



MLADI NADARENI MATEMATIČARI

Marin Getaldić

BILTEN



**Ljetni kamp mladih
matematičara 2014.**

10. – 17. kolovoza

Pazin

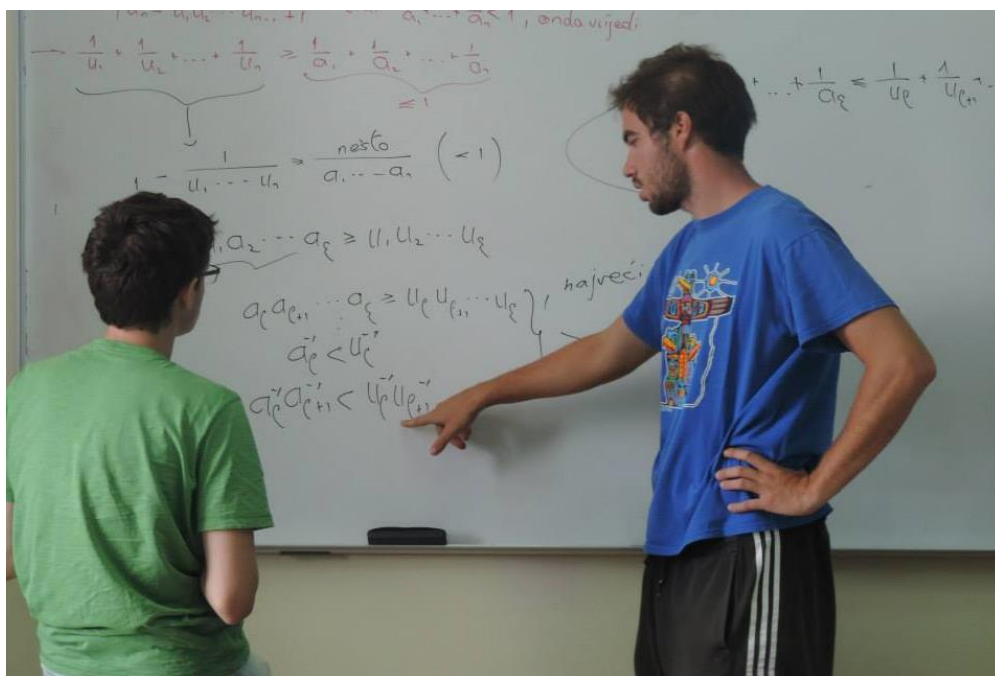
SADRŽAJ

Pozadina	3
Sudionici	4
Predavanja	6
Projekti	8
Diskretno modeliranje populacije	9
Grijanje pingvina	10
Evolucijski algoritmi	11
Zombi apokalipsa	12
Naučena bespomoćnost	13
Imo predictor	14
Kriptografija	15
Iz šupljeg u prazno	15
Simetrični poliedri	16
Popularno znanstvena predavanja	17
Ostale aktivnosti na kampu	18
Zahvale	26

Pozadina

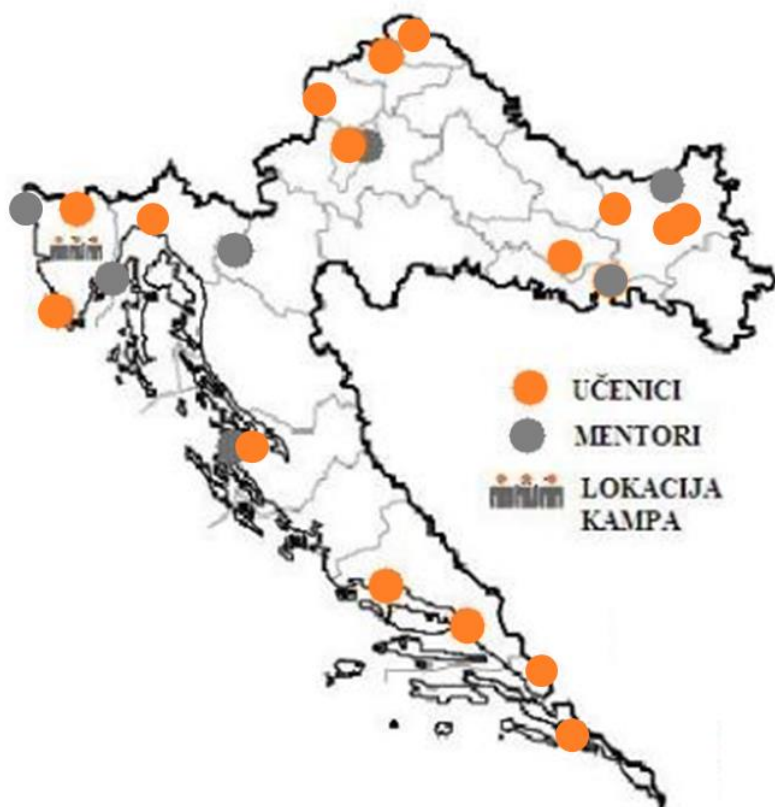
Udruga Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić” osnovana je 2008. godine s ciljem unaprjeđenja rada s nadarenim učenicima i promocije matematike kao znanosti. Pod sloganom „nadareni za nadarene” uspješno pripremamo nadarene učenike za matematička natjecanja, organiziramo kampove te u sklopu popularizacije matematike sudjelujemo na raznim znanstvenim radionicama. Također, već godinama održavamo međunarodna natjecanja Turnir gradova i Europski matematički kup.

