	1. r. SŠ	Zagreb
Karla	Klobučar	1. r. SŠ	Zagreb
Korina	Cvijanović	1. r. SŠ	Zagreb
Viktor Adrian	Peko	2. r. SŠ	Zagreb
Adrian	Beker	2. r. SŠ	Zagreb
Robert	Benić	2. r. SŠ	Zagreb
Josip	Kelava	2. r. SŠ	Varaždin

Marin	Njirić	2. r. SŠ	Dubrovnik
Patrik	Papac	2. r. SŠ	Dubrovnik
Mario	Zec	2. r. SŠ	Daruvar
Filip	Bubaš	2. r. SŠ	Gospić
Marko	Mataija	2. r. SŠ	Gospić
Magdalena	Živković	2. r. SŠ	Zagreb
Iva	Sokolaj	2. r. SŠ	Zagreb
Ana	Crnković	2. r. SŠ	Zagreb
Lucija	Relić	2. r. SŠ	Virovitica
Leon	Starešinić	3. r. SŠ	Zagreb
Domagoj	Bradač	3. r. SŠ	Zagreb
Daniel	Paleka	3. r. SŠ	Zadar
Stjepan	Požgaj	3. r. SŠ	Čakovec
Matej	Buljan	3. r. SŠ	Zagreb
Dario	Domjanić	3. r. SŠ	Zagreb
Andrija	Mandić	3. r. SŠ	Zagreb
Ivan	Barta	3. r. SŠ	Zagreb
Petar	Orlić	3. r. SŠ	Zagreb
Barbara	Mikašek	3. r. SŠ	Varaždin
Adisa	Bolić	3. r. SŠ	Bihać (BiH)
Ivan	Žufić	4. r. SŠ	Pula
Neira	Kurtović	4. r. SŠ	Sarajevo (BiH)



Predavanja za učenike

Jutarnja predavanja za učenike temeljna su aktivnost Ljetnog kampa. Predavanja su tematska i traju četiri sata uz pauzu. Na predavanjima se obrađuju teme s kojima se učenici često susreću na matematičkim natjecanjima, a nisu obuhvaćene redovnom nastavom matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Teme obuhvaćaju raznolik spektar matematičkih područja, među kojima su najzastupljenija: algebra, analiza, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva.



Svaki su se dan održavala predavanja iz jednog od navedenih područja, dok su posljednji dan teme bile iz različitih područja. Predavanja se drže u ukupno 4 grupe (osnovna škola, niži razredi srednje škole, viši razredi srednje škole, olimpijci), a učenici, ovisno o predznanju i interesu za pojedino područje, mogu za svaki dan odabrati grupu u kojoj će slušati predavanje. Predavanja su držali mentori udruge – studenti.

		Mali		Srednji		Veliki		Olimpijci	
		Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub		
Vedran Stipetić	Uvod u algebarsku teoriju brojeva	Iva Manojlović	Djeljivosti	Ivana Antoliš	Vjerojatnost	Kristijan Kilassa Kvaternik	Mali Fermatov i Eulerov teorem	Kristijan Kilassa Kvaternik	Kongruencije
Kristijan Štefanec	Logičko-kombinatorni zadatci	Ivana Antoliš	Vjerojatnost	Ivana Antoliš	Invarijante	Vlatka Vazdar	Teorija grafova	Vlatka Vazdar	Invarijante
Grgur Valentić	Nejednakosti	Kristijan Kilassa Kvaternik	Algebarski izrazi	Kristijan Kilassa Kvaternik	Nejednakosti među sredinama	Ana Strikić	Cauchy-Schwarzova nejednakost	Ana Strikić	Nejednakosti među sredinama
Daniel Paleka	Inverzija	Ana Strikić	Angle chasing	Ana Strikić	Tetivni četverokut	Vlatko Crnković	Potencija točke, radikalne osi	Vlatko Crnković	Tetivni četverokut
Petar Bakić	Funkcijske jednadžbe	Mihael Marović	Funkcije	Mihael Marović	Matematička indukcija	Ivana Antoliš	Funkcijske jednadžbe	Ivana Antoliš	Matematička indukcija
Vlatka Vazdar	Planimetrija	Kristijan Vedran Budrovičan	Dirichletov princip	Kristijan Vedran Budrovičan	Karakteristične točke trokuta	Kristijan Štefanec	Transformacije ravnine	Kristijan Štefanec	Karakteristične točke trokuta

Projekti

Svako popodne su 3 sata bila posvećena radu na projektima. Na samom početku kampa učenici su, na temelju lista prioriteta koje su sami slagali, bili podijeljeni u manje grupe te pod vodstvom jednog ili dvoje mentora istraživali temu projekta koja im je bila dodijeljena.



