

# BILTEN - ZIMSKA ŠKOLA MLADIH MATEMATIČARA 2016.



OGULIN

3. - 10. SIJEČNJA 2016.



MLADI NADARENI MATEMATIČARI  
**Marin Getaldić**



## Ukratko o Udruzi

Udruga Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić“ osnovana je 2008. godine s ciljem unaprjeđivanja rada s nadarenim učenicima i popularizacije matematike kod djece osnovnoškolskog i srednjoškolskog uzrasta.

Redovne aktivnosti udruge uključuju kontinuirane pripreme učenika za matematička natjecanja (predavanja subotama, pripreme za vrijeme praznika), organizaciju Ljetnog kampa i Zimske škole te niz radionica u školama i događanjima znanstvenog karaktera s ciljem popularizacije matematike. Uz to, organiziramo i online natjecanje „Marinada“ i već godina održavamo međunarodna natjecanja Turnir gradova i Europski matematički kup.

Mentori – članovi udruge su uspješni studenti (pretežno PMF-a i FER-a), bivši uspješni srednjoškolski natjecatelji koji svoje stečeno znanje i iskustvo kroz volonterski rad prenose mlađim generacijama.

Upravo zbog ove činjenice možemo prikazati učenicima matematiku kao zanimljivu, kreativnu i dinamičnu disciplinu na njima blizak način i u ugodnoj atmosferi rada, što naše aktivnosti čini toliko posebnima te pobuđuje interes mladih za matematiku, razvija kod njih poseban oblik logičkog i analitičkog razmišljanja, omogućuje im redoviti kontakt i suradnju s vršnjacima sličnih interesa, a kao neizostavnu posljedicu ima sve bolje rezultate koje naši učenici postižu na domaćim i međunarodnim matematičkim natjecanjima.

...udruga pobuđuje interes mladih za matematiku...

## Ukratko o Zimskoj školi

Glavni ciljevi Zimske škole, između ostaloga, obuhvaćaju kvalitetnu i inovativnu edukaciju učenika tijekom zimskih praznika, pogled na matematiku i njene primjene iz aspekta koji ne mogu dobiti u školi te međusobno upoznavanje i povezivanje učenika koji pokazuju interes za matematiku kao prvi korak prema njihovom budućem druženju i suradnji nakon same škole.

U Zimskoj se školi odvija čitav niz različitih aktivnosti: jutarnja predavanja za učenike, popodnevni rad na projektima iz različitih područja matematike i njenih primjena, znanstveno – popularna predavanja i druge slobodne aktivnosti.



## Sudionici

Sudionici Zimske škole su učenici koji pokazuju interes za matematiku. Ovih su zimskih praznika sudionici bili u dobi od 7. razreda osnovne škole pa sve do 4. razreda srednje škole, a došli su iz raznih krajeva, pa čak i iz inozemstva. U Zimskoj je školi ukupno sudjelovalo 30 učenika.