Mentori u Udruzi su volonteri, studenti uglavnom PMF-a i FER-a, bivši vrhunski srednjoškolski natjecatelji. Povezuje nas interes i ljubav prema matematici te želja da svoje znanje prenosimo dalje.



Sudionici

Polaznici Ljetnog kampa su učenici koji bi svoje praznike željeli obogatiti matematičkim sadržajem i druženjem s vršnjacima s kojima dijele zajedničke interese i ljubav prema matematici. Na Ljetnom kampu 2014. Sudjelovalo je ukupno 45 učenika, u dobi od 7. razreda osnovne do 4. razreda srednje škole, iz svih krajeva Hrvatske.



IME	PREZIME	RAZRED	MJESTO
Daniel	Širola	7. osnovne škole	Zagreb
Petra	Vrbošić	7. osnovne škole	Sesvete
Noa	Jelić Matošević	7. osnovne škole	Rijeka
Jana	Vinković	7. osnovne škole	Dubrovnik
Leo	Čop	7. osnovne škole	Zagreb
Nikola	Sole	8. osnovne škole	Zagreb
Juraj	Bilušković	8. osnovne škole	Zagreb
Fran	Leontić	8. osnovne škole	Zagreb
Korina	Cvijanović	8. osnovne škole	Velika Gorica
Aleksandra-Saša	Božović	8. osnovne škole	Varaždin
Martina	Koštić	8. osnovne škole	Split
Luka	Banović	8. osnovne škole	Rijeka
Tea	Arvaj	8. osnovne škole	Osijek
Marko	Prološćić	8. osnovne škole	Našice
Luis	Šafar	8. osnovne škole	Našice
Ivan	Sinčić	8. osnovne škole	Kastav
Karla	Blažević	8. osnovne škole	Čepin
Adrian	Beker	1. srednje škole	Zagreb
Ana	Crnković	1. srednje škole	Zagreb
Paula	Brčić	1. srednje škole	Split
Davorin	Grgić	1. srednje škole	Labin
Ivan	Barta	2. srednje škole	Zagreb
Petar	Orić	2. srednje škole	Zagreb
Domagoj	Bradač	2. srednje škole	Zagreb
Leon	Starešinić	2. srednje škole	Zagreb
Daniel	Paleka	2. srednje škole	Zadar
Matea	Križanić	2. srednje škole	Varaždin
Barbara	Mikašek	2. srednje škole	Varaždin
Matej	Buljan	2. srednje škole	Zagreb
Andrija	Mandić	2. srednje škole	Zagreb
Katarina Iva	Tonković	2. srednje škole	Zagreb
Stjepan	Požgaj	2. srednje škole	Čakovec
Borna	Bilas	2. srednje škole	Čakovec
Kristian Vedran	Budrovčan	3. srednje škole	Zagreb
Kristijan	Štefanec	3. srednje škole	Zagreb
Helena	Korunić	3. srednje škole	Zagreb
Josip	Benčić	3. srednje škole	Zagreb
Maja	Puček	3. srednje škole	Varaždin
Ana	Strikić	3. srednje škole	Split
Ivan	Lazarić	3. srednje škole	Pula
Iva	Tutiš	3. srednje škole	Zagreb
Al	Depope	3. srednje škole	Rijeka
Nikola	Šalgaj	3. srednje škole	Varaždin
Filip	Posel	3. srednje škole	Bregana
Pero	Skoko	4. srednje škole	Metković

Predavanja za učenike

Jutarnja predavanja, u trajanju od četiri sata, temeljni su dio Ljetnog kampa. Na njima se obrađuju razne matematičke teme koje se često koriste na natjecanjima. Mnoge od njih nadograđuju se na školsko gradivo, a neke upoznaju učenike s područjima matematike s kojima se u školovanju rjeđe susreću. Predavači su uspješni studenti PMF-a i FER-a,iskusni bivši natjecatelji koji mogu odabrati najkvalitetniji materijal za predavanje te ga prezentirati na vrhunskom nivou. Mala dobna razlika između predavača i učenika pridonosi opuštenoj i interaktivnoj atmosferi u kojoj se napreduje bolje i brže.