Glavni cilj projekata jest prikazati učenicima matematiku iz perspektive različite od one na koju su naviknuti. Za razliku od predavanja, na kojima se obrađuju prvenstveno natjecateljske teme i produbljuje se teorijsko znanje, na projektima je veći naglasak stavljen na primjene matematike, tj. nekih njenih područja i rješavanje praktičnih problema. Rad na projektima, između ostaloga, može uključivati i modeliranje (analizu i matematičku formulaciju problema), razvijanje matematičkih metoda i alata za rješavanje postavljenih problema te analizu dobivenog rješenja (donošenje zaključaka). Zato niti ne čudi što ova aktivnost traje tijekom čitavog kampa.

Ovakav način rada potiče kod učenika kreativnost (modeliranje, smišljanje pristupa za rješavanje problema), ali i sposobnosti timskog rada i organizacijske vještine.



Ove su godine na Ljetnom kampu teme projekata obuhvaćale razna područja matematike: geometriju, analizu, vjerojatnost, neke su bile vezane uz računarstvo, a neke su dosegle i ozbiljnije razine visokoškolske matematike.

Zadnji su dan svi timovi pred ostalim učenicima i mentorima prezentirali svoj cjelokupni rad.

Sada ćemo navesti projekte koji su se ove godine održavali na kampu i svaki ukratko opisati. Više detalja moći ćete naći na našoj stranici, ali i u časopisima poput Matematičko – fizičkog lista.

Kocke

Ovaj je projekt bio namijenjen učenicima mlađeg uzrasta, a cilj projekta bio je izračunati vjerojatnost da jedan igrač pobijedi drugog s određenim setom kocaka. Koristili su se poznati setovi, poput



Oskarovog, Miwinovog i Grimeovog, za koje se dokazivalo tko će pobijediti. Kasnije su se ti setovi i konstruirali pa su se teorijska predviđanja ispitivala i u praksi.

Mentorice: Maja Puček, Ana Strikić.

Geometrija biljara



Ovo je također bio projekt namijenjen mlađim učenicima. Na ovom se projektu proučavalo kretanje biljarske loptice po pravokutnim, kružnim i trokutastim pločama za biljar, tražilo periodične putanje i otkrivalo kako u određenom broju odbijanja kuglice doći do tražene točke.

Ovaj je projekt inspirirao većinu učenika na kampu da dio svake večeri na kampu provedu igrajući u lokalnom kafiću biljar.

Mentorica: Iva Manojlović

Najbolja kutija

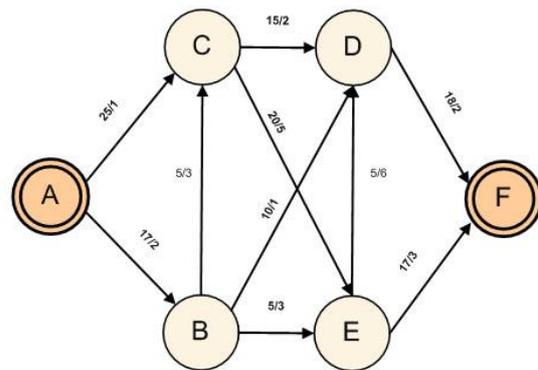
Ovaj se projekt bavio jednostavnijim problemima optimizacije – tražio se geometrijski lik sa zadanim opsegom, a najveće površine, te geometrijsko tijelo sa zadanim volumenom, a najmanjeg oplošja. Radi pojednostavljenja problema promatrali su se slučajevi posebnih skupina geometrijskih likova, tj. tijela (poligoni, poliedri).



Mentorica: Vlatka Vazdar

Algoritmi na grafovima

Kao što i samo ime projekta kaže, glavni predmet proučavanja ovog projekta bili su neki algoritmi za pretraživanje grafova (BFS, DFS, Dijxtra, Floyd-Warshall). Krenulo smo od toga što nam algoritam želi naći i onda se pokušalo smisliti algoritam te dokazati da stvarno radi željeno te se implementiralo algoritme na nekim primjerima u programskom jeziku C++.