### Osnovna škola:

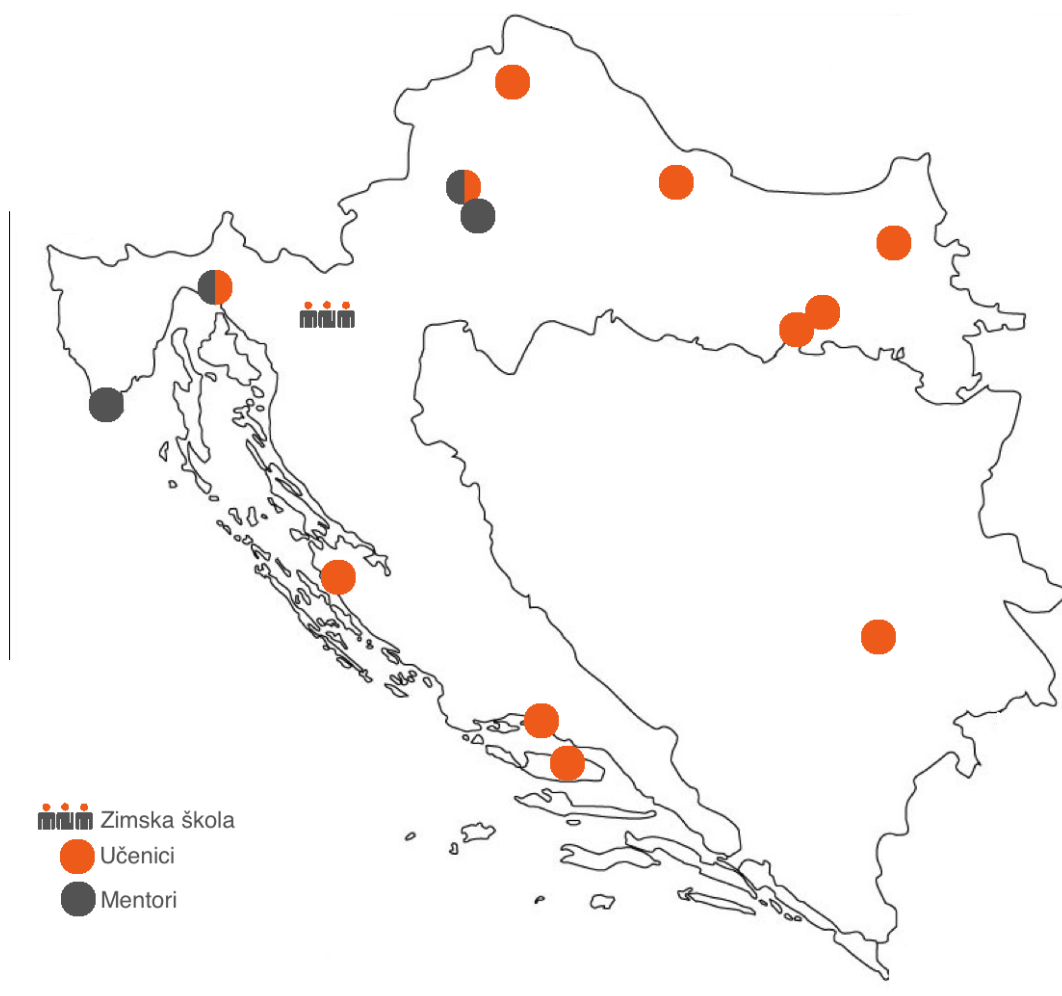
| IME       | PREZIME  | RAZRED | MJESTO   |
|-----------|----------|--------|----------|
| Nora      | Ivić     | 7.     | Pučišća  |
| Ivan      | Vojvodić | 7.     | Zagreb   |
| Darijan   | Gudelj   | 8.     | Split    |
| Noel      | Lakič    | 8.     | Zadar    |
| David     | Mikulčić | 8.     | Varaždin |
| Daliborka | Šlat     | 8.     | Ogulin   |
| Patricija | Velečki  | 8.     | Garčin   |

### Srednja škola:

| IME         | PREZIME         | RAZRED | MJESTO    |
|-------------|-----------------|--------|-----------|
| Luka        | Kraljević       | 1.     | Zagreb    |
| Daniel      | Širola          | 1.     | Zagreb    |
| Tea         | Arvaj           | 2.     | Osijek    |
| Luka        | Banović         | 2.     | Rijeka    |
| Dinko       | Maduna          | 2.     | Dugo Selo |
| Petar       | Nizić - Nikolac | 2.     | Zagreb    |
| Maja        | Pavičić         | 2.     | Zagreb    |
| Ivan        | Sinčić          | 2.     | Kastav    |
| Nikola      | Sole            | 2.     | Zagreb    |
| Borna       | Šimiž           | 2.     | Beravci   |
| Frano       | Šooš            | 2.     | Zagreb    |
| Tadej Petar | Tukara          | 2.     | Zagreb    |

| IME           | PREZIME    | RAZRED | MJESTO     |
|---------------|------------|--------|------------|
| Paula         | Vidas      | 2.     | Zagreb     |
| Domina        | Vrdoljak   | 2.     | Split      |
| Nena          | Vukšić     | 2.     | Zagreb     |
| Viktor Adrian | Peko       | 3.     | Zagreb     |
| Lucija        | Relić      | 3.     | Virovitica |
| Ivan          | Barta      | 4.     | Zagreb     |
| Neira         | Kurtovic   | 4.     | Sarajevo   |
| Andrija       | Mandić     | 4.     | Zagreb     |
| Petar         | Orlić      | 4.     | Zagreb     |
| Daniel        | Paleka     | 4.     | Zagreb     |
| Leon          | Starešinić | 4.     | Zagreb     |