Raspored predavanja

Grupa \ Dan	Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub
Mali	Iva Manojlović	Lucija Validžić	Matea Galović	Vedrana Vazdar	Kristijan Kvaternik	Dino Rakipović
	Sukladnost i sličnost	Što je dokaz?	Matematičke priče	Djeljivost	Metoda površina u geometriji	Dirichletov princip
Srednji	Vlatko Crnković	Erik Banek	Gabriela Clara Racz	Marin Bužančić	Vlatko Crnković	Matko Ljulj
	Karakteristične točke trokuta	Kongruencije	Nejednakosti među sredinama	Cauchyjeva nejednakost	Potencija točke	In(mono)varijante
Veliki	Vlatka Vazdar	Vedran Stipetić	Iva Manojlović	Kristijan Kvaternik	Vlatka Vazdar	Vedran Stipetić
	Tetivni četverokut	Diofantske jednadžbe	Funkcijske jednadžbe	Nejednakosti	Popločavanja	Kombinatorna prebrojavanja
Olimpijci	Borna Vukorepa	Borna Vukorepa	Nikola Adžaga	Goran Žužić	Petar Bakić	Erik Banek
	Transformacije ravnine	Teorija brojeva	Funkcijske jednadžbe	Dvostruka prebrojavanja	Nizovi i rekurzije	Vjerojatnosna metoda

Projekti

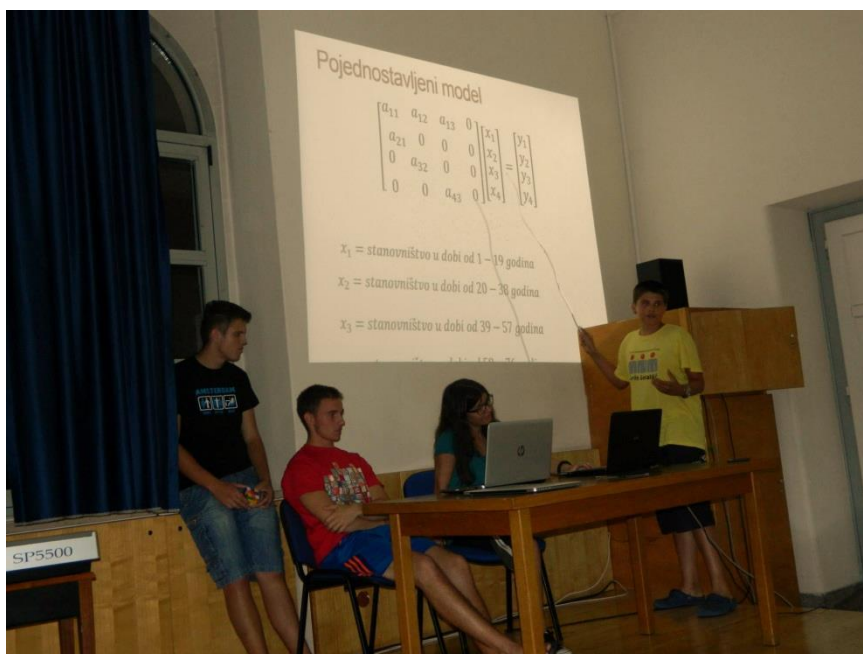
Popodnevni sati bili su rezervirani za rad na projektima. Učenici su u manjim grupama, pod vodstvom jednog ili dva mentora, sudjelovali na jednom od nekoliko ponuđenih projekata. Cilj projekata je upoznati učenike sa stvarnom primjenom matematike te ih potaknuti na samostalan rad i istraživanje. Projektni zadatak svake grupe bio je upoznati se s određenim dijelom matematike i primijeniti naučeno na matematičku formulaciju i rješavanje konkretnog problema. Osim matematičkih, učenici na projektima stječu vještine timskog rada kao i organizacijske i prezentacijske vještine - na kraju je trebalo izraditi projektnu dokumentaciju i prezentirati rezultate drugim učenicima. Slijede kratki opisi projekata, a dokumentaciju možete vidjeti na našoj web stranici.