Mentor: Vlatko Crnković

Kartografija



Na ovom su se projektu proučavale razne vrste kartografskih projekcija. Najprije su se analizirala neka geometrijska svojstva odabranih kartografskih projekcija, a zatim su se

izvodile formule za računanje stvarne udaljenosti točaka na Zemljinoj površini pomoću kojih su se stvarne vrijednosti uspoređivale s onima dobivenima mjerenjem iz školskih karata.

Mentori: Kristijan Kilassa Kvaternik, Lucija Validžić

Vjerojatnost u igrama

Kolika je vjerojatnost da nasumičnim izvlačenjem 5 karata izvučemo *full house*? Možemo li biti na dobitku uzastopnim igranjem ruleta ako se svaki put kladimo na istu boju? Ovo se neka



osnovna na koja se najprije na ovom projektu pokušalo odgovoriti. Nakon prolaženja matematičkih osnova potrebnih za shvaćanje ovih problema, izrađivali su se programi u C-u koji su simulirali neke od promatranih igara na sreću.

Mentor: Mihael Marović

Teorija igara u evoluciji



Projekt je bio namijenjen srednjoškolskom uzrastu, a bavio se istraživanjem nekih poznatih modela matematičke biologije. Modelirala su se širenja pripadnika pojedinih evolucijskih strategija u populaciji te se promatralo kako povećan broj pripadnika jedne strategije utječe na isplativost druge.

Mentori: Vedran Stipetić, Iva Tutiš

Liar's Dice

Riječ je o igri za više igrača koja zahtijeva sposobnost prepoznavanja tuđeg „blefa“. Svaki igrač baca svoj set igračih kocaka i zatim igrači licitiraju prema određenim pravilima (predviđa broj kocaka koje pokazuju određeni broj).



Na ovom je projektu svatko dobio zadatak napraviti program koji će igrati ovu igru, a zatim su programi pušteni da igraju jedan protiv drugoga. Postoje razne varijante ove igre, a na ovom se kampu među učenicima i mentorima pokazala vrlo popularnom.

Mentor: Kristijan Štefanec

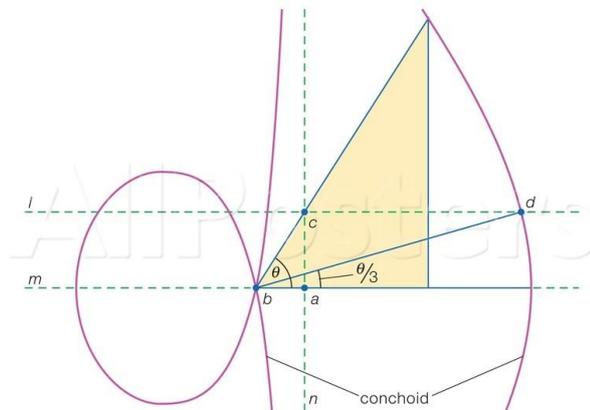
Novi pristup staroj geometriji

U geometriji su još iz antičkog doba poznata tri problema: duplikacija kocke, kvadratura kruga i trisekcija kuta. Niti jedan od ovih problema ne može se riješiti klasičnom konstrukcijom, koristeći samo ravnalo i šestar, a

na ovom se projektu to pokušalo i dokazati koristeći alate algebarske teorije brojeva, jedne od modernijih i danas aktualnih grana matematike. Uz to se proučavalo i što se još može pokazati ako uz ravnalo i šestar koristimo i druge alate.

Zbog vrlo ozbiljne razine matematike (riječ je o matematici koja se uči na završnim godinama studija matematike) projekt je prvenstveno bio namijenjen starijem uzrastu i olimpijcima, ali je pobudio iznenađujući interes kod učenika svih dobnih skupina.

Mentori: Ivana Antoliš, Petar Bakić



Koja je boja mog šešira?



Projekt je motiviran zadatcima s ovogodišnjeg Turnira gradova u Rusiji. Na projektu su se rješavale varijacije na temu zadatka gdje svaki

čarobnjak vidi boju šešira nekih drugih čarobnjaka, ali ne vidi boju svog šešira, te ju želi pogoditi. Čarobnjaci po prethodno dogovorenoj strategiji svi u glas kažu neku boju, za koju se nadaju da će biti baš boja njihovog šešira. Zadatak je pronaći optimalnu strategiju u smislu one koja osigurava najveći broj čarobnjaka koji će sa sigurnošću pogoditi svoj šešir.