Na karti to izgleda ovako:





## Predavanja za učenike

Jutarnja predavanja za učenike temeljna su aktivnost Zimske škole. Predavanja su tematska i traju četiri sata uz pauzu. Na predavanjima se obrađuju teme s kojima se učenici često susreću na matematičkim natjecanjima, a nisu obuhvaćene redovnom nastavom matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Teme obuhvaćaju raznolik spektar matematičkih područja, među kojima su najzastupljenija: algebra, analiza, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva.

Svaki su se dan održavala predavanja iz jednog od navedenih područja, dok su posljednji dan teme bile iz različitih područja. Predavanja se drže u ukupno 4 grupe (osnovna škola, niži razredi srednje škole, viši razredi srednje škole, olimpijci), a učenici, ovisno o predznanju i interesu za pojedino područje, mogu za svaki dan odabrati grupu u kojoj će slušati predavanje. Predavanja su držali mentori udruge – studenti.



## Projekti

Svako popodne su 3 sata bila posvećena radu na projektima. Na samom početku kampa učenici su, na temelju lista prioriteta koje su sami slagali, bili podijeljeni u manje grupe te pod vodstvom jednog ili dvoje mentora istraživali temu projekta koja im je bila dodijeljena.

Glavni cilj projekata jest prikazati učenicima matematiku iz perspektive različite od one na koju su naviknuti. Za razliku od predavanja, na kojima se obrađuju prvenstveno natjecateljske teme i produbljuje se teorijsko znanje, na projektima je veći naglasak stavljen na primjene matematike,

tj. nekih njenih područja i rješavanje praktičnih problema. Rad na projektima, između ostaloga, može uključivati i modeliranje (analizu i matematičku formulu problema), razvijanje matematičkih metoda i alata za rješavanje postavljenih problema te analizu dobivenog rješenja (donošenje zaključaka). Zato niti ne čudi što ova aktivnost traje tijekom čitavog kampa.



Ovakav način rada potiče kod učenika kreativnost (modeliranje, smišljanje pristupa za rješavanje problema), ali i sposobnosti timskog rada i organizacijske vještine.

Ove su godine u Zimskoj školi teme projekata obuhvaćale razna područja matematike: geometri-



|              |                  |   |  |  |  |                       |  |                  |       |
|--------------|------------------|---|--|--|--|-----------------------|--|------------------|-------|
|              | Nedjelja<br>3.1. | Ponedjeljak<br>4.1.                                     | Utorak<br>5.1.   | Srijeda<br>6.1.  | Četvrtak<br>7.1.                       | Petak<br>8.1.         | Subota<br>9.1.   | Nedjelja<br>10.1 |       |
| Osnovci      |                  | Što je dokaz?<br>Vedran Stipetić                        | Sličnost, sukla-<br>dnost, angle<br>chasing<br>Vlatko Crnković | Djeljivost<br>Prosti brojevi<br>Vedrana Vazdar                       | Dirichlet<br>Ivan Žuffč                |                       | Algebarski<br>izrazi<br>Vlatko Crnković                    |                  |       |
| Prva grupa   |                  | Kvadratna<br>funkcija i poli-<br>nomi<br>Iva Manojlović | Teivni četve-<br>rokuti<br>Gabriela Clara<br>Racz              | Diofantske jed-<br>nadžbe<br>Iva Manojlović                          | (Protu)<br>primjeri<br>Ognjen Stipetić | Zavičajni muzej       | KAGH nejedna-<br>kosti<br>Al Depope                        |                  |       |
| Druaga grupa |                  | Funkcijske<br>Vlatka Vazdar                             | Potencija točke<br>radikalne osi<br>Borna Vukorepa             | TB teoremi—<br>Euler, CRT, Wil-<br>son, Dirichlet<br>Vedran Stipetić | Invarijante<br>Vlatka Vazdar           | Ivanina kuća<br>bajki | CSB, Muirhead,<br>egzotične neje-<br>dnakosti<br>Roko Žaja | Odlazak          | 9-13  |
| RMM          |                  | Kombinatori-<br>ka<br>Matija Bucić                      | Tulum  | Teorija brojeva<br>Borna Vukorepa                                    | Tulum                                  |                       | Algebra<br>Tonći Kokan                                     |                  |       |
| Osnovci      |                  |   |  |  |  |                       |  |                  |       |
| Prva grupa   | Dolazak          | Projekti  | Projekti   | Projekti   | Estimathon<br>Manufactoria             | RELI                  | Završavanje pro-<br>jekata<br>Izrada presenta-<br>cija     |                  | 14-19 |
| Druaga grupa |                  |   |  |  |  |                       |  |                  |       |
| Olimpijci    | Dolazak          | Tulum   | Geometrija<br>Matija Bašić                                     | Tulum  | Kombinatorika<br>Matko Ljulj           | RELI                  | Tulum  |                  |       |
|              |                  |   | PZ predavanje<br>Veronika Sunko<br>Marija Vučković             | Kviz   |  |                       | Prezentacija pro-<br>jekata<br>Zatvaranje                  |                  | 20    |