Diskretno modeliranje populacije

Zadatak učenika na projektu “Diskretno modeliranje populacije” bio je što preciznije opisati i predvidjeti kretanje ukupne populacije neke zemlje. Pridjev “diskretno” u naslovu projekta odnosi se ne samo na pravilne vremenske razmake u kojima smo dobili precizne podatke, već i na metode kojima smo pristupali problemu: naglasak nije bio na kontinuiranoj regresiji, već na modelima kojima u pozadini stoji linearna algebra.

Prvo smo obradili jednostavni model populacije kukaca kroz određene životne faze te model dvije vrste drveća koje ovise jedna o drugoj. Zatim smo obradili Lesliejev i Usherov model ljudske populacije. Svi ovi modeli mogli su se zapisati kao sustav linearnih rekurzija i vidjelo se da je matrični zapis puno pregledniji od običnog zapisa. Definirali smo vektore, matrice i operacije s njima te smo tako došli do novog zapisa modela populacija.



Na kraju je obrađen model populacije stanovništva Republike Hrvatske. Podaci su uzeti iz popisa stanovništva iz 2001. i 2011. godine. Nismo gledali starije podatke zbog ratnih zbivanja, koja se nisu mogla predvidjeti ovakvim modelom. Stanovništvo smo promatrali po dobnim skupinama od 20 godina, a zbog nepotpunih podataka, odlučili smo se za Lesliejev model. Iz ovog modela se vidi da broj osoba starijih od 60 godina raste, a zatim se naglo smanjuje, dok je u ostalim dobnim skupinama primijećen stalni pad. Iz ovog modela smo zaključili da Hrvatska ima nepovoljnu strukturu populacije.

Grijanje pingvina

Poznato je da neke vrste pingvina provode duge periode vremena u velikim skupinama u kojima svojim tijelima štite nedavno izlegla jaja od hladnoće. Zanimalo nas je kako je moguće da grupa pingvina izdrži dane, tjedne, pa čak i mjesece antarktičke hladnoće bez imalo hrane. Naravno, pingvinima u sredini skupine je lakše jer ih griju okolni članovi skupine, no što je s onima na rubu?

Cilj projekta bio je pojednostavljenim matematičkim metodama opisati kako se toplina prenosi s pojedinog pingvina na njegove susjede te kako se pingvini premještaju unutar skupine u ovisnosti o vlastitoj temperaturi. Problem premještanja pingvina uspjeli smo svesti na sustav linearnih jednadžbi, te smo napravili prikladnu računalnu vizualizaciju kako bismo mogli promatrati kako bi se pingvini u jatu ponašali kada bi slijedili naša predviđanja.

$$T'_1 = T_1 - \gamma \left[\sum (T_1 - T_p) + \sum \beta (T_1 - T_z) \right]$$

Rekurzivna formula za temperaturu jednog pingvina

Evolucijski algoritmi

Ovaj informatički projekt bio je namijenjen nešto starijim učenicima s većim iskustvom u programiranju. Često u praksi susrećemo probleme za koje su poznata algoritamska rješenja jednostavno prespora da bismo ih doista primijenili - izvršavanje odgovarajućeg algoritma čak i na vrlo jakom računalu uzima previše vremena.

Za takve probleme najčešće koristimo *nedeterministička* rješenja - algoritme koji se zasnivaju na slučajnom odabiru i vjerojatnosnim metodama. Iako ne postoji garancija da će takvi algoritmi uvijek dati rješenje, pogodno dizajniran algoritam će u pravilu imati veliku vjerojatnost pronalaska rješenja i znatno kraće vrijeme izvršavanja od determinističkih metoda.

Jedna klasa nedeterminističkih algoritama koje smo proučavali na ovom projektu su tzv. *evolucijski algoritmi*. Naziv dolazi iz činjenice da je osnovna ideja prilikom dizajna ovakvih algoritama imitirati biološku, Darwinovu evoluciju: krenuvši od početne, nasumično odabrane "populacije" približnih rješenja, nove generacije rješenja dobivamo postupcima koji direktno imitiraju mutaciju, križanje i prirodnu selekciju.