Mentor: Grgur Valentić



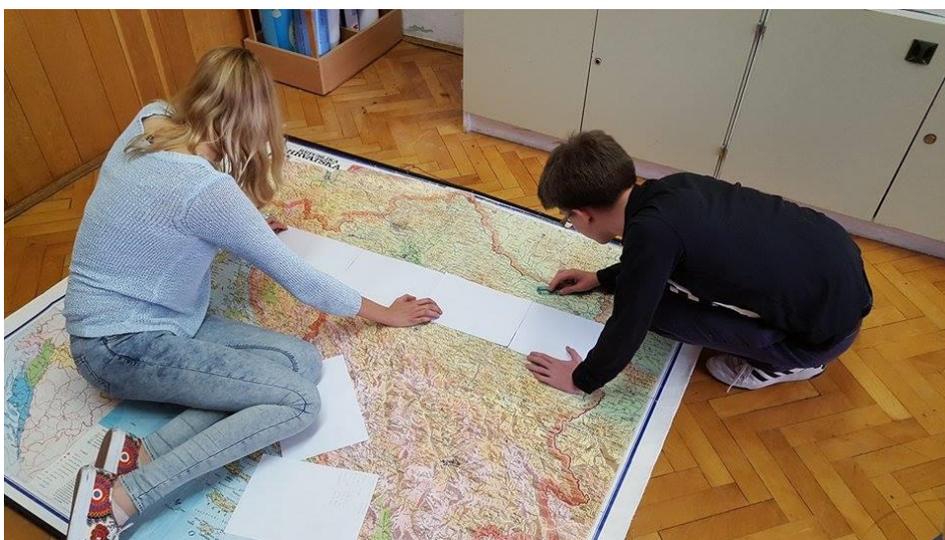
Učenici rade na projektu



Kocke izrađene na projektu



Mentorica Ivana marljivo objašnjava vjerojatnost



Mjerenje udaljenosti gradova RH (kartografija)

Popularno znanstvena predavanja

Na ovogodišnjem su se kampu u večernjim terminima održala dva popularno znanstvena predavanja.

Prvo je predavanje održao **prof. dr. sc. Mario Cifrek** s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Tema predavanja je bila mjerenje **umora u mišićima**. Profesor Cifrek nam je na raznim primjerima (neki su čak bili i mjerenja poznatih sportaša) pokazivao aktivnost mišića i objašnjavao matematičku pozadinu analize tih mjerenja (korištenje Fourierove analize).



Unatoč relativno velikoj ozbiljnosti matematičkih sadržaja koje je predavač koristio, predavanje je praćeno s punom pozornošću, a vrlo interesantno profesorovo iskustvo rada sa sportašima i elektrostimulator mišića pomoću kojeg je profesor uživo prikazao jedno mjerenje samo su doprinijeli tome.

Drugo je predavanje održala **Ksenija Sanjković**, predsjednica Hrvatskog aktuarskog društva. U svom je predavanju u osnovnim crtama predstavila **aktuarsku struku** koja se bavi problemima financijske neizvjesnosti i rizika, i to koristeći brojne matematičke metode.



U svom je predavanju gospođa Sanjković na primjeru tablica smrtnosti pokazala kako se matematički mogu računati parametri koji utječu na iznos premije za policu životnog osiguranja, a sudionici kampa su s posebnim interesom postavljali pitanja vezana uz osiguranje (i mogućnosti prevare istog).

Slobodne aktivnosti

Iako se na Ljetnom kampu učenici intenzivno bave matematikom, njihovo je vrijeme na kampu ispunjeno i raznim drugim slobodnim aktivnostima kako bi se mogli opustiti nakon napornog rada i družiti se s prijateljima u ugodnoj atmosferi.

Prvu su večer kampa svi učenici i mentori sudjelovali u zajedničkom teambuildingu u kojem su se, podijeljeni u ekipe, međusobno upoznavali nalazeći osobe koje su rođene u listopadu, koje su bile u Kazahstanu i slične stvari koje su im bile zadane.