## Reli

Kao i svake godine jedno popodne bilo je rezervirano za timsko natjecanje – MNM reli. Učenike smo podijelili u šest timova približno jednakih snaga, a zatim su četiri sata zajedničkim snagama rješavali zadatke. Ideja ovakvog natjecanja je da učenici uče jedni od drugih te da shvate važnost timskog rada.



Iz svakog od četiri područja – algebra, geometrija, kombinatorika i teorija brojeva – bilo je sedam zadataka različitih težina, a svaki je nosio maksimalno deset bodova.

Pobjednički tim „Orlićevi apostoli“ (ukupno 209 bodova) tijesno je odnio pobjedu sa samo 4 boda prednosti nad timom „AAAAaaaa“.



## Popularno-znanstveno predavanje

Veronika Sunko i Marija Vučković

U utorak navečer posjetile su nas Veronika Sunko, studentica doktorskog studija eksperimentalne fizike na Max Planck Institutu u Dresdenu i Marija Vučković, studentica doktorskog studija eksperimentalne fizike na PMF-u u Zagrebu.

Marija i Veronika ispričale su nam mnoge zanimljivosti o fizici čvrstog stanja, objasnile nam kako izgleda radni dan jednog fizičara i zašto su fizičari jako traženi u bankama. Predavanje je bilo otvorenog tipa, a u opuštenoj atmosferi okruglog stola pričali smo o problemu „nezanimljivosti“ fizike u srednjoj školi, „fizikalnom načinu razmišljanja“ te razlikama između studija u Hrvatskoj i inozemstvu.



### Kviz

Jednu večer održali smo kviz znanja. Sudionici su bili podijeljeni u sedam timova, a pobjednički tim osvojio je vreću napolitanki. Pitanja su obuhvaćala opće znanje, ali su bila začinjena i s nekoliko matematičkih zadataka. Između ostalog, natjecatelji su se trebali prisjetiti protiv kojih su se bolesti cijepili kad su uzeli cjepivo DiTe/Polio, trebali su povezati nacionalne epove s državama i procijeniti vrijednost  $\sqrt[3]{5}$ .

### Estimathon

U četvrtak smo održali Estimathon - natjecanje u procjenjivanju. Timovi od 4 učenika imali su pola sata da što bolje procijene desetak količina poput mase Zemlje i duljine ruske kopnene granice. Matematičari su se pokazali uspješnima u baratanju velikim brojevima te su na većinu pitanja dali odgovor vrlo blizu točnom rješenju.