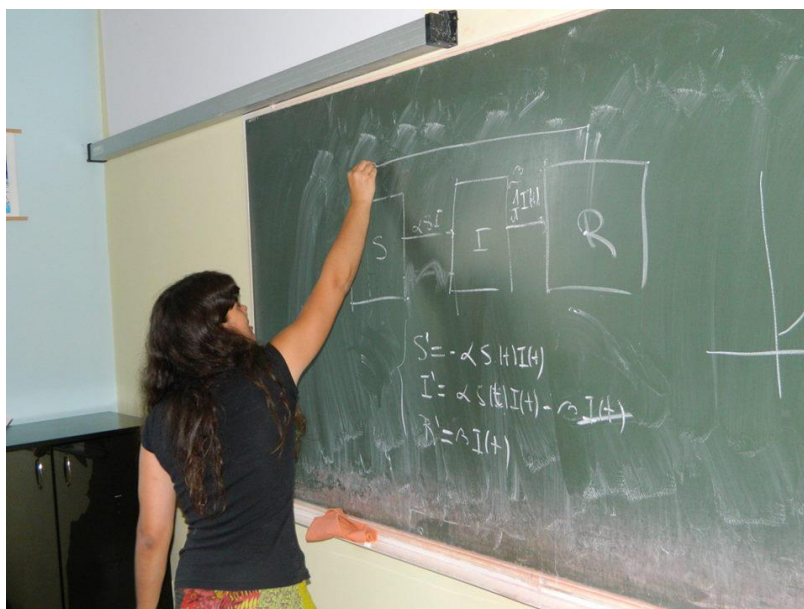
Konkretan problem čije smo rješenje tražili pomoću evolucijskih algoritama bio je poznati "Problem n kraljica", u kojem je zadatak postaviti n kraljica na $n \times n$ šahovsku ploču tako da se nikoje dvije kraljice međusobno ne napadaju. Za ovaj problem razvili smo vlastitu verziju evolucijskog algoritma i usporedili ju s klasičnim determinističkim algoritmima. Rezultati usporedbe jasno su upućivali na prednost evolucijskih algoritama u ovakvim zadaćama.

Zombi apokalipsa

Projekt “Zombi apokalipsa” nije bio tako strašan kao što mu ime zvuči. Cilj projekta bio je upoznati se s nekim matematičkim metodama koje se koriste u modeliranju širenja bolesti (zaraze) u određenoj populaciji. Pojmove koji su nam bili potrebni za izradu projekta (poput derivacija) naučili smo na jednostavnim modelima rasta stanovništva, a zatim smo modelirali dolazak zombija na Zemlju.

Napravili smo matematičke modele za nekoliko različitih situacija i promatrali kako različiti parametri (kao što su uvođenje karantene, period inkubacije, vjerojatnost ozdravljenja i sl.) utječu na brzinu širenja zaraze u populaciji.

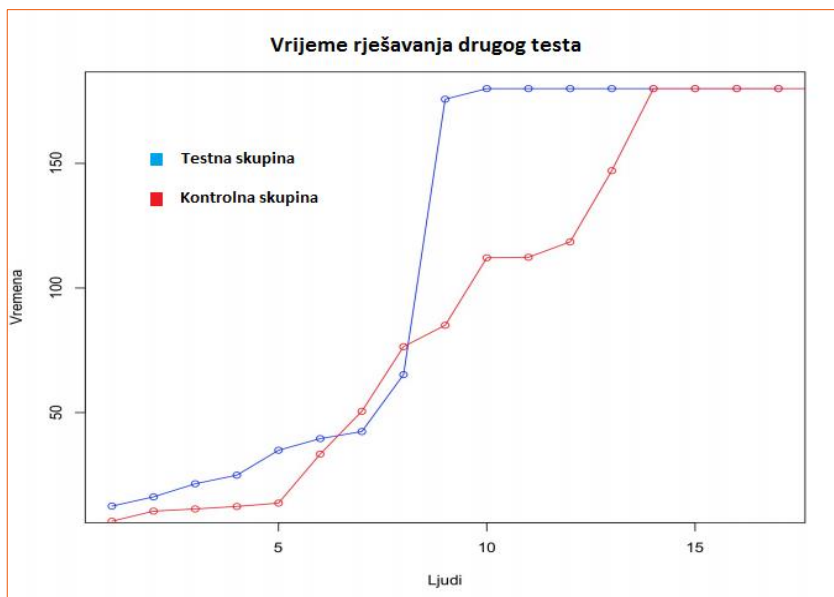
Iako je model u kojem postoji cjepivo za „zombitis“ na prvi pogled pružio nadu u opstanak ljudske vrste, ekvilibrij u kojem istovremeno egzistiraju ljudi i zombiji ostvariv je tek u uvjetima gdje bi broj ljudi u svijetu bio vrlo nizak. Svi ostali modeli pokazali su da ljudska vrsta pred zombijima nema šanse!