Sredinom kampa je marljiva skupina od nekolicine mentora ispekla preko 200 palačinki (i pekla ih je preko 4 sata) i na taj se način pobrinula kako bi svima jedna večer mogla proći uživajući u slasnim palačinkama s raznim vrstama namaza. Naravno, nije ni potrebno spomenuti kako su palačinke bile pojedene u rekordnom roku.

Za razliku od prethodnih godina, ove je godine izlet bio organiziran navečer i posjetili smo špilju Vrelo. Imali smo priliku vidjeti zanimljive špiljske oblike koji su nastajali više stotina godina i doživjeti apsolutni mrak i tišinu, a uz to i značajno nižu temperaturu u odnosu na vanjsku.

Zadnji su dan kampa učenici koji su to htjeli sudjelovali na radionicama u kojima su izrađivali razne materijale s kojima mogu držati radionice u svojim školama (normalne ploče, hanojski tornjevi i sl.). Učenici su marljivo pilili, lijepili i bojali, a piljevine, prašine i stiropora bilo je posvuda. Ipak, konačni rezultat bio je zadivljujući!

Uz sve to, svaki su dan svi smišljali strategije za bitke u (sada već tradicionalnom) Blottu, otkrivali čari biljara i igre Liar's dice, a neizostavan dio svake večeri bile su i višesatne partije mafije.

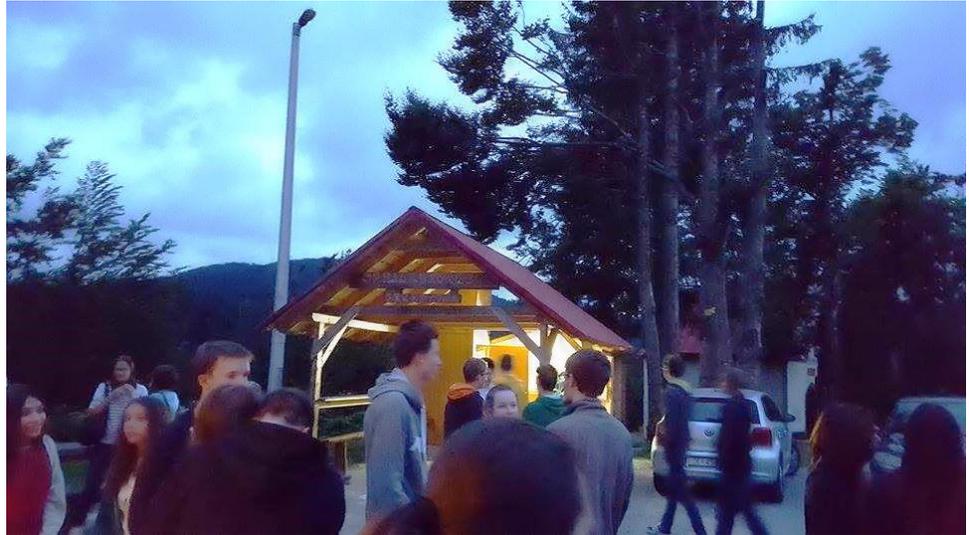
Vrlo je teško riječima opisati koliko su učenici (a i mentori) uživali družeći se, ali fotografije koje slijede bi mogle dočarati barem dio toga.



Vedran, Vlatka i Domagoj s tek ispečenim palačinkama



Vlatka poziva učenike na gozbu



Pred ulazom u špilju



Hanojski tornjevi napravljeni na radionici



Pobjednici Blotta

Zahvale

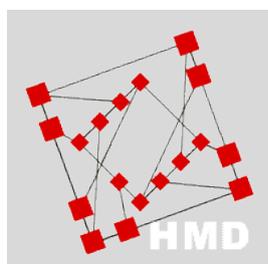
Hvala svima koji prepoznaju vrijednost našeg rada i koji su doprinijeli da ovaj Ljetni kamp bude što bolji. Posebno se zahvaljujemo našim sponzorima i partnerima koji su svojim donacijama omogućili da se kamp održi i bude besplatan mnogim nadarenim učenicima.



KONČAR
KONČAR - MES d.d.



Jane Street



PBZ CARD

član PBZ Grupe



Kontakt

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte telefonski ili e-mailom.



Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić“

Ksaverska cesta 13, 10 000 Zagreb, Hrvatska

Telefon: 091/5872222, 092/2039888

Web: mnm.hr, kamp.mnm.hr

E-mail: mnm@mnm.hr