## Novčići



Na projektu Novčići bavili smo se change making problemom. Problem je formuliran ovako: Ako su nam dani novčići veličina  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , i trebamo platiti svotu od  $k$ , koliko je najmanje novčića potrebno iskoristiti? Prirodan način kako problem pokušavamo riješiti je tako da prvo platimo najveći novčić manji od  $k$ , a zatim pokušavamo platiti ostatak, što se zove greedy algoritam. Na taj način u mnogim slučajevima dobivamo najbolje rješenje, na primjer u našem sustavu kovanica od 1, 2 i 5 kn. No ponekad to nije optimalno rješenje. Promotrimo na primjer sustav novčića 1, 3, 4, ukoliko trebamo platiti  $k = 6$ .

Na naš "logičan" način, platili bismo 4, pa 1 pa 1. No jasno je da možemo isti iznos platiti i s manje od 3 novčića, koristeći 2 novčića vrijednosti 3. Već iz ovog primjera vidimo da postoje protuprimjeri načinu razmišljanja na koji smo navikli, i postavljaju se pitanja kojima smo se bavili u našem projektu. Možemo li nekako klasificirati sve sustave u kojima je optimalno plaćati na "greedy" način, to jest, za koje "greedy radi"? Postoje li neke granice u kojima je dovoljno ispitati optimalnost "greedy" načina da bismo bili sigurni da je on tada najbolji za sve iznose?

Prvo smo htjeli isprobati "greedy" algoritam na nekim sustavima, pa smo tako zaključili da taj algoritam radi za prvih  $k$  potencija broja 2, kao i za prvih  $k$  Fibonaccijevih brojeva. Zatim smo otkrili da, ukoliko postoji protuprimjer, da je uvijek manji od zbroja dvaju najvećih novčića,  $x_n + x_{n-1}$ . Također, budući da za svaki sustav od samo 2 novčića "greedy" uvijek radi, nije potrebno provjeravati iznose manje od  $x_3$  (a i na  $x_3$  i  $x_{3+1}$  "greedy" očito radi).

Dokazali smo našu pretpostavku i dobili da je dovoljno provjeriti za iznose  $x_3 + 2 \leq y \leq x_n + x_{n-1} - 1$ . Nakon toga, odlučili smo se pozabaviti sustavima s 3 novčića, 1,  $k$ ,  $l$ . Htjeli smo odrediti neko pravilo pomoću kojeg bismo, bez provjeravanja velikog broja iznosa, mogli odrediti je li "greedy" dobar. Uočili smo da, ako je broj  $l$  djeljiv brojem  $k$ , da "greedy" sigurno radi. Tada smo, koristeći teorem o dijeljenju s ostatkom, zapisali  $l$  kao  $l = n \cdot k + r$ , gdje je  $r < k$ .

Dokazali smo da je, uz takve oznake, dovoljno promatrati iznos od  $n \cdot k + k$ , jer za sve manje iznose "greedy" radi, a za one veće koji su unutar naših granica, radi pod istim uvjetom kao i za  $n \cdot k + k$ . Dokazali smo da je taj uvjet  $n \geq k - r$ , ili  $r = 0$ .

Nastavak rada na ovom projektu odvijao bi se tako da bismo promatrali sustave sa četiri novčića, te probali donijeti neko općenito pravilo za  $k$  novčića, koje bi brzo pokazalo je li "greedy" uvijek najbolji u tom sustavu. Naravno, dobivene rezultate morali smo testirati i u praksi - u obližnjoj palačinkarnici.



## Matematika burze

Na projektu „Matematika burze“ učenici su se, pod nadzorom mentora s iskustvom rada na burzi, upoznali s osnovnim statističkim pojmovima poput korelacije i linearne regresije, te ih iskoristili da pomoću cijena srebra predvide kretanje cijene zlata. Burza je tržište koje spaja kupca i prodavatelja dionice, valute, robe ili usluge. Trgovcu je cilj postaviti kupovnu i prodajnu cijenu tako da im razlika bude što manja, a da svejedno obuhvati stvarnu cijenu. Cilj projekta je bio simulirati stvarnu situaciju na burzi kako bismo dobili uvid u način na koji burza funkcionira.

Zadatak je bio predvidjeti današnju cijenu zlata na temelju povijesnih podataka o zlatu i drugim metalima te današnjih cijena ostalih metala.