Naučena bespomoćnost

Na ovom projektu učenici su se upoznali s osnovnim metodama statistike i pojmom statističkog testa. Zadatak na projektu bio je osmisлити vlastito istraživanje kojem bi se moglo pristupiti statističkim metodama te testirati hipoteze nekim od statističkih testova. Izbor je pao na istraživanje „naučene bespomoćnosti“, psihološke ideje koje tvrdi da se na temelju lošeg prethodnog iskustva smanjuje mogućnost djelovanja.

Pojavu smo odlučili istražiti na drugim polaznicima kampa na primjeru rješavanja testa s anagramima. Ispitanike smo podijelili u testnu (na početku su dobili vrlo težak test da „nauče bespomoćnost“) i kontrolnu skupinu (na početku su dobili test srednje težine) te mjerili rješenost i vrijeme rješavanja zajedničkog drugog testa.



Iako (ponajviše zbog premalog uzorka) nismo uspjeli statistički značajno dokazati traženu pojavu, zaključili smo da bi „naučenu bespomoćnost“ svakako trebalo detaljnije istražiti!

IMO predictor

Cilj projekta "IMO predictor" bilo je, kao što i ime najavljuje, predviđanje rezultata sljedeće Međunarodne Matematičke Olimpijade (IMO je kratica za "International Mathematical Olympiad") koja će se održati u srpnju 2015. na Tajlandu.

Za svaku državu, na temelju svih prethodnih rezultata, odredili smo njenu „snagu“ u pojedinom području (algebra, kombinatorika, geometrija, teorija brojeva) i tako računali vjerojatnost da neki predstavnik te države riješi zadatak iz pojedinog područja, uzimajući u obzir i težinu zadataka. Timske rezultate bilo je lakše predvidjeti, a algoritam se pokazao iznenađujuće preciznim pri testiranju na prošlogodišnjim rezultatima. Predvidjeli smo i rezultat hrvatske ekipe na sljedećoj Olimpijadi, no ovdje ga nećemo otkriti: nadamo se da će šestorka koja će predstavljati Hrvatsku u Tajlandu biti uspješnija od prognoza!



Kriptografija

Na projektu “Kriptografija” pokušali smo odgovoriti na pitanje koje se vrlo često pojavljuje u praksi: kako poslati poruku primatelju tako da je ne može pročitati nitko osim samog primatelja. Na projektu smo naučili nešto o matematici koja leži u pozadini ovakvih pitanja.

Analizirali smo prednosti i mane nekih klasičnih metoda šifriranja, kao što su Cezarova, Playfaira i Vigenerova šifra. Osim klasičnih metoda kriptiranja, upoznali smo se i s metodom javnog ključa (koja se često zasniva na jednostavnim opservacijama iz teorije brojeva) i komentirali njezine sveprisutne primjene u informatičkoj tehnologiji.

Pokušajte pronaći ključ za razbijanje donje šifre!

OCVGOCVKLJC LG ACLJRO = MATEMATIKA JE ZAKON

Iz šupljeg u prazno

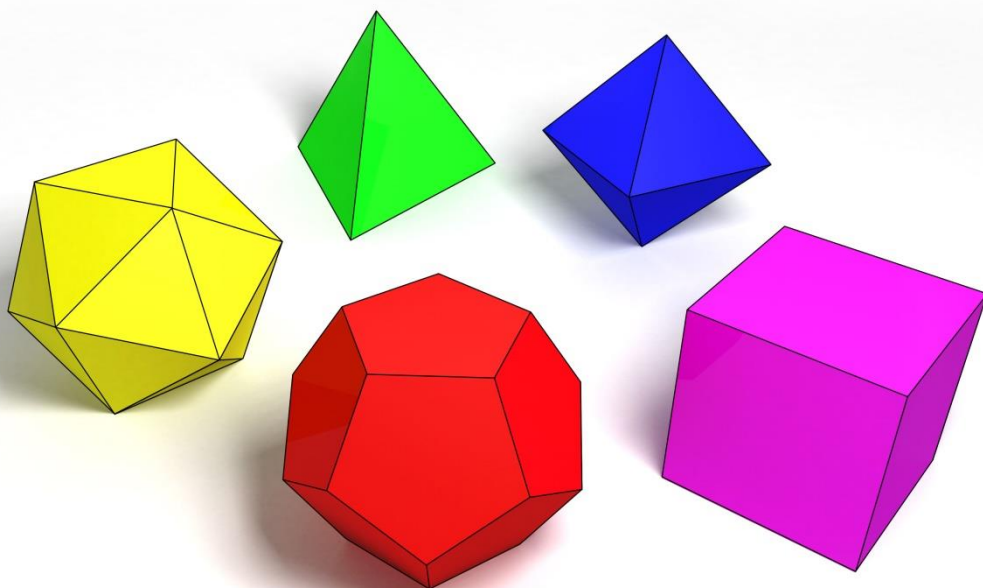
Ovaj projekt bio je namijenjen najmlađim polaznicima kampa. Cilj projekta bio je pronaći opće rješenje zadatka u kojima se traži da određeni volumen tekućine dobijemo samo pomoću prelijevanja, koristeći pritom dva (ili više) vrčeva poznatog volumena. (Npr. je li moguće izmjeriti 7 litara vode samo pomoću vrčeva od 2 i 3 litre?).