Podijelili smo se u 4 tima i simulirali burzu na kojoj timovi trguju međusobno i s botovima koje je pripremio mentor. Imali smo 7 rundi natjecanja i sve smo radili u Excelu. Timovi su istražili koji metal ima povrate (omjer nove i stare cijene umanjen za 1) najbliži zlatu te smo zaključili da je to srebro. Na povijesnim podacima o povratima zlata i srebra proveli



smo linearnu regresiju, odnosno našli smo pravac koji najbolje opisuje njihovu ovisnost. Pomoću tog pravca i današnjih povrata srebra mogli smo procijeniti današnju cijenu zlata i onda ponuditi drugim timovima i botovima da ćemo kupiti zlato malo jeftinije ili ga prodati malo skuplje.

U nekim rundama su se događali iznimni događaji – primjerice otkriće velikih rudnika zlata ili puč u državi koja izvozi puno srebra. U tim smo se situacijama naučili snaći u ograničenom vremenu u nepredviđenoj situaciji, ali smo naučili i vrlo važnu lekciju – u nedostatku pouzdanih informacija, bolje je ništa ne raditi nego pogađati što će se dogoditi. Na kraju projekta, svi su timovi završili na dobitku, a najbolje je prošao tim Tadej i Dinko.

# Titanik



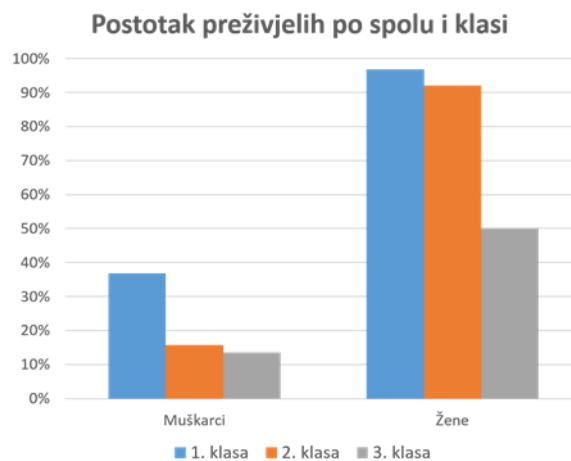
Na projektu "Titanik" učenici su se upoznali s osnovama obrade podataka, data mininga i strojnog učenja na primjeru jednog od najpoznatijih brodoloma u povijesti - Titanika. Zadatak je bio promatrati putnike na Titaniku i odrediti vjerojatnost da svaki od njih preživi. O svim putnicima bila je dana baza s podacima: ime, spol, dob, putnička klasa, luka ukrcaja, broj članova obitelji, cijena karte... Za jedan dio putnika je, uz navedene podatke, bilo poznato i jesu li preživjeli pa su učenici na temelju tih podataka nastojali razviti model koji će im reći što se dogodilo s putnicima o kojima nema podataka. Podaci putnika za koje je poznato jesu li preživjeli činili su train set, a oni za koje je nepoznato test set. Predviđanja dobivena razvijenim modelima evaluirana su na stranici *Kaggle* te su učenici na taj način dobivali povratne podatke o točnosti algoritma. Tijekom projekta razvijeno je nekoliko različitih algoritama i više verzija svakog, a točnost im se kretala od 68.425% do 77.990%.

Prvi problem s kojim su se učenici susreli bila je nepotpunost podataka. Nedostajuće podatke su pokušali dopuniti na temelju ostalih podataka ili su ih ignorirali ovisno o tome koliko ih je nedostajalo.

U jednom od modela putnike su podijelili, najprije po spolu, zatim po brodskoj klasi, te na kraju po luci ukrcaja te su na train setu izračunali kolika je vjerojatnost da osoba iz svake skupine preživi. Na temelju tih podataka su donosili odluku. Promatrali su ovisnost o samo tri podatka odjednom jer su zaključili da će im podjelom u više grupa u nekim grupama biti premalo training primjera i da rezultati koje će dobiti neće biti pouzdani.