Prije nalaženja krajnjeg rješenja, trebali smo se upoznati s osnovama teorije brojeva, preciznije, s pojmovima najvećeg zajedničkog djelitelja i Euklidovog algoritma. U konačnici smo uspjeli naći sveobuhvatne odgovore na pitanja vezana uz ovakve zadatke, ali smo se usput i dobro zabavili (i nekoliko puta smočili!) isprobavajući sa stvarnim vrčevima vlastita rješenja.

Simetrični poliedri

Projekt „Simetrični poliedri“ također je bio namijenjen mlađim polaznicima. Cilj je bio upoznati sudionike projekta s osnovnim simetrijama u prostoru te trodimenzionalnim tijelima koja poštuju takve simetrije.

Među ostalim, upoznali smo se s Arhimedovim tijelima (tijelima čije su stranice pravilni mnogokuti) i Platonovim tijelima (tijela čije su stranice sukladni pravilni mnogokuti) te smo dokazali da postoji samo pet različitih Platonovih tijela: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Za potrebe projekta izradili smo i mnoge papirnate modele koji su nam pomogli u vizualizaciji novih pojmova.



©www.GreatLittleMinds.com

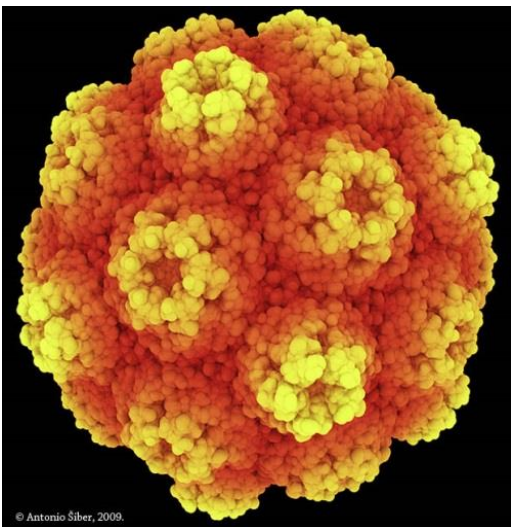
Svih pet Platonovih tijela

Popularno znanstvena predavanja

Večernji sati uglavnom su ostajali slobodni za druženje i zabavu, no dvije smo večeri rezervirali za popularno-znanstvena predavanja.

Ugostili smo **profesora Antonia Šibera** s Instituta za fiziku, koji je održao vrlo zanimljivo predavanje pod naslovom **“Virusi: matematički ubojiti”** u kojem je iz svog istraživanja izdvojio dijelove zanimljive matematičarima. Stoga se predavanje uglavnom bavilo geometrijom i strukturom virusa, simetričnosti ikozaedarskih virusa te problemima popločavanja sfere i cilindra. Našlo se tu i primjera iz svakodnevice – problem pakiranja štednih žarulja kojima nam je približio problematiku pakiranja DNA u virusima kojom se bavi već neko vrijeme. Snimku predavanja možete naći ovdje.

<https://www.youtube.com/watch?v=ShsldNU688k>



Predavanje prof. dr. sc. Antonia Šibera

Drugi gost bio je naš stari prijatelj **Marko Košiček** (Institut Ruđer Bošković). Marko nam je ispričao svoju životnu priču, tešku odluku o izboru između matematike i kemije koju je vrlo rano morao donijeti, o prilikama za mlade kod nas i u svijetu, natjecanju FameLab koje ga je „proslavilo“ te kako se zatekao u ulozi voditelja u HRT-ovoj emisiji „Treći element“.

Osim toga, govorio je o istraživanju Alzheimerove bolesti na kojem trenutno radi i njenoj povezanosti s kolesterolom, te nam je približio poteškoće s kojima se oboljela osoba svakodnevno suočava kako bismo uvidjeli značaj istraživanja ove, u današnje vrijeme, sve prisutnije bolesti.