Drugi model se bazirao na ideji da gledaju više kategorija odjednom računajući pritom vjerojatnost preživljavanja, na svim podacima, bez dijeljenja u skupine, ali su zaključili da sve kategorije ne utječu jednako na preživljavanje, pa su im pridružili različite koeficijente.

Učenike je dosta iznenadilo koliko je teško poboljšati točnost modela i za najmanju decimalu. Pokazalo se da je model koji je stavio da sve žene prežive i svi muškarci poginu imao istu točnost kao i neki mnogo složeniji modeli. Projekt je bio izrazito uspješan jer su učenici samostalno razvili modele nalik na *Decision tree* i Linearnu regresiju koji su jedni od najkorištenijih prediktivnih modela.



## Posjet muzeju

U petak, 8.1., posjetili smo „Zavičajni muzej Ogulin“, koji se nalazi u zgradi Pučkog otvorenog učilišta te „Ivaninu kuću bajki“.

U muzeju smo prošli kroz Zbirku Domovinskog rata u ogulinskom kraju te Spomen sobu poginulim i umrlim hrvatskim braniteljima, Spomen sobu Ivane Brlić-Mažuranić, Čeliju broj 6 te smo čuli o običajima ogulinskog kraja. Nakon muzeja smo u Ivaninoj kući bajki čuli od života Ivane Brlić-Mažuranić te prošli kroz interaktivni muzej bajki.



Muzej bajki

Zavičajni muzej





## Slobodne aktivnosti

Iako se na Zimskoj školi učenici intenzivno bave matematikom, njihovo je vrijeme na Školi ispunjeno i raznim drugim slobodnim aktivnostima kako bi se mogli opustiti nakon napornog rada i družiti se s prijateljima u ugodnoj atmosferi. Prvu su večer Škole svi učenici i mentori sudjelovali u zajedničkom team-buildingu u kojem su se međusobno upoznavali kroz razne igre za lakše pamćenje imena. Sredinom kampa smo proslavili Lukin rođendan te ga iznenadili s tortom od palačinki iz restorana Frankopan. Nismo ni znali da u Ogulinu postoji restoran koji nudi više od 50 različitih vrsta palačinki, ali je on vrlo brzo postao omiljeno mjesto mnogih polaznika. Osim Mafije koja se već tradicionalno igra svaku večer Škole, polaznici su ove godine otkrili igru „Resistance“ te su tako imali priliku odlaziti u imaginarne misije kako bi otkrili identitete špijuna. Osim toga, igralo se i šah, Quoridor i neke računalne igrice. Jedna od prednosti održavanja Zimske škole u Ogulinu, u srcu Gorskog kotara, bilo je i to što snijega nije nedostajalo. Učenici su imali priliku uživati u zimskim radostima. Saznali smo da neki od učenika iz Dalmacije, nikad nisu vidjeli snijeg, tako da nam je bilo pravo zadovoljstvo upoznati ih s čarima grudanja i izrade snjegovića. Posjetili smo i Muzej grada Ogulina i Kuću bajki Ivane Brlić - Mažuranić te smo prošetali gradom do Đulinog ponora gdje smo čuli i staru gradsku legendu o djevojci Đuli koja se zbog nesretne ljubavi bacila u ponor rijeke Dobre. Zadnji su dan Škole svi učenici i mentori otišli u restoran Frankopan i uživali u već spomenutim slasnim palačinkama. Vrlo je teško riječima opisati koliko su učenici (a i mentori) uživali družeći se, ali fotografije koje slijede bi mogle dočarati barem dio atmosfere na Školi.



Mafija





Dulin ponor



Grudanje



Lukin rođendan



Resistance

# MLADI NADARENI MATEMATIČARI “MARIN GETALDIĆ”

Adresa: Ksaverska cesta 13,  
10 000 Zagreb,  
Hrvatska

Telefon: 091/5872222  
092/2039888

Web: [mnm.hr](http://mnm.hr)  
[kamp.mnm.hr](http://kamp.mnm.hr)

E-mail: [mnm@mnm.hr](mailto:mnm@mnm.hr)

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje,  
slobodno nas kontaktirajte telefonski ili e-mailom.