Predavanje dr. sc. Marka Košičeka

Ostale aktivnosti na kampu

Team building



Slobodne aktivnosti započele su realizacijom jedne od ideja vodilja kampa, ali i cijele udruge MNM „Marin Getaldić“ – druženjem i umrežavanjem učenika sa sličnim interesima i ljubavlju prema matematici. Kako bi se sudionici kampa što bolje upoznali i naučili surađivati, već prvi dan kampa organiziran je uvodni teambuilding . Zadaci su bili smišljeni tako da potiču suradnju polaznika, a njihove reakcije na ovakav način upoznavanja bile su odlične. Dobro se zabavljajući pokazali su izvrsnu suradnju, uspješno obavili zadatke te se međusobno bolje upoznali.

Sportske aktivnosti

Nakon uspješnog radnog dana, učenici su slobodno vrijeme prije večere provodili na sportskom igralištu gdje su se paralelno igrali košarka, nogomet, frizbi i dvoboji vodenim pištoljima.



Izlet

Nakon toliko posla, zaslužili smo malo odmora. U četvrtak smo, unatoč najavljenoj lošoj vremenskoj prognozi, odlučili posjetiti obližnji Rovinj. Zaputili smo se prema plaži izvan grada gdje nije bilo pretjerane gužve te smo odradili sunčanje i kupanje dok je Sunce još bilo na nebu. Najhrabriji su, usprkos valovima, otplivali do najvećeg jedrenjaka na svijetu koji je bio usidren u sredini zaljeva. Uslijedila je šetnja starom jezgrom grada, posjet zvoniku sv. Eufemije te odmor u, po mišljenju „lokalaca“, najboljoj slastičarnici u gradu.



Tango

Da Kamp ne izgubi umjetničku aromu pobrinuo se Ivan Gavran koji je organizirao početni tečaj argentinskog tanga, na kojem se, zbog neočekivane popularnosti tražilo mjesto više. Ugodno su nas iznenadili dečki kojih je bilo jednako kao i djevojaka, stoga nije bilo čekanja u redu za partnera i svi su mogli neometano uživati u ovom zanimljivom plesu.



Kviz

Kviz (ne)znanja u režiji popularnog Borne Vukorepe izazvao je rekordnu posjećenost i trajao do kasnih večernjih sati. Osim matematičke opće kulture i logičkih mozgalica, Borna je ispitao znanje sudionika i iz područja umjetnosti, filma, glazbe, povijesti, geografije i sporta.



Kviz je bio neizvjestan do samog kraja te je došlo i do pripetavanja. Zasluženu pobjedu, vječnu slavu i kilu napolitanki odnijeli su Vlatko, Matea, Maja, Paula i Luka bolje poznati i kao tim „Zgazitćemovasjednariječ!“.



Blotto

Ovu zanimljivu cjelokampovsku igru otkrili smo tek ove godine. Ukratko, svatko ima 100 vojnika koje treba rasporediti na 10 utvrda, a zatim se bori (jedan na jedan) protiv svih ostalih igrača na način da utvrdu osvaja igrač koji je na nju postavio više vojnika. Svaki se dan broj bodova koji nosi pojedina utvrda mijenja, ali promjene vojnika u odnosu na početnu postavu su ograničene. Trebalo je smisliti strategiju koja će nakon 5 dana donijeti najveći broj bodova. Na kraju su najuspješniji bili Andrija, Domagoj i Stjepan.

Naravno, kamp su kao i svake godine obilježile brojne partije Mafije, razne kartaške igre i borbe vodenim pištoljima. U već tradicionalnom lingvističkom okršaju, u kojem učenici trebaju pogoditi značenja raznih regionalizama, ovaj put su pobjedu odnijele Dalmatkinke, ali samo do sljedećeg kampa!





Mašte ne fali, matematika se uči i na spužvastoj krpi!



Eh, lako oboriti rekord na olimpijadi. Al' daj ti obori Žužiću ruku!

Zahvale

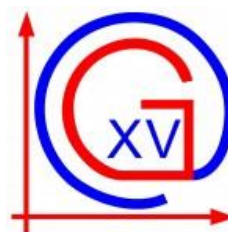
Hvala svima koji su doprinijeli da ovaj kamp bude što bolji. Posebno bismo htjeli zahvaliti našim sponzorima i partnerima, koji su svojim donacijama omogućili da se Kamp održi i bude besplatan mnogim nadarenim učenicima.



KONČAR



HEP d.d.



ministarstvo
znanosti
obrazovanja
i športa



VerbActa

Više o kampu pogledajte na www.kamp.mnm.hr

Pišite nam na mnmmnm.hr